

粘弾性地山の応力緩和による円形トンネルの覆工土圧

EARTH PRESSURE ON CIRCULAR TUNNEL LINING DUE TO STRESS
RELAXATION IN VISCO-ELASTIC GROUND

村山 朔郎*・藤本 徹**

By Sakuro Murayama and Toru Fujimoto

1. ま え が き

粘性土中にトンネルを構築する過程の中で、トンネル開削面の動きに注目してみよう。一般に地山の開削面は覆工が完成するまでの間は、全く無支持のいわゆる完全な素掘り状態か、坑内に封入した圧縮空気圧でおさえられるか、あるいはある間隔に建てた支保工で支持される。支保工を設置する場合でも、設置前にはいくらかの無支持ないし不完全な支持期間があり、また支保工設置後も地山の露出部や薄い矢板で覆れた部分などがあるため開削面はかなり動きやすい。シールド工法の場合では、シールド推進後露出した開削面は覆工背面の空げき充填が完了するまでは常圧または圧気下で素掘り状態にある。このようにトンネル開削面は覆工完了までは、無支持ないし不完全な支持状態におかれるので、その間粘性土地山はクリープ変形をして開削面はトンネルの内方に向かって流動する。ついで覆工が設置され、その背面空げきの充填が完了すると開削面の流動がとめられるので、地山の変位も抑制される結果、地山の土には応力緩和が生じ、覆工には地山の応力緩和による土圧が発生する。

覆工に生ずる土圧すなわち覆工土圧の様相は、トンネル開削によってトンネル周囲の地山に粘土の上限降伏値を超過するせん断応力が発生するかどうか、したがって地山に塑性領域が発生するかどうかでも異なるが、ここでは塑性領域の発生しない場合のみを扱うこととする。また覆工土圧は、トンネル開削によって地山中に発生する平均有効主応力が地山粘土の先行圧密応力より大きくなるか小さくなるか、すなわち地山に脱水圧密か吸水膨張が生ずるかどうかによっても影響をうける。

粘土地山の応力緩和に基因するトンネル土圧については、いままでいくらかの研究¹⁾があるが、それらの多く

は掘削過程に素掘り時のクリープ現象の存在することを無視しているか、粘土のレオロジー特性に実際と若干合致しない力学特性を用いているようである。実際のトンネルでは覆工設置までにクリープ過程が現実存在するために、覆工土圧は覆工を掘削直後に設置するのに比してかなり減少しているはずである。ゆえにここでは粘弾性特性をもつ地山中にトンネルを構築する場合、掘削過程での開削面の状況変化を考慮して、素掘り期間の存在、坑内圧気圧の加除、覆工の剛度などに実際の施工条件を導入して地山の応力緩和に基づく覆工土圧を解析することとした。

ここで用いた条件と概要は、

(1) 地山は Dilatancy のない一様な粘弾性体とする。通常の粘土のせん断ひずみ特性は粘土に加えられるせん断応力だけでなく、その平均有効主応力の大きさによっても支配されるが、ここでは地山中に生じる平均主応力の変動 σ_m は小さいとして σ_m のせん断ひずみに与える影響を無視して、粘弾性体のせん断応力 τ に対するレオロジー的挙動は粘土骨格に rate-process を適用して誘導された図-1の力学モデル²⁾で示されるものとした。ここに spring G_1, G_2 はせん断弾性係数、slider τ_0 は下限降伏値に等しい内部摩擦抵抗で、いずれも粘弾性体に圧密や破壊が生じないときは一定値である。 η_2 は次式で示す非ニュートン粘性をもつ dash-pot である。

$$\eta_2 = \frac{\tau_2}{2 A_2 \cdot \tau_{20} \cdot \sinh(B_2 \tau_2 / \tau_{20})} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 A_2, B_2 はレオロジー定数で圧密や破壊のないときは応力・ひずみには無関係である。また τ_2, τ_{20} はそれぞれ dash-pot にかかる荷重およびその初期値である。この力学モデルを用いて粘土のクリープや応力緩和の挙動はすでに解かれているが²⁾、ここでは粘土を一定期間クリープさせた後、そのままの変形にとめて応力緩和過程に移行させたときの挙動を新たに解明することとした。

* 正会員 工博 京都大学教授 防災研究所

** 正会員 工修 京都大学防災研究所受託研究員

(2) 覆工土圧の基本的な関係をみる目的で、主として村山はまず等方圧をうけている粘弾性地山に半径 a の円形トンネルを構築する場合を扱った。ここでは、掘削は素掘りで進め、あたかも圧気シールド工法のように、開削後 t_c 時間の間は開削面には支保工を設置せず、坑内に湧水防止の目的で入れた圧縮空気の圧力によって内面からおさえるのみとし、開削面のクリープを許すこととした。 t_c 時間後に圧気中で一様な厚さの弾性リングの覆工を地山開削面に密着するように設置し、設置完了と同時に圧気を除去して坑内を常圧に復することとする。その後は地山の变形が抑制されるため応力緩和による覆工土圧が発生し経時増加する。

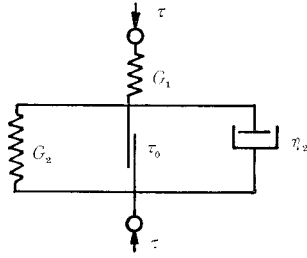


図-1 粘土の力学モデル

(3) さらに実際の条件に近づけるため、重力のある水平表面をもつ半無限粘弾性地山中のあまり浅くないところに円形トンネルを常圧下で掘削した場合について前項と同様の方針で解析した。

2. クリープ後に応力緩和過程に移行した粘土の挙動

(1) 力学モデル

半無限粘弾性地山中に円形トンネルを開削した場合、トンネル開削のために地山に発生するせん断応力が粘土の上限降伏値以下のときは地山のクリープ変形や応力緩和に基づくトンネルの变形や覆工土圧の経時変化は前述の図-1の力学モデルを用いて解析することができる。そのためまずこの力学モデルの特性と挙動について述べる。

一般の粘土においては図-1の力学モデル中のスライダ要素 τ_0 の値は G_2, η_2 から生ずる変形抵抗に比べてきわめて小さいから、ここではこれを無視して、 G_1, G_2, η_2 からなる3要素モデルを用いる。この3要素力学モデルの全体のせん断ひずみを r 、独立スプリング G_1 のひずみを r_1, G_2 と η_2 からなる modified Voigt 要素のひずみを r_2 とする。また式(1)中、 $B_2 \cdot \tau_2 / \tau_{20}$ が次の式(2)の範囲では $2 \sinh(B_2 \tau_2 / \tau_{20}) \doteq \exp(B_2 \tau_2 / \tau_{20})$ と近似することができる。

$$B_2 \tau_2 / \tau_{20} \geq 2 \dots\dots\dots (2)$$

ゆえに式(2)の範囲では、この力学モデルの時間 t に関する挙動は次式によって表わされる。

$$\left. \begin{aligned} r &= r_1 + r_2, & r_1 &= \tau / G_1, \\ \frac{dr_2}{dt} &= A_2 \cdot \tau_{20} \cdot \exp\left(B_2 \frac{\tau_2}{\tau_{20}}\right), & \tau_2 &= \tau - G_2 \cdot r_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

τ_2 が式(2)の範囲を越え、 $B_2 \tau_2 < 2 \tau_{20}$ となり、かつ十分に時間が経過すると、 $\tau_2 \rightarrow 0$ となるから、 r は次式の r_∞ に限りなく近づく。

$$(r)_{t \rightarrow \infty} = \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) \cdot \tau \equiv r_\infty \dots\dots\dots (4)$$

(2) クリープ特性²⁾

変形が安定しているいわゆる新鮮な粘土に一定のせん断応力 τ を与えたときの正常クリープは式(2)、(3)、(4)を τ 一定の条件で解いたときの r と t の関係で与えられる。式(2)の条件は r に対しては次式で示される。

$$\frac{r}{G_1} + (B_2 - 2) \frac{\tau}{B_2 G_2} \equiv r_b \geq r \dots\dots\dots (5)$$

r が上式のように $r \leq r_b$ であれば式(3)の解は、

$$r = \left\{ \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{B_2 G_2} \log(A_2 \cdot B_2 \cdot G_2 \cdot t) \right\} \cdot \tau \dots\dots\dots (6)$$

また、 $r > r_b$ の範囲でしかも $t \rightarrow \infty$ になると、 r は式(4)のように $r \rightarrow r_\infty$ となる。すなわちひずみ r は図-2(a)の実線のように r_b までは式(6)の示すように $\log t$ に比例して増加し、その後 r の増加速度は漸次減少しつつに停止して r_∞ となる。

このようなひずみの経時変化を粘土のみかけせん断弾性係数の変化で示すと、クリープ中の弾性係数を $G_c, t \rightarrow \infty$ において到達する G_c の値を G_∞ とすれば、

$$r = \tau / G_c, \quad r_\infty = \tau / G_\infty, \quad 1/G_\infty = (1/G_1) + (1/G_2) \dots\dots\dots (7)$$

r と r_∞ の関係は式(4)、(6)、(7)を比較して、

$$\left. \begin{aligned} r &= (G_\infty / G_c) r_\infty = (a + b \log t) r_\infty \equiv \phi(t) \cdot r_\infty \\ \text{ここに、} & \phi(t) = a + b \cdot \log t (\leq 1), \quad [\phi(t)]_{t \rightarrow \infty} = 1, \\ a &= \left\{ \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{B_2 G_2} \log(A_2 \cdot B_2 \cdot G_2) \right\} G_\infty, \\ b &= \frac{1}{B_2 \cdot G_2} G_\infty \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

$$\therefore G_c = \frac{G_\infty}{\phi(t)}, \quad G_\infty = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \dots\dots\dots (9)$$

(3) 応力緩和特性²⁾

新鮮な粘土に一定ひずみ r_0 を与えてそのひずみに拘束したとき、拘束応力の緩和特性はひずみ r 一定(すなわち $r = r_1 + r_2 = r_0$) の条件で式(3)、(4)を解いて求められる。式(2)の条件は τ に対しては次式で示される。

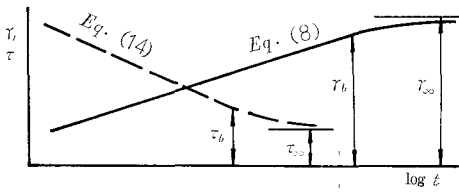


図-2 (a) 粘土のクリープと応力緩和曲線

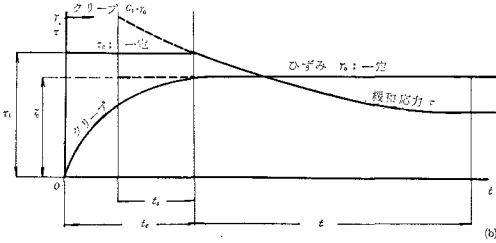


図-2 (b) クリープ過程後の応力緩和曲線

$$\frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \left(1 + \frac{2G_1}{B_2 \cdot G_2} \right) \tau_0 (\equiv \tau_b) \leq \tau \dots\dots\dots (10)$$

