【討　議】

平井　敦著“変形する物体の力学に関する一考察”への討議

（土木学会論文報告集第190号，1971年6月）

討議者：佐々木道夫（新日本技研）
高尾孝二（同）

本論文では弾性学における破壊現象の説明の困難が著者の仮説への動機とされ，まず弾性学と電磁気学との融合をそれに求めておられるように見受けましたが，具体的にこの場合の矛盾とか不合理性をどのように認識されているのかよくわかりません。すなわち，方法論的にこの論文の位置づけをどのように考えておられるのかお示しいただければ，これを機会にこの方向に指向する研究者の協力も生れ有意義になるのではないかと思います。

本来，物質の世界は万有引力，電磁力，核力などの基本的な力によって支配されていますが，これらの中でも万有引力はもっとも普偏的なものです。たとえば，静電気力は電気を帯びた物体間にだけ働きしかも物体の電荷が同種であれば斥力，異種であれば引力が働く。これに対し万有引力はあらゆる物体間に働く普偏的な力であり，これらは本質的に異なったものと見なければなりません。これら本質的に異なったものを融合させるのは，一方がある1つの仮説を介して他方と形式的に一致することではなく両者が止揚された位置ではじめて統一されるのが論理的帰結ではなかろうかと考えます。

上記の見解に対し著者のご意見を賜りたいと存じますさらに，本論文の具体的な点につきましては以下のような疑点をもちますのでご教示いただきとうございます。

1. 弾性定数について

著者は第1章で「直応力σやせん断応力などにこだわらずに一応これらは便宜上思考されたものと取り扱ってみてこの概念から遠ざかって考えなおすと……」と述べられていますが，われわれは弾性定数を，まず応力とひずみを定義し，これらを関係づける物質固有の定数として理解しています。もしこのような立場をとらないとすれば弾性学の基本式はどのような考察から誘導されるのでしょうか。また基本式中の弾性定数 G, λ は本論文ではどのように定義されるのでしょうか。式(3.31)がG, λの定義のように見受けられますが式（3.28）と式（3.1）が異なっており，しかも式(3.28)が式（2.6）と同じであるから式（3.31）は定義式ではなく式（2.3）および式（2.10）の書替えに過ぎないと思います。

2. 仮説 式（2.2）について

φ は重力場だと述べられていますが弾性体内部の相互作用なのか，地球の場なのか明らかでありません。前者ならその他の無視した微小量よりさらに小さいのではないでしょうか。後者なら式(2.2)は間違いではないでしょうか。そこで一応重力のことは考えないで式(2.2)をφ の定義式と考えることにし，φ：スカラーポテンシャル，$\boldsymbol{S}$：ベクトルポテンシャルとし式（2.2）をgang条件と考えれば電磁場との類似が成立つように思います。

3. 式（2.6）および式（3.1）について

式（3.1）と式（2.6）とが異なるのはなぜでしょうか。もし φ が式（3.1）のとおりであるとすれば内部エネルギー中には $\partial S_i/\partial x_i=u_{ii}$ の形の項が入らないことになる（$\boldsymbol{W}$の中には $\partial S_i/\partial x_k$, $i \neq k$ の形の項のみある)。一方，式（2.2）の φ に対しては div $\boldsymbol{S}$ を含んでいる。また，第3章（4）では φ がふたたび式（3.28）の形（式(2.6）と同じ形）で入っています。これは明らかに矛盾しています。さらに第3章は，上記2式の違いを除けば第2章の書き直しに過ぎないように思います。このような矛盾の原因は，スカラーポテンシャルφの概念が明確にされていないことすなわち仮説式(2.2)にあるように考えられます。

4. 定数 ε, C について

第2章で導入された物体に関する定数“ε”はどんな意味をもつものでしょうか。第4章で万有引力定数の逆数に相当するもので物質により異なると述べられていますが，万有引力定数は物質によらない定数です（$6.67\times 10^{-8}\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{sec}^{-1}$）。

