

孔を有する等方性ならびに異方性弾性ばり内の応力状態

STRESSES IN ISOTROPIC AND ANISOTROPIC ELASTIC BEAMS HAVING HOLES

平 島 健 一*

By Kenichi Hirashima

1. 緒 言

はりの内部の応力分布におよぼす孔の影響を求める問題は従来より、幾人かの研究者により実験的ならびに理論的な解析が行なわれている。たとえば、辻¹⁾、Savin²⁾、Joseph and Brock³⁾、Heller⁴⁾、Heller ら⁵⁾、山崎・後藤⁶⁾ および Derestewicz⁷⁾ らの研究をあげることができる。それらの研究では純曲げ、または片持曲げをうける等方性弾性ばり内の円形、楕円形、正三角形、正方形、矩形、正多角形などの孔周縁での応力状態について数値計算がなされている。これらのいずれの場合においても、孔の軸は等方性ばりの長軸に直で、作用荷重の軸に平行であり、また孔径ははりの桁高に比し十分小さいと仮定して計算されている。このように仮定すると、孔を自由境界とする単連結の平板（無限板）が曲げモーメントおよびせん断力をうけた場合の孔周辺の平面応力状態を求めればよいことになる。

これらの研究者による理論計算は写像関数の多項式の項数として数項で表わされるような孔を対象としているため、複雑な形状の孔もしくはより正確に孔形状を表わすために項数を多く採用して計算を行なうことは非常に複雑さを伴う。

著者は純曲げ、片持曲げその他の外荷重をうける等方性材料の弾性ばり内の任意形状の孔および一般的な異方性材料の弾性ばり内の円あるいは楕円形状の孔周辺部における応力分布を求める試みを行なった。著者の方法では等方性ばりの場合、任意形状の孔を表わす写像関数の項数を実質的に制限なくともそのまますぐに計算できるような理論構成がなされている。

またこの論文に述べる異方性板の曲げモーメント、せん断力による孔周辺部の応力を求めることは各種の分野で非常に重要な役割をはたしつつある強化複合材料のよ

うな異方性材料の力学的挙動を把握するためには重要な課題の一つであり、Lekhnitskii⁸⁾ は ovaloid 形の孔を有する異方性弾性板（無限板）に純曲げの外荷重応力が作用する場合の孔周縁の応力分布を摂動法により近似解を求めている。

なお、異方性ばり内に孔のない場合の応力状態についての研究は Lekhnitskii⁸⁾、Silverman⁹⁾、Hashin¹⁰⁾ らにより理論的に行なわれている。

この論文では従来までの研究と同様にはりに内に設けられる孔の外径ははりの桁高に比較して十分に小さいものとして理論解析を行なったが、これに関連して孔が桁高に比して十分大きくなった場合の誤差の評価については数値的な検討が行なわれている。なおまた、いくつかの円孔が並列して存在するはりに外荷重応力として純曲げが作用した場合の孔周縁の応力状態の一例を著者の先の論文に示した手法を適用して求めた結果を例示した。

2. 異方性弾性ばりに対する基礎式

異方性弾性板に対する一般化した Hooke の法則は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \tau_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 a_{11} 、 a_{12} 、 a_{22} 、 a_{66} は対象とする材料の弾性性質に関係した定数である。板が直交異方性弾性体で、その主軸が直交デカルト座標系 (x, y) の座標軸方向と一致しているときは、係数 a_{16} 、 a_{26} はともに 0 になり、残りの係数はヤング係数、ポアソン比および主せん断係数により次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2 \\ a_{12} &= -\nu_1/E_1 = -\nu_2/E_2, \quad a_{66} = 1/G \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

等方性体の特別な場合には $E_1 = E_2 (=E)$ 、 $\nu_1 = \nu_2 (= \nu_0)$ 、 $G = E/2(1 + \nu_0)$ となり、独立な弾性定数は E および ν_0 。

* 正会員 工修 山梨大学助教授 工学部土木工学教室

の2つとなる。

異方性弾性板内の応力を求めるために2つの複素変数

$$z_1 = x + \mu_1 y, z_2 = x + \mu_2 y \dots \dots \dots (3)$$

を導入する。ここに、 μ_1, μ_2 およびこれらと共役な複素変数 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ は式 (1) で表わされる異方性弾性材料に対する次の特性方程式の根である。

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

座標系 (x, y) 内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は2つの複素解析関数 $\phi_1(z_1)$ および $\phi_2(z_2)$ の項で次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

上式中の Re は [] 内の実部を示す記号である。

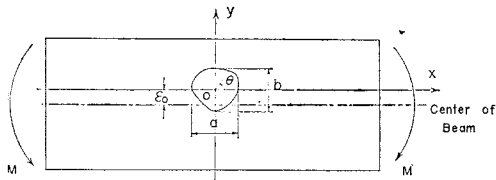
なお、等方性弾性板に対する応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ は周知の Muskhelishvili の方法により次式で求められる²⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z_0)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\bar{z}_0 \varphi''(z_0) + \psi'(z_0)] \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

さて、孔のない異方性矩形ばりに純曲げ、片持曲げ等の外荷重が作用した場合のこのはり内に生じる応力は図一1~3 に示すようなデカルト座標系 (x, y) を設けるものとすれば、それぞれ次のように与えられる^{8), 10), *}。

(1) 純曲げをうけるはりの場合 (図一1)

はりの両端に曲げモーメント M が作用する場合、この



図一1 純曲げモーメント M をうける矩形断面のはり

はり内の応力は

$$\sigma_x^0 = -\frac{M}{I}(y + \epsilon_0), \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \dots \dots \dots (7)$$

である。ここに、 I は考えているはりの中心軸まわりの慣性二次モーメント、 ϵ_0 は 図一1 に示すようにはりの中

* Hashin は複素変数法を用いずに Neou の手法¹¹⁾と同様の二重級数で表わした Airy の応力関数による方法により孔のない異方性ばりの内部応力の理論式を求め、Lekhnitskii の初版本の翻訳本¹²⁾に示された式と比較し、Lekhnitskii の誘導した式の誤りを指摘しているが、第2版の原本¹³⁾およびその翻訳本には何ら誤りは見出されず、Hashin の誘導した式と全く同一である。現在、著者の手もとに Lekhnitskii の初版の原本およびその翻訳本¹⁴⁾がないため詳しいことはわからないが、恐らく初版の原本またはその翻訳本のいずれかの誤植によるものと想像される。

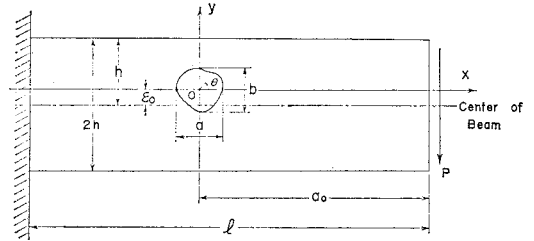
心線からの任意形状の孔の中に原点をとった座標系 (x, y) の x 軸までの距離すなわち偏心量を表わす。この応力は等方性ばりに対するそれと何ら変わらない。

(2) 端部集中荷重の片持曲げをうけるはりの場合 (図一2)

この場合の応力成分は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{P}{I}(a_0 - x)(y + \epsilon_0) + \frac{P}{I} \cdot \frac{a_{16}}{a_{11}} \cdot \left\{ \frac{h^2}{3} - (y + \epsilon_0)^2 \right\} \\ \sigma_y^0 &= 0 \\ \tau_{xy}^0 &= -\frac{P}{2I} \{h^2 - (y + \epsilon_0)^2\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

これらの応力成分のうち σ_y^0 および τ_{xy}^0 は等方性ばり

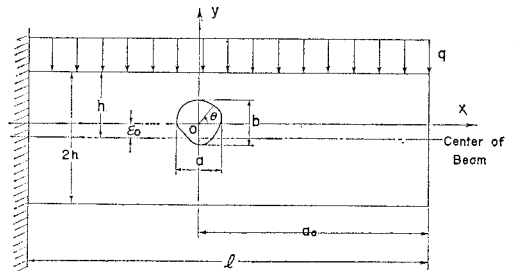


図一2 自由端に集中荷重 P をうける片持ばり

の場合と何ら差異はない。また座標軸の方向に主弾性軸をもつような直交異方性ばりでは $a_{16} = 0$ となり、したがって、この場合の応力成分 σ_x^0 は等方性ばりのそれに一致し、孔をもたないはり内の応力状態は等方性ばりのそれと全く同じになる。係数 a_{16} が0でないような異方性ばりでは、応力成分 σ_x^0 は断面内で一次式の形で分布せず二次式の形の分布を示すことが観察される。

(3) 上端等分布荷重の片持曲げをうけるはりの場合 (図一3)

