

有限粘土層の多次元圧密について

TWO AND THREE DIMENSIONAL CONSOLIDATION OF
A CLAY LAYER WITH FINITE THICKNESS

山口 柏 樹*・村上 幸 利**

By Hakuju Yamaguchi and Yukitoshi Murakami

1. はじめに

土質基礎工学においては載荷された粘土層の圧密沈下の進行を Terzaghi の一次元圧密理論で評価するのが普通である。この理論では脱水が鉛直方向に限るとしているが、このような状態は実際にはまれにしか起こり得ないものであろう。Rendulic などは過剰水圧が多次元熱伝導の方程式に支配されるとして、Terzaghi 理論をより一般的変形状態を考える場合に拡張している¹⁾²⁾。このような土構造の変形と過剰水圧を互いに独立したものととして取扱う立場では圧密進行中に平均全応力が時間に対して変わらないという条件を課さねばならない。と同時に問題の設定時に初期過剰水圧の分布を適当に仮定せねばならない。以上の制限は Biot³⁾⁴⁾ の提唱した圧密理論においては不要であって、土構造と間げき流体の物理的性質のみが規定されればよい。Biot の理論の基礎は土構造の弾性と間げき流体の運動が Darcy の法則にしたがうことであり、理論的体系としては完備されたものというべきである。最近 Biot の基礎理論について、吉国⁵⁾が一つの解釈を示している。しかしながら、Biot の方程式は本質的に変わるものではなく、実際問題に適用して応用性のある解を求めることの意義は、きわめて大きいものと考えられる。

ところで Biot の圧密論に関する従来の研究は帯状載荷に関する Biot⁶⁾ の解例、矩形形状載荷に対する Gibson, McNamee⁷⁾ の解析、集中荷重の場合の Mandel⁸⁾⁹⁾ の研究など、もっぱら半無限地盤を対象とするものが多くみられるに反し、実際上しばしば問題となる有限深さの粘土層に関する圧密解析の論文としては Gibson, Schiffman¹⁰⁾ らによるものがあげられるのみであろう。しかしながら彼らの解析経過には収れん性に関連した数学的問題があり、その結果、多次元圧密進行速度は一次元圧

密に比べて小さくなることが結論されている。多次元圧密では水平方向の脱水効果も加わるはずであるから上述の結果は首肯しがたいものというべく、事実観測によっても矛盾が明らかである。したがって Gibson らの研究結果の実用性は疑わしい。

本論文においては水平に堆積した有限深さの粘土層の表面に帯基礎または円基礎を通じて対称的荷重を加えた場合の粘土層の圧密問題を Biot の基礎理論に基づいて解析した結果を述べる。用いた手法は Biot の基礎方程式を直接解くものであって、Gibson らの方法とは異なるものである。粘土層の上下面の両者または一方が排水端であるとしてたわみ性基礎に関する沈下度～時間曲線をいろいろな荷重幅と深さの比に対して与えた。これらは実際の粘土地盤上に部分的に載荷されたときの圧密沈下の進行を予測する上で有用なものと考えられる。また基礎が剛であるものにつき重ね合わせの法則で沈下度～時間曲線を帯基礎の場合に求め、基礎の剛性が圧密経過に影響する程度を調べた。これらの様相は基礎地盤の安定計算を行なう段階で役立つものと思う。

本解析を通じて、数学的難点のため粘土層の自由表面でせん断応力が消失する条件の代りに、そこでの水平変位が 0 という条件を入れねばならなかった。したがって本解の場合、自由表面に局部的にせん断応力が現われるが、その最大値は分布荷重値の 1/5 程度である。この意味で解の厳密性は保たれないが近似性は実用的にほとんど無視しうるものと考えられる。事実、近似の程度を調べるため室内モデル試験結果ならびに現場観測値との比較を行なった結果、理論による沈下度～時間曲線は工學上十分な精度で適用しうることが判明した。

2. Biot の圧密方程式について

(1) 変位に関する圧密方程式

本論文の議論に関する部分に限って、飽和粘土地盤の

* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

** 学生会員 工修 東京工業大学大学院 博士課程学生

多次元圧密の基礎理論をまず摘記する。

平面ひずみの条件で土構造に関する有効応力成分(圧縮応力を正とする)は括めた形で

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{x'}; \sigma_z) &= 2G[-(\partial u/\partial x; \partial w/\partial z) \\ &\quad + \{\nu/(1-2\nu)\} \cdot \epsilon_v] \\ \tau_{xz} &= -G \cdot (\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに座標は図-1のようにとり、 u, w は x, z 軸方向の土構造の変位成分、 G はそのせん断剛性率、 ν はポアソン比である。

また、 $\epsilon_v = (\partial u/\partial x + \partial w/\partial z)$ は体積ひずみ(圧縮を正とする)である。 σ を過剰水圧としたとき全応力に関するつりあい方程式に式(1)を用いると

$$\left. \begin{aligned} G\{\nabla_1^2(u; w) - (\partial \epsilon_v/\partial x; \partial \epsilon_v/\partial z)/(1-2\nu)\} \\ = (\partial \sigma/\partial x; \partial \sigma/\partial z) \dots \dots \dots (2) \end{aligned} \right\}$$

ここに ∇_1^2 は二次元のラプラスアンである。一方間けき水の流れが Darcy の法則で規定されるとしたとき土要素からの脱水量が体積ひずみの変化率に等しいことから、

$$\partial \epsilon_v/\partial t = -(k/\gamma_w)\nabla_1^2 \sigma = C_v \nabla_1^2 \epsilon_v \dots \dots \dots (3)$$

ただし末項への移行においては式(2)を利用している。上式に現われる圧密係数 C_v は

$$\left. \begin{aligned} C_v &= 2G(1-\nu)k/(1-2\nu)\gamma_w \\ &= k(1-\nu)E/\gamma_w(1+\nu)(1-2\nu) \dots \dots \dots (4) \end{aligned} \right\}$$

のように表わされる。ここに E は土構造の圧縮弾性率であって、拘束一次元状態における粘土の体積圧縮係数を m_v とするとき $1/m_v = (1-\nu)E/(1+\nu)(1-2\nu) =$ (拘束状態での圧縮弾性率¹¹⁾ が成り立つ。したがって、式(4)で $C_v = k/\gamma_w m_v$ 、すなわち式(3)の C_v は一次元圧密論での圧密係数に等しいことがわかる。この点については従来案外注意されなかつたように思われる。

軸対称載荷では変形も軸対称であって、 xz 軸の代りに rz 軸を考え、その方向の変位成分を u_r, w とすると

$$\left. \begin{aligned} G\{(\nabla_1^2 u_r - u_r/r; \nabla_1^2 w) - (\partial \epsilon_v/\partial r; \partial \epsilon_v/\partial z)/(1-2\nu)\} \\ = (\partial \sigma/\partial r; \partial \sigma/\partial z) \dots \dots \dots (5) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \partial \epsilon_v/\partial t &= C_v(\partial^2/\partial r^2 + \partial/r \partial r + \partial^2/\partial z^2)\epsilon_v \\ &= C_v \nabla_1^2 \epsilon_v = -(k/\gamma_w)\nabla_1^2 \sigma \dots \dots \dots (6) \end{aligned} \right\}$$

が基礎方程式となる。

(2) 変位関数に関する圧密方程式

本論では式(2)、(3)または式(5)、(6)を直接的に解くのであるが Gibson らが用いた方法は変位関数 R, S に関するものである。いま u, v の代りに R, S を $(u; w) = -(\partial/\partial x; \partial/\partial z)R$

$$+ z \cdot (\partial/\partial x; \partial/\partial z)S - (0; S) \dots (7)$$

で定義すると式(2)、(3)より

$$\left. \begin{aligned} a/2 G = \partial S/\partial z - \{(1-\nu)/(1-2\nu)\} \\ \cdot \nabla_1^2 R, \nabla_1^2 S = 0, \\ C_v \nabla_1^2 R = \nabla_1^2 \partial R/\partial t \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