また，式（3.5）の物質の種類によらない定数“C”とはどんな定数でしょうか。式（2.10）で定義したCと同じものとすれば式（2.10）は G, ρ など物質固有の定数を含んでいます。もし別のものとすればいかなるものでありその値はどのようにして決まるものでしょうか。

参考文献

ランダウ，リフシッツ（広重　徹・恒藤敏彦訳）：場の古典論，東京図書

【回　答】

回答者：平　井　敦（正会員）

1. 序　言

筆者の小論について討議を頂いたことを深く喜びとするものであります。それは妄想と評される虞が多分にある小論[1] に関心を示して頂いたことに対する筆者の感謝の言葉であります。46年6月に不完全な形で，またやや常識に沿わないような論を述べたのは，それを試みなかったために工学上失うことがあるかもしれないことをおそれたためであります。しかしこれが疑似科学的な言語で語られた妄想であったならば，貴重な紙面をけがした罪は死に値するものと感じます。

すでに 19 世紀の終り頃には，Maxwell の方程式に力学的な説明をしようとするあらゆる努力は何の甲斐もないものであることが確認（？）されていたことは，周知のこと[2] であろうと存じます。それをあえておかしたということになりそうです。しかしある一つの考えが直観的，無媒介的に着想されることがあり，その実証に時間を要する場合もあるかもしれません。筆者の試みる一つの読み替えにしばらく耳をかして頂きたいと思います。

2. 弾性学との関連について

ある一つの Tensor $\mathfrak{T}$ の発散の分素は Vector を構成するが，これを

$$\mathrm{div}_x\,\mathfrak{T}=\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}=\boldsymbol{T}_x$$

$$\mathrm{div}_y\,\mathfrak{T}=\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial z}=\boldsymbol{T}_y$$

$$\mathrm{div}_z\,\mathfrak{T}=\frac{\partial T_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}=\boldsymbol{T}_z$$

とする。いま一つの閉曲面 F を考えて，その内部の体積に Tensor $\mathfrak{T}$ の発散を積分する。この曲面 F の面積素片 df の外向法線の方向の単位 Vector を $\boldsymbol{n}$ とすると，周知のごとく次の関係式がある。

$$\int \mathrm{div}\,\mathfrak{T}\,dv=\int(\mathfrak{T}\boldsymbol{n})\,df\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

この式がわれわれに語る内容は「曲面 F の範囲内の物体に働く物体力 $\boldsymbol{T}$ はその境界面における面力（$\mathfrak{T}\boldsymbol{n}$）と考えてもよく，また単位体積に働く div $\mathfrak{T}$ なる Volume-force と考えてもよい」ということである。この考えは筆者に強い影響を与えるわけである。この考えを筆者の小論の式〔3.33〕[3] に適用すると

$$\boldsymbol{T}=G[\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{S}+\nabla^2\boldsymbol{S}]+\lambda\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{S}\cdots\cdots(2)$$

この式の右辺のような Volume force と等価な surface stress を考えてみようということである。上式の x 成分は，

$$\begin{aligned}T_x&=G\left[\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 S_z}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial z^2}\right]+\lambda\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,S)\\&=G\left[2\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial S_x}{\partial z}+\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\right]+\lambda\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{div}\,S)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[2G\frac{\partial S_x}{\partial x}+\lambda(\mathrm{div}\,S)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[G\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[G\left(\frac{\partial S_x}{\partial z}+\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\right]\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\left.\begin{aligned}t_{xx}&=2G\frac{\partial S_x}{\partial x}+\lambda(\mathrm{div}\,S)\\t_{xy}&=G\left(\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial x}\right)\\t_{xz}&=G\left(\frac{\partial S_x}{\partial z}+\frac{\partial S_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

