土木学会論文報告集
第 205 号・1972 年 9 月

動的共役ばりに関する基礎的な研究

STUDIES ON A DYNAMIC CONJUGATED BEAMS

中　川　建　治*
By Kenji Nakagawa

要　旨　はりに関するモールの定理は，静荷重に対する変位と曲げモーメントの関係を共役ばりをもって説明したものである。著者は，はりの動的挙動の場合についても共役ばり的な関係が定義されることを導き，煙突の固有値解析と地震動応答の解析の数値解析例を示した。

1. 動的共役ばり

(1) 動的共役ばりの定義

本文では，特に断わらない限り，対象を自立煙突のような片持ばりとする。片持ばりの曲げ振動の運動方程式は，減衰力のない自由振動では，

$$w(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{G(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right\}=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

であり，境界条件式は

$$\left.\begin{aligned}&x=0: y(x,t)=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=0\\&x=L: \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left\{G(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(2)$$

となる。ここで，$w(x)$ は単位長さあたりの質量で，$G(x)$ は断面の曲げ剛さ $G(x)=EI(x)$ である。この運動方程式を，スパン L を n 等分割する差分法で表現して，式（2）を考慮して整理すると，

$$[w]\{\ddot{y}\}+\frac{1}{h^4}[s]\{y\}=\{0\} \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&[S]=[D_L]^2[B]^T[G][D_u]^2[B]\\&L=nh\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&[w]=\begin{bmatrix}w_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & w_n\end{bmatrix}\quad [G]=\begin{bmatrix}G_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & G_{n-1}\end{bmatrix}\\
&[D_u]=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}\quad [D_L]=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & \sqrt{2}\end{bmatrix}\\
&[B]=\begin{bmatrix}1 & & & & & 0\\ -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad \{y\}=\begin{Bmatrix}y_1(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

と表現される。$[w]$ は格点の単位長さあたりの質量 w_i を対角元とした対角行列である。なお，格点番号は，埋込端が 0 で自由端が n とする。

差分法によって各格点の水平変位 $\{y\}$ より曲げモーメント $\{M\}$ を求めるには，

$$\{M\}=-\frac{1}{h^2}[G][D_u]^2[B]\{y\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

が用いられる。これを式 (3) へ代入すると，

$$[w]\{\ddot{y}\}-\frac{1}{h^2}[D_L]^2[B]^T\{M\}=\{0\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

が得られる。式 (6) と式 (7) より $\{\ddot{y}\}$ を消去すると，

$$[G]^{-1}\{\ddot{M}\}+\frac{1}{h^4}[D_u]^2[B][w]^{-1}[D_L]^2[B]^T\{M\}=\{0\} \qquad \cdots\cdots(8)$$

が得られる。これは $\{y\}$ の微分方程式を，$\{y\}$ が x 方向に 6 回微分可能であるという仮定のもとに $\{M\}$ で表現したものである。式 (3) と式 (8) の対応関係は，

$$\left.\begin{aligned}&[w]\leftrightarrow[G]^{-1},\quad [D_u]^2[B]\leftrightarrow[D_L]^2[B]^T\\&[G]\leftrightarrow[w]^{-1},\quad [D_L]^2[B]^T\leftrightarrow[D_u]^2[B]\\&\{y\}\leftrightarrow\{M\}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(9)$$

である。$[D_u]^2[B]$ と $[D_L]^2[B]$ とは 2 階微分演算子 d^2/dx^2 に対応したものであるが，片持ばりの自由端と固定端の境界条件を反対にしたものになっている。したがって，次のような関係が成立することが推察されよう。

$x=0$ が固定端で，単位長さあたりの質量と曲げ剛さ

* 正会員　工修　山口大学助教授　工学部土木工学科

とを $w(x)$, $G(x)$ とする片持ばり（あるいは，質量分布 $[w]$，曲げ剛さ分布 $[G]$ の片持ばり）に対して，質量分布が，$q(x)=1/G(x)$，曲げ剛さ分布が $R(x)=1/w(x)$ $([q]=[G]^{-1}$, $[R]=[w]^{-1})$ で，自由端と固定端を交換した同じスパンの片持ばりを設定して，これを元のはりに対する動的共役ばりと仮称する。この $w-G$ 系のはりと $q-R$ 系のはりとは互いに共役である。一方のはりの固有周期と変位の固有モードとを求めると，これらは，それぞれ他方のはりの固有周期と曲げモーメントの固有モードに対応する。