上式の範囲では緩和応力 τ は式(3)より次のようになる。

$$\tau = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \left[1 - \frac{G_1}{B_2 \cdot G_2} \log \{ A_2 \cdot B_2 (G_1 + G_2) t \} \right] \tau_0 \dots\dots\dots (11)$$

τ が式(10)の τ_b 以下に減少し、かつ $t \rightarrow \infty$ では、

$$(\tau)_{t \rightarrow \infty} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \tau_0 \equiv \tau_\infty \dots\dots\dots (12)$$

すなわち拘束応力 τ は図-2 (a) の点線のように τ_b までは $\log t$ に比例して減少し、その後 τ の減少速度は漸次低下しついに停止して τ_∞ となる。

新鮮な粘土の弾性係数は応力緩和の初期 ($t=0$) では G_1 であるが、応力緩和中は式(11)より求められる (τ/r_0) ($\tau/r_0 = G_r$ と記す) で示され、 $t \rightarrow \infty$ の終局時には式(12)が示すようにクリープ過程の終局値 G_∞ と同値になる。すなわち、

$$\tau = G_r \cdot \tau_0, \quad \tau_\infty = G_\infty \cdot \tau_0 \dots\dots\dots (13)$$

τ と τ_∞ の関係は式(11), (12), (13) を比較して、

$$\tau = (G_r/G_\infty) \tau_\infty = (a' - b' \log t) \tau_\infty \equiv \psi(t) \cdot \tau_\infty$$

ここに、 $\psi(t) = a' - b' \log t$ (≥ 1), $[\psi(t)]_{t \rightarrow \infty} = 1$,

$$a' = 1 - \frac{G_1}{B_2 \cdot G_2} \log \{ A_2 \cdot B_2 (G_1 + G_2) \},$$

$$b' = \frac{G_1}{B_2 \cdot G_2} \dots\dots\dots (14)$$

$$\therefore G_r = \psi(t) \cdot G_\infty, \quad G_\infty = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} \dots\dots\dots (15)$$

(4) クリープ過程後の応力緩和特性

粘土をある期間クリープさせた後、応力緩和過程に移行させたときの挙動は今まで解かれていないのでまずそ

の解析を行なうこととする。

いま新鮮な粘土試料を τ_c の一定応力のもとで t_c 時間クリープをさせてひずみが r_0 に達したとき、それ以上変形が増大しないようひずみを r_0 に拘束固定して応力緩和過程に移行させると、拘束応力 τ は移行当初は τ_c であるがしだいに小さくなっていく。

式(7), (8) より t_c 時間のクリープ過程後の r_0 を表わすと、

$$r_0 = (a + b \cdot \log t_c) \cdot (\tau_c / G_\infty) \equiv (\tau_c / G_\infty) \cdot \phi(t_c) \dots\dots\dots (16)$$

なお応力緩和過程に移行した時点の modified Voigt 要素のひずみを r_{20} とすると、 $r_{20} (> 0)$ は次式から求められる。

$$\tau_c = (r_0 - r_{20}) \cdot G_1$$

一方上記とは別に、この新鮮粘土試料をクリープさせることなく新鮮なままで初期ひずみ r_0 を与えて応力緩和を行なう場合を考える。この場合の初期応力は $G_1 \cdot r_0$ であるから上式から知られるように τ_c より大きい。応力緩和をつづけ拘束応力が減少して τ_c に等しくなるときまでの経過時間を t_s とすれば、この関係は式(13), (14) より

$$\tau_c = \{ a' - b' \log t_s \} \cdot G_\infty \cdot r_0 \equiv G_\infty \cdot r_0 \cdot \psi(t_s) \dots\dots\dots (17)$$

その後もそのままのひずみに拘束してさらに応力緩和をつづけ、 t_s 時間後さらに t 時間が経過したときの緩和応力 τ の値は、この新鮮粘土試料に初期ひずみ r_0 を与えて $(t_s + t)$ 時間応力緩和を行なったときの関係であるから、上式と同様にして、

$$\tau = \{ a' - b' \log(t_s + t) \} G_\infty \cdot r_0 = G_\infty \cdot r_0 \cdot \psi(t_s + t) \dots\dots\dots (18)$$

前述したように、上限降伏値以下の応力範囲ではクリープや応力緩和によってレオロジー定数には変化が生じないから、式(16), (17), (18) に含まれるレオロジー定数は同一である。ゆえに式(16)の τ_c に式(17)を代入すると次式のように t_c とそれに対応する t_s との関係が求められる。

$$\left. \begin{aligned} (a + b \log t_c) \cdot (a' - b' \log t_s) &= 1 \\ \text{すなわち、} \quad \phi(t_c) \cdot \psi(t_s) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ゆえに図-2 (b) のように新鮮粘土をまず τ_c の応力のもとで t_c 時間クリープさせひずみが r_0 に達したとき、ついでそのひずみのもとで応力緩和に移行させ、移行後 t 時間経過したときの粘土の応力は、この粘土を最初にクリープさせることなく、新鮮なまま上記の移行時刻より t_s 時間以前の時刻に初期ひずみ r_0 を与えて、そのままのひずみで応力緩和を行ない、合計 $(t_s + t)$ 時間を経過したときの緩和応力に等しいこととなる。後者の過程の場合、 $(t_s + t)$ 時刻における緩和応力は式(18)

によって示され、またこの時点のみかけの弾性係数 G_s は、式 (18), (13) より次のように求められる。

$$G_s = \tau/r_0 = \psi(t_s + t) \cdot G_\infty, (G_s)_{t \rightarrow \infty} = G_\infty \dots (20)$$

(5) 地山粘土の応力・ひずみ挙動

粘性土中にトンネルを開削したとき開削によって地山中に発生する応力が粘土の先行圧密応力と大差なくかつ上限降伏値を超過しないときは、粘土には圧密、膨張や破壊は生じない。この場合には地山粘土のレオロジー定数は前述のように応力・ひずみの大きさに無関係であるから地山がクリープ過程にある場合も応力緩和過程にある場合も地山のみかけ弾性係数やその time factor $\phi(t)$, $\psi(t)$ もまた応力・ひずみに無関係であって時間だけの関数となる。

また半無限弾性地山中に円形トンネルを素掘りで開削した場合は、地山中の各点の応力の値は開削面の微小な変形を無視するならば、変形と無関係に決定できる。したがって半無限粘弾性地山がトンネルの素掘り状態のもとでクリープをしている間の地山各点の応力の値には時間的変動がなく一定値であるとみられる。また同様に半無限粘弾性地山が覆工施工後応力緩和をしている間は覆工のわずかな変形量の変動が地山各点の変位におよぼす影響を無視するならば地山各点のひずみの値には時間的変動がないとみられる。

ゆえにトンネル周囲の地盤のクリープや応力緩和挙動は、地山が一定な弾性定数(せん断弾性係数 G_∞ , ポアソン比 ν)を持つ弾性体として弾性力学的に解析し、得られた結果のひずみや応力の式に含まれる弾性係数 G_∞ に time factor を乗ずることによって求められる。

3. 等方圧をうける粘弾性体中のトンネル土圧

(1) 半無限弾性体中の円形トンネル

半無限粘弾性体を扱うに先立ち半無限弾性体について考察する。いま水平地表面をもつ半無限の弾性地山中に円形トンネルを水平に開削する場合を想定し、トンネル軸を z 軸に、 r, θ 軸を 図-4 右半のようにとる。この軸に関し、トンネル開削前に地山中の一点が自重などのために受けていた圧力を $\sigma_{r0}, \sigma_{\theta0}, \sigma_{z0}$ (ただし軸の負の方向に向う圧力を正とする)、この応力による初期圧縮ひずみを $\epsilon_{r0}, \epsilon_{\theta0}, \epsilon_{z0}$ とする。またトンネル開削後、すなわち素掘り期間中または覆工施工後に地山中のこの点における r, θ, z 方向の圧力をそれぞれ $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ とし、この点の圧縮ひずみが開削後に開削前の初期ひずみ以上に増加した量を $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ とする。

地山のヤング係数を E , ポアソン比を ν , せん断弾性

係数を $G(G=E/\{2(1+\nu)\})$ とすれば、開削前の応力とひずみの関係は、

$$\begin{aligned} \epsilon_{r0} &= \{\sigma_{r0} - \nu(\sigma_{\theta0} + \sigma_{z0})\} / E \\ \epsilon_{\theta0} &= \{\sigma_{\theta0} - \nu(\sigma_{r0} + \sigma_{z0})\} / E \\ \epsilon_{z0} &= \{\sigma_{z0} - \nu(\sigma_{r0} + \sigma_{\theta0})\} / E \end{aligned}$$

上式より σ_{z0} および E を消去して $\epsilon_{r0}, \epsilon_{\theta0}$ を求めると

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{r0} &= \{(1-\nu)\sigma_{r0} - \nu\sigma_{\theta0}\} / (2G) - \nu\epsilon_{z0} \\ \epsilon_{\theta0} &= \{(1-\nu)\sigma_{\theta0} - \nu\sigma_{r0}\} / (2G) - \nu\epsilon_{z0} \\ \sigma_{z0} &= \nu(\sigma_{r0} + \sigma_{\theta0}) + E \cdot \epsilon_{z0} \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

次にトンネル開削後の地山の応力とひずみの関係は、

$$\begin{aligned} \epsilon_{r0} + \epsilon_r &= \{\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\} / E \\ \epsilon_{\theta0} + \epsilon_\theta &= \{\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\} / E \\ \epsilon_{z0} + \epsilon_z &= \{\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)\} / E \end{aligned}$$

トンネル開削後、地山は z 軸に関して平面ひずみ状態を保持すると仮定すると、 $\epsilon_z = 0$ となるから、上式より

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \{(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta\} / (2G) - (\epsilon_{r0} + \nu\epsilon_{z0}) \\ \epsilon_\theta &= \{(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r\} / (2G) - (\epsilon_{\theta0} + \nu\epsilon_{z0}) \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) + E \cdot \epsilon_{z0}, \quad \epsilon_z = 0 \end{aligned} \right\} (22)$$

式 (21), (22) より、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \{(1-\nu)(\sigma_r - \sigma_{r0}) - \nu(\sigma_\theta - \sigma_{\theta0})\} / (2G) \\ \epsilon_\theta &= \{(1-\nu)(\sigma_\theta - \sigma_{\theta0}) - \nu(\sigma_r - \sigma_{r0})\} / (2G) \\ \sigma_z - \sigma_{z0} &= \nu(\sigma_r - \sigma_{r0}) + \nu(\sigma_\theta - \sigma_{\theta0}) \end{aligned} \right\} (23)$$