ただし，t_{xx}, t_{xy}, t_{xz}，……などは Stress Tensor $\mathfrak{T}$ の成分である。すなわち，

$$\mathfrak{T}=\begin{bmatrix}t_{xx}&t_{xy}&t_{xz}\\t_{yx}&t_{yy}&t_{yz}\\t_{zx}&t_{zy}&t_{zz}\end{bmatrix}$$

Volume force $\boldsymbol{T}$ と等価な surface stress（3）が Stress Tensor $\mathfrak{T}$ であるとしたところまでが，筆者が弾性学に近づいた限界でそれ以上のことはいまのところかかわりあいはない。なお，Stress Tensor を微小六面体についての面力などとみなすということはこの段階では考えていないわけで，あくまでも等価な surface stress ということである。式 (3) の導入過程で筆者が感じたことは，従来の σ-τ の概念はやはり便宜上思考された概念と思ってもよいということで，必ずしもこの概念に執着しないでもよろしいのではないかと考えるわけである。

内科医は身体内部に原因のある疾患を身体表面からの諸観察で探ることがある。弾性学が破壊現象と取りくむ態度はちょうど上記の手法に似ている。もっと別な方法はないものであろうか。式 (1) の右辺によるやり方に反逆してみるということは少なくとも試みる価値はありそうである。特に弾性学は事象を無理をして主として静的な状態でとらえている。といって時間要素をこの体系

1) 土木学会論文報告集第 190 号，1971 年 6 月 p. 1
2) A. Sommerfeld 島内訳：変形体の力学，p. 118
3) 以後カッコ〔　〕で示す式は脚注 1) の筆者の論文の番号を示すものとする。

に持ち込む努力は塑性論の現況をみると躊躇せざるを得ない。特に Energy 消費の概念が不十分である。Fatigue test の発熱現象をどのように説明したらよいのであろうか？

弾性学の破壊現象へのとり組み方の矛盾とか不合理性をどのように認識しているかを具体的に示せとの要請を受けたので以上申し述べたが，実はこのことへの完全な答案は論より証拠で別な理論を組立てるなり，別な考え方を提示することにあると思う。

筆者の目標は従来とは異なった考え方でわれわれの周囲の現象を説明し得られないか。その結果従来の理論で説明が不十分であったものが明らかにならないかというところにある。

討議者はまず応力とひずみを定義し……といわれているが，これは従来の考え方で，この種の概念から遠ざかることが筆者の努力の主要な部分なのである。ひずみという現象はさておき，応力は既述のごとく便宜上思考されたものであると考えた。元来力とは運動やひずみがいかに起こるかをいい表わすために思考されたいわば補助構成概念にすぎない[4)]。

討議者は弾性学の基本式を誘導せよといわれるが，弾性学の立場を否定するところから出発しているので，式(3) まで近づいただけである。

異なった見方をしてみて得られた成果を実際の現象と照合することが大切であって，弾性学という物指しで評価しようとする態度は発展をはばむ要因で，自然そのものにきくよりほかに手はないと筆者は感ずる。

第2章と第3章との関係について附言したい。第2章では式〔2.1〕から2つの基本式〔2.17〕，〔2.18〕が生まれる道筋を示してみた。そして Vector $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{W}$ とが主役にならざるを得ないのではないかと筆者自身はこれでやっと納得した次第である。書きなおしであるといわれるが，別の言葉にいいかえるということにも意味があるときがある。たとえば積分表示と微分表示のごとく。この討議の答では第3章を主体にしてお答えする。第3章は電磁気学流な書き方にしてあるが，これは工学的に利用するのにこの方が便利であろうと考えたからである。その代りに Energy 密度を式〔3.3〕，〔3.4〕

$$U_R=\frac{\varepsilon}{8\pi}R^2 \qquad U_W=\frac{\mu}{8\pi}W^2$$

のごとく天下り式に仮定するという飛躍を劈頭において，論を進めてある。

3. 逆二乗法則の場

筆者は不用意に物質は重力場のなかにあると漠然とした表現を使ったが推考が不足していた。二つの質点の間に働く力がそれらを結ぶ直線の方向に向いていて，その大きさが2点間の距離の二乗に逆比例する法則が支配する場を仮に逆二乗法則の場と称する。われわれがこの小論で対象とする物質（物体）は上記の場にあるとする。この場を万有引力の場と考えれば，重力場と呼んで差し支えないようであるが，先入観を排除するために暫定的に別な表現をわざと使用する。