実際には，互いに共役なはりの運動方程式としては，式 (3) と式 (8) の剛性行列は非対称で，数値計算には不都合であるから，n 自由度の集中質点系の振動方程式へ変換するために，式 (3) の両辺に左側より $h[D_L]^2$ を乗じ，式 (8) の両辺に左側より $h[D_u]^2$ を乗じて整理すると次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&[w]\{\ddot{y}\}+\frac{1}{h^3}[B]^T[D_u][G][D_u][B]\{y\}=\{0\}\\&[Q]\{\ddot{M}\}+\frac{1}{h^3}[B][D_L][R][D_L][B]^T\{M\}=\{0\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

$$\left.\begin{aligned}&[Q]=\begin{bmatrix}Q_0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & Q_{n-1}\end{bmatrix}=h[D_u]^{-2}[G]^{-1}\\&[W]=\begin{bmatrix}W_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & W_n\end{bmatrix}=h[D_L]^{-2}[R]^{-1}\\&[R]=[w]^{-1},\quad [G]=[q]^{-1}\\&Q_0=h/2\,G_0=hq_0/2,\quad Q_i=hq_i\\&W_n=h/2\,R_n=hw_n/2,\quad W_i=h\,w_i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(11)$$

（2） 連続系としての検討

動的共役ばりに関する諸関係を検討するには，連続系として検討するのが都合のよい部分と，不連続系として行列演算で証明するのがよい部分とが存在する。$n\to\infty$ とすれば不連続系より連続系へ変換されるので，差分法で表現された関係が連続系でも成立することがわかる。

$\{M\}$ を $\{\eta\}$ と表わして式 (10) を連続系に変換すると，互いに共役なはりの自由振動方程式は，

$$\left.\begin{aligned}&w(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{G(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}=0\\&q(x)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{R(x)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right\}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

$$q(x)=\frac{1}{G(x)},\ R(x)=\frac{1}{w(x)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

となる。式 (12) の第1式の w-G 系の固有円振動数と変位モードとを $\omega_1, \omega_2, \cdots, \psi_1(x), \psi_2(x)\cdots$ として，第2式の q-R 系の固有円振動数と変位モードとを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, V_1(x), V_2(x), \cdots$ とする。

$y(x,t)=c_je^{i\omega_jt}\psi_j(x)$ として式 (12) へ代入して，$\psi_k(x)$ を両辺に乗じて x に関して 0 より L まで積分して，さらに，境界条件式 (2) のもとに部分積分すると，

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^L w(x)\psi_k(x)\psi_j(x)dx=0\\&\int_0^L G(x)\psi_R''(x)\psi_j''(x)dx=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

が得られることは断わるまでもない。同様にして，$\eta(x,t)=c_j'e^{i\alpha_jt}V_j(x)$ を式 (12) の第2式へ代入すると

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^L q(x)V_R(x)V_j(x)dx=0\\&\int_0^L R(x)V_R''(x)V_j''(x)\,dx=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

が得られる。ここで，w-G 系と q-R 系とは互いに共役であるから $\psi_j(x)$ と $V_j(x)$ とは正規化されているか否かを問わず適当な定数 $S_{1,j}$, $S_{2,j}$ によって，

$$\left.\begin{aligned}&G(x)\psi_j''(x)=-S_{1,j}V_j(x)\\&R(x)V_j''(x)=-S_{2,j}\psi_j(x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

が成立している。これを式 (14) と式 (15) とへ代入すると，

$$\int_0^L\psi_k''(x)V_j(x)dx=\int_0^L V_k''(x)\psi_j(x)dx=0\cdots(17)$$
$$k\fallingdotseq j$$

が得られる。

（3） n 自由度系としての検討

連続系より n 自由度系へ戻り $\{M\}$ を $\{\eta\}$ と表わすと，式 (10) は

$$\left.\begin{aligned}&[W]\{\ddot{y}\}+\frac{1}{h^3}[B]^T[D_u][G][D_u][B]\{y\}=\{0\}\\&[Q]\{\ddot{\eta}\}+\frac{1}{h^3}[B][D_L][R][D_L][B]^T\{\eta\}=\{0\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

となる。第1式（W-G 系）の固有値と固有モードを $[\lambda]$, $[\psi]$ として，第2式（Q-R 系）の固有値と固有モードを $[\mu]$, $[V]$ とすると，それぞれの固有値問題は，

$$\left.\begin{aligned}&[\psi]^T[B]^T[D_u][G][D_u][B][\psi]=[\lambda]h^3\\&[\psi]^T[W][\psi]=E\end{aligned}\right\}\cdots(19)$$

$$\left.\begin{aligned}&[V]^T[B][D_L][R][D_L][B]^T[V]=[\mu]h^3\\&[V]^T[Q][V]=E\end{aligned}\right\}\cdots(20)$$

と表現される。$\psi(x)$ と $[\psi]$, $V(x)$ と $[V]$ がそれぞれ対応しているので，式 (14) と式 (15) の第1式が式 (19) と式 (20) の第2式に対応することがわかる。

$[\psi]$ と $[V]$ とはそれぞれ $[W]$, $[Q]$ を重みとする直交行列であるから，完全直交行列 $[\varphi]$, $[u]$ を

$$\left.\begin{aligned}&[\varphi]=W]^{1/2}[\psi],\quad [\varphi]^T[\varphi]=E\\&[u]=[Q]^{1/2}[V],\quad [u]^T[u]=E\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