一端を固定した矩形断面のはりの上端に等分布鉛直荷



図一3 上端面に等分布荷重 q をうける片持ばり

重 q (単位長さ当りの荷重) をうけるものとすれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{q}{6I} \left\{ 3y(a_0-x)^2 + 2\lambda(a_0-x)(h^2-3y^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\xi \left(\frac{3}{5}h^2 - y^2 \right) y \right\} \\ &\quad + \frac{q}{6I} \varepsilon_0 \left\{ 3(a_0-x)^2 - 6\lambda(a_0-x)(2y+\varepsilon_0) \right. \\ &\quad \left. + 2\xi \left(\frac{3}{5}h^2 - 3y^2 - 3y\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2 \right) \right\} \\ \sigma_y^0 &= -\frac{q}{6I} (2h^3 + 3h^2y - y^3) \\ &\quad - \frac{q}{6I} \varepsilon_0 (3h^2 - 3y^2 - 3y\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2) \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{q}{6I} (y^2 - h^2) \{ 3(a_0-x) + 2\lambda y \} \\ &\quad + \frac{q}{6I} \varepsilon_0 \{ 3(a_0-x)(2y+\varepsilon_0) + 2\lambda(h^2-3y^2) \\ &\quad - 3y\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに、

$$\lambda = \frac{a_{16}}{a_{11}}, \quad \xi = 2 \left\{ \frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \left(\frac{a_{16}}{a_{11}} \right)^2 \right\} \dots \dots (10)$$

したがって、この場合の応力成分 σ_y^0 および τ_{xy}^0 は (2) の場合と同様に、主弾性軸が座標系 (x, y) の軸方向に一致するような直交異方性ばりならば、等方性ばりの σ_y^0 および τ_{xy}^0 と何ら変わりはない。

なお、上述の各場合の荷重形式のもとでの等方性ばり内の応力は、各式に現われる異方性弾性定数を式 (2) のように置き、残りの a_{ij} をすべて 0 とおいてやれば簡単に求められる。

以上から、純曲げ、片持曲げ等の外荷重をうけた場合の、孔を有する等方性あるいは異方性ばり内の応力状態は次のようにして計算される。すなわち、式 (7)、(8) または式 (9) で与えられる応力式から孔の位置するはずの仮想の境界周縁における法線方向の直応力およびせん断応力を求め、これを打消すように外荷重を、この孔をもつはりの孔縁に作用させた場合の応力状態を式 (5) あるいは (6) により求める。この応力成分と式 (7)、(8) または (9) で与えられる応力成分を重ね合せれば、目的とする自由境界の孔を有するはり内の応力状態がえられることになる。

ただし、前節で述べたように孔周縁に外荷重を作用させて式 (5) または (6) により応力を求める場合、孔の大きさに比較してはりの外境界（たとえばはりの上下縁）は十分遠い位置にあると仮定され、したがって問題は式 (7)、(8) または (9) から上述の操作により求めた外荷重が孔周縁に作用する場合の、単結合領域における複素応力関数 $\varphi_1(z_0)$ 、 $\psi_1(z_0)$ あるいは $\phi_k(z_k)$ を求める第 1 種境界値問題を解くことに帰着される。

3. 写像関数および境界条件

図一〜3 に示したように、任意形状の孔の内部に原点をもつような直交デカルト座標系 (x, y) を設け、この孔の境界が一般的に次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a_0 \cos \theta + \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta) \\ y_0 &= a_0 \sin \theta - \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m \sin m\theta - \beta_m \cos m\theta) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、 α_m, β_m は孔の断面形状によって決まる実定数であり、 ν は正の整数を表わす。また θ は x 軸の正の方向より反時計まわりに測った角度である。孔の形状および偶角部の曲率が種々変化した場合の、これらの係数は幾人かの研究者により求められている¹⁵⁾。

このように任意形状の孔を有するはり内に座標系 (x, y) を設けると、この座標平面 $z_0 (= x + iy)$ 内の孔の境界およびその外部領域を

$$z_0 \equiv \omega(\zeta) = a_0 \zeta + \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m + i\beta_m) \zeta^{-m} \dots \dots (12)$$

によって ζ -平面内の単位円上およびその外部に写像することができる。

いま $z_k (= x + \mu_k y)$ を原点のまわりに ζ_k の Laurent 展開して次の形に表わすものとしよう。

$$\begin{aligned} z_k \equiv \omega_k(\zeta_k) &= \frac{1}{2} \left[\alpha_0 \{ (1-i\mu_k)\zeta_k + (1+i\mu_k)\zeta_k^{-1} \} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^{\nu} \{ (\alpha_m - i\beta_m)(1+i\mu_k)\zeta_k^m \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_m + i\beta_m)(1-i\mu_k)\zeta_k^{-m} \right] \dots \dots (13) \\ &\quad (k=1, 2) \end{aligned}$$

ここで、 $\nu=1$ の場合には、孔の外部領域を ζ_k -平面の単位円外の領域に、また孔の境界を ζ_k -平面の単位円上に写像することができる、この孔縁あるいは ζ -, ζ_k -平面上の単位円上で $\zeta = \zeta_k \equiv \sigma (= e^{i\theta})$ が成立する。

さて、孔の境界に作用する外荷重力の各座標軸方向の成分 X_n および Y_n が与えられるものとするれば、異方性弾性板内の応力成分式に現われる 2 つの複素関数 $\phi_k(z_k)$ は、次式によって計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} 2R_\theta[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] &= \int_0^s Y_n ds + C_1 \\ 2R_\theta[\mu_1\phi_1(z_1) + \mu_2\phi_2(z_2)] &= -\int_0^s X_n ds + C_2 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

ここに、 C_1 および C_2 はいまの場合、単結合領域を考えているから、孔の境界上で任意にえらべる定数である。なお、等方性弾性板の場合には、付録 I に示した式 (A. 2) を満足するように $\varphi_0(z_0)$ および $\psi_0(z_0)$ を定めなければならない。

ここで外荷重力成分 X_n および Y_n は式 (7)、(8)

または (9) の応力成分を用いて、一般的に次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} X_n &= -[\sigma_x^0 \cos(n, x_0) + \tau_{xy}^0 \cos(n, y_0)] \dots (15) \\ Y_n &= -[\tau_{xy}^0 \cos(n, x_0) + \sigma_y^0 \cos(n, y_0)] \end{aligned}$$

ここに、 n は孔の境界線に垂直で孔の中心側に向う単位法線ベクトルである。いま s を孔の境界線上の時計まわりの単位接線ベクトルとすれば、式 (15) 中の方向余弦との間には次の関係が成立する。

$$\cos(n, x_0) = -\frac{dy_0}{ds}, \quad \cos(n, y_0) = \frac{dx_0}{ds} \dots (16)$$

したがって、異方性ばりの場合には式 (A.12), (15), (16) を式 (14) の右辺に代入し、孔縁での弧長に沿って任意の初期点 $s=0$ から s まで積分すれば式 (14) の右辺は $e^{im\theta}$ および $e^{-im\theta}$ の Fourier 級数に展開することが可能であり、その結果は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} 2 R_e[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] \\ &= \frac{Y}{2\pi} \theta + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{im\theta} + \bar{a}_m e^{-im\theta}) \\ 2 R_e[\mu_1 \phi_1(z) + \mu_2 \phi_2(z_2)] \\ &= -\frac{X}{2\pi} \theta + b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m e^{im\theta} + \bar{b}_m e^{-im\theta}) \end{aligned} \right\} (17)$$

ここに、 a_m, b_m は外荷重応力ならびに孔の形状によって決定される複素定数であり、 \bar{a}_m, \bar{b}_m はそれらと共役な定数である。 a_0, b_0 はいま考えている問題では任意にとりうる定数である。また X, Y は孔の境界に沿って働く外荷重応力の座標軸 x, y 方向の合成成分である。

さて、いま異方性体に対する関数 $\phi_k(z_k)$ を次式

$$\phi_k(z_k) = \Gamma_k \ln \zeta_k + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{km} \zeta_k^{-m}, \quad (k=1, 2) \dots (18)$$

で与えられるものとすれば、上式中の係数 Γ_{km} は考えている異方性材料に対する特性方程式の複素根 μ_k および、複素定数 \bar{a}_m, \bar{b}_m により次のように表示される。

$$\Gamma_{1m} = \frac{\bar{b}_m - \mu_2 \bar{a}_m}{\mu_1 - \mu_2}, \quad \Gamma_{2m} = \frac{\mu_1 \bar{a}_m - \bar{b}_m}{\mu_1 - \mu_2} \dots (19)$$

ところで、 $\nu \geq 2$ の場合、 $z_k - \zeta_k$ 変換式 (13) は $|\zeta_k| > 1$ の領域の無限遠点で ν 次の極をもつことから、式 (13) の関数 $z_k = \omega_k(\zeta_k)$ は適切な複素関数とはいえない (式 (18) に示した ζ_k の関数 $\phi_k(z_k)$ は考えている領域内で多価関数となる)。したがって、 $\nu \geq 2$ であるような形状の孔を有する異方性体内の応力を求めるためには、たとえば Stephens⁽⁶⁾ あるいは Lekhnitskii⁽⁷⁾ が行なったようないくつかの補正が必要となる*。