討議者は筆者が一つの仮説を介して電気力と万有引力とが形式的に一致することを示したと解しているようであるが，よく読まれれば明らかなように仮設〔3.30〕をおけば〔3.32〕なる弾性論の基本式が得られることを示しただけで，弾性論の存在を気にしなければ第4節などは書かなくともよいわけである。筆者の基本的な見解は，物質は前記逆二乗法則の場にあるという点を再確認するだけである。したがって万有引力と電気力とが同じなものと主張などはしていない。並列して存在するものと解したい。筆者が行なったのは，電気力との類似をたどったのである。Feynman が指摘するごとく[5)] 類似をたどるのは自然の振舞いを推測する一つのてっとり早い方法である。

Max Planck の言葉を引用したが，ある一つの世界観を筆者が持っていることは事実である。――ここでは関係のないことであるが――整合性，完全性というようなものを細い導きの糸として何か体系を探るということも，危なげに見えるけれど一つの研究態度ではなかろうか！

式〔3.30〕

$$\dot{\varphi}+\frac{1}{T}\varphi=-\left(\frac{C}{\varepsilon}+r\right)\operatorname{div}\boldsymbol{S} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

なる仮説の導入により弾性論の式〔3.32〕が得られることよりも，筆者はこの仮設により波動伝播速度として式〔3.36〕，〔3.37〕の2種類が出現することの方を重視したい。式(4) がなければ

$$V_1=\frac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

だけになるが，それでは現象に合わないこととなる。また式〔3.31〕で弾性定数を定義したわけではない。従来とは異なった考え方をしても，物体を伝わる波動に関する式はいままで通りの形式を持っていなければおかしいと考えたわけで，式〔3.31〕のようにおくと従来のと同じ形式の伝播式になる。

この節の最初に述べたごとく，物質（物体）は逆二乗法則の場にある。このとき式〔3.1〕のごとく Potential 関数 φ が考えられる。物質内部の相互作用は無視することにするので，式〔3.27〕または〔4.11〕の条件を挿入するわけである。物体内部の物質への地球重力の影響も

4) 石原　純：理論物理学，p. 49

5) 江沢　洋訳：物理法則は如何にして発見されたか，p. 84

いまは考えない。原論文の図—5のごとき逆二乗法則の場が筆者の考察の対象である。重力という言葉を原論文で不用意に使ったので討議者をまどわせたことをお詫びする。したがって式〔2.2〕についての疑念を解消されたことと思う。だからといって，筆者の仮説は妥当である等とは主張しない。原論文では抜けている次式をこの際追加したい。

$$\ddot{\varphi}+\frac{1}{T}\dot{\varphi}=\frac{C^2}{\varepsilon\mu}\nabla^2\varphi \cdots\cdots(5)$$

次に定数 ε について述べる。万有引力の式は教科書をひもとけば

$$\boldsymbol{F}=\gamma\frac{m_1m_2}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と与えられている。γ は物質によらない定数であるが，地球と月との間が寒天で詰まっていたらどのようなことになるかと妄想を描いてみる。測定法はわからないが，γ の値は違った値とならないか？　とに角反逆してみてどんな不都合が起こるか試みる価値はありそうだ。

$$\boldsymbol{F}=\frac{m_1m_2}{\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$$