と定義して，式 (19) と式 (20) とへ代入すると次のような関係を得る。

$$h^3[\lambda]=[\varphi]^T[A_2]^T[A_2][\varphi]=[A_2]^T[A_2]\cdots(22)$$

$$[A_2]=[u]^T[G]^{1/2}[D_u][B][W]^{-1/2}[\varphi]\cdots(23)$$

$$h^3[\mu]=[A_3][A_3]^T\cdots\cdots(24)$$

$$[A_3]=[Q]^{-1/2}[B][D_L][R]^{1/2}\cdots\cdots(25)$$

さらに，式 (11) の関係を式 (23) と式 (25) へ代入すると

$$[A_2]=[u]^T[G]^{1/2}[D_u][B][D_L][R]^{1/2}[\varphi]h^{-1/2}$$

$$[A_3]=[G]^{1/2}[D_u][B][D_L][R]^{1/2}h^{-1/2}$$

$$\therefore\quad [A_2]=[u]^T[A_3][\varphi]\cdots\cdots(26)$$

という関係が得られ，式 (22) と式 (24) は

$$\left.\begin{array}{l} h^3[\lambda]=[A_2]^T[A_2] \\ h^3[\mu]=[A_2][A_2]^T \end{array}\right\}\cdots\cdots(27)$$

と変形される。行列の固有値と固有ベクトルに関しては，正則行列 $[C_1]$ と $[C_2]$ との積 $[C_1][C_2]$ の固有値は $[C_2][C_1]$ の固有値に一致するという定理が存在する。したがって，式 (27) より，互いに共役な片持ばりの固有値は一致する。

$$[\lambda]=[\mu]\cdots\cdots(28)$$

という関係が証明された。

なお，$[A_2]$ は正規行列であることは式 (27) よりわかるが，対角行列であるという証明は得られていない。これは，式 (23) と式 (21)，式 (11) より

$$[A_2]=[V]^T[Q]^{1/2}[G]^{1/2}[D_u][B][W]^{-1/2}[W]^{1/2}[\psi]$$

$$=\sqrt{h}\,[V]^T[B][\psi]\cdots\cdots(29)$$

が得られることと，式 (17) より示される。なぜならば，$[B]$ は2階微分演算子 d^2/dx^2 に対応しているから $n\to\infty$ とすれば $h^2[V]^T[B][\psi]$ は式 (17) へ収れんして，

$$\left.\begin{array}{l} [A_2]=h^{3/2}[\lambda]^{1/2} \\ [V]^T[B][\psi]=h[\lambda]^{1/2} \end{array}\right\}\cdots\cdots(30)$$

が成立する。式 (29) を連続系で表現すれば，

$$\int_0^L V_k(x)\psi_j''(x)\,dx=\int_0^L V_R''(x)\psi_j(x)\,dx$$

$$=\sqrt{\lambda_j}\,\delta_{jk}\cdots\cdots(31)$$

となる。以上で動的共役ばりの諸関係の証明が得られた。

(4) 基本周期の近似計算法に対する検討

著者は，変断面片持ばりの基本周期の近似計算法として固有周期の自乗和 $\Gamma=\Sigma T_i^2$ より推定する方法を提唱して，Γ を近似的に求めるには曲げ剛さ EI_0 を固定端より $L/5$ の値 $EI(L/5)$ として，質量分布 w_0 を自由端より $L/5$ の値 $w(4L/5)$ とした等断面片持ばり (EI_0, w_0, L) を設定すればよいことを文献 1) に示した。なぜこのような等価等断面ばりの Γ が第1近似として正しい値を与えるのであろうか。これは，次のようにして動的共役ばりの考え方より説明される。

曲げ剛さを $EI(x)$，単位長さあたりの質量を $w(x)$，スパン L の片持ばりの Γ は，無次元化変数 $\xi=x/L$ によって表わすと，

$$\Gamma=\sum_1^\infty T_i^2=4\pi^2L^4\int_0^1\int_\xi^1 w(u)\frac{(u-\xi)^2}{EI(\xi)}du\cdot d\xi\cdots\cdots(32)$$

となる。このはりの共役ばりの単位長さあたりの質量を $q(x)$ とすると，

$$q(\xi)=\frac{1}{EI(\xi)}\cdots\cdots(33)$$

$$\Gamma=4\pi^2L^4\int_0^1\int_\xi^1 w(u)q(\xi)(u-\xi)^2du\,d\xi\cdots\cdots(34)$$