したがって、本論文では $\nu=1$ であるような円孔あるいは楕円孔を有する異方性ばりのみを対象としよう。

この $\nu=1$ の場合には、 z_k は $|\zeta| \geq 1$ の単位円上あるいはその外部領域において 2 次以上の極をもたず、複素

関数 $\phi_k(z_k)$ は考えている領域内のすべての点で一価正則である。

他方、等方性材料に対しては、付録 I に示した結果ならびに式 (6) を使えば式 (11) で与えられるような任意形孔を有する等方性ばり内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ がえられることになる。

さて、式 (11) で与えられるような孔 (ただし異方性の場合には $\nu=1$ の円孔ないし楕円孔) の境界に沿って生じる法線方向の直応力を σ_ξ 、接線方向の直応力を σ_η 、およびせん断応力を $\tau_{\xi\eta}$ とすれば、応力の基礎関係式より次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi + \sigma_\eta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\xi - \sigma_\eta + 2i\tau_{\xi\eta} &= \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz_0} \cdot \frac{d\bar{z}_0}{d\bar{\zeta}} \cdot (\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

ここに、右辺の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は式 (5) あるいは (6) で与えられる直交デカルト座標系 (x, y) の座標軸方向の応力成分である。

次節では純曲げあるいは片持曲げをうける等方性ならびに異方性ばり内の孔周辺応力を求めた結果を例示しよう。

4. 数値計算例

(1) 純曲げをうけるはりの場合

図一1 に示すように異方性矩形ばりの両側面に純曲げモーメント M が作用する場合の孔のないはり内の応力は式 (7) で与えられる。したがって孔が位置するはずの仮定の孔周縁での応力成分は式 (7) 中の y の代りに式 (11) の y_0 を代入したものである。これをさらに式 (15) に代入して計算を行なえば外荷重応力成分 X_n および Y_n が求まる。しかる後にこれらを付録 II に示した補助積分公式を利用して積分すれば、式 (17) あるいは式 (A.6) の係数は最終的に次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_m = 0, \quad \bar{b}_m &= \frac{M}{4I} (K_m + iL_m), \\ X = Y = 0 \quad (m=1, 2, \dots, 2\nu) \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_m &= 2\epsilon_0 \beta_m + F_m^1, \quad L_m = 2\epsilon_0 \alpha_m'' + H_m^1, \\ & \quad (m=1, 2, \dots, \nu) \\ K_m &= F_m^1, \quad L_m = H_m^1, \\ & \quad (m=\nu+1, \nu+2, \dots, 2\nu) \end{aligned} \right\} (22)$$

異方性ばりの場合には、上式中の ν に $\nu=1$ を代入してやったものとなり、この場合の複素応力関数 $\phi_k(z_k)$ は式 (18), (19) および (21) から、次式のようになる。

* 追記参照

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z_1) &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^2 (\bar{b}_m - \mu_2 \bar{a}_m), \\ \phi_2(z_2) &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^2 (\mu_1 \bar{a}_m - \bar{b}_m) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

等方性ばりの場合には、式 (21)、(22) ならびに付録 I に示した公式から応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を求めるための複素応力関数 $\phi(z_0), \psi(z_0)$ が容易に求められる。

したがって、求められた $\phi_k(z_k)$ あるいは $\varphi(z_0), \psi(z_0)$ から式 (5) あるいは式 (6) によって計算すれば、デカルト座標系 (x, y) での応力成分がえられ、それをさらに式 (20) に代入することにより孔周縁またはその近傍の応力分布を計算することができる。以下に純曲げをうける矩形ばり（等方性および直交異方性ばり）内の孔周縁の応力分布についての二、三の代表的な数値計算を示そう。なお、数値計算を行なうに際して、等方性ばり内の孔の形状を表わす写像関数の係数 α_m および β_m の値としては主として文献 15) に掲げられている係数表を引用したが、これは写像関数の項数として $\nu=7$ までが採用されている。

図-4 は等方性ばり内に正方形孔 ($k=b/a=1.0$) を設

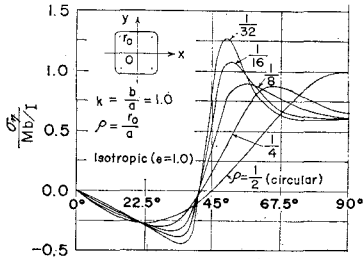


図-4 純曲げモーメント M をうけた等方性ばり内の数種の正方形孔の周縁における応力 σ_y の分布

E_1/E_2 および主弾性係数 E_1 の方向と x 軸とのなす角 φ (反時計方向に測る) をパラメーターとして図示したものである。図中に示した実線の左半分は $\varphi=0^\circ$ (すなわち $E_x=E_1, E_y=E_2$) の場合、右半分は $\varphi=90^\circ$ (すなわち $E_x=E_2, E_y=E_1$) の場合の σ_y の分布図である。これらはいずれも $\theta=90^\circ$ の線を中心にして対称の応力分布となる。同図中には $\varphi=45^\circ$ の場合の σ_y の分布を一点鎖線で示してある。

なお、この計算例では、ポアソン比 $\nu_1=0.15$ 、せん断弾性係数 G は次式で与えられる値を採用した。

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_1}{E_1} \dots\dots\dots (24)$$

ここでは紙面の都合上、偏心量 ϵ_0 がある場合については計算例を示さなかったが、これは等分布の外荷重が作用する場合の結果を適当に重ね合わせれば求められるものである。また、ここに示した計算例では y 方向の孔径 b ははりの桁高の $1/4$ すなわち $b=h/2$ とした。これについては、純曲げをうけた円孔をもつ等方性矩形ばりの上下縁の境界を考慮に入れた Howland & Stevenson の理論解²⁰⁾ならびに西田の光弾性実験結果²¹⁾があるが、それらによれば $b=0.6h$ 程度以下の孔径であれば上下縁の境界の影響はほとんどないことが示されている。

(2) 端部集中荷重の片持曲げをうけるはりの場合

図-2 に示すように異方性片持ばりの自由端に集中荷重 P が作用する場合の孔のない一様なはり内の応力状態は式 (8) によって与えられる。したがって仮想の孔周縁での応力成分 σ_x^0, σ_y^0 および τ_{xy}^0 は式 (8) の x, y の代りに式 (11) の x_0, y_0 を代入した値で示される。これ以降は (1) に示した手法に従って式 (17) あるいは式 (A.6) の係数を求めれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_m &= \frac{P}{8I} (Q_m^1 + iR_m^1), \bar{b}_m = \frac{P}{8I} (Q_m^2 + iR_m^2) \\ (m=1, 2, \dots, 3\nu) \\ X &= -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{P}{I} \cdot Q_0^2, Y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P}{I} \cdot Q_0^1 \end{aligned} \right\} (24)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Q_0^1 &= 4\epsilon_0 F_0^1 + M_0^1 \\ Q_m^1 &= 4(\epsilon_0^2 - h^2)\beta_m + 4\epsilon_0 F_m^1 + M_m^1 \\ R_m^1 &= 4(\epsilon_0^1 - h^2)\alpha_m'' + 4\epsilon_0 H_m^1 + N_m^1 \\ (m=1, 2, \dots, \nu) \\ Q_m^1 &= 4\epsilon_0 F_m^1 + M_m^1, R_m^1 = 4\epsilon_0 H_m^1 + N_m^1 \\ (m=\nu+1, \dots, 2\nu) \\ Q_m^1 &= M_m^1, R_m^1 = N_m^1 (m=2\nu+1, \dots, 3\nu) \\ Q_0^2 &= 2(\delta_1 F_0^1 + 2\epsilon_0 F_0^1 + \epsilon_0 F_0^3) + \lambda M_0^1 + M_0^2 \\ &\quad + M_0^3 \\ Q_m^2 &= 4(\delta_2 \beta_m + \delta_3 \alpha_m') + 2(\delta_1 F_m^1 + 2\epsilon_0 F_m^2 \\ &\quad + \epsilon_0 F_m^3) + \lambda M_m^1 + M_m^2 + M_m^3 \end{aligned} \right\} (25 a)$$

けたときの孔周縁の応力 σ_y の分布を、孔の隅角部の丸み ($\rho=r_0/a$) をパラメーターとして示したものである。この結果は Heller らの与えた理論式その他からも求められるものである。