式 (23) 第 1, 2 式の意味するところは平面ひずみの条件を入れ、地山を 2 次元の弾性体として扱っている以上当然のことであるが、トンネルを開削したために生ずる地山のひずみの増分は、開削のために生ずる地山の 2 次元の応力増分と一次の関係にあり、初期ひずみの値には無関係である。しかしこのようなひずみの増分を開削後の地山応力 σ_r, σ_θ だけで表わすと、式 (22) で示すように $\epsilon_{r0}, \epsilon_{\theta0}$ だけでなく、 z 方向の初期ひずみ ϵ_{z0} も関与することになる。したがって式 (23) を用いればトンネル開削にともなうひずみの変化は、次にのべるような初期等方ひずみのある場合にも、4. にのべるような水平表面をもつ半無限弾性体が深さ方向に平面ひずみ状態を保って一次的に自重で圧縮された場合にも適用することができる。

(2) 等方圧をうける弾性体中のトンネル

トンネルの径に比して土かぶりがかかなり大きく、地山の側方土圧係数をかりに 1 と仮定すれば、トンネル周囲の地山の応力状態は地山の自重のかわりに土かぶりに相当する初期応力 σ_0 を等方に作用させた状態として扱っても大差がない。地山の単位体積重量を γ_s , トンネル中心以上の土かぶりを H とすれば、 $\sigma_0 = \gamma_s \cdot H$ である。

すなわちトンネル開削前の地山の初期応力は、

$$\sigma_{r0} = \sigma_{\theta0} = \sigma_{z0} = \sigma_0 = \gamma_s \cdot H \dots (24)$$

ゆえに初期ひずみも等方に生じ、上式と式 (21) より、

$$\epsilon_{r0} = \epsilon_{\theta0} = \epsilon_{z0} = \epsilon_0 = \{(1-2\nu)/(1+\nu)\} \cdot \{\sigma_0/(2G)\} \dots\dots\dots(25)$$

またトンネルが円形で初期応力と初期ひずみが等方であるときは、トンネル開削後（素掘り期間中または覆工完成後）のトンネル横断面内の地山応力とひずみはともに z 軸に関し軸対称となる。

上述のような、均等な外圧をうける弾性体の円孔のまわりの応力はすでに次のように与えられている。

$$\sigma_r = \alpha_1 - \alpha_2/r^2, \quad \sigma_\theta = \alpha_1 + \alpha_2/r^2 \dots\dots\dots(26)$$

ここに、 α_1, α_2 は境界条件で定まる定数。

均等な外圧をうける場合、 σ_r の方向（トンネル中心に向う方向）にはかった地山の変位を u とすれば、 u は、

$$\epsilon_r = du/dr, \quad u = r \cdot \epsilon_\theta \dots\dots\dots(27)$$

ゆえにトンネル開削面（半径： a ）における地山の開削後の変位量 u_a は式（27）第2式に式（23）第2式を代入し、 $r=a$ とおけば

$$u_a = a \cdot \{(1-\nu)(\sigma_\theta - \sigma_{\theta0}) - \nu(\sigma_r - \sigma_{r0})\}_{r=a}/(2G) \dots\dots\dots(28)$$

a) 素掘り期間中の地山の応力と変形

素掘り期間中は坑内に圧縮空気を封入するものとする。圧気圧が地山を実質的におす有効圧力は土質や加圧時間で異なるが、ここでは圧気の有効圧力を一定値 σ_a とする。境界条件はトンネル内面 ($r=a$) では $\sigma_r = \sigma_a$ 、またトンネルから十分遠方 ($r \rightarrow \infty$) では $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_0$ とおけるから、これらの条件を式（26）に代入すると、

$$\sigma_r = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_a)(a/r)^2, \quad \sigma_\theta = \sigma_0 + (\sigma_0 - \sigma_a)(a/r)^2 \dots\dots\dots(29)$$

素掘りトンネルの開削面が開削後トンネル内方に変位する量を u_{ac} とすれば、 u_{ac} は式（24）、(29)を式（28）に代入して

$$u_{ac} = \frac{\sigma_0 - \sigma_a}{2G} \cdot a \dots\dots\dots(30)$$

b) 覆工構築後の地山の応力と変形

覆工（外周面半径： a ）は圧気中で、地山をおしつけないがすき間ができないように構築し、構築完了後ただちに圧気を常圧にもどし、それ以後は圧気を適用しないものと仮定する。圧気除圧後の覆工と地山との接触圧を p とすれば、式（26）に対する境界条件は、 $r=a$ において $\sigma_r = p, r \rightarrow \infty$ において $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_0$ であるから、

$$\sigma_r = \sigma_0 - (\sigma_0 - p) \cdot (a/r)^2, \quad \sigma_\theta = \sigma_0 + (\sigma_0 - p) \cdot (a/r)^2 \dots\dots\dots(31)$$

覆工構築後の開削面の開削前の位置からの変位量 u_{as} は式（28）、(31)より

$$u_{as} = \frac{\sigma_0 - p}{2G} \cdot a \dots\dots\dots(32)$$

上記 **a), b)** の場合について、地山中の z 方向の応力と平均主応力がトンネル開削によってうける変化を調べ

よう。トンネル開削後の地山の平均主応力が開削前の値よりも増加した量を σ_m とする。 σ_m は、

$$\sigma_m = \{(\sigma_r - \sigma_{r0}) + (\sigma_\theta - \sigma_{\theta0}) + (\sigma_z - \sigma_{z0})\}/3$$

式（23）の第3式、式（24）と上式および式（29）または式（31）を用いて、 σ_z と σ_{z0} の関係および σ_m を求めると、

$$\sigma_z = \sigma_{z0} = \sigma_0, \quad \sigma_m = 0 \dots\dots\dots(33)$$

このように初期等方圧力をうけている弾性体中にトンネルを開削し、開削後トンネル軸方向に平面ひずみ状態が保たれている場合には平均主応力には増減が生じないから、弾性地山には体積ひずみは発生せず、トンネル開削面の変形はすべて弾性地山のせん断変形のみ起因することが知られる。

(3) 外圧 p をうける覆工の応力・ひずみ

覆工は外径 a 、内径 b の円形弾性環（図-4 参照）とし、外周は地山に密着して地山より均等な圧力 p をうけ、内面は無支持とする。覆工の自重を無視すれば覆工内の応力 $\sigma_{rl}, \sigma_{\theta l}$ （添字 l は覆工の意）は式（26）に上記の境界条件を入れて求められる。すなわち、 $r=a$ では $\sigma_{rl} = p, r=b$ では $\sigma_{rl} = 0$ であるから、 $b < r < a$ の範囲では、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rl} &= \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) \cdot p \\ \sigma_{\theta l} &= \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 - b^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) \cdot p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

覆工は無応力の状態で建設され、応力 p をうけたとき z 軸に対して平面ひずみ状態にあるとすれば、 z 方向の応力 σ_{zl} と $\sigma_{rl}, \sigma_{\theta l}$ との関係は、

$$\sigma_{zl} = \nu_l (\sigma_{rl} + \sigma_{\theta l})$$

ゆえに、 r, θ 方向のひずみ $\epsilon_{rl}, \epsilon_{\theta l}$ を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rl} &= \{ \sigma_{rl} - \nu_l (\sigma_{\theta l} + \sigma_{zl}) \} / E_l \\ &= \{ (1-\nu_l) \sigma_{rl} - \nu_l \cdot \sigma_{\theta l} \} / (2G_l) \\ \epsilon_{\theta l} &= \{ (1-\nu_l) \sigma_{\theta l} - \nu_l \cdot \sigma_{rl} \} / (2G_l), \\ E_l &= 2(1+\nu_l) \cdot G_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ここに、 E_l, ν_l および G_l はそれぞれ覆工材料の弾性係数、ポアソン比およびせん断弾性係数である。

また覆工外周面がトンネル中心方向に向う変位量 u_l は式（27）に式（35）の $\epsilon_{\theta l}$ と式（34）を代入して

$$u_l = [r \cdot \epsilon_{\theta l}]_{r=a} = \frac{(1-2\nu_l)a^2 + b^2}{2G_l(a^2 - b^2)} \cdot a \cdot p \dots\dots\dots(36)$$

(4) 素掘りトンネルにおける開削面のクリープ変形

式（30）において σ_a は間げき水圧に対抗するために坑内に封入した圧縮空気圧より生ずる応力であるから、帯水層の被圧水頭が地表以上かなり高くない限り通常 σ_a はトンネルの上載荷重 σ_0 に比して小さい。ゆえに式（30）より、 $u_{ac} > 0$ となり、地山が粘弾性体からできて

いる場合には開削面は素掘り期間中トンネル内方に向けてクリープ変形をする。クリープをおこす地山内のせん断応力は $\sigma_\theta - \sigma_r$ であって、この値は a の微小な変化を無視すれば式 (29) からわかるようにクリープ中つねに一定である。ここでは地山のせん断応力は粘土の上限降伏値を超過しない場合を扱うものとする。式 (30) の G は弾性体に対するものであったが、粘弾性体ではみかけの G はクリープ時間とともに式 (9) の G_c で示されるように減少し、 $t \rightarrow \infty$ では G_∞ となる。 G_c, G_∞ は応力やひずみの大きさには無関係であるから、トンネル開削の場合、地山中の位置 (r, θ) にも無関係にただ時間 t のみの関数となり、それぞれの点において式 (8) のクリープひずみが生じる。

ゆえにいま、 σ_0 の初期応力のある粘弾性地山に半径 a の円形トンネルを有効圧気圧 σ_a を用いて素掘り掘削したとき、開削後 t_c 時間後のトンネル開削面の内方移動量 u_c は式 (30) の G に $G_c (= G_\infty / \phi(t))$ を代入して次のように求められる。

$$u_c = (\sigma_0 - \sigma_a) \cdot a \cdot \phi(t_c) / 2 G_\infty, \quad \left. \begin{aligned} & \text{ここに } \phi(t_c) = a + b \cdot \log t_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

上述のようなトンネル開削面の移動が経過時間の対数に比例している例は実際のトンネルにおいてしばしば測定されており、これらの変形がここにのべたクリープ特性によって説明できる場合がきわめて多いと思われる。

(5) 施工に伴う開削面の変位の推移

トンネル開削面の変位は地山のひずみの総合されたものといえよう。地山のひずみ挙動は図-1の力学モデル(ただし τ_0 は除く)で代表できるから、施工に伴う開削面の変位の推移もこのような3要素力学モデルの変位にある一定倍率を乗じたものとして示すことができる。

各施工過程における開削面の変位の推移をこのような3要素モデルを用いて模式的に示すと図-3(a)~(e)となる³⁾。なお図-3(f)は、地山の挙動を示す力学モデルで、