となる。しかるに，動的共役ばりでは自由端と固定端とが反対になっているので，座標変換して

$$q_c(\xi)=q(1-\xi)=\frac{1}{EI(1-\xi)}\cdots\cdots(35)$$

とすると，式 (34) の Γ は

$$\Gamma=4\pi^2L^4\int_0^1\int_{1-\xi}^1 w(u)q_c(\xi)(1-\xi-u)^2du\,d\xi\cdots\cdots(36)$$

となる。これは u と ξ とに関する3角領域

$$\left.\begin{array}{l} 0<u<1 \\ 0<\xi<1 \\ \xi+u>1 \end{array}\right\}\cdots\cdots(37)$$

における $w(u)q_c(\xi)(1-\xi-u)^2$ の積分であって，$u=\xi$ の直線に関して $(1-\xi-u)^2$ は対称である。さらに，一般の煙突状の片持ばりでは，$w(u)$ も $q_c(\xi)$ も単調減少関数とみなしてよいであろう。式 (36) では $w(u)$ も $q_c(\xi)$ も Γ に対して同等の形で影響するので，以上の関係を考慮して，第1近似として

$$\int_0^1\int_{1-\xi}^1 w(u)q_c(\xi)(1-\xi-u)^2du\,d\xi$$

$$=w(0.8)\int_0^1\int_{1-\xi}^1 q_c(\xi)(1-\xi-u)^2du\,d\xi$$

が成立するならば

$$\int_0^1\int_{1-\xi}^1 w(u)q_c(\xi)(1-\xi-u)^2du\,d\xi$$

$$=q_c(0.8)\int_0^1\int_{1-\xi}^1 w(u)(1-\xi-u)^2du\,d\xi$$

も第1近似として成立すると推定される。$q_c(0.8)$ は $q(0.2)$ であって，固定端より $L/5$ の EI を採用することを意味する。このようにして，$EI(x)$ は固定端より $w(x)$ は自由端よりそれぞれ $L/5$ の位置の値を採る近似計算の解釈が与えられた。

(5) 単純支持ばりの動的共役ばり

単純支持ばりに対しても，前述のような動的共役ばりを定義することは可能である。スパン L，曲げ剛さ $G(x)$，単位長さあたりの質量 $w(x)$ の単純支持ばりの

曲げ変形による自由振動方程式を n 等分割（分割点は支点を含めて 0〜n+1）による差分法によって表わすと，

$$[w]\{\ddot{y}\}+\frac{1}{h^4}[B_s]^T[G][B]\{y\}=\{0\}\cdots\cdots(38)$$

$$\left.\begin{array}{l}[w]=\begin{bmatrix}w_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & w_n\end{bmatrix},\quad [G]=\begin{bmatrix}G_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & G_n\end{bmatrix}\\ [B_s]=[B_s]^T=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & -2 & 1\\ & & & 1 & -2\end{bmatrix},\quad L=nh\end{array}\right\}\cdots(39)$$

となる。これは式 (3) に対応したものであり，$[D_u]$ に対応したものは現われず，$[B_s]$ は対称行列となることより，動的共役ばりの諸関係を証明することは片持ばりの場合より簡単になる（$[B_s]=[B_s]^T$, $[D_u]=[D_L]=E$ とすればよい）。よって，改めて証明するまでもなく，次の関係が得られる。

元の単純支持ばりに対して $q(x)=1/G(x)$ という単位長さのあたりの質量と，$R(x)=1/w(x)$ という曲げ剛さをもつ等しいスパンの単純支持ばりを動的共役ばりと定義する。互いに共役なはりの固有値は一致して，一方の変位モードは他方の曲げモーメントモードに対応する。

単純支持ばりについては地震動応答はあまり必要ではないので，定義するのみで詳しい証明は省略する。

2. 動的共役ばりの地震動に対する応答

（1） n 自由度系の応答

n 自由度の集中質点系（W-G 系）の片持ばりの固定端に地震加速度 $\ddot{z}(t)$ が作用するものとする。固定端を原点とする相対座標系を $\{y\}$ として，減衰力を無視した振動方程式を導くと，式 (18) と同様にして

$$[W]\{\ddot{y}\}+\frac{1}{h^3}[B]^T[D_u][G][D_u[B]\{y\}=-[W]\{\ddot{z}\}\cdots\cdots(40)$$

が得られる。曲げモーメント $\{M\}$ は式 (6) によって求められる。式 (8) を導いたようにして式 (6) と式 (40) より $\{y\}$ と $\{\ddot{y}\}$ を消去すると，共役ばり（Q-R 系）を対象にした振動方程式

$$[Q]\{\ddot{M}\}+\frac{1}{h^3}[B][D_L][R][D_L][B]^T\{M\}$$

$$=\frac{1}{h}[B]\{\ddot{z}\}=\begin{Bmatrix}1\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{Bmatrix}\frac{\ddot{z}(\tau)}{h}\cdots\cdots(41)$$