が所要の基礎方程式となる¹²⁾。

3. たわみ性基礎に対する圧密方程式の解法

(1) 帯荷重に対する一般解

式(3)の第1、第3式から Fourier 変換を用いて ϵ_v を求めると

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= \int_0^\infty [\sum_\alpha (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) \\ &\quad \cdot \exp(-K_{\alpha\beta} t) \\ &\quad + (C_\beta \text{ch } \beta z + D_\beta \text{sh } \beta z)] \cos \beta x d\beta \end{aligned} \right\} \dots \dots (9)$$

したがって式(3)の第2、3式から σ がえられる。 $\nabla^2\{\sigma + (C_v \gamma_w/k) \cdot \epsilon_v\} = 0$ より一般的に σ は ϵ_v に比例するものと積分関数としての調和関数の一次結合で表わされるが⁵⁾、これは $t \rightarrow \infty$ で $\sigma \rightarrow 0$ の条件を満足しなければならぬ。その結果

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -(C_v \gamma_w/k) \cdot \int_0^\infty \sum_\alpha (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z \\ &\quad + E_{\alpha\beta} \text{ch } \beta z + F_{\alpha\beta} \text{sh } \beta z) \\ &\quad \cdot \exp(-K_{\alpha\beta} t) \cos \beta x d\beta \dots \dots \dots (10) \end{aligned} \right\}$$

ここで便宜上 E_β, F_β の代りに $\sum_\alpha E_{\alpha\beta}, \sum_\alpha F_{\alpha\beta}$ を用いてある。

ϵ_v, σ を用いると u, w は一般に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^\infty [\Phi_1(z) \cdot \exp(-K_{\alpha\beta} t) + \Phi_2(z)] \sin \beta x d\beta \\ w &= \int_0^\infty [\Phi_3(z) \cdot \exp(-K_{\alpha\beta} t) + \Phi_4(z)] \cos \beta x d\beta \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(z) &= \sum_\alpha \{-\beta/(\alpha^2 + \beta^2)\} (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) \\ &\quad - (C_v \gamma_w/2Gk) \\ &\quad \cdot \sum_\alpha (E_{\alpha\beta} \text{sh } \beta z + F_{\alpha\beta} \text{ch } \beta z) \\ &\quad + \sum_\alpha (I_{\alpha\beta} \text{ch } \beta z + J_{\alpha\beta} \text{sh } \beta z) \\ \Phi_2(z) &= -\{1/2(1-2\nu)\} (C_\beta \text{sh } \beta z + D_\beta \text{ch } \beta z) \\ &\quad + (G_\beta \text{ch } \beta z + H_\beta \text{sh } \beta z) \\ \Phi_3(z) &= \sum_\alpha \{\alpha/(\alpha^2 + \beta^2)\} (-A_{\alpha\beta} \sin \alpha z + B_{\alpha\beta} \cos \alpha z) \\ &\quad - (C_v \gamma_w/2Gk) \\ &\quad \cdot \sum_\alpha (E_{\alpha\beta} \text{ch } \beta z + \text{sh } \beta z/\beta) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &+F_{\alpha\beta}(z \operatorname{sh} \beta z - \operatorname{ch} \beta z / \beta) \\
 &-\sum_{\alpha} (J_{\alpha\beta} \operatorname{ch} \beta z + I_{\alpha\beta} \operatorname{sh} \beta z) \\
 \Phi_4(z) = &\{1/2(1-2\nu)\} \\
 &\cdot [C_{\beta}\{z \operatorname{ch} \beta z - (3-4\nu) \operatorname{sh} \beta z / \beta\} \\
 &+D_{\beta}\{z \operatorname{sh} \beta z - (3-4\nu) \operatorname{ch} \beta z / \beta\}] \\
 &-(G_{\beta} \operatorname{sh} \beta z + H_{\beta} \operatorname{ch} \beta z)
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{\alpha} \beta (I_{\alpha\beta} \operatorname{sh} \beta z + J_{\alpha\beta} \operatorname{ch} \beta z) \\
 \Psi_5(z) = &\{1/2(1-2\nu)\} \\
 &\cdot [C_{\beta}\{\beta z \operatorname{ch} \beta z - (1-2\nu) \operatorname{sh} \beta z\} \\
 &+D_{\beta}\{\beta z \operatorname{sh} \beta z - (1-2\nu) \operatorname{ch} \beta z\}] \\
 &-\beta (G_{\beta} \operatorname{sh} \beta z + H_{\beta} \operatorname{ch} \beta z)
 \end{aligned} \tag{15}$$

がえられる。以上の式で 10 個の積分定数 $A_{\alpha\beta}, \dots, H_{\beta}$ および固有値 α は境界条件によって決まるものである。

(2) 積分定数および固有値の決定

ここで境界条件および初期条件について考察しよう。応力、変位の表示式において $t \rightarrow \infty$ としたとき残るのは $\Phi_2, \Phi_4, \Psi_2, \Psi_4, \Psi_5$ であるが、これらは 4 個の積分定数 $C_{\beta}, D_{\beta}, G_{\beta}, H_{\beta}$ のみを含んでいる。 $t \rightarrow \infty$ では応力、変位が半無限帯域の弾性応力、変位に等しいはずであるから、4 定数は弾性解に現われるものとしてまず決定できる。

ところで、弾性問題の境界条件として粘土層の表面 $z=d$ で $\sigma_z=q$ が $|x| < b$ の帯状域で指定されるならば周知の Fourier 積分公式によって

$$(\sigma_z)_d = (2q/\pi) \int_0^{\infty} (\sin b\beta/\beta) \cdot \cos \beta x d\beta \tag{16}$$

が境界条件の一つとなる。表面で $(\tau_{xz})_d=0$ として解くことはむずかしいので、その代りに水平変位がない条件すなわち $(u)_d=0$ を用いることとする。なお底面 $z=0$ では滑らかで、かつ鉛直変位はないものとする。

底面が滑らかな場合底面でのせん断応力は生じないから $(\tau_{xz})_0=0, (w)_0=0$ である。したがって式 (12), (15) によって

$$\begin{aligned}
 &(C_{\beta}; D_{\beta}; H_{\beta}; G_{\beta}) \\
 &= [q \sin b\beta / \{\pi\beta G(1-\nu) \operatorname{ch} \beta d\}] \\
 &\cdot (1-2\nu; 0; 0; d \operatorname{th} \beta d / 2) \dots \dots \dots (17)
 \end{aligned}$$

残りの定数は初期条件と $t \neq \infty$ に対する境界条件から決められる。内部での脱水速度は無限に大きくはならないから載荷の瞬間 ($t=0$) では $0 < z < d$ で $\epsilon_v=0$ である。もちろん $t=0$ で形状変形がありうるのであって、この点一次元圧密とは異なる。

底面が滑らかなとき境界条件としては任意時刻で表面の σ_z, u と底面での w, τ_{xz} が消失せねばならない。これらの 4 条件は $(\Psi_3)_d=0, (\Phi_1)_d=0, (\Phi_3)_0=0, (\Psi_5)_0=0$ にほかならない。他方過剰水圧 σ の境界条件としては排水端で $\sigma=0$ 、非排水端で $\partial\sigma/\partial z=0$ が $t \geq 0$ で成り立つ。その結果

$$\begin{aligned}
 a) \text{ 両端排水 } (\sigma_0)_d=0 \text{ の場合, } N_1=n\pi \text{ として} \\
 (B_{\alpha\beta}; I_{\alpha\beta}; J_{\alpha\beta}) = &\frac{-2C_{\beta}\{1-(-)^n \operatorname{ch} \beta d\}}{d\{\beta^2 + (N_1/d)^2\}} \\
 &\cdot \left(\frac{N_1}{d}; \frac{-(N_1/d)^2 \operatorname{th} \beta d}{\beta^2 + (N_1/d)^2}; \frac{(N_1/d)^2}{\beta^2 + (N_1/d)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\left. \begin{aligned}
 (\sigma_x; \sigma_z) = &2G \cdot [-(\partial u/\partial x; \partial w/\partial z) \\
 &+ \{\nu/(1-2\nu)\} \cdot \epsilon_v + \sigma/2 G] \\
 \tau_{xz} = &-G(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x)
 \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