図-5 は円孔をもつ直交異方性ばりの両側面に純曲げ M が作用した場合の σ_y の分布を異方性弾性係数比 $e(=$

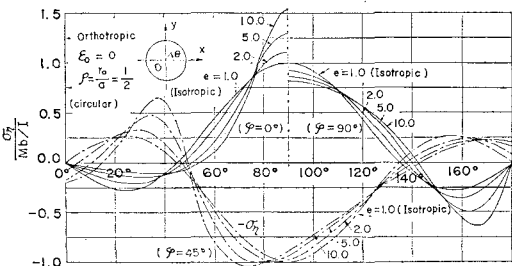


図-5 純曲げモーメント M をうけた直交異方性ばり内の円孔周縁における応力 σ_y の分布

$$\left. \begin{aligned}
 R_m^2 &= 4(\delta_2 \alpha_m'' + \delta_3 \beta_m) + 2(\delta_1 H_m^1 + 2 \epsilon_0 H_m^2 + \epsilon_0 H_m^3) + \lambda N_m^1 + N_m^2 + N_m^3 \\
 &\quad (m=1, 2, \dots, \nu) \\
 Q_m^2 &= 2(\delta_1 F_m^1 + 2 \epsilon_0 F_m^2 + \epsilon_0 F_m^3) + \lambda M_m^1 + M_m^2 + M_m^3 \\
 R_{m+1}^2 &= 2(\delta_1 H_m^1 + 2 \epsilon_0 H_m^2 + \epsilon_0 H_m^3) + \lambda N_m^1 + N_m^2 + N_m^3 \\
 &\quad (m=\nu+1, \dots, 2\nu) \\
 Q_m^2 &= \lambda M_m^1 + M_m^2 + M_m^3, \quad R_m^2 = \lambda N_m^1 + N_m^2 + N_m^3, \quad (m=2\nu+1, \dots, 3\nu) \\
 \delta_1 &= 2\lambda \epsilon_0 - a_0, \quad \delta_2 = \lambda \left(\epsilon_0^2 - \frac{h^2}{3} \right) - \epsilon_0 a_0, \\
 \delta_3 &= \epsilon_0^2 - h^2
 \end{aligned} \right\} (25b)$$

したがって、異方性ばりの場合の複素関数 $\phi_k(z_k)$ は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_1(z_1) &= \Gamma_1 \ln \zeta_1 + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^3 (\bar{b}_m - \mu_2 \bar{a}_m) \zeta_1^{-m} \\
 \phi_2(z_2) &= \Gamma_2 \ln \zeta_2 - \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \sum_{m=1}^3 (\bar{b}_m - \mu_1 \bar{a}_m) \zeta_2^{-m}
 \end{aligned} \right\} (26)$$

上式中の複素係数 Γ_1, Γ_2 は次のような連立一次方程式を満たすような定数である。

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma_1 + \Gamma_2 - \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_2 &= -\frac{Y}{2\pi} i \\
 \mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 - \bar{\mu}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{\mu}_2 \bar{\Gamma}_2 &= \frac{X}{2\pi} i \\
 \mu_1^2 \Gamma_1 + \mu_2^2 \Gamma_2 - \bar{\mu}_1^2 \bar{\Gamma}_1 - \bar{\mu}_2^2 \bar{\Gamma}_2 &= \frac{i}{2\pi} \left(\frac{a_{15}}{a_{11}} X + \frac{a_{12}}{a_{11}} Y \right) \\
 \frac{1}{\mu_1} \Gamma_1 + \frac{1}{\mu_2} \Gamma_2 - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \bar{\Gamma}_1 - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \bar{\Gamma}_2 &= -\frac{i}{2\pi} \left(\frac{a_{12}}{a_{22}} X + \frac{a_{25}}{a_{22}} Y \right) \\
 &\dots\dots\dots (27)
 \end{aligned} \right\}$$

等方性ばりの場合の複素関数 $\varphi(z_0), \psi(z_0)$ は式(24)および付録Iの結果から求められる。

以下に二、三の数値計算例を示すが、計算に際して、Savin²⁾, Deresiewicz⁷⁾らの結果と比較しやすいように、 $l=10, h=4/3 a_0$ にとり、さらに y 軸方向の孔径 b ははりの桁高の $1/4$ (すなわち $b=h/2$) とした。

図-6, 7 は等方性ばりに数種類の形状の孔を設けた場合の孔縁の応力 σ_y の分布を展開図として示したものである。これらの図には孔の隅角部の丸み ρ をパラメーターとして図示してある。図-6(a) は正方形孔 ($k=b/a=1.0$) および長方形孔 ($k=b/a=1/2$) の場合、(b) は六角形孔 ($k=b/a=\sqrt{3}/2$) の場合のものである。これらの結果は Deresiewicz の示した計算結果とほぼ同じような値となっているが、著者らの結果と彼のとは写像関数の係数に多少の差異があるため、特殊な形状の孔(たとえば円孔または楕円孔)をのぞいて、計算結果に多少の相違がみられる。なお、図-6(b) は写像関数の係

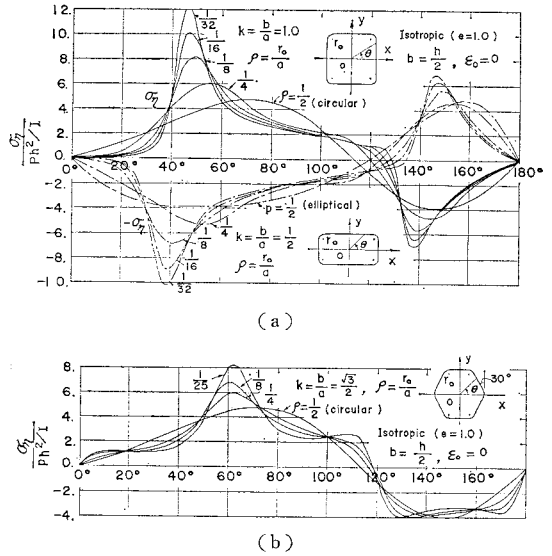


図-6 集中荷重 P による片持曲げをうけた等方性ばり内の (a) 正方形 ($k=b/a=1.0$), 長方形 ($k=1/2$) および (b) 正六角形 ($k=\sqrt{3}/2$) の孔周縁における応力 σ_y の分布

数 α_m, β_m として山崎・後藤の求めた値⁹⁾($\nu=9$ まで採用)を使用して計算したものである。図-7 は図-6(a)の正方形孔がはりの中心線より $\epsilon_0=h/4$ だけ偏心している場合の応力 σ_y を ρ をパラメーターとして図示したものである。

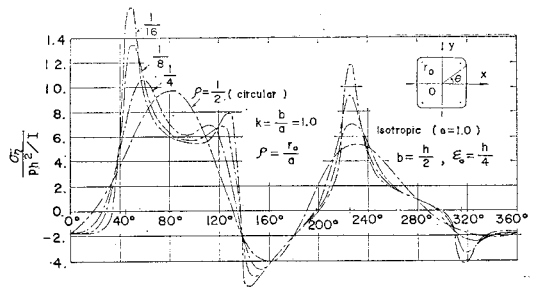


図-7 図-6(a)の正方形孔が等方性ばりの中心線より偏心した場合 ($\epsilon_0=h/4$) の孔縁応力 σ_y の分布

以上は等方性片持ばりに対する例であったが、次に直交異方性ばりに対する計算結果の一例を示せば図-8, 9 のようである。図-8(a), (b) は円孔の場合の孔縁応力 σ_y を主弾性係数比 e および主弾性軸の傾斜角 φ をパラメーターとして図示したものである。図-8(a)では $\theta=0 \sim \pi$ までの範囲について図示してあるが、これは x 軸に関して逆対称の応力分布となる。主弾性軸が座標系 (x, y) の軸と一致しない一般的な図-8(b)のような場合には、 x 軸に関して逆対称の応力分布とはならず、したがって図にみるように θ の全範囲 ($0 \sim 2\pi$) について示してある。図-9 は偏心円孔および楕円孔を有する

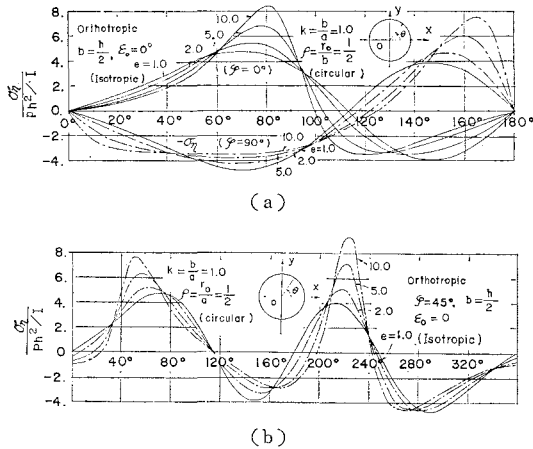


図-8 集中荷重 P による片持曲げをうけた直交異方性ばり内の円孔周縁応力 σ_y の分布

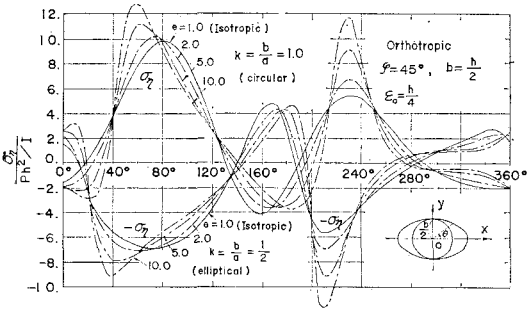


図-9 集中荷重 P による片持曲げをうけた直交異方性ばり ($\varphi=45^\circ$) 内の円孔および楕円孔 ($k=b/a=1/2$) を偏心して設けた場合 ($e_0=h/4$) の孔縁応力 σ_y の分布