が得られる。これは，動的共役ばりにおいては，その自由端に $\ddot{z}/h$ という水平力とその隣接格点に $-\ddot{z}/h$ という水平力のみを強制力として作用させるということを示している。$n\to\infty$ とすれば，この水平力は $h\times\ddot{z}/h=\ddot{z}$ という外力モーメントになるので，W-G 系のはりが固定端で $\ddot{z}(\tau)$ という地震加速度を受ける場合の曲げモーメント応答 $\{M\}$ は，共役ばり（Q-R 系）の自由端に外力モーメント $\ddot{z}(\tau)$ を作用させた場合の水平応答に等しいことがわかる。$\{M\}$ を式 (20) に定義した固有モード $[V]$ によって

$$\{M\}=[V]\{\theta(\tau)\}\cdots\cdots(42)$$

と表現して式 (41) へ代入して，左側より $[V]^T$ を両辺に乗じて整理すると

$$\ddot{\theta}_j(\tau)+\lambda_j\theta_j(\tau)=-\dot{v}_{0j}\,\ddot{z}(\tau)\cdots\cdots(43)$$

$$(j=1,2\cdots n)$$

と変換される。ここで，$\dot{v}_{0j}$ とは共役ばり自由端の勾配の第 j モードの成分で

$$\frac{1}{h}[V]^T\begin{Bmatrix}1\\-1\\0\\ \vdots\\0\end{Bmatrix}=\frac{1}{h}\begin{Bmatrix}v_{0,1}-v_{1,1}\\ \vdots\\ v_{0,n}-v_{1,n}\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\dot{v}_{01}\\ \vdots\\ \dot{v}_{0n}\end{Bmatrix}\cdots\cdots(44)$$

より現われる。

さて，各モードの減衰定数を ζ_j として振動方程式 (43) のかわりに，各モード関数 $\theta_j(\tau)$ の方程式を

$$\ddot{\theta}_j(\tau)+2\zeta_j\sqrt{\lambda_j}\,\dot{\theta}_j(\tau)+\lambda_j\theta_j(\tau)=-\dot{v}_{0j}\ddot{z}(\tau)\cdots\cdots(46)$$

と仮定してこのインパルス応答関数を $H_j(\tau)$ とすると，

$$\left.\begin{array}{l}\theta_j(t)=-\dot{v}_{0j}\displaystyle\int_0^t H_j(t-\tau)\ddot{z}(\tau)d\tau\\ M_k(t)=-\displaystyle\sum_{j=1}^{n}v_{kj}\,\dot{v}_{0j}\int_0^t H_j(t-\tau)\ddot{z}(\tau)d\tau\end{array}\right\}\cdots(47)$$

が得られる。これらの関係より次のような結論が得られる。

片持ばり W-G 系が地震加速度 $\ddot{z}(\tau)$ によって応答する場合の曲げモーメント分布 $\{M\}$ は，数値積分によって得られた $\{y\}$ より第 2 次的に式 (6) より求められる。これに対して，共役ばり Q-R 系が自由端に $\ddot{z}(\tau)$ という外力モーメントを受けるものとしてその水平応答を数値積分すれば，これが W-G 系の曲げモーメント分布となる。設計計算では曲げモーメントの分布が必要で $\{y\}$ の必要性は低いことと，$\{y\}$ より求める $\{M\}$ は $\{y\}$ より精度が低下すること，$\{M\}$ より $\{y\}$ を求めることは式 (6) を $\{y\}$ に関して解いた式

$$\{y\}=-h^2[B]^{-1}[D_u]^{-2}[G]^{-1}\{M\}\cdots\cdots(48)$$

によって可能であり，これは数値積分に相当するから精度が向上すること等を考慮すると共役ばりによって解析する方法は有効な方法ではなかろうか。

（2） 連続系の応答

$n\to\infty$ として式 (41) を連続系へ変換すると，

$$q(x)\frac{\partial^2 M}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{R(x)\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right\}=\ddot{z}\frac{d}{dx}\delta(x) \quad \cdots\cdots(49)$$

となる。ここに，$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である。正規化されたモード関数 $V_j(x)$ によって

$$M(x,t)=\sum_1^\infty V_j(x)\theta_j(\tau) \quad \cdots\cdots(50)$$

として式 (49) へ代入してモード関数 $\theta_j(\tau)$ の方程式を求めると，

$$\ddot{\theta}_j(\tau)+\lambda_j\theta_j(\tau)=-\ddot{z}(\tau)\dot{v}_j(0) \quad \cdots\cdots(51)$$

となる。なぜならば，$\dot{\delta}(x)$ との相乗積分は

$$\int_0^L V_j(x)\dot{\delta}(x)dx=-\dot{V}_j(0)=\int_0^L \dot{V}_j(x)dx \quad \cdots\cdots(52)$$

となる。式 (30) と式 (19) より

$$[\psi]^T[B]^T[V]=h[\lambda]^{1/2}$$

$$[\psi]^{T-1}=[W][\psi]$$

$$\therefore\ \frac{1}{h}[B]^T[V]=[W][\psi][\lambda]^{1/2} \quad \cdots\cdots(53)$$