であるから式 (9), (10), (11), (12) によって

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x = &2G \int_0^{\infty} [\Psi_1(z) \exp(-K_{\alpha\beta}t) + \Psi_2(z)] \\
 &\cdot \cos \beta x d\beta \\
 \sigma_z = &2G \int_0^{\infty} [\Psi_3(z) \exp(-K_{\alpha\beta}t) + \Psi_4(z)] \\
 &\cdot \cos \beta x d\beta \\
 \tau_{xz} = &2G \int_0^{\infty} [\Psi_5(z) \exp(-K_{\alpha\beta}t) + \Psi_6(z)] \\
 &\cdot \sin \beta x d\beta
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(z) = &\sum_{\alpha} \{-\alpha^2/(\alpha^2 + \beta^2)\} \\
 &\cdot (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) - (C_0 \tau_w / 2 Gk) \\
 &\cdot \sum_{\alpha} \{E_{\alpha\beta} (\operatorname{ch} \beta z + \beta z \operatorname{sh} \beta z) \\
 &+ F_{\alpha\beta} (\operatorname{sh} \beta z + \beta z \operatorname{ch} \beta z)\} \\
 &- \sum_{\alpha} \beta (I_{\alpha\beta} \operatorname{ch} \beta z + J_{\alpha\beta} \operatorname{sh} \beta z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_2(z) = &\{1/2(1-2\nu)\} \cdot [C_{\beta}(2\nu \operatorname{ch} \beta z + \beta z \operatorname{sh} \beta z) \\
 &+ D_{\beta}(2\nu \operatorname{sh} \beta z + \beta z \operatorname{ch} \beta z)] \\
 &- \beta (G_{\beta} \operatorname{ch} \beta z + H_{\beta} \operatorname{sh} \beta z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_3(z) = &\sum_{\alpha} \{-\beta^2/(\alpha^2 + \beta^2)\} \\
 &\cdot (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) - (C_0 \tau_w / 2 Gk) \\
 &\cdot \sum_{\alpha} \{E_{\alpha\beta} (\operatorname{ch} \beta z - \beta z \operatorname{sh} \beta z) \\
 &+ F_{\alpha\beta} (\operatorname{sh} \beta z - \beta z \operatorname{ch} \beta z)\} \\
 &+ \sum_{\alpha} \beta (I_{\alpha\beta} \operatorname{ch} \beta z + J_{\alpha\beta} \operatorname{sh} \beta z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_4(z) = &\{1/2(1-2\nu)\} \\
 &\cdot [C_{\beta}\{2(1-\nu) \operatorname{ch} \beta z - \beta z \operatorname{sh} \beta z\} \\
 &+ D_{\beta}\{2(1-\nu) \operatorname{sh} \beta z - \beta z \operatorname{ch} \beta z\}] \\
 &+ \beta (G_{\beta} \operatorname{ch} \beta z + H_{\beta} \operatorname{sh} \beta z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_5(z) = &\sum_{\alpha} \{-\alpha\beta/(\alpha^2 + \beta^2)\} \\
 &\cdot (A_{\alpha\beta} \sin \alpha z - B_{\alpha\beta} \cos \alpha z) - (C_0 \tau_w / 2 Gk) \\
 &\cdot \sum_{\alpha} \{E_{\alpha\beta} \beta z \operatorname{ch} \beta z + F_{\alpha\beta} \beta z \operatorname{sh} \beta z\}
 \end{aligned}$$

b) 上端排水, 下端非排水の場合は $A_{\alpha\beta}$ 以外の定数はすべて 0 となる。 $N_2=(2n+1)\cdot\pi/2$ として, これは

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{2N_2(-)^n \operatorname{ch} \beta d}{d^2\{\beta^2 + (N_2/d)^2\}} C_\beta \dots\dots\dots(19)$$

c) 上端非排水, 下端排水の場合は 0 でない定数が

$$(B_{\alpha\beta}; I_{\alpha\beta}; J_{\alpha\beta}) = -\frac{2\{(N_2/d) + \beta(-)^n \operatorname{sh} \beta d\}}{d\{\beta^2 + (N_2/d)^2\}} C_\beta \cdot \left(1; \frac{\beta(-)^n \operatorname{sech} \beta d - (N_2/d) \operatorname{th} \beta d}{\beta^2 + (N_2/d)^2}\right) \frac{(N_2/d)}{\beta^2 + (N_2/d)^2}; \dots\dots\dots(20)$$

d) 両端が非排水で水平脱水のみに行なわれる場合は

$$(A_{\alpha\beta}; I_{\alpha\beta}) = -\frac{2(-)^n \varepsilon_n \beta \operatorname{sh} \beta d}{d\{\beta^2 + (N_1/d)^2\}} C_\beta \cdot \left(1; \frac{\beta(-)^n \operatorname{sech} \beta d}{\beta^2 + (N_1/d)^2}\right) \dots\dots\dots(21)$$

$$\varepsilon_0=1/2, \varepsilon_i=1 \quad (i \geq 1)$$

ここで述べたほかに簡単に定数が決まるものとしては (i) 表面で τ_{xz} が与えられ, 底面で $\tau_{xz}=0$, 両面で $w=0$, (ii) 表面で σ_z が与えられ, 両面で $u=0$, 底面で $\sigma_z=0$ のようなケースがある。しかし後者は物理的に考えられないものである。

(3) 円形荷重に対する解

基礎方程式 (5), (6) に Hankel 変換を施すことにより帯荷重の場合と同様に解くことができる。その結果は 3. (1), (2) で述べた諸式において

$$(2/\pi\beta) \sin b \beta \cos \beta x \rightarrow a J_1(a\beta) J_0(r\beta) \dots\dots\dots(22)$$

と置き換えればよい。ただし a は載荷半径, J_0, J_1 はそれぞれ 0 次, 1 次の Bessel 関数である。

4. 過剰間げき水圧

(1) 過剰間げき水圧の一般式

前節で求めた各種排水条件に対する積分定数を式(10)に代入すると過剰間げき水圧 σ がえられる。結果を無次元表示するため

$$\zeta = z/d, \xi = x/d, \lambda = \beta d, \eta = b/d, T = C_v t/d^2 \dots\dots\dots(24)$$

とおくと

a) 両端排水の場合:

$$\sigma = (2q/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} B_{\lambda n}^{(1)} \exp\{-(\lambda^2 + N_1^2)T\} \cdot \sin N_1 \zeta \sin \eta \lambda \cos \xi \lambda d \lambda \left. \begin{aligned} B_{\lambda n}^{(1)} &= 2 N_1 \{1 - (-)^n \operatorname{ch} \lambda\} / \lambda (\lambda^2 + N_1^2) \operatorname{ch} \lambda \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

b) 上端排水, 下端非排水の場合:

$$\sigma = (2q/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{\lambda n}^{(1)} \exp\{-(\lambda^2 + N_2^2)T\} \cdot \cos N_2 \zeta \sin \eta \lambda \cos \xi \lambda d \lambda \left. \begin{aligned} A_{\lambda n}^{(1)} &= 2(-)^n N_2 / \lambda (\lambda^2 + N_2^2) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

c) 上端非排水, 下端排水の場合:

$$\sigma = (2q/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} B_{\lambda n}^{(2)} \exp\{-(\lambda^2 + N_2^2)T\} \cdot \sin N_2 \zeta \sin \eta \lambda \cos \xi \lambda d \lambda \left. \begin{aligned} B_{\lambda n}^{(2)} &= 2\{N_2 + \lambda(-)^n \operatorname{sh} \lambda\} / \lambda (\lambda^2 + N_2^2) \operatorname{ch} \lambda \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

d) 上下端非排水の場合:

$$\sigma = (2q/\pi) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} A_{\lambda n}^{(2)} \exp\{-(\lambda^2 + N_1^2)T\} \cdot \cos N_1 \zeta \sin \eta \lambda \cos \xi \lambda d \lambda \left. \begin{aligned} A_{\lambda n}^{(2)} &= 2 \varepsilon_n (-)^n \operatorname{th} \lambda / (\lambda^2 + N_1^2) \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