直交異方性ばり内の孔縁応力分布の一例である。これは円孔および楕円孔 ($k=b/a=1/2$) で $\varphi=45^\circ$, $e_0=h/4$, $b=h/2$ の場合について、 e をパラメーターとして図示したものである。

なお、これらの計算例における異方性弾性定数は (1) の純曲げをうけるはりの節で示した値を採用して計算した。

(3) 上端等分布荷重の片持曲げをうけるはりの場合

この場合も多少、理論式が複雑になるが、(1), (2) の場合と同様の手法により計算を行なうことができるので、ここでは数式を省略する。

図-10 ははりの中心軸上に正方形孔 ($k=b/a=1.0$) をもつ等方性ばりの場合の孔縁応力 σ_y の分布図である。この図からわかるようにはりの中心軸上に上下対称形の孔を設けた場合でも、応力分布は x 軸に関して逆対称の分布形とはならない。これははりの上端に作用した分布荷重 q によって生じる応力成分のうち σ_y^0 がはりの中心

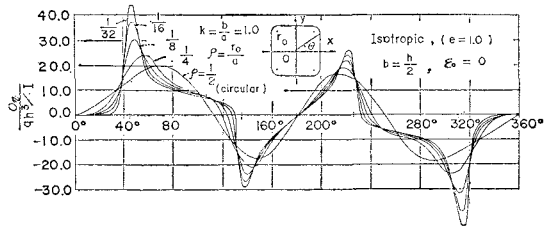


図-10 等分布荷重 q による片持曲げをうけた等方性ばり内の数種の正方形孔の周縁応力 σ_y の分布

軸に対して非対称の分布を示すことによるものである。したがって、この種の問題では偏心孔を設ける場合はりの中心線から上、下に等距離の位置にある偏心孔の孔縁応力 σ_y はその符号を変えただけでは一致せず、応力の分布形は多少異なったものとなる。

直交異方性ばりに対する一例として、 $e=5.0$, $\varphi=45^\circ$, $e_0=\pm h/4$ で円孔および楕円孔 ($k=b/a=1/2$) の場合の σ_y の分布を示したものが 図-11 である。一点鎖線なら

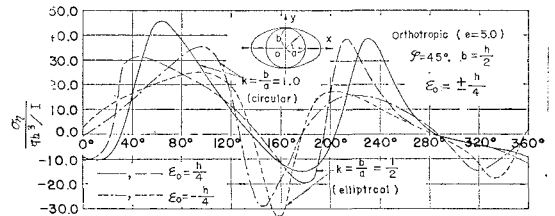


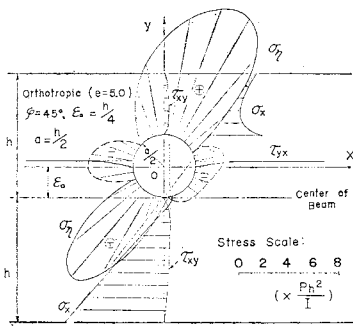
図-11 等分布荷重 q による片持曲げをうけた直交異方性ばり ($e=5.0$, $\varphi=45^\circ$) 内の円孔および楕円孔 ($k=b/a=1/2$) を偏心して設けた場合 ($e_0=\pm h/4$) の孔縁応力 σ_y の分布

びに短い点線で示したものが $e_0=-h/4$ (すなわちはりの中心軸より下側に偏心して設けられた孔の場合)、実線ならびに鎖線で示したものが $e_0=h/4$ の場合の孔縁応力 σ_y の分布図である。この図において $e_0=-h/4$ の偏心孔の場合、 $e_0=h/4$ のものと比較しやすいように θ のとり方は時計方向にとり、さらに σ_y の符号も逆の符号をつけて図示してある。

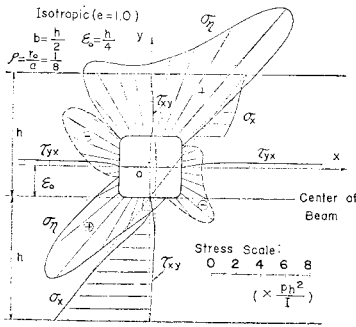
(4) 孔周縁以外の領域の応力分布

以上までの計算例ではいくつかの外荷重が作用した等方性ならびに異方性ばり内の数種類の形状の孔周縁の応力 σ_y についてのみ図示を行なったが、ここでは孔縁以外の位置における応力を求めてみた。

計算は孔縁上の場合より多少複雑になるが、同様の手法により求めることが可能である。ここでは簡単のために座標軸 x, y に沿った位置での応力成分 σ_x, τ_{xy} を孔周縁上の応力 σ_y と同時に図示したものの一例が 図-12, 13 である。これらの例では外荷重状態として (2) の端面集中荷重をうけた片持ばりの場合をとりあげた。図一



(a)



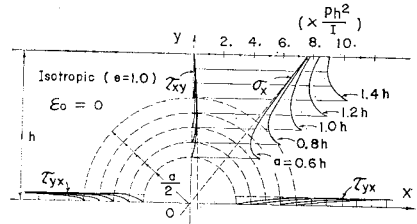
(b)

図一12 集中荷重 P による片持曲げをうけたはり内に偏心孔 ($e_0=h/4$) を設けた場合の孔縁応力 σ_r および座標軸線上の応力分布

12 (a) は直交異方性ばり ($e=5.0, \varphi=45^\circ$) に偏心円孔 ($b=h/2, e_0=h/4$) を設けた場合のはり内の応力分布を示したものであり、図中の細い点線で示したものは孔のない様なばりに生じる応力 σ_x^0, τ_{xy}^0 の分布である (この場合の σ_x^0 は一般的な直交異方性 ($\varphi=45^\circ$) を仮定しているから直線的には分布せず、原点を通過してわずかながら二次曲線的な分布となっている)。図一12 (b) は (a) 図の場合と同じ外荷重をうける等方性片持ばり内に偏心量をもつ正方形孔 ($k=b/a=1.0, \rho=r_0/b=1/8, b=h/2, e_0=h/4$) を設けたときの座標軸線上および孔周縁上の応力分布を図示したものである。

ところで、緒言で述べたように理論解析に際しては孔を自由境界とする単結合領域の平面問題として取扱っているため、はりの上、下端などの境界が考慮されておらず、したがって、必ずしもはりの上、下端などでの境界条件を満足した解となっていない。しかしながら、図一12 においてははりの上、下端での応力成分 σ_x^0, τ_{xy}^0 および σ_x, τ_{xy} はそれぞれほぼ一致していることから、上述した仮定によってえた近似解はこの例の場合、ほぼ正しいものと考えられる。

図一13 は等方性ばり内の中心線上に設ける円孔の径を徐々に大きくしていった場合の座標軸線上の σ_x, τ_{xy}



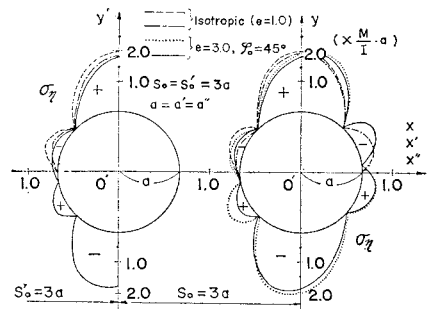
図一13 集中荷重 P による片持曲げをうけた等方性ばり内の円孔の径を変化させた場合の座標軸線上の応力の分布

の分布図である。この図より、たとえばはりの上端 ($y=h$) 面上の直応力 σ_x^0 と σ_x とを比較すると円孔の外径がはりの桁高の半分 (すなわち $b=h$) のときで 5.2%, $b=1.2h$ のときで 11% 程度の差がみられる。

したがって、この論文で示したような単結合領域の問題としての取扱いは、ここに示さなかった多数の計算例ならびに純曲げに対する光弾性実験による結果等^{20), 21)} を考慮して判断すると、各場合 (たとえば、外荷重状態、はりの形状、異方性比とその方向、孔の形状、大きさ、偏心量等) によって差異があるが、孔径がはりの桁高の中心線の上、下 $h/2$ 以内に位置していれば、誤差 5% 程度以内の精度をもった結果がえられるようである。

(5) 複数個の孔をもつはりの場合

以上までに示した例でははり内に 1 個の孔が存在する場合についてであったが、ここでは純曲げをうけるはり内に 3 個の円孔を設けた場合の孔縁応力を著者の先の論文に示した手法²²⁾ を利用して求めた結果を例示しよう。