無載荷時の状態を示し、したがってばね E_1, E_2 は完全に伸長している。

地山は自然堆積状態では、地山の自重 (σ_0 に相当) によって圧縮 (ϵ_0 に相当) されているから、この力学モデルも開削前は図 (a) のように圧縮された状態にある。地山は開削と同時に坑内の圧気圧をうけるが、開削の瞬間 ($T=0$) にはばね E_1 が図 (b) のように伸長して、瞬間的な弾性変形が地山に生じ、開削面がトンネル内方に移動する。しかし modified Voigt モデルの E_2 はこの時刻ではまだ変化していない。図中の W はこのモデルが分担する地山の重量、 σ_a は変形に抵抗する坑内圧気圧である。図 (c) は開削後圧気をかけた素掘り状態のまま t_c 時間クリープさせたときの状態で、 E_1 の伸びは図 (b) のときと変わらないが、 E_2 が伸長している。このためトンネル開削面は、図 (c) のように開削前の位置より u_c だけ内方にクリープ変形する。図 (d) では $T=t_c$ の時刻に圧気中で覆工を地山に密接して構築し、構築完成と同時に圧気を除去したときの状態である。この圧気の排除のため、圧気で圧されていた地山開削面が覆工をお返し覆工に加圧と変形を与える。このとき生ずる覆工と地山の接触圧を p_a 、覆工外周面の初期構築位置よりの変位を u_a とする。

覆工完成後さらに時がたつと図 (e) のようにさらに E_2 が伸びるが、覆工によって力学モデル全体の長さが抑制されているので、 E_1 は時とともに圧縮される。 E_1 の圧縮によって覆工に与える圧力 p が増大するので、覆工は構築初期 ($T=t_c$) の位置より u_1 だけひずむ。さらに十分時間がたてば ($T \rightarrow \infty$) で dash-pot η_2 は $\eta_2 \rightarrow 0$ となるので、この力学モデルは E_1 と E_2 を直列に結んだものと等価となる。

トンネル掘削前の開削面に相当する位置を基準線にとると、図-3(c), (e) のように、地山が圧気に抗して t_c 時間クリープした後の開削面の移動量はこの基準線から測って u_c であり、また覆工後に地山の応力緩和によ

って地山開削面が移動する量は上記基準線から測って u_s となるから、覆工外周面が構築後に変形する量 u_1 は、
$$u_1 = u_s - u_c \dots\dots\dots (38)$$

(6) 地山の応力緩和によって生ずる覆工土圧

外圧 p は応力緩和中覆工にかかる土圧でここでは未知数であるが、剛性の大きい覆工を軟弱地盤中に設置する場合は、 p によって生ずる覆工の変形 u_1 は

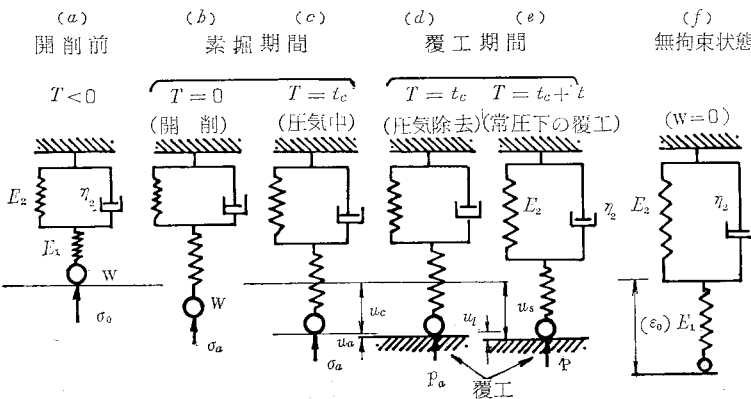


図-3 施工に伴う力学モデルの変化

トンネル開削面のクリープ変形量 u_c に比して非常に小さい。ゆえに覆工完成後の地山の応力緩和過程における地山開削面の変形量 ($u_c + u_l$) のうち微小な u_l を無視すれば、応力緩和中の地山の変形量は初期からつねに一定値 u_c に固定されているものとみなしても大差がない。応力緩和中の地山のひずみが一定な場合は、応力緩和中の地山の弾性係数は式 (20) の G_s で示されるから、 u_s はこの G_s を式 (32) に代入したときの u_{as} として求められる。

$$u_s = (\sigma_0 - p) \cdot a / 2 G_s,$$

$$G_s = \psi(t_s + t) \cdot G_\infty, \quad \psi(t_s + t) = a' - b' \log(t_s + t)$$

.....(39)

式 (36) の u_l , 式 (37) の u_c および式 (39) の u_s を式 (38) に代入すれば、

$$\frac{(1 - 2\nu_l)a^2 + b^2}{2G_l \cdot (a^2 - b^2)} \cdot a \cdot p = \frac{(\sigma_0 - p) \cdot a}{2G_\infty \cdot \psi(t_s + t)}$$

$$- \frac{(\sigma_0 - \sigma_a) \cdot a \cdot \phi(t_c)}{2G_\infty}$$

上式を式 (19) の関係を用いて p について解けば、 p は覆工を構築して圧気除圧ののち t 時間を経過したときの覆工土圧となる。そのうち $t=0$ における p は応力緩和過程の初期、すなわち覆工を地山に密接させて構築したのち圧気を除いたときの、坑内圧気の除圧に起因する覆工土圧 p_a (図-3 (d) 参照) である。 p, p_a を次に示す。

$t=t$ のとき:

$$p = \frac{1 - \frac{\psi(t_s + t)}{\psi(t_s)} \left(1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_0}\right)}{1 + \frac{G_\infty}{G_l} \frac{(1 - 2\nu_l)a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \psi(t_s + t)} \sigma_0$$

$t=0$ のとき:

$$p_a = \frac{\sigma_a}{1 + \frac{G_\infty}{G_l \cdot \phi(t_c)} \frac{(1 - 2\nu_l)a^2 + b^2}{a^2 - b^2}}$$

(40)

ここに $\psi(t_s + t) = a' - b' \log(t_s + t),$
 $\phi(t_c) \cdot \psi(t_s) = 1$

上式によって覆工土圧 p の諸条件に対する特性を知ることができる。すなわち、 p は覆工設置後の経過時間 t とともに増大するが、長時間後には一定値に漸近する。 p は σ_0 すなわちトンネル土被の大きいほど大きくなり、また坑内に入れた圧気圧 σ_a の高いほどそれを除圧したときの p は大きくなる。通常覆工の弾性係数 G_l は地山の弾性係数 G_∞ より大きい、 G_l が大きいほど、すなわち覆工の剛度が高いほど p は大きい。完全に剛な覆工では $G_l \rightarrow \infty$ として式 (40) 第1式の分母第2項は無視できる。便宜上、完全に剛な覆工に対する p の特性をみると、 p は $\log(t_s + t)$ に比例して増加し、また覆工施工前の素掘り期間 t_c が長いほど、 $\psi(t_s + t)/\psi(t_s)$ の値が1に近づくから、地山の破壊が生じない限り、覆工設置時期を遅らせれば、それだけ将来発生する覆工土圧

の大きさは小さくなる。

4. 重力の場にある粘弾性地山中のトンネル土圧

(1) はしがき

重力の場にある粘弾性地山中に開削した円形トンネルの土圧の経時変化を解明するには前述 3. の場合と同様に、重力の場にある等方均質な純弾性体中の円形トンネルの応力・ひずみの解に time factor を導入することによって解明することができる。ゆえにまず半無限弾性体地山に対する応力・ひずみの解を求める必要があるが、この解についてはすでにいくつかの成果が発表されているのでその援用をうけることができる。弾性解としては2次元問題として、素掘りトンネルの周辺地山の応力は、Hanns Schmid⁹⁾, 山口昇⁵⁾, N. Muskhelishvili⁹⁾ などによって研究され、また覆工のある円形トンネルの地中応力や覆工土圧については、前記 Schmid⁹⁾, 谷本勉之助⁷⁾, 小田英一⁸⁾ などによって研究されている。

これらのうち Schmid の解は早期の研究として注目すべきものであるが、方程式の解に近似が用いられている部分が多いことと、覆工をもつトンネルでは地山の変位のうち剛体変位 (rigid body displacement) が分離されていないなどの欠点があって、ここに適用することは適当でないようである。一方谷本は、この解析を Airy の応力関数とこの関数に J.H. Michell の提案した式を用いて進めており、谷本の解に覆工を省略する条件を入れれば山口⁵⁾ の求めた素掘りトンネルの場合の解と一致することが確かめられている⁷⁾ など適用性が高い。しかし谷本の解では、地山と地山にはめこまれた覆工が重力をうけて変形したとき、覆工と地山の接触面における境界条件として、(1) 接触面の両側で半径方向の直応力と接触面にそうせん断応力が連続であり、(2) 接触面において覆工と地山の間に変形のずれがないことに仮定している。この境界条件を具体例によってたとえば、薄い四角な箱を水平に置いてその中に軟い弾性体を一杯みだし、それにあまり大きくない円孔を鉛直にあげ、この円孔にちょうど合致するやや硬い弾性リングを鉛直に挿入したのち、箱にふたをしてそれを鉛直に立てて中味全体が自重で変形したとき、弾性リング外周に生ずる応力を覆工土圧としたものである。

上述の境界条件のうち (2) の変形条件は、地山を開削した後に覆工を構築するという実際の施工条件と一致しないからここには適用できない。そこでここでは、山口の解と、谷本の解のうち (2) の境界条件を導入する以前の部分との援用をうけ、3. (1) にのべたようにトンネル

開削に伴う弾性地山の応力増分のために生ずる開削面の
変形に注目し、さらにこれを粘弾性地山に拡張し、式(38)
と同じ主旨の変形条件を用いて解析することとする。

(2) 重力の場にある弾性地山中の円形トンネル^{5),7)}

ここでは表題に関する山口と谷本の解の概要を記す。

谷本⁷⁾は重力の場にある半無限弾性体中に弾性覆工を
もつ円形トンネルがある場合、地山あるいは覆工の応力
をこれらがトンネル軸に対して平面ひずみ状態にあると
して次のように解いている。いま図-4左半のように覆
工中心に原点をおく極座標をとり、地山あるいは覆工の

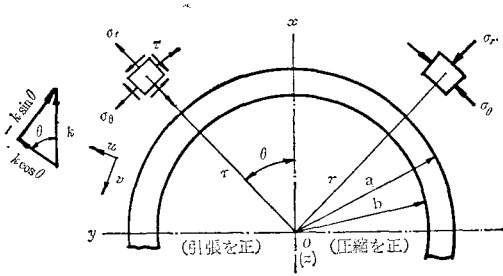


図-4 座標 (右半：圧縮が正の場合、左半：引張が正の場合)

応力 (ここでは谷本にならない直応力は引張を正とする)
を応力関数 ϕ と地山または覆工の単位体積重量 r_s (深さ
により不変と仮定) を用いて示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + r_s \cdot r \cdot \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + r_s \cdot r \cdot \cos \theta, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} (41)$$