とおいてみると，ε はこの空間を満たす物質に関する定数と考えざるを得ない。——筆者の考えのチェックは実験的にこの点からできるはず。水銀槽の中ででも——したがって m_1 より距離 r だけへだたった点の力場の強さ $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R}=\frac{m_1}{\varepsilon r_3}\boldsymbol{r} \cdots\cdots(6)$$

この式を Coulomb の式と考えると，ε の量性を0と考えたくなるのが人情である。電磁気学の教科書にはそう書いてある。そして静電単位系が生まれる——筆者も長いこと，そのような考えにとりつかれてここから一歩も進めなかった。空費された長い月日の後に，ε の量性を万有引力の恒数の逆数と考えることにより砂地獄より脱出し新しい進展が得られたと思っている。とに角従来の見方に執着しないで，常識を一度否定してみるのも一方法ではなかろうか。この際ついでに，$\varepsilon=\infty$ という性質の物体を剛体と定義する。この物体の内部では $R=0$ である。

式〔3.5〕をはじめとし式〔3.36〕等に物質の種類によらない定数 C を導入してあるが，ある特別な空間では V_2 は存在しないで，V_1 のみとなりその場合

$$V_1=\frac{C}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

が光速度になるのではないかという妄想を抱いているわけである。しかしこれは一工学者が議論すべきものではないと考え，何も説明しなかった次第である。

4. 質量について

式〔3.25〕

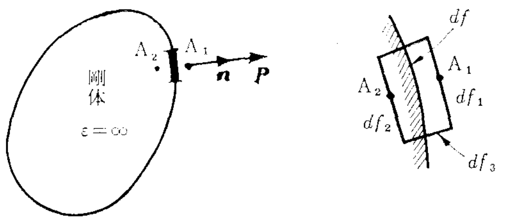
$$M=\sum^{n} m_i=\frac{\varepsilon}{4\pi}\int(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n})df$$
$$=\frac{\varepsilon}{4\pi}\int(\mathrm{div}\,\boldsymbol{R})dv \cdots\cdots(7)$$

によって質量を定義したことになるが，式〔3.24〕

$$\frac{\mathrm{div}\boldsymbol{P}}{4\pi}=m$$

の m は式〔2.1〕または式〔3.31〕の中にある物体の密度 ρ に等しいものと考えたい。一方的宣言ではあるが。

次に式〔3.23〕の重荷 w について補足したい。変形する物体（以後単に物体と称する）の内部に剛体があるものとする。その表面の面積素片 df，重荷分布を w とする。df にきわめて接近した2点，A_1，A_2 を図—1のごとく考える。



図—1

A_1, A_2 点を通り図のような微小円筒体について式 (7) の積分

$$\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{Pn})df$$

を考えると，

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{Pn})df_1-\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{Pn})df_2+\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{Pn}_3)df_3$$

第3項の df_3 は帯状部の面積で，この部分の垂直単位 Vector を n_3 とする。$A_1A_2\to 0$ とすると

$$\frac{df_3}{df}\to 0$$

ゆえに第3項は0。第2項は剛体の内部の項であるが，内部では $P=0$ ゆえこの項も0である。残りは第1項である。

剛体の表面は equipotential surface でなければならないと考えると（これも新しい宣言となるが）A_1 点における力場強度 $\boldsymbol{R}$ も $\boldsymbol{P}=\varepsilon\boldsymbol{R}$ も df に垂直である。第1項が関連している部分の重荷は，A_1 が df に近づけば wdf である。ゆえに式 (7) により

$$w=\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{Pn})=\frac{\varepsilon\boldsymbol{R}}{4\pi} \cdots\cdots(8)$$

すなわち剛体の表面にきわめて近い点の力場 $\boldsymbol{R}$ はその点に近い表面における重荷分布の面密度によって決定されその大きさは $(4\pi w/\varepsilon)$ に等しい。