(2) 初期過剰間げき水圧

載荷直後の粘土層内の過剰間げき水圧 $(\sigma)_{t=0}$ は一般に式 (10) と $(\varepsilon_v)_{t=0}=0$ の条件により

$$(\sigma)_{t=0} = \{2G(1-\nu)/(1-2\nu)\} \cdot \int_0^{\infty} (C_\beta \operatorname{ch} \beta z + D_\beta \operatorname{sh} \beta z) \cos \beta x d\beta \dots\dots\dots(29)$$

で与えられる。一方, 式(14), (15)を用いて $(\sigma_x + \sigma_z)_{t=0}$ を計算すると, これは $2(\sigma)_{t=0}$ に等しいことがわかる。ゆえに,

$$(\sigma)_{t=0} = (\sigma_x + \sigma_z)_{t=0}/2 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{t=0}/3 \dots\dots\dots(30)$$

末項は弾性法則

$$\varepsilon_v = (1-2\nu)(\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z')/E = (1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma)/E$$

において $(\varepsilon_v)_{t=0}=0$ を用いて得られる関係である。

一方 $t \rightarrow \infty$ で式 (14), (15) から求めた二軸平均有効応力は

$$(\sigma_x + \sigma_z)_{t=\infty}/2 = \{G/(1-2\nu)\} \cdot \int_0^{\infty} (C_\beta \operatorname{ch} \beta z + D_\beta \operatorname{sh} \beta z) \cos \beta x d\beta \dots\dots\dots(31)$$

となつて $(\sigma)_{t=0}$ に等しくならない。同様に $t \rightarrow \infty$ で平面ひずみの条件の下での平均有効主応力を考えると, これは,

$$(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)_{t=\infty}/3 = (1+\nu)(\sigma_x + \sigma_z)_{t=\infty}/3 = (1+\nu)(\sigma)_{t=0}/3(1-\nu) \dots\dots\dots(32)$$

で, やはり $(\sigma)_{t=0}$ とは一致しない。したがつて

$$\left\{ (\sigma)_{t=0} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)_{t=0}; \left(\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)_{t=\infty}; \right.$$

$$\left. \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)_{t=0} \right\} \\ = \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \\ \cdot \int_0^\infty (C_\beta \operatorname{ch} \beta z + D_\beta \operatorname{sh} \beta z) \cos \beta x d\beta \\ \cdot \{1; 1/2(1-\nu); (1+\nu)/3(1-\nu)\} \\ \dots\dots\dots(33)$$

の関係がえられる。各項は比例係数のみを異にし、分布形状は相似である。多くの粘土で実験的に認められているようにポアソン比が0.5に近ければ式(33)の左辺の各項はすべて1に近くなる。以上のことは排水条件に無関係に主張しうることであるが、境界条件として正解が決まるのは3. で述べたように3つのケースのみであった。したがって表面でせん断応力が0であるような最も実際的な条件に対しても上記の結論があてはまるか否かは、にわかには断定しがたい。しかし表面でせん断応力が消失する場合でも、平均弾性主応力をもって初期過剰間げき水圧の近似値として大きな誤差を生じないものと想像される。

1. で Rendulic の方程式について一言したが、Davis²⁾ によれば弾性法則式と連続の方程式を組み合わせると三次元の圧密方程式として

$$U_c(x, z, t) = \frac{\{(\sigma)_{t=0} - (\sigma)_t\}}{(\sigma)_{t=0}} = \frac{\int_0^\infty \sum_\alpha (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) \{1 - \exp(-K_{\alpha\beta} t)\} \cos \beta x d\beta}{\int_0^\infty \sum_\alpha (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) \cos \beta x d\beta} \dots\dots\dots(36)$$

ただし、すべての排水条件に対し $E_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} = 0$ なることを注意したい。

ところで前項で述べたところにしたがって $C_2 \doteq C_v$ として Rendulic 式を解くと

$$\sigma = \int_0^\infty \sum_{\alpha'} (A_{\alpha\beta}' \cos \alpha' z + B_{\alpha\beta}' \sin \alpha' z) \\ \cdot \exp(-K_{\alpha\beta}' t) \cos \beta x d\beta \dots\dots\dots(37)$$

である。ただし $K_{\alpha\beta}' = C_v(\alpha'^2 + \beta^2)$ 。明らかに α' は排水条件に応じて 3. で求めた固有値 α に等しく $K_{\alpha\beta}' = K_{\alpha\beta}$ 。しかして式(33)より、

$$(\sigma)_{t=0} \doteq \{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3\}_{t=0} \\ = \{2G(1+\nu)/3(1-2\nu)\} \\ \cdot \int_0^\infty (C_\beta \operatorname{ch} \beta z + D_\beta \operatorname{ch} \beta z) \cos \beta x d\beta \\ = \int_0^\infty \sum_\alpha (A_{\alpha\beta}' \cos \alpha z + B_{\alpha\beta}' \sin \alpha z) \\ \cdot \cos \beta x d\beta \dots\dots\dots(38)$$

であるから式(9)で $t=0$ としえられる式

$$\int_0^\infty \sum_\alpha (A_{\alpha\beta} \cos \alpha z + B_{\alpha\beta} \sin \alpha z) \cos \beta x d\beta \\ = - \int_0^\infty (C_\beta \operatorname{ch} \beta z + D_\beta \operatorname{sh} \beta z) \cos \beta x d\beta$$

$$\partial \sigma / \partial t = \{kE/3 \tau_{w0}(1-2\nu)\} V^2 \sigma \\ + \partial(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \partial t \dots\dots\dots(34)$$

が結論されている。したがって平均全応力 $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ が圧密を通し変わらないとすると平面ひずみの場合、前式は Rendulic の式として知られる。

$$\partial \sigma / \partial t = C_2 V_1^2 \sigma \quad (C_2 = C_v/2(1-\nu)) \dots\dots\dots(35)$$

に帰着する。上式の圧密係数 C_2 は Biot, Terzaghi のものとは異なるが $\nu \rightarrow 0.5$ では $C_2 \rightarrow C_v$ となる。また平均全応力の時間的変化の程度を考えるに、

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

に注意すると式(33)で圧密の初期と終期の値を比べることができる。すなわち両者の比は $3(1-\nu)/(1+\nu)$ でやはり $\nu \rightarrow 0.5$ で1に近づく。このことから少なくとも本論文にて考えた境界値問題に関しては圧密を通じて平均全応力の変化はあまり大きくないと考えられる。したがって Rendulic の式を近似的に用いてよく、しかも $C_2 \doteq C_v$ としても大きな誤差が生じないことを示唆している。もちろんこの場合の $(\sigma)_{t=0}$ は弾性平均主応力で与えられるとするのである。

(3) 圧密度

一次元圧密に対応して任意点の圧密度を定義しよう。

と比べると、

$$(A_{\alpha\beta}'; B_{\alpha\beta}') \\ = -\{2G(1+\nu)/3(1-2\nu)\} \cdot (A_{\alpha\beta}; B_{\alpha\beta}) \\ \dots\dots\dots(39)$$

一方式(37)に応ずる任意点の圧密度 $U_c'(x, z, t)$ は式(36)で $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$ を $A_{\alpha\beta}', B_{\alpha\beta}'$ に変えたものに等しい。ここで式(39)を考えると

$$U_c'(x, z, t) \equiv U_c(x, z, t)$$

が知られる。すなわち Biot の方程式に関する圧密度は適当な初期条件の下で Rendulic の方程式から得られる圧密度と全く一致するのである。多次元圧密の場合、実際に意味のあるものは後述する沈下度である。沈下度と圧密度は異なるのであって、その差は Rendulic 方程式の含む誤差を評価するものにほかならない。