図一14 純曲げモーメント M をうけたはり内の三個の等円孔周縁の応力 σ_r, σ_r' の分布

図一14 は 3 個の等しい円孔がはりの中心線上に存在する場合の孔縁応力 σ_r, σ_r' の分布を等方性ならびに直交異方性 ($e=5.0, \varphi=45^\circ$) の場合について図示したものである。この結果は 3 個の孔同志の相互作用による影響について考慮がなされているものである。

5. 結 語

この論文では一般的な異方性弾性ばりを対象とし、はり内の応力分布におよぼす孔の影響について理論的な検討を行なった。この理論解を進める段階において、孔のない様な異方性ばりに対し Bernoulli-Euler のはり理論が適用できるものとして求めたはり内応力^{8),10)}を用いて計算を行なったが、この点に関しては Hashin が異方性ばりの最大応力値とたわみについて実験値と比較し、理論値は十分に正しいことを検証している¹⁰⁾。

ここに示した解法では等方性ばりに設ける孔の形状は複素写像関数を用いて表わし、その項数を実質的に多数項ととも、解析が行なえる理論構成となっており、したがって、複雑な形状の孔についても比較的簡単に計算を行なうことが可能である。

この論文でははりの中心軸以外に設けた偏心孔の場合についても理論および計算例を示し、さらに孔縁以外の位置でのはり内の応力分布についても数値計算を行ない、ここに示した単結合領域問題としての取扱いによる解法に対する誤差の評価を行なった。

ここで対象としたはりの荷重状態は3種類の例について数値計算例を示したが、この他のはり(たとえば集中荷重または等分布荷重をうけた単純ばり)については、ここに示した理論式にわずかの修正を加えることによって、ほとんどそのまま数値計算を行なうことが可能である。

最後に、本論文をとりまとめるにあたり、終始御指導を賜りました京都大学工学部丹羽義次教授に深甚なる謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Tuji, Z.: Effect of a Circular Hole on the Stress Distribution Under Uniform Bending Moment, Scientific Paper of the Institute of Physical and Chemical Research, Tokyo, Vol. 9, pp. 65~89, Aug. (1928).
- 2) Savin, G.N.: Stress Concentration Around Holes, (translated from Russian by W. Johnson), Pergamon Press, pp. 87~104, 193~196. (1961).
- 3) Joseph, J. A., and Brock, J.S.: The Stresses Around a Small Opening in a Beam Subjected to Pure Bending, Jour. of Appl. Mech., Vol. 17, pp. 353~358. (1950).
- 4) Heller, S.R., Jr.: The Stresses Around a Small Opening in a Beam Subjected to Bending with Shear, Proc. 1st U.S. National Congr. Appl. Mech., Chicago, pp. 239~245. (1951).
- 5) Heller, S.R., Jr., Brock, J.S., and Bart, H.: The Stresses Around a Rectangular Opening with Rounded Corners in a Beam Subjected to Bending with Shear, Proc. 4th U.S. National Congr. Appl. Mech., Berkeley, pp. 489~496. (1962).
- 6) 山崎徳也・後藤恵之輔: 六角形を有する矩形板の孔縁応

- 力, 九州大学工学集報, 第 41 巻第 6 号, pp. 931~938. (1968).
- 7) Deresiewicz, H.: Stresses in Beams Having Holes of Arbitrary Shape, Jour. of the Eng. Mech., ASCE, Vol. 94, No. EM-5, pp. 1183~1214. (1968).
- 8) Lekhnitskii, S.G.: Anisotropic Plates, (translated from Russian by S.W. Tsai and T. Cheron), Gordon and Breach Science Publishers, New York, pp. 57~62, 157~187. (1968).
- 9) Silverman, I.K.: Orthotropic Beams Under Polynomial Loads, Jour. of the Eng. Mech., ASCE, Vol. 90, No. EM-5, pp. 293~319. (1964).
- 10) Hashin, Z.: Plane Anisotropic Beams, Jour. of Appl. Mech., Vol. 34, pp. 257~262. (1967).
- 11) Neou, C.Y.: A Direct Method for Determining Airy Polynomial Stress Functions, Jour. of Appl. Mech., Vol. 24, pp. 387~390. (1957).
- 12) Lekhnitskii, S.G.: Anisotropic Plates, (translated from Russian by E.Z. Towell), American Iron and Steel Institute, New York, pp. 357~368. (1958).
- 13) Лехницкий, С.Г.: Анизотропные Пластинки, Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы, Москва, стр. 61~69. (1957).
- 14) 前出 8)
- 15) Heller, S.R., Jr., Brock, J.S., and Bart, R.: The Stresses Around a Rectangular Opening with Rounded Corners in a Uniformly Loaded Plate, Proc. 3rd U.S. National Congr. of Appl. Mech., Providence, pp. 357~368. (1958).
- 16) Stephens, K.M.: A Boundary Problem in Orthotropic Generalized Plane Stress, Quart. Jour. Mech. and Appl. Math., Vol. 5, pp. 206~220. (1952).
- 17) 前出 8) pp. 235~272.
- 18) 丹羽義次・小林昭一・平島健一: 三次元異方性岩盤内に開削した任意形状の坑道周辺における応力状態, 材料, 第 19 巻第 2 号, pp. 138~144. (1970).
- 19) 丹羽義次・平島健一: 異方性弾性地山に開削した水平坑道周辺の重力による応力状態, 土木学会論文報告集, 第 182 号, pp. 31~39. (1970).
- 20) Howland, R.C.J., and Stevenson, A.C.: Biharmonic Analysis in a Perforated Strip, Phil. Trans. Roy. Soc., A, Vol. 232, pp. 155~222. (1933).
- 21) 西田正孝: 応力集中, pp. 265~271, 森北出版 (1967).
- 22) 丹羽義次・平島健一: 複数個の円孔ないし楕円孔を有する異方性弾性板内の応力状態, 土木学会論文報告集, 第 196 号, pp. 9~18. (1971).
- 23) Deresiewicz, H.: Thermal Stress in a Plate Due to Disturbance of Uniform Heat Flow by a Hole of General Shape, Jour. of Appl. Mech., Vol. 28, pp. 147~149. (1961).
- 24) Muskhelishvili, N.I.: Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, (translated from Russian by J.R.M. Radok), Nordhoff, Holland, pp. 139~161. (1963).

【追 記】

以前に著者が発表した論文(参考文献 18), 19) について、その後、名古屋工業大学 岡林 稔・長谷部宜男両氏より、御討議を頂き、内容の一部についての疑問が提出された。検討の結果、誤りを認めためたので、ここに

その点を明らかにし、お詫び申し上げる次第である。

訂正箇所：文献 19) の式 (4.3) において $\bar{\zeta}$ を ζ_k に、 $\bar{\zeta}_k^{-m}$ を ζ_k^m に訂正。また文献 18) の式 (3) および文献 19) の式 (4.3) において $\nu=1$ の制限を入れる。したがって、両文献中の異方性体に対する $\nu \geq 2$ であるような場合の結果は、本文 46 ページに述べたような理由から、誤りである。

付 録 I

複素写像関数 $z_0 = \omega(\zeta)$ が式 (12) で与えられる場合に、等方性体内の応力、変位を決定する複素応力関数 $\varphi(z_0)$ および $\psi(z_0)$ を求めなければならない。ここでは、これらの関数を求めるため一般公式を誘導する*。

境界上で応力が与えられるような第 1 種境界値問題では、関数 $\varphi(z_0)$ および $\psi(z_0)$ は次の条件式を満足しなければならない²⁴⁾。

$$\overline{z_0 \varphi'(z_0)} + \varphi(z_0) + \overline{\psi(z_0)} = \pm \int_0^s (iX_n - Y_n) ds + C \dots \dots \dots (A.1)$$

複符号は外部境界の場合には正符号を、また内部境界の場合 (たとえば孔を有する無限板) には負符号をとる。以下では内部境界の場合について論ずることにしよう。

したがって、上式の右辺の第 1 項目の積分は式 (15) で与えられる X_n, Y_n の孔周縁に沿った積分であり、 C は単連結領域として取り扱う今の問題では任意にえらべる積分定数である (0 とおこう)。

いま、写像関数式 (12) を使って $\varphi(z_0), \psi(z_0)$ をそれぞれ $\varphi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ と表わすことにする。すなわち

$$\varphi[\omega(\zeta)] \equiv \varphi_1(\zeta), \psi[\omega(\zeta)] \equiv \psi_1(\zeta)$$

このように表示すると式 (A.1) は次式のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} + \overline{\psi_1(\sigma)} &= f_1^0 + if_2^0 \\ f_1^0 + if_2^0 &= - \int_0^s (iX_n - Y_n) ds \end{aligned} \right\} (A.2)$$

左辺第 2 項の係数 $\omega(\sigma)/\omega'(\sigma)$ は孔形状を表わす係数 $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$ を用いて次のように表示できる。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \equiv \sum_{p=2}^{\nu} r_p^* \sigma^{-p} + \sum_{p=0}^{\infty} r_p \sigma^p \dots \dots \dots (A.3 a)$$