5. 力場 $\boldsymbol{R}$ について

原論文で力場 R は加速度の量性を有することを示したが，$\dot{R}$ とか $\ddot{R}$ という物理量が何であるか筆者にはわからないと述べた。ところが R だけを取り出さずに $\varepsilon\dot{R}$, $\varepsilon\ddot{R}$, すなわち $\dot{P}$, $\ddot{P}$ として考えれば意味があることにその後気づいた。その量性は

$$[\dot{P}]=[\varepsilon\dot{R}]=\frac{ML}{T}\cdot\frac{1}{L^3}$$

で，単位体積当りの運動量である。したがって $\ddot{P}$ は運動量の変化である。力という概念が姿を表面上消した代りに，筆者の理論では運動量と式 (7) で定義された質量とが主役を務めることになりそうである。

したがって式〔4.18〕型のいわゆる電信方程式を運動量に関する初期条件を満足するように解くということが次の課題であるが，その前に検討しなければならない問題が山積している。まず静的事象から進むべきであろう。

なお，詳述しないが Energy の消費に関係する式〔3.13〕で規定される Vector $\mathfrak{F}$ も単位体積当りの運動量である。

次に力場 $\boldsymbol{R}$ の静的事象について述べる。この部分は式〔3.1〕と式〔3.28〕との関係についての質問への答でもある。

物体内の状態が時間とともに少しでも変化するような箇所がどこにも存在しない場合を考察の対象とする。時間 t についてとった微分係数はすべて 0 でなければならないので式〔3.15〕,〔3.16〕より

$$C\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}-4\pi\mathfrak{F}=0$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{R}=0$$

静的状態のために満足すべき条件はこれだけではない。もし物体内で式〔3.6〕の $k\boldsymbol{R}^2$ なる量が 0 でないような場所が存在するならば，そこでは Energy の消費が行なわれ物体内では状態の変化が起こる。ゆえに静的状態であるための条件としては $k\boldsymbol{R}^2$ のうちの k かあるいは $\boldsymbol{R}$ のいずれかが 0 であることが必要。すなわち有限の静的な力場は $k=0$ の物体内においてのみ可能である。また $\mathfrak{F}$ なる量も 0 である。ゆえに

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}=0$$

静的な状態では力場 $\boldsymbol{R}$ と渦場 $\boldsymbol{W}$（ひずみ場と呼ぶ方がよいかも知れないが）とは無関係であるということになるが，変形する物体に現われる現象をうまく説明し得られるか否か今後の研究課題の一つである。

力場の静的状態に対しては rot $R=0$ であるから R は Potential を持っている。すなわち式〔3.1〕が登場する。したがってこの式は静的状態の場合を記述するもので，時間的に変化する場合には式〔3.28〕が責任者である。

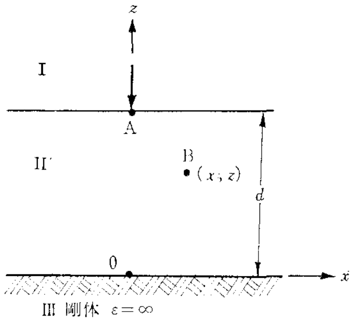
式〔3.30〕または式〔2.2〕は本編の式 (4) であるがこれも静的状態の式ではない。式〔3.1〕等が成立すると，力場 R に関する問題は周知のごとく Laplace の微分方程式

$$\nabla^2\varphi=0\cdots\cdots(9)$$

等のやっかいになることとなる。したがって Green の定理を利用して解法を求める機会が多くなることとなろう。そして局所的に問題を処理し得られる。

6. 半無限体への集中載荷

図—2 に示すような場合について筆者が意図しているところの一端を示したい。いま図のごとく I, II, III という異なる物質が境を接している。



図—2

IIIは剛体，IIは一様に物質定数 ε を持つ物体で，Iは空気で満たされた空間とする。IIとIとの境界面上の一点 A に質量 M を置こうとするのであるが，これは集中荷重に相当する。質量 M がおかれる以前にIIが地球の重力より受けた過去は問題外としている。厳密な考察ぬきで，IはIIの内部の力場に影響を与えることが少ないと考える。