が得られる。ここで $n\to\infty$ とすれば式 (53) は

$$\int_0^L \dot{V}_j(x)dx=\sqrt{\lambda_j}\int_0^L w(x)\psi_j(x)dx \quad \cdots\cdots(54)$$

となることは明らかである。式 (54) を式 (52) へ代入して，さらに式 (51) へ代入すると次のようになる。

$$\ddot{\theta}_j(\tau)+\lambda_j\theta_j(\tau)=\sqrt{\lambda_j}\int_0^L w(x)\psi_j(x)dx\cdot\ddot{z}(\tau) \quad \cdots\cdots(55)$$

式 (46) で減衰項を導入したように各モード成分の減衰定数を ζ_j として式 (55) へ加えると，

$$\ddot{\theta}_j(\tau)+2\zeta_j\sqrt{\lambda_j}\dot{\theta}_j(\tau)+\lambda_j\theta_j(\tau)=\sqrt{\lambda_j}\ddot{z}(\tau)\int_0^L w(x)\psi_j(x)dx \quad \cdots\cdots(56)$$

となる。この系のインパルス応答関数を $H_j(\tau)$ とすると，$\theta_j(\tau)$ と $M(x,\tau)$ は

$$\left.\begin{aligned}\theta_j(\tau)&=\sqrt{\lambda_j}\int_0^L w(x)\psi_j(x)dx\int_0^t H_j(t-\tau)\ddot{z}(\tau)d\tau\\ M(x,\tau)&=\sum_1^\infty\sqrt{\lambda_j}V_j(x)\int_0^L w(\xi)\psi_j(\xi)d\xi\\ &\quad\cdot\int_0^t H_j(t-\tau)\ddot{z}(\tau)d\tau\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(57)$$

となる。式 (30) の第2式と式 (20) の第2式より

$$[B][\psi]=h[Q][V][\lambda]^{1/2}=h^2[D_u]^{-2}[G]^{-1}[V][\lambda]^{1/2}$$

$$[G][D_u]^2[B][\psi]=h^2[V][\lambda]^{1/2}$$

が得られ，$n\to\infty$ とすることにより

$$G(x)\ddot{\psi}_j(x)=\sqrt{\lambda_j}V_j(x) \quad \cdots\cdots(58)$$

が得られる。これを式 (56) へ代入すると $M(x,\tau)$ は

$$M(x,t)=\sum_1^\infty G(x)\ddot{\psi}_j(x)\int_0^L w(\xi)\psi_j(\xi)d\xi\cdot\int_0^t H_j(t-\tau)\ddot{z}(\tau)d\tau \quad \cdots\cdots(59)$$

となる。これは，W-G 系の片持ばりの地震加速度 $\ddot{z}(\tau)$ に対する振動方程式

$$w(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{G(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\}=-w(x)\ddot{z}(\tau)$$

をモード $\psi_j(x)$ に分解して粘性減衰項を加えて解いた式

$$y(x,\tau)=-\sum_1^\infty\psi_j(x)\int_0^L w(\xi)d\xi\int_0^t H_j(t-\tau)\ddot{z}(\tau)d\tau$$

より $M(x,t)=-G(x)\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ として求める曲げモーメント応答と完全に一致する。

以上で共役ばりの地震動応答の解析方法の証明が得られたが，固有値解析の場合と同様に，共役ばりのディメンションについてはまだ言及していない。W-G 系が正しい次元を持つならば，Q-R 系の次元は物理的に意味付けられないものになる。しかし，数値計算においては次元ではなく数値のみを取扱うので，無意味な次元でも結果の数値は正しいのであえて論ずる必要もない。

3. 計 算 例

鉄筋コンクリート製の煙突が，徳山曹達（株）の建設予定煙突としていろいろ検討された。これらの煙突の一例を対象にして，本文で定義した共役ばりの固有値の一致性と応答の一致性の数値計算による検討を行なった。

高さ $L=90$ m で直径 D と管厚 t は直線変化している。分割数 $n=6$ として，断面諸量を表―1 に示す。埋込端格点を 0，自由端を 6 とする。w_i は単位長さあたりの質量であり，$E_c=2.1\times10^5$kg/cm², 比重 $\rho=2.4$ とする。

表―1 断 面 諸 量

i	D(cm)	t(cm)	I(10^{10}cm⁴)	w(kg/cm)
0	900.0	40	1.2658	0.2981
1	881.5	36	1.0546	0.2615
2	863.0	32	0.8661	0.2264
3	844.5	28	0.6987	0.1928
4	826.0	24	0.5509	0.1608
5	807.5	20	0.4213	0.1302
6	789.0	16	0.6085	0.1011