上式の応力関数 ϕ は、極座標表示の重調和関数 ($r^0 \phi = 0$)
で、J.H. Michell により、 a_0, b_0 などの未定係数を用
いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= (a_0 \log r + b_0 r^2 + c_0 r^2 \log r) + d_0 r^2 \theta + d_0' \theta \\ &+ (1/2) (a_1 r \theta \sin \theta + c_1 r \theta \cos \theta) \\ &+ (b_1 r^3 + a_1' r^{-1} + b_1' r \log r) \cos \theta \\ &+ (d_1 r^3 + c_1' r^{-1} + d_1' r \log r) \sin \theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta) \end{aligned} \right\} \\ \text{ここに、} \quad A_n &= a_n r^n + b_n r^{n+2} + a_n' r^{-n} + b_n' r^{-n+2}, \\ B_n &= c_n r^n + d_n r^{n+2} + c_n' r^{-n} + d_n' r^{-n+2} \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

なお Σ の項中の $n \geq 4$ の項は応力・ひずみに与える影
響が小さいから無視して、 $n=2, 3$ のみを採用すると ϕ
は全部で 29 個の未定係数を持つこととなる。応力は座
標の鉛直軸に関して対称であるから、軸対称の条件から
次の係数は 0 となるが、なお 14 個の未定係数が残る。

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 = c_1' = c_n = c_n' = 0 \\ d_0 &= d_0' = d_1 = d_1' = d_n = d_n' = 0 \quad (n=2, 3) \end{aligned}$$

したがって各応力は式 (41), (42) より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= a_0 r^{-2} + 2 b_0 \\ &+ (a_1/r + 2 b_1 r + r_s r - 2 a_1'/r^3 + b_1'/r) \cos \theta \\ &+ (-2 a_2 - 6 a_2'/r^4 - 4 b_2'/r^2) \cos 2 \theta \\ &+ (-6 a_3 r - 4 b_3 r^3 - 12 a_3'/r^5 - 10 b_3'/r^3) \cos 3 \theta \\ \sigma_\theta &= -a_0 r^{-2} + 2 b_0 \\ &+ (6 b_1 r + r_s r + 2 a_1'/r^3 + b_1'/r) \cos \theta \\ &+ (2 a_2 + 12 b_2 r^2 + 6 a_2'/r^4) \cos 2 \theta \\ &+ (6 a_3 r + 20 b_3 r^3 + 12 a_3'/r^5 + 2 b_3'/r^3) \cos 3 \theta \\ \tau &= (2 b_1 r - 2 a_1'/r^3 + b_1'/r) \sin \theta \\ &+ (2 a_2 + 6 b_2 r^2 - 6 a_2'/r^4 - 2 b_2'/r^2) \sin 2 \theta \\ &+ (6 a_3 r + 12 b_3 r^3 - 12 a_3'/r^5 - 6 b_3'/r^3) \sin 3 \theta \\ &\dots \dots \dots (43) \end{aligned} \right\}$$

一方、山口⁵⁾は、上述の場合と同一の条件のもとで半
無限弾性体に円孔のない場合と、円形の素掘りトンネル
のある場合の地山の応力を次のように求めた。

a) トンネル開削前の円孔のない自然堆積状態の場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= -\left\{ \frac{2-\beta}{2} - \frac{4-\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{2} \cos 2 \theta - \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \cos 3 \theta \right\} \cdot \sigma_0 \\ \sigma_{\theta_0} &= -\left\{ \frac{2-\beta}{2} - \frac{4-3\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{2} \cos 2 \theta + \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \cos 3 \theta \right\} \cdot \sigma_0 \\ \tau_0 &= -\left\{ \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \sin \theta - \frac{\beta}{2} \sin 2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \sin 3 \theta \right\} \cdot \sigma_0 \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

ここに、 $\beta = 1 - \nu / (1 - \nu)$, ν : ポアソン比,
 $\sigma_0 = r_s \cdot H$, H : トンネル中心以上の土かぶり高さ

b) 円形素掘りトンネルのある場合

自然堆積状態の弾性地山に半径 a の素掘りの円孔を開
削することにより地山の応力が式 (44) の値以上に増加
する量を $\sigma_{rc} - \sigma_{r_0}$, $\sigma_{\theta c} - \sigma_{\theta_0}$, $\tau_c - \tau_0$ とすれば、(添字: c)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rc} - \sigma_{r_0} &= + \left[\frac{2-\beta}{2} - \frac{4-\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \cos \theta + \frac{\beta}{2} \left\{ 4 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right\} \cos 2 \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \left\{ 5 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right\} \cos 3 \theta \right] \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cdot \sigma_0 \\ \sigma_{\theta c} - \sigma_{\theta_0} &= - \left[\frac{2-\beta}{2} - \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \cos \theta - \frac{3\beta}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos 2 \theta - \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \left\{ \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right\} \cos 3 \theta \right] \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cdot \sigma_0 \\ \tau_c - \tau_0 &= + \left[\frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \sin \theta + \frac{\beta}{2} \left\{ 2 - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right\} \sin 2 \theta - \frac{\beta}{4} \left(\frac{r}{H} \right) \left\{ 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 4 \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right\} \sin 3 \theta \right] \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cdot \sigma_0 \end{aligned} \right\} (45)$$

上式から明らかなように、半径 a の円孔を開削したため増加した応力は $(a/r)^2$ に比例して減少し、 $r \rightarrow \infty$ では 0 となる。また式 (43) は地山にも覆工にも適用できるが、地山の場合は $r \rightarrow \infty$ において式 (43) の $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau$ はそれぞれ式 (44) の $\sigma_{r0}, \sigma_{\theta0}, \tau_0$ に一致せねばならない。この一致の条件から式 (43) のうち次の式 (46) の 6 個の未定係数を決定することができるので、式 (43) にはなお 8 個の未定係数が未知数として残る。

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \beta \cdot \sigma_0 / 4, \quad a_3 = -\beta \cdot \sigma_0 / (24 \cdot H), \\ b_0 &= -(2 - \beta) \cdot \sigma_0 / 4, \quad b_1 = -\beta \cdot \sigma_0 / (8 \cdot H), \\ b_2 &= b_3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

次に、弾性体中の一点において r, θ それぞれの増す方向にはかった変位 u, v は弾性体中の応力 σ_r, σ_θ を積分して次のように求められる⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[(\lambda + 2\mu) \int \sigma_r dr - \lambda \int \sigma_\theta dr + k \cdot \cos \theta \right] / \{4\mu(\lambda + \mu)\} \\ v &= \left[-(\lambda + 2\mu) \left\{ \int d\theta \int \sigma_r dr - r \int \sigma_\theta d\theta \right\} \right. \\ &\quad \left. + \lambda \left\{ \int d\theta \int \sigma_\theta dr - r \int \sigma_r d\theta \right\} - k \cdot \sin \theta \right] / \{4\mu(\lambda + \mu)\} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ここに、 λ, μ は Lamé の定数、 k は未定の積分定数である。 k は、 k が正であれば、図-4 のように u (または r) 方向の $k \cos \theta$ と v (または θ) と反対方向の $-k \sin \theta$ を合成したものであるから鉛直上向きの成分である。また u, v は前述のように覆工中心を原点にして測っている。ゆえに k が正であれば $k/\{4\mu(\lambda + \mu)\}$ は地山全体が覆工中心を基準にして上昇する変位、すなわち覆工に対する地山の上向きの剛体変位を表わしている。なお k は未定であるから、地山に対しては未知の未定係数 8 個とあわせると地山での未知数の数は 9 個となる。

式 (47) のように弾性体中の一点 (r, θ) の変位 u, v は σ_r と σ_θ の一次の項の積分で示されるが、この積分式は長いので式 (47) 第 1, 2 式の右辺をそれぞれ次式のように関数 F_u, F_v を用いて簡単に表現することとする。

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta) &= F_u(\sigma_r, \sigma_\theta, \lambda, \mu, k) \\ v(r, \theta) &= F_v(\sigma_r, \sigma_\theta, \lambda, \mu, k) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

なお Lamé の定数 λ, μ とせん断弾性係数 G 、ポアソン比 ν との間には次の関係がある。

$$\lambda = 2\nu G / (1 - 2\nu), \quad \mu = G \quad (49)$$

式 (47) に式 (43) の σ_r, σ_θ を代入して u, v を求める

$$\left. \begin{aligned} 4\mu(\lambda + \mu) \cdot u &= -2(\lambda + \mu)r^{-1}a_0 + 4\mu r b_0 + k \cos \theta \\ &+ \{(\lambda + 2\mu) \log r \cdot a_1 + 2(-\lambda + \mu)r^2 \cdot b_1 \\ &+ 2(\lambda + \mu)r^{-2} \cdot a_1' + 2\mu \log r \cdot b_1' + \mu r_s r^2\} \cos \theta \\ &+ \{-4(\lambda + \mu)r \cdot a_2 + 4(-\lambda)r^3 \cdot b_2 \\ &+ 4(\lambda + \mu)r^{-3} \cdot a_2' + 4(\lambda + 2\mu)r^{-1} \cdot b_2'\} \cos 2\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \{-6(\lambda + \mu)r^2 \cdot a_3 - 2(3\lambda + \mu)r^4 \cdot b_3 \\ &+ 6(\lambda + \mu)r^{-4} \cdot a_3' + 2(3\lambda + 5\mu)r^{-2} \cdot b_3'\} \cos 3\theta \\ &4\mu(\lambda + \mu) \cdot v = 0 \times a_0 + 0 \times b_0 - k \cdot \sin \theta \\ &+ [-\{(\lambda + 2\mu) \log r\} a_1 + 2(3\lambda + 5\mu)r^2 \cdot b_1 \\ &+ 2(\lambda + \mu)r^{-2} a_1' + 2\mu(1 - \log r) b_1' + \mu r_s r^2] \sin \theta \\ &+ \{4(\lambda + \mu)r \cdot a_2 + 4(2\lambda + 3\mu)r^3 \cdot b_2 \\ &+ 4(\lambda + \mu)r^{-3} \cdot a_2' + 4(-\mu)r^{-1} \cdot b_2'\} \sin 2\theta \\ &+ \{6(\lambda + \mu)r^2 \cdot a_3 + 2(5\lambda + 7\mu)r^4 \cdot b_3 \\ &+ 6(\lambda + \mu)r^{-4} \cdot a_3' + 2(\lambda - \mu)r^{-2} \cdot b_3'\} \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

一方 τ と u, v の関係は

$$\tau = \mu \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) v \right] \quad (51)$$

そこで式 (50) の u, v を代入したものと式 (43) の τ を比べると、係数 b_1' と a_1 の関係が次のようにえられる。

$$b_1' = -\mu \cdot a_1 / (2\lambda + 4\mu) \quad (52)$$

そのため地山では未知数の数が 1 個減り 8 個が残る。

一方覆工の応力・変位についても、式 (43), (49), (50), (52) は重力の場合にある軸対称の弾性体として地山の場合と同様に成立する。ただし覆工の変位に対しては覆工の中心を座標の原点にとっているから、覆工の剛体変位は 0 となるので、式 (50) 中の k は $k=0$ である。未知の未定係数の数は式 (43) に 14 個あるが、式 (52) の係数間の関係式のため 1 個減り結局 13 個が残る。上記の覆工の応力や変位の式を地山のそれらの式と区別するため、覆工関係の式中、応力、変位、未定係数、覆工単位体積重量、Lamé の定数にはすべて添字 l をつけて示すこととする。