一般にこの種の問題では Laplace または Poisson の方程式を出発点とする。IIの物体内部の物質同士の相互作用を無視して div $R=0$ と仮定するので，この場合 Laplace の方程式が主役である。Laplace の式は一様な ε を持つ力場内の一点において，静的状態の力場が満足すべき条件を示すものである。異なる ε を持つ物質との境界面，あるいは剛体との境界面では式〔3.18〕,〔3.19〕なる境界条件を満足しなければならない。また剛体の表面は equipotential surface となるものとする。

最初の 2 つの条件は物質 I とIIとの境界面で

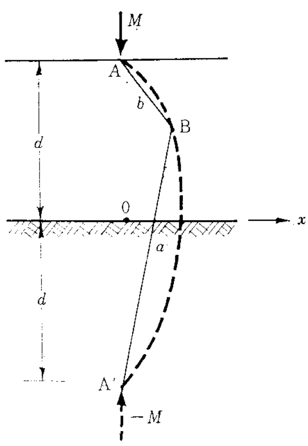
① $P_{n1}+P_{n2}=0$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_1}+\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_2}=0\cdots\cdots(10.1)$$

② $R_{\tau1}=R_{\tau2}\cdots\cdots(10.2)$

τ は境界面に沿った切線の方向

これらの条件を満足する Laplace の方程式の解を求めるのであるが，電気磁気学での影像法 (Image method) なる手法[6]を利用することに気づけば簡単に取り扱える。



図—3

いまの場合図—3のごとくわれわれが考察の対象としている物体はⅡであるが，$Z=0$ なる面について鏡像点 A' に便宜上 M と反対符号の質量があるとして，A と A' 点の質量が互いに引力をおよぼし合っているものと想像してみる。この状態の解はⅡに関する限り Laplace 式を満足し，かつ式(10)の条件をⅡ～Ⅲ境界面で満たすことがわかる。

この種の問題の解は

$$\varphi=\frac{M}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-z\lambda}J_0(\lambda x)\,dx$$

という型であるが，直観的には次のように取扱う方が理解しやすいと思われる。図—3 の記号を用いて

$$\varphi=\frac{M}{\varepsilon}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=\frac{M}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{(d-z)^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{(d+z)^2+x^2}}\right]$$

$$[R_z]_{z=0}=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}$$

$$=-\frac{2Md}{\varepsilon(d^2+x^2)^{3/2}}$$

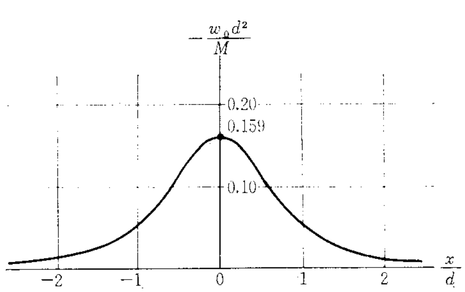
式 (8) により境界面Ⅱ～Ⅲ上での重荷 w_0 を求めると

$$w_0=\frac{\varepsilon}{4\pi}[R_z]_{z=0}=-\frac{Md}{2\pi(d^2+x^2)^{3/2}}\cdots(11.1)$$

$$-\frac{w_0d^2}{M}=\frac{1}{2\pi\left\{1+\left(\frac{x}{d}\right)^2\right\}^{3/2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11.2)$$

式 (11.2) の結果を図示すると図—4。

以上は二次元的に考えたが，三次元的に考えて，この境界面上の重荷を全表面に積分すると



図—4

6) 谷 安正：静電場，p. 45

$$\int_0^\infty w_0\cdot 2\pi x\cdot dx=-Md\int_0^\infty\frac{x\cdot dx}{(d^2+x^2)^{3/2}}=-M$$