(1) 固有値の一致性

相互に共役なはりの固有値は，差分法で剛性行列を求めて計算すれば完全に一致することは式 (28) が示している。しかるに，一般には固有値計算では断面2次モーメント変化を区間的に階段変化（区間内で一定で区間ごとに変化）するものとして，ひずみエネルギー法によって柔性行列 $[F]$ を作成して固有値の逆数を求めることが多い。この方法では I_i も $[F]$ も差分法の場合とは異なるので，固有値 $[\lambda]$ の計算結果に当然相違が現わ

れる。この相違がどの程度になるかを検討するために，断面２次モーメント I_i と集中質量 W_i の採り方をいろいろ変化させて，互いに共役なはりの固有値の相対誤差を求めよう。

表—2 は元のはり（**表—1** の断面変化のはり）W-G 系の集中質量の３種類の計算法によるもの W_{ai}，W_{bi}，W_{ci} である。

表—2 W-G 系集中質量と断面２次モーメント

i	W_a	W_b	W_c	$I_{Ga}(10^{10})$	$I_{Gb}(10^{10})$
1	392.29	392.57	392.39	1.1573	1.1602
2	339.65	339.93	339.75	0.9576	0.9604
3	289.27	289.56	289.37	0.7798	0.7824
4	241.16	241.44	241.25	0.6224	0.6248
5	195.31	195.59	195.40	0.4839	0.4861
6	75.86	81.62	81.21	0.3629	0.3649

W_{ai}；格点位置における単位長さあたりの質量 w_i に区間長 h=9 000/6 を乗じたもの。頂部は $h/2$ とする。

W_{bi}；格点両側の区間の中央の w_i を平均化して h を乗じたもの。

W_{ci}；格点を中心とする截頭円錐（高さ h）として求めた集中質量。

断面２次モーメントの採り方も２通り I_{Gai}, I_{Gbi} として **表—2** に示す。

I_{Gai}；区間中央の I をその区間の値とする。

I_{Gbi}；区間両端（両格点）の I を平均化したもの。

同様にして共役ばり Q-R 系の集中質量 Q_i と断面２次モーメント I_{Ri} を**表—3** に示す。

表—3 Q-R 系集中質量と断面２次モーメント

i	$Q_a(10^{-15})$	$Q_b(10^{-15})$	$Q_c(10^{-15})$	I_{Ra}	I_{Rb}
1	1 695.6	1 722.3	1 703.0	8.6590	8.7834
2	1 296.7	1 311.9	1 300.8	6.8823	6.9501
3	1 022.4	1 031.8	1 024.9	5.6618	5.7027
4	824.7	830.9	826.4	4.7735	4.8001
5	677.3	681.2	678.4	4.1019	4.1200
6	282.1	308.6	295.0	3.5760	3.5870

Q_{ai}；元のはりの格点上の EI より h/EI_i として求める。

Q_{bi}；元のはりの格点 i の両側区間中央の EI' より $h/2\,EI_i'+h/2\,EI'_{i+1}$ として求める。

Q_{ci}；元のはりの $1/EI$ 図を格点 i を中心とする h 区間で積分して求める。

I_{Rai}；元のはりの区間中央値の w より $1/w$ として求める。

I_{Rbi}；元のはりの区間両端の $1/w$ を平均化する。

以上のように W-G 系も Q-R 系も６通りずつのモデルとして，$[F]$ を求めてより固有値計算を行なった。固有値の逆数 $1/\lambda_1$～$1/\lambda_6$ を**表—4** と**表—5** に示す。低次の固有値はよく一致しているが，高次のもの（$1/\lambda_i$ の小さいもの）は W-G 系と Q-R 系では大きく離れている。第１次の固有値のみを取り出して相対誤差

$$\varepsilon=|\lambda_{WG}-\lambda_{QR}|/\lambda_{WG}$$

を求めて**表—6** に示す。

表—4 W-G 系固有値の逆数 $1/\lambda_{WGi}$

組合せ ＼ i	1 ($\times 10^{-2}$)	2 ($\times 10^{-3}$)	3 ($\times 10^{-4}$)	4 ($\times 10^{-5}$)	5 ($\times 10^{-5}$)	6 ($\times 10^{-5}$)
W_a-G_a	3.4680	1.5244	2.4025	7.0320	2.9263	1.6494
W_a-G_b	3.4582	1.5191	2.3934	7.0048	2.9150	1.6438
W_b-G_a	3.6011	1.5866	2.4808	7.1656	2.9481	1.6523
W_b-G_b	3.5909	1.5811	2.4715	7.1379	2.9368	1.6467
W_c-G_a	3.5337	1.5557	2.4426	7.1012	2.9373	1.6507
W_c-G_a	3.5236	1.5503	2.4334	7.0737	2.9261	1.6451