覆工と地山の応力・変位を解くためには、地山について 8 個、覆工で 13 個、合計 21 個の未知数を求める必要がある。谷本は 4. (1) にのべたように半径 a の覆工外面における応力の連続条件 ($r=a$ にて、 $\sigma_r = \sigma_{rl}, \tau = \tau_l$) と変位の連続条件 ($r=a$ にて、 $u = u_l, v = v_l$) および半径 b の覆工内面が無支持の条件 ($r=b$ にて、 $\sigma_{rl} = 0, \tau_l = 0$) の 3 境界条件を用いて上記 21 個の未知数の値を求め、弾性地山や覆工の応力・変位を解析した。

(3) 粘弾性地山における覆土工圧とその計算例

粘弾性地山では 3. (5) にのべたように素掘り期間中はクリープが生じ、覆工構築後は応力緩和がおこる。

自重によって初期ひずみを受けている自然堆積地山に円形トンネルを開削したとき、覆工構築までの t_c 時間の素掘り期間中に生じた開削面のクリープ変位の radial の成分を u_c 、tangential の成分を v_c とする。 u_c, v_c を測った基準面は開削前の開削面位置である。覆工構築後 t 時間後の地山の開削面の変位もこの基準から測って u_s, v_s とする。覆工は地山の開削後 t_c 時間後に無応力

の状態で地山に密接して構築するとし、構築時点以後 t 時間の間に覆工外周面の変位する量を u_l, v_l とすれば、式(38)の場合と同一の主旨から次の変位条件が求まる。

$$u_l = u_s - u_c, \quad v_l = v_s - v_c \dots\dots\dots(53)$$

u_l, v_l は覆工構築時点の覆工中心を座標原点としたとき、この原点に関する覆工の変位であり、 u_c, v_c および u_s, v_s はそれぞれ地山開削面の開削前の中心を座標原点として、この原点に関する地山開削面の変位である。地山開削面が覆工構築時点以後に変位する量は $u_s - u_c, v_s - v_c$ であるから、 $u_s - u_c, v_s - v_c$ の座標原点は覆工構築時点の地山開削面の中心に該当する。覆工構築時 ($t=0$) には覆工中心 (u_l, v_l の原点) と地山開削面中心 ($u_s - u_c, v_s - v_c$ の原点) は当然一致しているが、時間が経過し ($t=t$) では覆工に土圧が加わると変位の計算上覆工中心と地山開削面中心は一致なくなり、両中心すなわち両座標原点は離隔していわゆる剛体変位が発生する。そこでここでは便宜上、覆工構築時 ($t=0$) における両中心の一致した点を剛体変位を測る基準点とすることとした。

次に式 (53) 中の各項を式で示していくこととする。まず覆工外周面の $t=t$ の時点における変位 u_l, v_l は式 (50) 中の未定係数、Lamé の定数に覆工を示すための添字 l をつけ、剛体変位を k_l 、単位体積重量を r_l と記したのち、 $r=a$ とおいた式で示される。この式は添字 l と、 r を a にかえたほかは式 (50) と全く同一であるから式全体を記すことは省略してそのかわり以下の式(54)のよう略記する。式 (50) に含まれる未知数は未定係数 14 個と k_l 1 個があるが、式 (52) の関係があるから b_{11}' を除けば未知数は 14 個となり、それらはすべて一次結合で示されている。いま f_l, φ_l をこれら未知数の一次式を示す関数 (関数の内容は式 (50) と対照すれば自明) として u_l, v_l を示すと、

$$\left. \begin{aligned} u_l &= f_{10}(a_{10}, b_{10}) + f_{11}(a_{11}, b_{11}, a_{11}', k_l) \cos \theta \\ &\quad + f_{12}(a_{12}, b_{12}, a_{12}', b_{12}') \cos 2\theta \\ &\quad + f_{13}(a_{13}, b_{13}, a_{13}', b_{13}') \cos 3\theta \\ v_l &= \varphi_{11}(a_{11}, b_{11}, a_{11}', k_l) \sin \theta \\ &\quad + \varphi_{12}(a_{12}, b_{12}, a_{12}', b_{12}') \sin 2\theta \\ &\quad + \varphi_{13}(a_{13}, b_{13}, a_{13}', b_{13}') \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)$$

なお覆工は弾性体であるから、Lamé の定数 λ_l, μ_l は時間に無関係に一定な定数である。

次に応力緩和時の地山開削面の変位 u_s, v_s は、覆工構築後 $t=t$ において地山の Lamé の定数が応力緩和の結

果 λ_s, μ_s (せん断弾性係数: G_s) になったとき、トンネル開削の結果生じた地山の応力増分 $\sigma_{rs} - \sigma_{r0}, \sigma_{\theta s} - \sigma_{\theta 0}$ によって生じた開削面の変位である。ここに $\sigma_{rs}, \sigma_{\theta s}$ は、無応力状態の地山に円孔をあけ、ある接触圧にて弾性覆工をはじめこんだのち地山を重力の場に移したときの地山中の一点 (r, θ) における応力に相当し、その応力の値は覆工と地山の最初の接触圧によるのでここでは未知数である。一方 $\sigma_{r0}, \sigma_{\theta 0}$ は、この点 (r, θ) が重力の場にある開削前の無孔の自然地山において示す初期応力であって式 (44) によって与えられる。Lamé の定数と G_s の関係には式 (49) があるが、ここでは地山のポアソン比 ν はつねに一定と仮定する。 u_s, v_s を応力増分を用いた式 (48) にならって示すと、

$$\left. \begin{aligned} u_s &= F_u[(\sigma_{rs} - \sigma_{r0}), (\sigma_{\theta s} - \sigma_{\theta 0}), \lambda_s, \mu_s, k_s]_{r=a} \\ v_s &= F_v[(\sigma_{rs} - \sigma_{r0}), (\sigma_{\theta s} - \sigma_{\theta 0}), \lambda_s, \mu_s, k_s]_{r=a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

u_s, v_s はともに地山応力の一次式であり、また、 u_s, v_s に対する剛体変位は k_s 1 個で十分であるから、上式を次の式 (56) のように書きかえる場合 u_{s0}, v_{s0} を示す式にのみ k_s をつけ、 u_0, v_0 の式には剛体変位はつける必要はない。

$$\left. \begin{aligned} u_s &= u_{s0} - u_0, \quad v_s = v_{s0} - v_0 \\ u_{s0} &= F_u(\sigma_{rs}, \sigma_{\theta s}, \lambda_s, \mu_s, k_s)_{r=a} \\ u_0 &= F_u(\sigma_{r0}, \sigma_{\theta 0}, \lambda_s, \mu_s)_{r=a} \\ v_{s0} &= F_v(\sigma_{rs}, \sigma_{\theta s}, \lambda_s, \mu_s, k_s)_{r=a} \\ v_0 &= F_v(\sigma_{r0}, \sigma_{\theta 0}, \lambda_s, \mu_s)_{r=a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

すなわち u_s または v_s は、円形覆工を装備した Lamé の定数 λ_s, μ_s の弾性体の $\sigma_{rs}, \sigma_{\theta s}$ による開削面の変位量 u_{s0} または v_{s0} と、同一の Lamé の定数 λ_s, μ_s の開削前の無孔の弾性体の $\sigma_{r0}, \sigma_{\theta 0}$ による開削面に相等する開削前の位置の初期変位量 u_0 または v_0 との差として与えられる。なお、 λ_s, μ_s は式 (20) を式 (49) に代入して求められるもので、素掘り期間 t_c と覆工構築後の経過時間 t の 2 つの時間要素が含まれるから時間依存性の係数である。

式 (56) 中の u_{s0}, v_{s0} は、式 (50) 中の Lamé の定数に添字 s をつけ k を k_s にかえたのち $r=a$ とおいた以外は式 (50) と全く同一であるからここに再記を省略する。

また式 (56) 中の u_0, v_0 は式 (47) の σ_r, σ_θ に式(44)の $\sigma_{r0}, \sigma_{\theta 0}$ を代入した式において Lamé の定数に添字 s をつけたのち $r=a$ とおいた次式で示される。なお上記のように剛体変位はつける必要がないから $k=0$ とした。

$$\left. \begin{aligned} -4 \mu_s (\lambda_s + \mu_s) u_0 &= [\mu_s (2 - \beta) a - (\lambda_s - \mu_s + 4 \mu_s / \beta) \beta (a^2 / 4 H) \cos \theta \\ &\quad + (\lambda_s + \mu_s) \beta \cdot a \cdot \cos 2\theta - (\lambda_s + \mu_s) \beta (a^2 / 4 H) \cos 3\theta] \cdot \sigma_0 \\ -4 \mu_s (\lambda_s + \mu_s) v_0 &= [(3 \lambda_s + 5 \mu_s - 4 \mu_s / \beta) \beta (a^2 / 4 H) \sin \theta - (\lambda_s + \mu_s) \beta \cdot a \cdot \sin 2\theta \\ &\quad + (\lambda_s + \mu_s) \beta (a^2 / 4 H) \sin 3\theta] \cdot \sigma_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(57)$$

地山に関する未定係数には式 (46), (52) の関係があるので, 式 (50) に含まれる未知数の数は未定係数 7 個と k_s 1 個で合計 8 個がある。式 (57) の各項は既知数であるから $u_s (=u_{s0}-u_0)$, $v_s (=v_{s0}-v_0)$ の式中にはこれら 8 個の未知数が含まれ, それらは式 (50) にみられるように一次結合をしている。いまこの未知数の一次式を f_s, φ_s の関数で示して u_s, v_s を表わすと

$$\left. \begin{aligned} u_s &= f_{0s}(a_0) + f_{1s}(a_1, a_1', k_s) \cos \theta \\ &\quad + f_{2s}(a_2', b_2') \cos 2\theta \\ &\quad + f_{3s}(a_3', b_3') \cos 3\theta \\ v_s &= \varphi_{1s}(a_1, a_1', k_s) \sin \theta \\ &\quad + \varphi_{2s}(a_2', b_2') \sin 2\theta \\ &\quad + \varphi_{3s}(a_3', b_3') \sin 3\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(58)$$

次に式(53)で示す素掘り終期の地山開削面の変位 u_c , v_c は前述の説明からも分かるように次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} u_c &= F_u [(\sigma_{rc}-\sigma_{r0}), (\sigma_{\theta c}-\sigma_{r0}), \lambda_c, \mu_c]_{r=a} \\ v_c &= F_v [(\sigma_{rc}-\sigma_{r0}), (\sigma_{\theta c}-\sigma_{r0}), \lambda_c, \mu_c]_{r=a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