ここに上

$$\left. \begin{aligned} r_p^* &= \frac{\alpha_p + i\beta_p}{\alpha_0}, (p = \nu, \nu - 1) \\ r_p^* &= \frac{1}{\alpha_0} \left\{ (\alpha_p + i\beta_p) + \sum_{j=1}^{\nu-p-1} j r_{p+j+1}^* (\alpha_j - i\beta_j) \right\} \\ &(p = \nu - 2, \nu - 3, \dots, 1) \end{aligned} \right\}$$

* Deresiewicz²³⁾ も一般化を試みているが、著者の方法とは異なった手法を用いており、また得られた結果もかなり煩雑な形式になっている。

$$\left. \begin{aligned} r_p &= \delta_1^p + \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=1}^{\nu+p-1} j r_{j-p+1}^* (\alpha_j - i\beta_j), (p=0, 1) \\ r_p &= \frac{1}{\alpha_0} \left\{ \sum_{j=p}^{\nu} j r_{j-p+1}^* (\alpha_j - i\beta_j) + \sum_{j=1}^{p-1} j r_{p-j-1} (\alpha_j - i\beta_j) \right\} (p=2, 3, \dots, \nu) \\ r_p &= \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=1}^{\nu} j r_{p-j-1} (\alpha_j - i\beta_j), \\ &(p = \nu + 1, \nu + 2, \dots, \infty) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A.3 b)$$

上式中の δ_j^k は Kronecker のデルタであって、次のように定義されるものである。

$$\delta_j^k = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases}$$

さて、次に複素応力関数 $\varphi_1(\zeta)$ および $\psi_1(\zeta)$ を次式のように仮定して式 (A.2) の左辺を求めよう。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= A \ln \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \zeta^{-m} \\ \psi_1(\zeta) &= B \ln \zeta + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \zeta^{-m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A.4)$$

式 (A.3 a) および (A.4) を用いて式 (A.2) の左辺を計算すれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} + \varphi_1(\sigma) + \overline{\psi_1(\sigma)} &= i(A - \bar{B})\theta \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} C_p^* \sigma^{-p} + \sum_{p=0}^{\infty} C_p \sigma^p \dots \dots \dots (A.5 a) \end{aligned} \right\}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} C_p^* &= A_p, (p = \nu - 1, \nu, \dots, \infty) \\ C_p^* &= A_p - \sum_{j=1}^{\nu-p-1} j \bar{A} j r_{j+p+1}^*, (p = 1, 2, \dots, \nu - 2) \\ C_p &= \bar{B}_p - \sum_{j=1}^{\nu+p-1} j \bar{A} j r_{j+1}^*, (p = 0, 1) \\ C_p &= \bar{B}_p - \sum_{j=p}^{\nu+p-1} j \bar{A} j r_{j-p+1}^* - \sum_{j=1}^{p-1} j \bar{A} j r_{p-j-1}, \\ &(p = 2, 3, \dots, \infty) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (A.5 b)$$

これに対して式 (A.2) の右辺は式 (17) の右辺の値を用いて、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 &= \frac{1}{2\pi} (Y - iX)\theta + \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{a}_m + i\bar{b}_m) \sigma^{-m} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (a_m + ib_m) \sigma^m \dots \dots \dots (A.6) \end{aligned} \right\}$$

ここに、 a_m, b_m およびこれらと共役ら複素数 \bar{a}_m, \bar{b}_m は付録 II の結果から具体的に求められる定数である。

式 (A.5) および (A.6) を式 (A.2) に代入し、両辺の σ^m の項の係数比較を行なうことにより次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} A_p &= (\bar{a}_p + i\bar{b}_p), (p = \nu - 1, \nu, \dots, \infty) \\ A_p &= (\bar{a}_p + i\bar{b}_p) + \sum_{j=1}^{\nu-p-1} j \bar{A} j r_{j+p+1}^* \\ &(p = 1, 2, \dots, \nu - 2) \end{aligned} \right\}$$

孔を有する等方性ならびに異方性弾性ばり内の応力状態

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_p &= (a_p + ib_p) + \sum_{j=1}^{\nu+p-1} j \bar{A}_j r_j^* r_{-p+1}^*, \quad (p=0, 1) \\ \bar{B}_p &= (a_p + ib_p) + \sum_{j=p}^{\nu+p-1} j \bar{A}_j r_j^* r_{-p+1}^* + \sum_{j=1}^{p-1} j \bar{A}_j r_{p-j-1}^* \\ &\quad (p=2, 3, \dots, \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.7 a)$$

上式中の第2番目の式は、二、三の演算ののち、次のように書きかえられる。

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^p A_j \left\{ \delta_j^p - j \sum_{k=p+2}^{\nu} (k-p-1) r_k^* \bar{r}_{k-p+j}^* \right\} \\ &- \sum_{j=p+1}^{\nu-2} A_j \left\{ j \sum_{k=p+2}^{\nu+p-1} (k-p-1) r_k^* \bar{r}_{k-p+j}^* \right\} \\ &= (\bar{a}_p + i\bar{b}_p) + \sum_{j=1}^{\nu-p-1} j r_{j+p+1}^* (a_j - ib_j), \\ &\quad (p=1, 2, \dots, \nu-3) \\ &\sum_{j=1}^{\nu-2} A_j \{ \delta_j^{\nu-2} - j r_{\nu+2}^* \bar{r}_{j+2}^* \} \\ &= (\bar{a}_{\nu-2} + i\bar{b}_{\nu-2}) + r_{\nu}^* (a_1 - ib_1) \end{aligned} \right\} (A.7 b)$$

この(ν-2)個の連立一次方程式は簡単に解け、A₁, A₂, …, A_{ν-2} が求められる。したがって、残りの係数 A_p あるいは B_p の値も式 (A.7 a) から求まる。

次に、A, B は式 (A.5 a) および (A.6) の θ の係数比較ならびに変位の一個性の条件より、最終的に

$$A = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\epsilon)}, \quad B = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \dots\dots\dots (A.8)$$

となる。ここに κ は平面応力状態の場合、κ=(3-ν₀)/(1+ν₀) で表わされる定数である。

以上より、関数 φ₁(ζ) および ψ₁(ζ) に含まれるすべての係数 A, A_m, B および B_m が、外荷重形式によって与えられる a_m, b_m および孔形状によって定まる α_k, β_k の既知定数によって表示された。

ところで、上式 (A.7 a) に与えられた B_m は無限項級数になるため、B_m の決定には式 (A.2) の複素共役式から直接 ψ₁(ζ) を求める方が簡便であり、その結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) &= f_1 - if_2 + \bar{A} \ln \zeta - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{A}_m \zeta^m \\ &- \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \{ A \zeta^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \zeta^{-(m+1)} \} \dots\dots\dots (A.9 a) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} f_1 - if_2 &= \frac{1}{2\pi} (X - iY) \ln \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m - ib_m) \zeta^m \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (\bar{a}_m - \bar{b}_m) \zeta^{-m} \dots\dots\dots (A.9 b) \end{aligned}$$

かくして、等方性体内の応力成分 σ_x, σ_y および τ_{xy} は式 (6), (A.7) および式 (A.9) を使用して通常の手法により求められることになる。

付 録 II

複素解析関数 φ(z₀), ψ(z₀) あるいは φ_k(z_k) を定め

るためには、いくつかの積分を行わなければならない。ここでは理論を簡明にするために、以下に必要な補助積分の公式を示そう。

孔の境界を表わす式 (11) を次のように書きかえる。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m' \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta) \\ y_0 &= \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m'' \sin m\theta + \beta_m \cos m\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.10)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' &= \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_j' = -\alpha_j \quad (j=2, 3, \dots, \nu) \\ \alpha_1'' &= \alpha_0 - \alpha_1, \quad \alpha_j'' = -\alpha_j \end{aligned} \right\} (A.11)$$

したがって、式 (A.10) を微分すれば、

$$\left. \begin{aligned} dx_0 &= \sum_{m=1}^{\nu} m (-\alpha_m' \sin m\theta + \beta_m \cos m\theta) \cdot d\theta \\ dy_0 &= \sum_{m=1}^{\nu} m (\alpha_m'' \cos m\theta - \beta_m \sin m\theta) \cdot d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.12)$$