5. 沈下および沈下度

(1) 沈下の一般表示式

粘土地盤上の構造物に関して実用上最も意味のあるも

のは表面での圧密沈下である。3. で求めた各定数を式 (11), (12) に適用して $z=d$ としたときの表面沈下を w_d と記し, w_d の中で時間に無関係な表面弾性沈下を w_{ed} とする。 $Q=qd/2 G(1-\nu)\pi$ と略記すれば,

$$w_{ed} = Q \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\lambda} - \frac{(3-4\nu)}{\lambda^2} \operatorname{th} \lambda - \frac{\operatorname{th}^2 \lambda}{\lambda} \right\} \cdot \sin \eta \lambda \cos \lambda \xi \, d\lambda \dots\dots\dots (39)$$

となる。 w_{ed} はまた最終沈下量である。これを用いて各種排水条件に対する w_d を示すと次のようになる。

(a) 両端排水, および両端非排水の場合はそれぞれ

$$w_d = w_{ed} + Q(1-2\nu) \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \left[\{B_{\lambda n}^{(1)}\}^2; \frac{\{A_{\lambda n}^{(2)}\}^2}{\varepsilon_n} \right] \cdot \exp\{-(\lambda^2 + N_1^2)T\} \sin \eta \lambda \cos \lambda \xi \, d\lambda \dots\dots (40)$$

(b) 上端のみ排水, および下端のみ排水場合はそれぞれ

$$w_d = w_{ed} + Q(1-2\nu) \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \{A_{\lambda n}^{(1)}\}^2; \{B_{\lambda n}^{(2)}\}^2 \cdot \exp\{-(\lambda^2 + N_2^2)T\} \sin \eta \lambda \cos \lambda \xi \, d\lambda \dots\dots (41)$$

以上の諸式において $B_{\lambda n}^{(1)}, A_{\lambda n}^{(1)}, B_{\lambda n}^{(2)}, A_{\lambda n}^{(2)}$ は式 (25)~(28) で与えられたものであり, 無次元量は式 (24) により定義されている。

円形荷重ならば上の諸式において $(1/\lambda) \sin \eta \lambda \cdot \cos \xi \lambda$ の代りに $\pi a J_1(a \lambda/d) \cdot J_0(r \xi/d)/2d$ と置き代えればよい。

(2) 沈下度

一次元圧密とは異なり, 一般に $t=0$ で $w_d=0$ では

(a) 両端排水の場合:

$$U_s(\xi, T) = \frac{\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \lambda \{B_{\lambda n}^{(1)}\}^2 [1 - \exp\{-(\lambda^2 + N_1^2)T\}] \cdot \sin \eta \lambda \cdot \cos \xi \lambda \, d\lambda}{\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \lambda \{B_{\lambda n}^{(1)}\}^2 \sin \eta \lambda \cdot \cos \xi \lambda \, d\lambda} \dots\dots\dots (45)$$

(b) 上端のみ排水の場合:

$$U_s(\xi, T) = \frac{\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \{A_{\lambda n}^{(1)}\}^2 [1 - \exp\{-(\lambda^2 + N_2^2)T\}] \cdot \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda}{\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \{A_{\lambda n}^{(1)}\}^2 \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda} \dots\dots\dots (46)$$

(c) 下端のみ排水の場合:

$$U_s(\xi, T) = \frac{\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \{B_{\lambda n}^{(2)}\}^2 [1 - \exp\{-(\lambda^2 + N_2^2)T\}] \cdot \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda}{\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \{B_{\lambda n}^{(2)}\}^2 \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda} \dots\dots\dots (47)$$

(d) 上下端とも非排水の場合:

$$U_s(\xi, T) = \frac{\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (\lambda/\varepsilon_n) \{A_{\lambda n}^{(2)}\}^2 [1 - \exp\{-(\lambda^2 + N_1^2)T\}] \cdot \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda}{\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty (\lambda/\varepsilon_n) \{A_{\lambda n}^{(2)}\}^2 \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda} \dots\dots\dots (48)$$

円形荷重に対しては上の諸式で $(1/\lambda) \sin(\eta \lambda) \cdot \cos(\xi \lambda)$ の代りに $J_1(a \lambda/d) \cdot J_0(r \xi/d)$ と置き代えればよい。いずれにしてもこの場合, 沈下度の中には弾性定数が入って来ないことは興味深いものというべきであろう。

ない。これは初期の体積ひずみが0であっても, 多次元問題ではせん断ひずみが生ずるためである。このような w_d は普通, 瞬時沈下 w_i といわれるものである。式 (40), (41) から

$$w_i = w_{ed} + Q(1-2\nu) \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \lambda \{F_{\lambda n}\}^2 \sin \eta \lambda \cdot \cos \lambda \xi \, d\lambda \dots\dots\dots (42)$$

の形をなしている。ただし F は $A_{\lambda n}^{(1)}$ などを意味し, N は n または $(2n+1)/2$ を標記したものである。したがって,

$$(w_i)_{\nu=0.5} = (w_{ed})_{\nu=0.5} \dots\dots\dots (43)$$

をうる。一般に瞬時沈下は弾性変位において $\nu=0.5$ としたもので評価できるといわれている。しかし w_i は ν によって変わるはずであり, 式 (43) だけから

$$w_i = (w_{ed})_{\nu=0.5}$$

なることは厳密にはいえない。その近似の程度は数値計算において述べることにする。

さて圧密度に対応して沈下度を次のように定義しよう。

$$U_s(\xi, T) = \frac{(w_d)_{t=T} - (w_d)_{t=0}}{(w_d)_{t=\infty} - (w_d)_{t=0}} = \frac{w_d - w_i}{w_{ed} - w_i} \dots\dots\dots (44)$$

前の諸式を利用すると, $U_s(\xi, T)$ は各種排水条件に対して次のようになる。

6. 剛性基礎に対する圧密解

完全に剛な構造物を直接粘土地盤上に建設することは実際には比較的少ないと思われるが、完全にたわみやすい構造物も事実上ない。構造物の剛性を考えて圧密問題を取扱うことは、きわめて面倒なので本論文ではほかの極端な場合として剛性基礎の圧密解法を示そう。

分割法と重合法則をたわみ性基礎について得られた解に適用して剛性基礎に対する解を計算できる。このことを帯基礎で上端のみ排水の場合に説明する。まず基礎を $2N$ 等分し、各区間の対称分布荷重すなわち接触反力 q_1, \dots, q_{2N} は分割域内で時刻ごとに一定とする(図-2)。 $q_j(t)$ による区分域 i の沈下 $\delta w_d(i, j)$ は式(41)によって

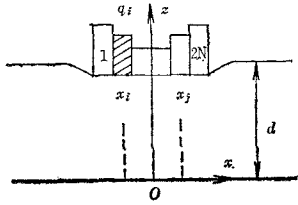


図-2 剛性載荷に対する分布荷重値および座標

$$\delta w_d(i, j) = \delta w_{ed} + Q(1-2\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \lambda \{A_{\lambda n}^{(1)}\}^2 \cdot \exp\{-(\lambda^2 + N_2^2)T\} \cdot \sin \lambda d b/d \cdot \cos \lambda(\xi_i - \xi_j) d\lambda \dots (49)$$