上式の u_c, v_c は式 (47) に式 (45) を代入し, Lamé の定数に添字 c をつけたのち $r=a$ とおいたもので, 代入した結果は次の式 (60) となる。トンネル開削後 t_c 時間経過した素掘り終期の Lamé の定数 λ_c, μ_c は式(49)の G に式 (9) の G_c を代入して求められる。ここでは地山のポアソン比 ν は不変と仮定した。また u_c, v_c に対する剛体変位は, u_c, v_c の時点を剛体変位の基準としたから 0 である。素掘り期間 t_c が既知であれば, 式(60)には未知数は含まれない。

$$\left. \begin{aligned} -4\mu_c(\lambda_c + \mu_c)u_c &= [(\lambda_c + \mu_c)(2-\beta)a + 2(2\lambda_c + 4\mu_c \\ &\quad - \mu_c\beta) \log a (a^2/4H) \cos \theta + (\lambda_c + 3\mu_c)\beta a \cdot \cos 2\theta \\ &\quad - (\lambda_c + 3\mu_c)\beta (a^2/4H) \cos 3\theta] \cdot \sigma_0 \\ -4\mu_c(\lambda_c + \mu_c)v_c &= [-2\{(2\lambda_c + 4\mu_c - \mu_c\beta) \log a + (2\lambda_c \\ &\quad + \mu_c\beta)\} (a^2/4H) \sin \theta - (\lambda_c + 3\mu_c)\beta a \cdot \sin 2\theta \\ &\quad + (\lambda_c + 3\mu_c)\beta (a^2/4H) \sin 3\theta] \cdot \sigma_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

以上で開削面の変位条件式 (53) 中のすべての項は式 (54)~(60) によって未知の未定係数と剛体変位の一次式で示すことができた。それら各項を式 (53) の第 1 式と第 2 式に代入すると 2 つの連立一次方程式となる。この両式中の剛体変位の項をとりだすと, 式 (47) の式の形からも分かるように, 次式左辺で示す項が得られる。

$$\frac{k_s}{4\mu_s(\lambda_s + \mu_s)} - \frac{k_l}{4\mu_l(\lambda_l + \mu_l)} (\equiv w_1) \dots\dots(61)$$

上式を w_1 と記すが, w_1 は $t=0$ における覆工中心を基準として測った t 時間経過後の地山開削面中心の変位 (地山の剛体変位) と覆工中心の変位 (覆工の剛体変位) との差である。したがって w_1 は $t=t$ の時点における覆工中心位置を基準として測った地山の相対的な剛体変位に相当し, 式 (53) の説明で明らかのように, w_1 は

$t=0$ では 0 である。また連立方程式中の未知数の数は地山では 8 個 (うち 1 個は剛体変位 k_s), 覆工では 14 個 (うち 1 個は剛体変位 k_l) で合計 22 個となる。しかし式 (61) を用いて k_s と k_l の代わりに k_s, k_l を 1 個の未知数 w_1 で代表させれば, 未知数の数は 21 個となる。これらの未知数の決定には式 (53) のほかさらに次の 2 境界条件を用いる。

(a) 覆工外周面と地山開削面との接触面 ($r=a$) における直応力とせん断応力の応力連続条件式:

$$(\sigma_{rs})_{r=a} = (\sigma_{rl})_{r=a}, (\tau_s)_{r=a} = (\tau_l)_{r=a} \dots\dots(62)$$

(b) 覆工内面 ($r=b$) の無支持に対する応力条件式:

$$(\sigma_{rl})_{r=b} = 0, (\tau_l)_{r=b} = 0 \dots\dots\dots(63)$$

式 (46), (52) を考慮して式 (43) を地山の応力式や添字 l をつけ覆工の応力式として式 (62) 第 1, 第 2 式に代入し, 得られた未知数の一次式を式 (54) と同様にそれぞれ f, φ の関数で表わすと

$$\left. \begin{aligned} f_0(a_0, a_{10}, b_{10}) + f_1(a_1, a_1', a_{11}, b_{11}, a_{11}') \cos \theta \\ + f_2(a_2', b_2', a_{12}, b_{12}, a_{12}', b_{12}') \cos 2\theta \\ + f_3(a_3', b_3', a_{13}, b_{13}, a_{13}', b_{13}') \cos 3\theta = 0 \\ \varphi_1(a_1, a_1', a_{11}, b_{11}, a_{11}') \sin \theta \\ + \varphi_2(a_2', b_2', a_{12}, b_{12}, a_{12}', b_{12}') \sin 2\theta \\ + \varphi_3(a_3', b_3', a_{13}, b_{13}, a_{13}', b_{13}') \sin 3\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(64)$$

式 (63) に同様に σ_{rl}, τ_l を代入すると上式中の添字 l をもつ項のみからなる未定係数の一次式 (記載省略) となる。

式(53), (62), (63) の 3 式はいずれも u または σ_r に関する第 1 式と v または τ に関する第 2 式からなるから, 各式を未知数を含む式にかきなおすと未知数 (未定係数 20 個と w_1) の一次式からなる合計 6 個の連立方程式となる。なおこれらの方程式のうち, σ_r および u に関する 3 式は数個の未知数の一次結合と $\cos n\theta$ (ただし $n=0, 1, 2$ または 3) との積からなり, 一方 τ および v に関する 3 式は未知数の一次結合と $\sin n\theta$ (ただし $n=1, 2$ または 3) との積からできている (たとえば式 (64) 参照)。これら 6 個の連立方程式は θ のいかんにかかわらず成立せねばならないから $\cos n\theta, \sin n\theta$ のそれぞれの n ごとにその乗数である一次結合の和は 0 となる必要がある。上記のように, $\cos n\theta$ の積和を含む連立方程式の数は 3 個, 各連立方程式中の n の数は $n=0, 1, 2, 3$ と計 4 個であるから, これら 3 連立方程式から 12 個 ($3 \times 4=12$) の方程式が得られる。また同様に $\sin n\theta$ をもつ 3 式では n の数は, $n=1, 2, 3$ とそれぞれ 3 個であるから 9 個の方程式が得られる。このように 3 境界条件式より合計 21 個の一次式からなる連立方程式が得られるので, それらの根として 21 個の未知数の値を決定することができる。これら 21 個の方

程式は $n=0, 1, 2, 3$ に対して次の matrix 表示の式 (65)~(68) のように 4 群にわかれ、 $n=0$ に属する 3 個の連立方程式からは添字 0 をもつ 3 個の未定係数 (a_0, a_{10}, b_{10}) が、また $n=1, 2$ および 3 に属するそれぞれ 6 式からなる matrix で示した連立方程式からはそれぞれ添字 1, 2 および 3 をもつ各 6 個の未定係数または剛体変位、すなわちそれぞれ ($a_1, a_1', w_1, a_{11}, a_{11}', b_{11}$),

($a_2', b_2', a_{12}, a_{12}', b_{12}, b_{12}'$) および ($a_3', b_3', a_{13}, a_{13}', a_{b1}, b_{13}'$) の 21 の値が求められる。前述のように Lamé の定数は素掘り期間 t_c 、覆工構築後の経過時間 t によって変化するから、それらの時間要素に応じて各時点の未定係数と剛体変位が算定できる。ゆえにそれらを応力・変形の式に入れることによって地山や覆工の応力、変形、覆工土圧などの経時変化を求めることができる。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{a^2} & 2 & -\frac{1}{a^2} \\ -\frac{1}{2\mu_1 a} & \frac{a}{\lambda_l + \mu_l} & \frac{1}{2\mu_s a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{10} \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b_0 \\ \frac{a \cdot b_0}{\lambda_s + \mu_s} + \frac{(2-\beta)a\gamma_s H}{4(\lambda_s + \mu_s)} + \frac{(2-\beta)a\gamma_s H}{4\mu_c} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(65)$$

ここに $b_0 = -(2-\beta)\gamma_s H/4$

$$\begin{pmatrix} \left\{1 - \frac{\mu_l}{2(\lambda_l + 2\mu_l)}\right\} \frac{1}{b} & 2b & -\frac{2}{b^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_l}{2b(\lambda_l + 2\mu_l)} & 2b & -\frac{2}{b^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left\{1 - \frac{\mu_l}{2(\lambda_l + 2\mu_l)}\right\} \frac{1}{a} & 2a & -\frac{2}{a^3} & -\left\{1 - \frac{\mu_s}{2(\lambda_s + 2\mu_s)}\right\} \frac{1}{a} & \frac{2}{a^3} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_l}{2(\lambda_l + 2\mu_l)} \frac{1}{a} & 2a & -\frac{2}{a^3} & \frac{\mu_s}{2(\lambda_s + 2\mu_s)} & \frac{2}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{\log a}{4(\lambda_l + \mu_l)} \left(\frac{\lambda_l + 2\mu_l}{\mu_l} - \frac{\mu_l}{\lambda_l + 2\mu_l} \right) & \frac{(-\lambda_l + \mu_l)a^2}{2\mu_l(\lambda_l + \mu_l)} & \frac{1}{2\mu_1 a^2} & -\frac{\log a}{4(\lambda_s + \mu_s)} \left\{ \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\mu_s} - \frac{\mu_s}{\lambda_s + 2\mu_s} \right\} & -\frac{1}{2\mu_s a^2} & -1 & -1 \\ -\frac{1}{4(\lambda_l + \mu_l)} \left[\frac{\lambda_l + (\lambda_l + 2\mu_l)\log a}{\mu_l} \right] & \frac{(3\lambda_l + 5\mu_l)a^2}{2\mu_l(\lambda_l + \mu_l)} & \frac{1}{2\mu_1 a^2} & \frac{1}{4(\lambda_s + \mu_s)} \left[\frac{\lambda_s + (\lambda_s + 2\mu_s)\log a}{\mu_s} + \frac{\mu_s(1 - \log a)}{\lambda_s + 2\mu_s} \right] & -\frac{1}{2\mu_s a^2} & 1 & 1 \\ + \frac{\mu_l(1 - \log a)}{\lambda_l + 2\mu_l} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ b_{11} \\ a_{11}' \\ a_1 \\ a_1' \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_l b \\ 0 \\ 2ab_1 + r_s a - r_l a \\ 2ab_1 \\ \frac{-(\lambda_s - \mu_s)}{2\mu_s(\lambda_s + \mu_s)} b_1 a^2 + \left[\frac{\gamma_s}{4(\lambda_s + \mu_s)} - \frac{\gamma_l^2}{4(\lambda_l + \mu_l)} \right] a^2 - \frac{(-\mu_s + \lambda_s + 4\mu_s/\beta)}{16\mu_s(\lambda_s + \mu_s)} a^2 \beta \gamma_s - \frac{(\mu_c \beta - 2\lambda_c - 4\mu_c)}{8\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} a^2 \gamma_s \log a \\ \frac{3\lambda_s + 5\mu_s}{2\mu_s(\lambda_s + \mu_s)} a^2 b_1 + \left[\frac{\gamma_s}{4(\lambda_s + \mu_s)} - \frac{\gamma_l}{4(\lambda_l + \mu_l)} \right] a^2 - \frac{(4\mu_s/\beta - 3\lambda_s - 5\mu_s)}{16\mu_s(\lambda_s + \mu_s)} a^2 \beta \gamma_s - \left\{ \frac{(2\lambda_c + 4\mu_c - \mu_c \beta)}{8\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} \right\} a^2 \gamma_s \log a \\ + \frac{a^2 \gamma_s (2\lambda_c + \mu_c \beta)}{8\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} \end{pmatrix}$$