がえられる。これらの式を利用すれば、以下の不定積分を求めることはさして困難ではない。

$$\left. \begin{aligned} \int y_0 \cdot dy_0 &= \frac{1}{2} \{ F_0^1 \cdot \theta + \sum_{m=1}^{2\nu} (F_m^1 \cos m\theta + H_m^1 \sin m\theta) \} \\ \int y_0 \cdot dx_0 &= \frac{1}{2} \{ F_0^2 \cdot \theta + \sum_{m=1}^{2\nu} (F_m^2 \cos m\theta + H_m^2 \sin m\theta) \} \\ \int x_0 \cdot dy_0 &= \frac{1}{2} \{ F_0^3 \cdot \theta + \sum_{m=1}^{2\nu} (F_m^3 \cos m\theta + H_m^3 \sin m\theta) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.13)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} F_0^1 &= 0, \quad F_0^2 = -F_0^3 = \sum_{j=1}^{\nu} j (\beta_j^2 - \alpha_j' \alpha_j'') \\ F_1^\alpha &= \sum_{j=2}^{\nu} (A_{j,j-1}^{\alpha,2} + A_{j-1,j}^{\alpha,2}), \quad H_1^\alpha = \sum_{j=2}^{\nu} (A_{j,j-1}^{\alpha,4} - A_{j-1,j}^{\alpha,4}), \\ F_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} A_{n-j,j}^{\alpha,1} + \sum_{j=n+1}^{\nu} (A_{j,j-n}^{\alpha,2} + A_{j-n,j}^{\alpha,2}), \\ H_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} A_{n-j,j}^{\alpha,3} + \sum_{j=n+1}^{\nu} (A_{j,j-1}^{\alpha,4} - A_{j-n,j}^{\alpha,4}), \\ &\quad (n=2, 3, \dots, \nu-1) \\ F_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} A_{n-j,j}^{\alpha,1}, \quad H_n^\alpha = \sum_{j=1}^{n-1} A_{n-j,j}^{\alpha,3}, \quad (n=\nu, \nu+1) \\ F_n^\alpha &= \sum_{j=n-\nu}^{\nu} A_{n-j,j}^{\alpha,1}, \quad H_n^\alpha = \sum_{j=n-\nu}^{\nu} A_{n-j,j}^{\alpha,3}, \\ &\quad (n=\nu+2, \dots, 2\nu) \\ &\quad \alpha=1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.14)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{k,j}^{\alpha,1} &= \frac{j}{k+j} B_{k,j}^{\alpha,1}, \\ A_{k,j}^{\alpha,2} &= -\frac{j}{k-j} B_{k,j}^{\alpha,2} \\ A_{k,j}^{\alpha,3} &= \frac{j}{k+j} B_{k,j}^{\alpha,3}, \\ A_{k,j}^{\alpha,4} &= -\frac{j}{k-j} B_{k,j}^{\alpha,2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.15)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{k,j}^{1,1} &= \beta_k \beta_j - \alpha_k'' \alpha_j'', & B_{k,j}^{1,2} &= \alpha_k'' \alpha_j'' + \beta_k \beta_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.16 a)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{k,j}^{1,3} &= \alpha_j'' \beta_k + \alpha_k'' \beta_j, & B_{k,j}^{1,4} &= \alpha_k'' \beta_j - \alpha_j'' \beta_k \\ B_{k,j}^{2,1} &= \alpha_j' \beta_k - \beta_j \alpha_k'', & B_{k,j}^{2,2} &= \alpha_j' \beta_k + \beta_j \alpha_k'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.16 b)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{k,j}^{2,3} &= \beta_j \beta_k + \alpha_j' \alpha_k'', & B_{k,j}^{2,4} &= \alpha_j' \alpha_k'' - \beta_j \beta_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.16 c)$$

$$\left. \begin{aligned} B_{k,i} &= B_{j,k}^{2,i}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots (A.16 c) \\ \int y_0^2 dy_0 &= \frac{1}{4} \left\{ M_0^1 \cdot \theta + \sum_{m=1}^{3\nu} (M_m^1 \cos m\theta + N_m^1 \sin m\theta) \right\} \\ \int y_0^2 dx_0 &= \frac{1}{4} \left\{ M_0^2 \cdot \theta + \sum_{m=1}^{3\nu} (M_m^2 \cos m\theta + N_m^2 \sin m\theta) \right\} \\ \int x_0 y_0 dy_0 &= \frac{1}{4} \left\{ M_0^3 \cdot \theta + \sum_{m=1}^{3\nu} (M_m^3 \cos m\theta + N_m^3 \sin m\theta) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.17)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} M_0^\alpha &= \sum_{j=1}^\nu j (V_j^1 \alpha_j'' - W_j^1 \beta_j), & M_0^2 &= \sum_{j=1}^\nu j (V_j^1 \beta_j - W_j^1 \alpha_j) \\ M_0^3 &= \sum_{j=1}^\nu j (V_j^2 \alpha_j'' - W_j^2 \beta_j) \\ M_n^\alpha &= \sum_{j=1}^n J_{n+j,j}^{\alpha,3} + \sum_{j=1}^\nu J_{n+j,j}^{\alpha,4} + \sum_{j=n}^\nu J_{j-n,j}^{\alpha,4}, & (n=1, 2, \dots, \nu) \\ N_n^\alpha &= \sum_{j=1}^n J_{n-j,j}^{\alpha,1} + \sum_{j=1}^\nu J_{n+j,j}^{\alpha,2} - \sum_{j=n}^\nu J_{j-n,j}^{\alpha,2} \\ M_n^\alpha &= \sum_{j=1}^\nu J_{n-j,j}^{\alpha,3} + \sum_{j=n+1}^{2\nu} J_{j,j-n}^{\alpha,4}, & (n=\nu+1, \nu+2, \dots, 2\nu-1) \\ N_n^\alpha &= \sum_{j=1}^\nu J_{n-j,j}^{\alpha,1} + \sum_{j=n+1}^{2\nu} J_{j,j-n}^{\alpha,2} \\ M_{2\nu}^\alpha &= \sum_{j=1}^\nu j_{2\nu-j,j}^{\alpha,3}, & N_{2\nu}^\alpha &= \sum_{j=1}^\nu j_{2\nu,j}^{\alpha,n} \\ M_n^\alpha &= \sum_{j=n-2\nu}^\nu J_{n-j,j}^{\alpha,3}, & N_n^\alpha &= \sum_{j=n-2\nu}^\nu J_{n-j,j}^{\alpha,1} \quad (n=2\nu+1, \dots, 3\nu) \\ & & \alpha &= 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.18)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{k,j}^{1,1} &= \frac{j}{k+j} (V_k^1 \alpha_j'' + W_k^1 \beta_j), & J_{k,j}^{1,2} &= \frac{j}{k-j} (V_k^1 \alpha_j'' - W_k^1 \beta_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.19 a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{k,j}^{1,3} &= \frac{j}{k+j} (W_k^1 \alpha_j'' - V_k^1 \beta_j), & J_{k,j}^{1,4} &= -\frac{j}{k-j} (W_k^1 \alpha_j'' + V_k^1 \beta_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.19 a)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{k,j}^{2,1} &= \frac{j}{k+j} (V_k^1 \beta_j + W_k^1 \alpha_j), & J_{k,j}^{2,2} &= \frac{j}{k-j} (V_k^1 \beta_j - W_k^1 \alpha_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.19 b)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{k,j}^{2,3} &= \frac{j}{k+j} (V_k^1 \alpha_j - W_k^1 \beta_j), & J_{k,j}^{2,4} &= -\frac{j}{k-j} (W_k^1 \beta_j + V_k^1 \alpha_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.19 b)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{k,j}^{k,1} &= \frac{j}{k+j} (V_k^2 \alpha_j'' + W_k^2 \beta_j), & J_{k,j}^{k,2} &= \frac{j}{k-j} (V_k^2 \alpha_j'' - W_k^2 \beta_j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.19 c)$$

$$\left. \begin{aligned} J_{k,j}^{k,3} &= \frac{j}{k+j} (V_k^2 \beta_j - W_k^2 \alpha_j''), & J_{k,j}^{k,4} &= -\frac{j}{k-j} (V_k^2 \beta_j + W_k^2 \alpha_j'') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.19 c)$$

$$\left. \begin{aligned} V_0^\alpha &= \sum_{j=1}^\nu B_{j,j}^{\alpha,2} \\ V_1^\alpha &= \sum_{j=2}^\nu (B_{j,j-1}^{\alpha,2} + B_{j-1,j}^{\alpha,2}), & W_1^\alpha &= \sum_{j=2}^\nu (B_{j,j-1}^{\alpha,4} - B_{j-1,j}^{\alpha,4}) \\ V_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} B_{n-j,j}^{\alpha,1} + \sum_{j=n+1}^\nu (B_{j,j-n}^{\alpha,2} + B_{j-n,j}^{\alpha,2}), & (n=2, 3, \dots, \nu-1) \\ W_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} B_{n-j,j}^{\alpha,3} + \sum_{j=n+1}^\nu (B_{j,j-n}^{\alpha,4} - B_{j-n,j}^{\alpha,4}) \\ V_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} B_{n-j,j}^{\alpha,1}, & W_n^\alpha &= \sum_{j=1}^{n-1} B_{n-j,j}^{\alpha,3} \quad (n=\nu, \nu+1) \\ V_n^\alpha &= \sum_{j=n-\nu}^\nu B_{n-j,j}^{\alpha,1}, & W_n^\alpha &= \sum_{j=n-\nu}^\nu B_{n-j,j}^{\alpha,3} \quad (n=\nu+2, \dots, 2\nu) \\ & & \alpha &= 1, 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.20)$$