ここで $db = b/2N$ であり、 $\xi_i = x_i/d$, $\xi_j = x_j/d$ は i, j 区分域の無次元座標である。上式で δw_{ed} は j 区分域の荷重 $q_j(t)db$ による弾性沈下で $q_j(t)$ に比例するから

$$\delta w_d(i, j) = q_j(t) f(\xi_i - \xi_j) \dots (50)$$

のように書くことができる。したがって全区分荷重によって i 区分域の沈下 $w_d(i)$ は各時刻で

$$w_d(i) = \sum_{j=1}^{2N} q_j(t) f(\xi_i - \xi_j) \dots (51)$$

となる。対称性を考えると式(51)は N 個の i , すなわち $i=1, 2, \dots, N$ について成り立つ N 個の式を与えるが、剛性基礎の仮定から $w_d(i) = w(t)$ なる $w(t)$ は一定時刻では i によらない定値となる。一方加えられる全荷重を Q とすると、上のことは

$$Q = \sum_{j=1}^{2N} q_j(t) \dots (52)$$

したがって式(51), (52)から各時刻ごとに $N+1$ 個の未知量 $q_j(t)$ と $w(t)$ が知られ沈下度が計算できる。

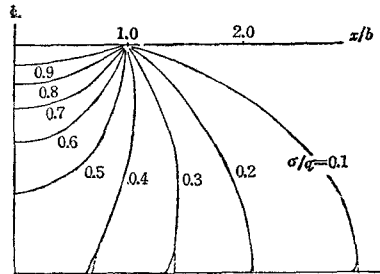
7. 数値計算結果

数値計算は主として両面排水および上端のみ排水の場合について行なった。この理由は粘土層が砂層にはさま

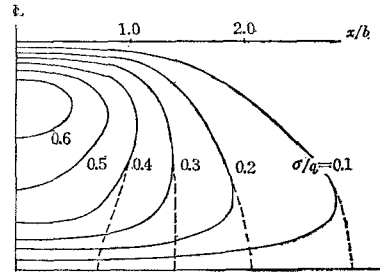
れる場合、あるいは不透水性層(岩盤など)の上に粘土層、砂層の順で堆積する場合が実際問題として最も多く出会うケースと考えられるからである。

(1) たわみ性帯基礎における過剰水圧分布の推移

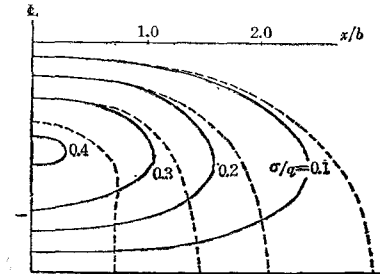
式(25), (26)の過剰水圧式において $b/d=0.5$ として二、三の時刻での分布値を計算したものが図-3である。(a)図にみられるように $T=0$ では下端付近をのぞいて二種の排水条件に対する分布状態は全く一致している。両面排水の場合に載荷初期の脱水は主として上向きのもが多く、時間がたつにつれ、下向きの量が相対的に増えてくること、上端排水時の下端の底面付近、両端排水時の中央面付近、すなわち排水端より離れた部分での水平方向の脱水効果は、それほど大きくないことがわかる。



(a) $T=0$



(b) $T=0.01$



(c) $T=0.05$

(帯荷重, $b/d=0.5$)

—: 両端排水,: 上端排水

図-3 過剰水圧の時間的推移

(2) 瞬時沈下

図-4 に瞬時沈下を式 (42) で計算して示す。前述の通り w_i は ν で変わるが $\nu=0.4\sim 0.5$ では、 w_i と $(w_i)_{\nu=0.5}$ の差は 13% 以下であり、通常いわれているように w_i を $(w_{ed})_{\nu=0.5}$ で評価しても大きな誤差はないことがうかがわれる。

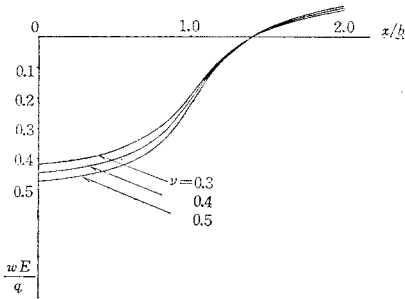


図 4 瞬時沈下のポアソン比による影響 ($b/d=0.5$)

(3) たわみ性基礎の沈下度

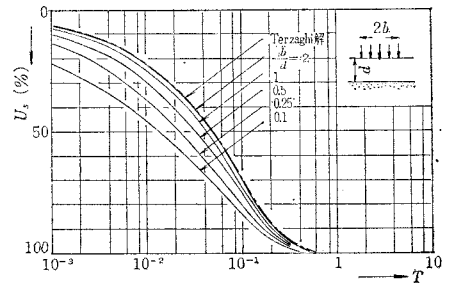
一様な帯荷重, 円形荷重を受ける粘土層の圧密沈下と最終沈下の比を 図-5 に与えた。これらは中心における沈下度であって, 式 (45), (46) で $\xi=0$ としてえられる。図中に対応する排水条件につき Terzaghi の圧密度曲線を記入してある。予想の通り, 水平脱水効果のため多次元圧密の進行は一次元条件のものに比べ速く, 円基礎では四方に脱水するため帯基礎に比して, さらに圧密が促進される。また b/d の小さいほど一次元解との差が大きいが, b/d または両端排水時に $a/d \geq 2$ では一次元圧密として計算しても実用上差し支えないことが知られる。しかし $a/d=2$ の円基礎で上端排水の場合を一次元圧密で算定すると沈下度に最大 20% くらいの誤差が入る可能性がある。

図-6 は帯荷重 ($b/d=0.5$) につき式 (36) から求めた中心線上の平均圧密度と沈下度を比べたものである。前者は前に述べたように, 平均弾性主応力を初期過剰水圧とする Rendulic 式の解にほかならないが, これが Biot 式より求めた沈下度と大差ないことが知られた。このことは異方性地盤のような問題を近似的に解く上で

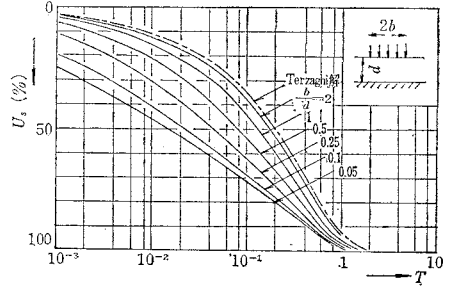
表-1 接地圧の時間的変動

T	qi/Q		
	i=1	i=4	i=10
0	0.0972	0.0440	0.0434
0.001	0.0960	0.0442	0.0434
0.01	0.0965	0.0442	0.0434
0.1	0.0988	0.0439	0.0430
1.0	0.1016	0.0438	0.0422
∞	0.1017	0.0438	0.0422

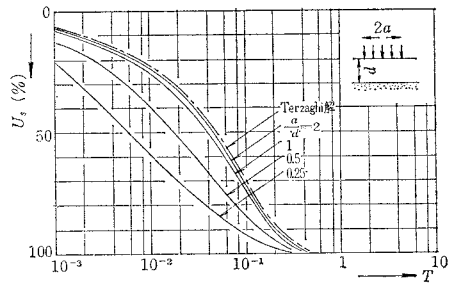
Q: 基礎に働く全荷重 $4b=b/20, b/d=1$ 上端排水



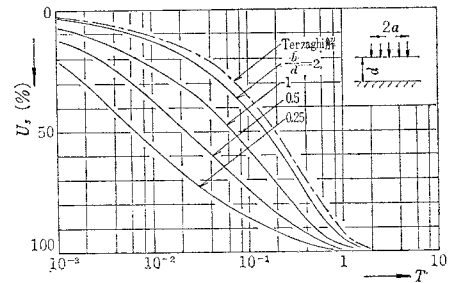
(a) 帯荷重



(b) 帯荷重



(c) 円荷重



(d) 円荷重

図-5 時間一沈下度曲線

参考となる結論といえよう。

剛性帯基礎は関する沈下度の値を図-7 に示す。たわみ性基礎と比べると, $b/d > 1.0$ で両者はほぼ一致するが b/d が小さくなると剛性基礎の沈下が多少遅れる傾向が認められる。しかし, この差は大きくないから, 任意剛性の基礎に対したわみ性の解を適用しても実用上差し支えないものと考えられる。表-1 は剛性基礎の接地圧