ここに $b_1 = -\frac{\beta \gamma_s}{8}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{6}{b^4} & -\frac{4}{b^2} & 0 & 0 \\ 2 & 6b^2 & -\frac{6}{b^4} & -\frac{2}{b^2} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{6}{a^4} & -\frac{4}{a^2} & \frac{6}{a^4} & \frac{4}{a^2} \\ 2 & \frac{6}{a^2} & -\frac{6}{a^4} & -\frac{2}{a^2} & \frac{6}{a^4} & \frac{2}{a^2} \\ \frac{a}{\mu_l} & \frac{-\lambda_l a^3}{\mu_l(\lambda_l + \mu_l)} & \frac{1}{\mu_1 a^3} & \frac{\lambda_l + 2\mu_l}{\mu_l(\lambda_l + \mu_l) a} & -\frac{1}{\mu_s a^3} & -\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\mu_s(\lambda_s + \mu_s) a} \\ \frac{a}{\mu_l} & \frac{(2\lambda_l + 3\mu_l)a^3}{\mu_l(\lambda_l + \mu_l)} & \frac{1}{\mu_1 a^3} & \frac{1}{a(\lambda_l + \mu_l)} & -\frac{1}{\mu_s a^3} & \frac{1}{a(\lambda_s + \mu_s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ b_{12} \\ a_{12}' \\ b_{12}' \\ a_2' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta \frac{\gamma_s H}{2} \\ \beta \frac{\gamma_s H}{2} \\ \frac{Ha \gamma_s \beta (\lambda_c + 3\mu_c)}{4\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} \\ -\frac{Ha \gamma_s \beta (\lambda_c + 3\mu_c)}{4\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(67)$$

$$\begin{pmatrix} -6b & -4b^3 & -\frac{12}{b^5} & -\frac{10}{b^3} & 0 & 0 \\ 6b & 12b^3 & -\frac{12}{b^5} & -\frac{6}{b^3} & 0 & 0 \\ -6a & -4a^3 & -\frac{12}{a^5} & -\frac{10}{a^3} & \frac{12}{a^5} & \frac{10}{a^3} \\ 6a & 12a^3 & -\frac{12}{a^5} & -\frac{6}{a^3} & \frac{12}{a^5} & \frac{6}{a^3} \\ -\frac{3a^2}{2\mu_l} & \frac{(-3\lambda_l - \mu_l)}{2\mu_l(\lambda_l + \mu_l)}a^4 & \frac{3}{2\mu_l a^4} & \frac{3\lambda_l + 5\mu_l}{2\mu_l(\lambda_l + \mu_l)a^2} & -\frac{3}{2a^4\mu_s} & \frac{3\lambda_s + 5\mu_s}{2\mu_s(\lambda_s + \mu_s)a^2} \\ \frac{3a^2}{2\mu_l} & \frac{5\lambda_l + 7\mu_l}{2\mu_l(\lambda_l + \mu_l)}a^4 & \frac{3}{2\mu_l a^4} & \frac{\lambda_l - \mu_l}{2\mu_l(\lambda_l + \mu_l)a^2} & -\frac{3}{2a^4\mu_s} & \frac{\lambda_s - \mu_s}{2\mu_s(\lambda_s + \mu_s)a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ b_{1s} \\ a_{1s}' \\ b_{1s}' \\ a_s' \\ b_s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a\beta\gamma_s}{4} \\ \frac{a\beta\gamma_s}{4} \\ \frac{(\lambda_c + 3\mu_c)a^2\gamma_s\beta}{16\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} \\ \frac{(\lambda_c + 3\mu_c)a^2\gamma_s\beta}{16\mu_c(\lambda_c + \mu_c)} \end{pmatrix} \quad (68)$$

本節 4.(3) でのべた重力の場を対象とした解は、3. のべた等方圧の場合と次の点で内容が多少相違する。すなわち自然地山を一次元的に自重で圧縮されたものと考えると水平方向の初期ひずみはないから、式(21)中の ϵ_{x0} は本節の場合 $\epsilon_{x0}=0$ である。また 3. の等方圧の場合は式(33)のように $\sigma_m=0$ であるから開削面の変位は地山のせん断ひずみにのみ基因しているが、4. の場合は式(43)の応力式からみられるように必ずしも $\sigma_m=0$ でない。ゆえに 4. の場合の開削面の変位は地山のせん断ひずみのほかに若干の体積ひずみすなわち吸水膨張や脱水圧密の過程も関係することとなる。ここでは体積変化と σ_m の関係は Lamé の定数を通じて表わしてせん断変形の場合と同様に線形関係として扱ったことになるが、体積変化に対する間げき水の加圧や移動についての時間過程については考えないこととした。

【数値計算例】

以上の解に数値を入れて覆工土圧 $(\sigma_r)_{r=a}$ と開削面の地山応力 $(\sigma_\theta)_{r=a}$ の算定を試みた。用いた数値は、
 覆工外径 $a=100$ cm, 覆工内径 $b=90$ cm, コンクリート覆工の密度 $\tau_l=0.0025$ kg/cm³, 地山粘土の密度 $\tau_s=0.0016$ kg/cm³ (実験値), コンクリートの弾性係数 $E_l=2.1 \times 10^8$ kg/cm², 地山粘土の最終弾性係数 $E_\infty=21.93$ kg/cm² (実験値), コンクリートのポアソン比 $\nu_l=0.167$, 粘土のポアソン比 $\nu=0.3$, 粘土の上限降伏値 $\tau_u=0.38$ kg/cm² (実験値), 素掘り期間中のクリープ時間 $t_c=2h=7200$ sec, トンネル中心以上の土かぶり $H=600$ cm.

上記の τ_s, E_∞, τ_u はある大阪沖積層粘土についての実験値であるが、この粘土をクリープ試験および応力緩和試験を行なって求めた time factor $\phi(t)$ および $\psi(t)$, (t : sec) の実験値は;

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 0.273 + 0.0774 \log_{10} t, \\ \psi(t) &= 2.580 - 0.2603 \log_{10} t \end{aligned}$$

これらの数値を式(65)~(68)に用い、覆工構築後長時間が経過し、覆工土圧が最大に近くなったとしたとき

(計算では $\psi(t_s+t) = 1$ のときの土圧 $(\sigma_r)_{r=a}$, $(\sigma_\theta)_{r=a}$ の値を電子計算機(京大 FACOM 230-60)を用いて求め、結果を図-5に示した。前述のように、この解析で

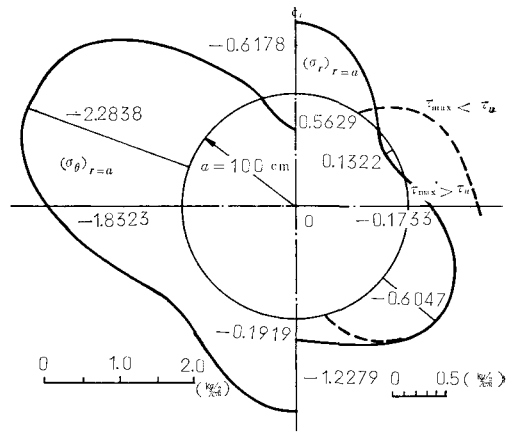


図-5 開削面 ($r=a$) における地山の σ_r と σ_θ の分布 (単位 kg/cm²) および $\tau_{max} > \tau_u$ の領域

は地山に塑性域の生じることは前提としていないが、地山の上限降伏値 τ_u を 0.38 kg/cm² とすると、地山の主せん断応力 τ_{max} が τ_u を越す領域が図-5の点線内方のように生じる。この領域は塑性域と同一ではないが、近似的に塑性域とみるとこの領域の形は New Austrian Tunneling Method⁹⁾ の中で仮説ながらこの工法のよりどころの一つとしている塑性域¹⁰⁾の形状とかなりよく似た形をとっている。

5. あとがき

現実のトンネルでは、地山が十分強剛でないと、開削後覆工構築までの間、地山開削面は時とともに変形を増大する。このような開削面の流動変形が終結する以前に覆工を構築すると、地山の流動が抑制される結果、覆工には地山の応力緩和のための覆工土圧が生じ、土圧は所定の値に達するまでの期間、時とともに増大する。

この報文は、上述のような覆工土圧の時間依存性、施

工依存性を解明するため、地山を均質粘土のような一様な粘弾性体と想定し、粘土のクリープ過程後の応力緩和特性をレオロジー的に解明するとともに、トンネルの施工過程中的素掘り期間の存在、坑内圧気圧の加除、覆工施工時期のほか覆工剛度、地山の自重などの実際的な施工条件を示す要素を計数的に導入して、地山開削面のクリープ変形の推移や地山の応力緩和に基づく覆工土圧の経時変化とその大きさを理論的に解析する一方法を示したものである。

参 考 文 献

- 1) 村山朔郎：粘性土中のトンネル土圧について，第18回土木学会年次学術講演会講演概要 III, pp. 57~58, 1963.
村山朔郎：トンネル土圧，土木学会第3回トンネル工学シンポジウム，pp. 10~14, 1966.
村山朔郎・松岡 元：粘性土の応力緩和によるトンネル土圧，土木学会論文報告集，No. 168, pp. 37~43, 1969-9.
桜井春輔：粘弾塑性地山内の円形トンネル覆工について，土木学会論文報告集，No. 181, pp. 77~89, 1970-9.
- 2) 村山朔郎：粘土のレオロジー特性の確率論的考察，材料，

- 14 卷，139 号，pp. 282~288, 1965-4.
- 3) 村山朔郎：1) の第1および第2.
- 4) Hanns Schmid：Statische Probleme des Tunnel- und Druckstollenbaues und ihre gegenseitigen Beziehungen, Berlin Verlag von Julius Springer, 1926.
- 5) 山口 昇：On the stresses around a horizontal circular hole in gravitating elastic solid, 土木学会誌, Vol. 15, No. 4, pp. 291~303, 1929-4.
- 6) N.I. Muskhelishvili：Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, N.V. Noordhoff Groningen Holland, 4th corrected and augmented edition, pp. 205~208, 1954.
- 7) 谷本勉之助：巻立円形隧道の応力分布，土木学会誌 Vol. 23, No. 4, pp. 357~379, 1937-4.
- 8) 小田英一：巻立楕円形トンネル周辺の応力分布について，土木学会論文集，No. 24, pp. 12~18, 1955-4.
- 9) L.V. Rabcewicz：The new Austrian tunneling method, Water Power, p. 456, 1964-11.
- 10) L.V. Rabcewicz und K. Sattler：Die neue Österreichische Tunnelbauweise, Bauingenieur, Ann. 40, Vol. 8, pp. 289~301, 1965.

(1972.1.28・受付)