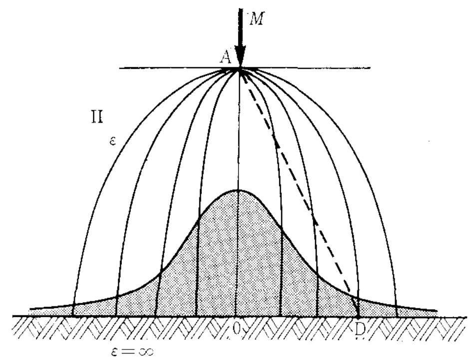
すなわち境界面上の全重荷の積分は $-M$ である。

w_0 は静電場の力学では M によって静電誘導された電荷であるが，筆者はこれを載荷 M による反力と飜訳するわけである。「作用あれば反作用あり」であるが，M なる載荷により反力が誘起され，その伝達は有限の速度で行なわれる。

式 (11.2) の w_0 および M は質源であるが，これにそれぞれ地上の重力 g を乗ずれば式 (11.2) の左辺は

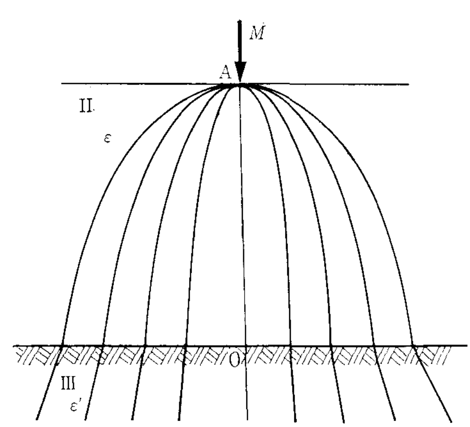
$$-\frac{w_0d^2}{M}=-\frac{w_0g\cdot d^2}{Mg}\equiv-\frac{\sigma d^2}{P}$$

と書き替えられるので，σ は載荷 P による剛体面反力という感じがしてくる。その反力は A 点と境界面上の着目点 D との距離の三乗に反比例する（図—5 参照)。



図—5

以上は物質Ⅲが $\varepsilon=\infty$ なる剛体の場合であるが，Ⅲが定数 ε' という物質の場合には R の流れを示す力線はⅡよりⅢへ入るとき式 (10) なる条件に従って屈折し，この境界面反力は式 (11) とは異なることとなる。そのときの屈折の仕方は ε と ε' との関係によって異なる。この場合の影像の考え方は電磁論の教科書を見ればおわかりと思う。



図—6

この簡単な例で，筆者の抱いている φ の概念をお伝えできたのではなかろうか。

7. 結　語

以上筆者の小論に対する討議にお答えしつつ，筆者の考え方を補足した次第である。しかし筆者の考え方がこれでよいのだとは筆者自身夢にも思っていない。多少 Crazy な面もあろう。いまなお彷徨している原野が多く残されていることは事実である。完全な姿は一度に生まれるものではない。それに到達する以前に長い前過程があり，その過程が Speculation の時代であるということも筆者は心得ている。あるいは妄想であるのかもしれない。

筆者の考え方の最大の欠点は現実に現象として認識される変位 $\boldsymbol{S}$ が $\boldsymbol{W}$ の中に埋没してしまっていることである。静的事象では R と W とは無関係である。自然はそうなのかもしれない。動的の間だけ R と W とがからみあって，平衡して静的状態になれば無縁となる。——弾性論では元来動的なものを静的の形として無理にとらえているのかも知れない。暴言多謝。

そもそもなぜかわからないが，Vector field における div. と rot. とに筆者が美を感じたことが根底にあるような気がする。そして一つの見解が方向をきめたことになる。しかしこのような考え方が，工学研究において問題の選び方，問題の把握の仕方，問題の発展の仕方などに参考となるかもしれない。ロゼッタ石の文字の解読を誤ったとしても，それならば筆者のいさみ足は許されるかもしれない。