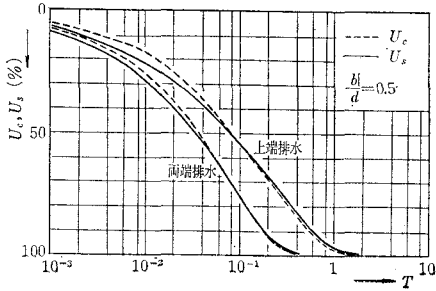
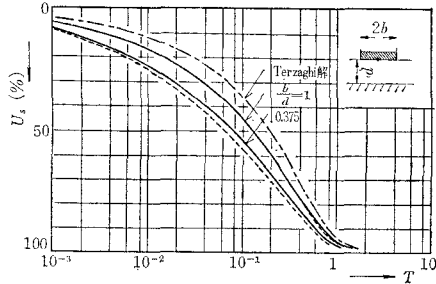


図-6 圧密度 U_c と沈下度 U_s との比較 (帯荷重)



(.....: たわみ性基礎)

図-7 剛性帯基礎における時間-沈下度曲線

が時間に対して変化する状況を示したものである。接地圧は圧密の過程を通じ多少変わるが、変動は小さい。この点は上部構造の設計上好都合なことである。

しばしば述べたように本解析では表面の水平変位がないとしたため、逆に表面せん断応力が現われる。この様子は図-8に示すごとくで分布は時間と ν により変わる。時間的平均のみたとき最大値は載荷強度の 1/5 程度である。一方これを打消すような逆向せん断力を加えると、この力に対して圧密沈下は生じない(3.(2)参照)が、代りに鉛直応力が多少表面に表われる。しかし、鉛直応力値はやはり加えたせん断応力の数分の 1 に過ぎないから沈下に影響する鉛直応力分布形状のゆがみは高々数%に過ぎない。ところで剛性基礎の数値計算で判明したように分布が一様性を大きくずれても沈下度に与える影響はかなり小さいことを考慮すると、本論の解析で仮定した条件がもたらす沈下度への影響は実用上無視してもよいと推論される。

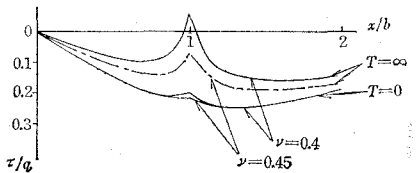


図-8 粘土層表面でのせん断応力の分布($b/d=1.0$)

8. 他の解との比較

(1) Gibson ら¹³⁾による差分解との比較

有限粘土層の多次元圧密問題を初めて取扱ったのは Gibson 他である。しかし基礎方程式は Rendulic によっており、初期過剰水圧の分布値を半無限弾性体に関する鉛直応力に等しいと仮定した。図-9で明らかなように Gibson 他による圧密度曲線が、初期段階において大きい差異を示しているのは上記初期過剰水圧分布のとり方に原因があるろう。もし有限深さの弾性平均応力をもって初期値とすれば差分解の近似性はより改良されると思われる。この間の事情は図-6に関し前に述べたことら理解されよう。一方初期値や境界条件に差があるにもかかわらず、圧密後段で両者が良く一致しているのは興味深い。恐らく初期値の影響が漸次減殺されるためと思うが、逆に水平変位を 0 とした本解の精度が実用上許容しうることの証査の一つでもある。

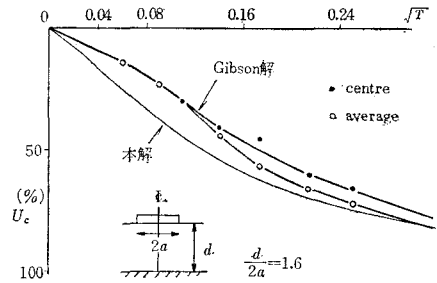


図-9 Gibson 他の差分解との対比

(2) Laplace 変換による解析との比較

Gibson 他¹⁰⁾は式(8)に Laplace 変換を適用し表面でせん断応力を 0 とするときの解を与えた。この方法は有限な範囲の土を対象とするときは有効であるが¹⁴⁾、 $|x| < \infty$ なる帯状粘土層に適用する場合は問題がある。いま式(8)の R, S の Laplace 変換を \bar{R}, \bar{S} とすると Gibson らの導いた式は

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{R(x, z, t)}{S(x, z, t)} \right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\bar{R}(\beta, z, s)}{\bar{S}(\beta, z, s)} \right\} \\ &\quad \cdot e^{st} \cos \beta x d\beta d\beta \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$$\bar{R} = A_1 \text{sh } \beta z + A_2 \text{ch } \beta z + A_3 \text{sh } \gamma z + A_4 \text{ch } \gamma z$$

$$\bar{S} = A_5 \text{sh } \beta z + A_6 \text{ch } \beta z$$

.....(53)

である。ここに $\gamma^2 = \beta^2 + s/C_v$ であり、 δ は \bar{R} または \bar{S} のすべての極を左に見るような s の実部の値、また A_1, \dots, A_6 は応力変位の境界条件および上端のみ排水され

るとい条件から決められる。簡単のため \bar{S} のみに着目すると、表面を $z=0$ にとった場合

$$\left. \begin{aligned} A_5 &= \frac{q \sin b\beta}{2G s\beta} \left[1 + \frac{\beta d}{\text{ch } \beta d \text{ sh } \beta d} \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_v(1-2\nu)}{s(1-\nu)} \left\{ \beta r \frac{\text{th } r d}{\text{th } \beta d} - \beta^2 \right\} \right] \\ A_6 &= -A_5 \text{ th } \beta d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)$$

ところで Laplace 変換の理論によると式 (53) に示す逆変換公式が成り立つためには β に関する被積分項が、 $|\beta| \rightarrow \infty$ で 0 に取れなければならない。しかし、式 (53) によって $z \neq 0$ なる限り \bar{S} に含まれる $\text{ch } \beta z$, $\text{sh } \beta z$ は $\beta \rightarrow \infty$ で β^n (n は任意正数) よりも強く発散するから、 β の積分は $z \neq 0$ で発散してしまう。したがって、 $|\beta| \rightarrow \infty$ で β の積分が 0 に取れんる保証はない。 \bar{R} についても同様に論ぜられる。このことから $z=0$ を除いて式 (53) により R, S あるいは応力、変位を求めることはできないし、また $z=0$ として計算した応力や変位が正解の $z=0$ における値を表わすとは断定できないと思われる。事実、Gibson らの沈下度を示すと図-10 のようで、ある b/d 以上の値になると一次元解に比べて多次元圧密は遅れるという矛盾がでてくる。またこの理由として Terzaghi 解では底面が粗に対応するのに反し、彼らの解では滑らであるとしている説明も首肯しがたい。何となれば図-10 は $\nu=0$ に対してのものであるが、 $\nu=0$ の限り $b \rightarrow \infty$ としたとき水平変位は常に 0 であり、底面での相対変位はないから粗滑の影響が入るよちはないのである。

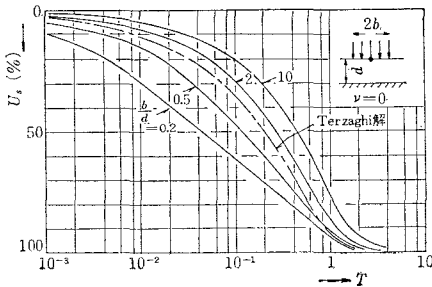


図-10 Gibson 他による時間-沈下度曲線

9. 実験, 実測値との対比

(1) 模型実験

理論の適用性を検討する目的で室内模型実験を行なった。載荷容器は $57 \times 57 \times 29$ cm の小型鋼製箱である。側面の拘束が効かないよう載荷幅は最大 20 cm におさえ、コンクリートブロックによる帯状剛性載荷とした。