表—5 Q-R 系固有値の逆数 $1/\lambda_{QRi}$

組合せ ＼ i	1 ($\times 10^{-2}$)	2 ($\times 10^{-3}$)	3 ($\times 10^{-4}$)	4 ($\times 10^{-5}$)	5 ($\times 10^{-5}$)	6 ($\times 10^{-5}$)
Q_a-R_a	3.4935	1.5281	1.6739	6.2975	2.3831	6.9275
Q_a-R_b	3.4806	1.5238	1.6689	6.9103	2.3770	6.9103
Q_b-R_a	3.6017	1.5781	1.6928	7.0786	2.4517	7.0786
Q_b-R_b	3.5883	1.5736	1.6887	7.0610	2.4454	7.0610
Q_c-R_a	3.5422	1.5501	1.6797	6.9986	2.4126	6.9886
Q_c-R_b	3.5291	1.5457	1.6757	6.9712	2.4064	6.9712

表—6 λ_1 の相対誤差 ε（単位 10^{-2}）

	Q_a-R_a	Q_a-R_b	Q_c-R_a	Q_b-R_b	Q_c-R_a	Q_c-R_b
W_a-G_a	0.7351	0.3608	3.8539	3.4688	2.1396	1.7605
-G_b	1.0221	0.6467	4.1497	3.7636	2.4305	2.0504
W_b-G_a	2.9881	3.3485	0.0155	0.3553	1.6355	2.0006
-G_b	2.7110	3.0725	0.3011	0.0708	1.3546	1.7207
W_c-G_a	1.1364	1.5038	1.9244	1.5466	0.2420	0.1301
-G_b	0.8544	1.2228	2.2152	1.8362	0.5279	0.1548

このように，ひずみエネルギー法で区間的に階段変化断面として固有値を求めると，W-G 系と Q-R 系では（W_b-G_a；Q_b-R_a）の組合せが最もよく一致して，次には（W_b-G_b；Q_b-R_b）の組合せであることがわかる。その相対誤差は n=6 で 2～3% となった。W-G 系と Q-R 系で数値のみを対象にするならばいずれが元の系であるかを問わないことから，EI と W の採用方法ではこの程度の誤差が生ずるものとみなすべきであることを示しているとみなしてよいであろう。

（２） 地震応答に対する検討

W-G 系と Q-R 系で λ_1 が最もよく一致している（W_b-G_a；Q_b-R_a）の組合せを採り，これらの地震動に対する応答を数値計算で求めた。詳しい計算過程を省略するが，粘性減衰は各モード成分で等しい減衰定数 ζ=0.01 であるとして，地震動を EL. CENTRO, CALF., U.S.A. 1940, May 16. N-S として，５秒間における応答の最大変位と最大曲げモーメントを求めて**表—7** に示す。

水平変位応答も曲げモーメント応答も W-G 系より Q-R 系の方が約 10% 大きくなっている。これは，$n\to\infty$ では一致するべきものであるが有限自由度系とみなし

表―7 最大応答

i	y_{max}(cm)		M_{max}(10^8kg/cm)	
	W-G	Q-R	W-G	Q-R
0	0.000	0.000	19.878	22.487
1	0.920	1.041	13.225	14.475
2	3.278	3.681	9.918	10.794
3	6.664	7.348	8.018	1.225
4	10.534	11.551	4.785	5.341
5	15.023	16.615	2.042	1.821
6	20.489	22.755	0.000	0.000

たこと，ひずみエネルギー法で［F］を求めたために両系の固有値の差が高次ほど大きくなったことなどに帰因するものであろう。いずれの系がより正しい結果を与えているか，質量と断面2次モーメントの採り方をどのようにするのがより正しい解を与えるか，この結果だけでは推定できないが，$n=6$ として行なう数値計算ではこの程度の誤差は不可避なものであるると推定することは許されるよう。

4. む す び

著者は，構造物の動的応答の数値計算の精度をより向上させる全く新しい解法を求めて模索を繰返し，差分法による剛性行列を行列の積に変換することから動的共役ばりを定義するに至った。差分法よりひずみエネルギー的に［F］を求める解法が精度がよいであろうとただ漠然と著者は考えていたが，互いに共役なはりの固有値は差分法では一致するが，ひずみエネルギー法では $n\to\infty$ としない限り両系の固有値は一致しないことを知り，改めて両解法（差分法とエネルギー法）の意義を考えさせられた。これらの諸点をさらに深く研究して初めて，いずれの解法が数値積分としてのより正しい結果を与えるかという問題に答えられよう。このような問題を研究されている諸兄にご教示戴ければ幸である。

本文の数値計算のために徳山曹達（株）の下本氏より貴重なデータを戴き，実計算を名古屋大学院生の大森和実君にお願いした。ここに感謝の意を示したい。

参 考 文 献

1) 中川建治：はりの固有値の逆数和に関する二，三の考察，土木学会論文報告集，第150号，pp. 1～7，昭和43年2月

（1972.2.1・受付）