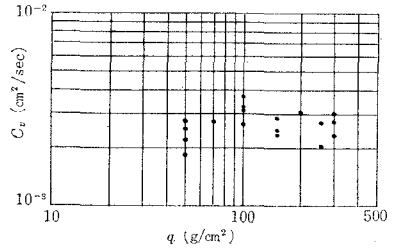


図-11 横浜粘土の $q \sim C_v$ 関係

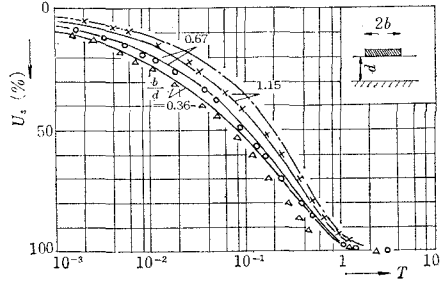


図-12 剛性基礎に関する実験値と解析値との対比

また底面は非排水に保ち、上面に 1 cm ほど砂を敷き均して排水を図った。用いた粘土は横浜駅付近で採取したもので $w_L=57.7\%$, $PI=27.2\%$ である。2. で述べたところにより C_v は一次元圧密試験で求めてよい。試験に用いた平均荷重値の範囲で $C_v \sim q$ の関係を示すと図-11 のようである。各試験での異なる q に応ずる C_v を図から求め計算に用いることとした。現在のところ多次元問題で最終沈下量を定める方法はないので、便宜上一次元圧密と同様に $\log t$ 法によって 100% 圧密点を定め最終値とした。

いろいろの b/d に応ずる実験値と計算値の比較は図-12 のようである。これから b/d の減少とともに圧密は速まり、いずれも Terzaghi 解より遅れることはない。 C_v の測定精度や最終沈下を定める上でむずかしい問題は残るが理論解の適用性はほぼ確かめられたと思う。

(2) 実測沈下との対比

図-13 では Simons¹⁵⁾ による実測沈下と本解析結果

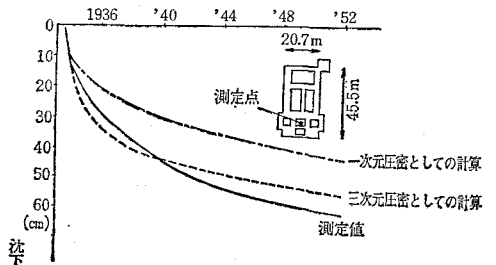


図-13 実例時間-沈下曲線との比較

を対比した。現場の粘土層は比較的均一で深さも一様に近く、平均の C_v は $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{sec}$ である。載荷面の大きさと粘土層の厚さから考えるとき一次元圧密とするのは無理である。実際、図に記入した一次元解と実測値は大きく異なっている。載荷面形状、測定点位置などから判断して、この場合は円形載荷に近いと思われる。たわみ性とした本解析解の結果はおおむね実測値とよくあっている。ただし初期段階での差は基礎の剛性の影響がでているものと思われる(6. 参照)、後段では二次圧密効果が入っているように考えられる。

(3) 実測過剰水圧分布との対比

安達他¹⁴⁾が粘土地盤上の盛土荷重により生じた過剰水圧の推移を実測した結果は図-14である。本理論により等価円形載荷として

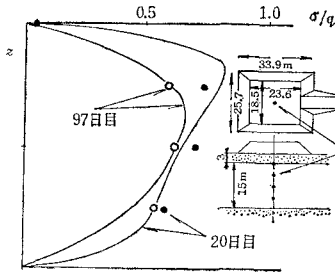


図-14 過剰水圧の実測値と計算値との比較

計算したものを併記したが、両者の誤差は最大 10% 程度である。

10. む す び

本論文においては有限な深さの粘土層表面に帯状または円形状基礎を通じて載荷する多次元圧密問題を Biot の圧密方程式に基づいて解析し、実験的に検討した。その結果えられた結論は次のようなものである。

(1) Biot の方程式に現われる圧密係数は一次元圧密試験で得られるものに等しい。

(2) 粘土層表面で幅 $2b$ 、または半径 a の範囲に一樣荷重を加え、上面で水平変位がなく、底面が滑らかで剛な基礎地盤である場合の沈下や過剰水圧の推移を各種排水条件に対して求めた。

(3) 層厚を d としたとき、いろいろの b/d 、 a/d に対して沈下度時間曲線を与えた。解は表面で水平変位がない条件で求めた点近似的なものであるが誤差は実用上無視しうることを推論し、このことを模型実験値や現場観測値と比較検討して確かめた。

(4) 過剰水圧分布の推移も実測値とよく一致する。これらの結果は基礎の短期安定解析上の資料となろう。

(5) 水平排水効果のため一次元圧密に比べて多次元圧密の進行は b/d の小さいほど速くなるが $b > 2d$ では

一次元圧密解を用いて差支えない。 $a \doteq 2d$ で上端排水のとき一次元解の誤差は 20% 程度である。

(6) 剛性基礎の場合、たわみ性基礎に比べて圧密進行は多少遅れるが $b > d$ では沈下度はほとんど一致し両者の差は $b/d=0.375$ でも約 10% 以下である。

(7) 剛性基礎の接地圧の時間的变化はきわめて小さく、基礎の二次応力に対する経時的影響は少ない。

(8) 載荷条件に基づく有限粘土層内の弾性平均応力を初期過剰水圧と仮定し Rendulic の式より求めた圧密度と Biot 式による沈下度の差は圧密初期段階を除けば小さく、しかも b/d の増加とともに差は小さくなる。

(9) Gibson, Schiffman, Pu による解は取れん性の上で疑問があり、その結果は実用に耐えない。

参 考 文 献

- 1) Terzaghi, K.: Theoretical soil mechanics, John Wiley and Sons, New York, 1943.
- 2) Lee, I.K.: Soil mechanics, Butterworths, London, pp. 150~153, 1968.
- 3) Biot, M.A.: General theory of three-dimensional consolidation, J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 155~164, 1941.
- 4) Biot, M.A.: General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material, J. Appl. Mech., pp. 91~96, 1956.
- 5) 吉国 洋: 三次元圧密の基礎理論, 土木学会論文報告集第 201 号, pp. 87~98, 1972.
- 6) Biot, M.A.: Consolidation settlement under a rectangular load distribution, J. Appl. Phys., Vol. 12, pp. 426~430, 1941.
- 7) Gibson, R.F. and J. McNamee: The consolidation settlement of a load uniformly distributed over a rectangular area, Proc. 4th int. Conf. Soil Mech., Vol. 1, pp. 297~300, 1957.
- 8) Mandel, J.: Consolidation des couches d'argiles, Proc. 4th int. Soil Mech., Vol. 1, pp. 360~367, 1957.
- 9) Mandel, J.: Tassements produits par la consolidation d'une couche d'argile de grande épaisseur, Proc. 5th int. Conf. Soil Mech., Vol. 1, pp. 733~736, 1961.
- 10) Gibson, R.F., P.L. Schiffman and S.L. Pu: Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base, Quart. J. Mech. and Appl. Math. Vol. 23, pp. 505~520, 1970.
- 11) 山口柏樹: 土質力学, 技報堂.
- 12) De Jong, G.J.: Application of stress functions to consolidation problems, Proc. 4th int. Conf. Soil Mech., vol. 1, pp. 320~323, 1957.
- 13) Gibson, R.F. and P. Lumb: Numerical solution of some problems in the consolidation clay, J. Instn Civ. Engrs, Vol. 1, pp. 182~198, 1953.
- 14) 大槇正紀: 粘土の 3 次元圧密に関する一考察, 京大防災研年報, 第 14 号 B, pp. 585~602, 1971.
- 15) Simons, N.: Settlement studies on two structures in Norway, Proc. 4th int. Conf. Soil Mech. Vol. 1, pp. 431~436, 1957.
- 16) 安達径治・宮浜和昭: 軟弱地盤における試験盛土について, 土と基礎, 6月号, pp. 9~16, 1962.

(1972.4.20・受付)