

## コールブルック・ホワイト公式を使用した管網計算

APPLICATION OF THE COLEBROOK-WHITE FORMULA  
TO PIPE-NETWORKS HYDRAULICS

高 桑 哲 男\*

By Tetsuo Takakura

## 1. はじめに

上水道における導・送・配・給水系をはじめとする管路による水量輸送システムの流量、管径あるいは損失水頭の算出に用いられる平均流速公式または摩擦損失係数公式としては数多くのもが提唱されてきた。それらのうちで現在なお広く利用されている平均流速公式は、指数型経験式に属する Hazen-Williams 公式（以下 H・W 公式と略称）と Manning 公式である。前者は水理学的になめらかに近い大・中口径管に対し、また後者は水理学的に粗な管に用いられるべきとされ、その使用境界は絶対粗度  $k=2 \times 10^{-4}$  m 付近であると報告されている<sup>1)</sup>。

しかしながら、管種および管内壁面状態によって流速公式を使いわけるとは実行されにくく、両公式はその適用可能範囲を越えて使用されることが多い。少なくとも、さびこぶの著しい鑄鉄管に対する H・W の流速係数  $C_H=80$ 、またなめらかな管に対する Manning の粗度係数  $n=0.01$  というような値は、ハンドブック類の表示段階で削除するか、あるいは使用に際して生じうる誤差を明示しておくべきであろう。その点、半理論半経験的な摩擦損失係数公式である Colebrook-White 公式（以下 C・W 公式と略称）は、なめらかな管、粗な管およびその遷移領域の全域にわたって適用可能であるから、その使用によって直接に、あるいは間接的には H・W 公式と Manning 公式の適用可能範囲を明確化することによって、水理計算にともなう誤差を減少させるものと期待される。

C・W 公式の難点は式形の複雑さにある。単一管路に対しては、流量、管径および損失水頭を算出するいずれの場合についても線図が用意されて計算上の便宜が図られているけれども、複雑な管路系統とくに管網に対して C・W 公式を使用した計算法はまだ示されていない。

管網計算は二つに大別される。一つは、節点取り出し水量と管径の与条件下で、管内流量と節点エネルギー位（エネルギー線の高さ）を求める流量計算<sup>2),3)</sup> であり、他の一つは、管内流量を与えて経済的管径を求める管径計算<sup>4),5)</sup> である。これらのうち、流量計算については本研究で示すように C・W 公式が使用できるのに対し、管径計算では採用する方法によって使用可能な場合とそうでない場合がある。すなわち、表-1 に掲げる管径計算法のうち、①と②では可能であるけれども、③の方法に対しては、式形ならびに手順が複雑になり過ぎるために実用困難である。したがって、もし③のもつ長所を活用しようとするならば、計算の便宜上から在来の平均流速公式を採用せざるをえないと考えられる。そのときには在来公式の適用範囲を明確にする一方で、Manning 公式と H・W 公式の適用境界付近に使用できる新たな公式をつくり出す必要がある。

本研究のおもな内容は次のごとくである。

- 1) C・W 公式を使用した管網流量計算法の提示。
- 2) 実用される多くの管種が属し、また Manning 公式と H・W 公式の適用境界でもある  $k=10^{-4} \sim 10^{-3}$  m の領域に適用しうる平均流速公式の作成。
- 3) C・W 公式に基づいて、Manning 公式、H・W 公式および 2) で作成した新公式の適用範囲、および流速係数または粗度係数と絶対粗度との関連の明確化。

まず、本研究の基本となっている C・W 公式について若干の説明を加え、ついで記述の都合上、2), 3), 1) の順に進めることにする。

## 2. C・W 公式による水理計算

管水路乱流に対し、Darcy-Weisbach 公式：

$$l = \frac{H}{L} = f \cdot \frac{1}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = f \cdot \frac{8}{\pi^2 g} \cdot \frac{Q^2}{D^5} \dots\dots\dots (1)$$

\* 正会員 工修 北海道大学助教授 工学部衛生工学科

における摩擦損失係数  $f$  は、C・W 公式を用いるとき次式のごとくレイノルズ数  $Re$  と相対粗度  $k/D$  に関連づけられる。

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 $I$ ：動水勾配、 $H$ ：摩擦損失水頭 (m)、 $L$ ：管路長 (m)、 $D$ ：管の直径 (m)、 $V$ ：平均流速 (m/sec)、 $g$ ：重力の加速度 (m/sec<sup>2</sup>)、 $Q$ ：流量 (m<sup>3</sup>/sec)、 $k$ ：絶対粗度 (m) である。

式 (2) の表現形式が複雑であるために、C・W 公式から  $f$  を求める計算は面倒である。ただし、単一管路に対しては、Moody、Rouse および高桑の線図が用意されているのでこれを利用するとよい<sup>9)</sup>。このうち Moody 線図は式 (2) をそのまま図化したもので、 $I$  が未知数のときに利用される。また Rouse と高桑の線図はそれぞれ式 (2) を

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35 \nu}{\sqrt{2gID^3}} \right) \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{k\nu}{Q} = \frac{f^{0.2} \cdot 10^{0.57-0.5/\sqrt{f}} \cdot (Q^3 I)^{0.2}}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{(Q^3 I)^{0.4}}{\nu^2}} \cdot \left(\frac{128g}{\pi^3}\right)^{0.2} - \frac{9.35}{f^{0.1}} \dots\dots\dots(4)$$

と変形して図化したもので、前者は  $Q$  が未知数のとき、後者は  $D$  が未知数のときに利用される。ただし、 $\nu$  = 動粘性係数 (m<sup>2</sup>/sec) である。

管網計算に C・W 公式を使用しようとするれば、単一管路の場合よりもさらに計算が面倒になるのは当然であるけれども、その程度は管網計算の種別および計算法によって異なる。表-1 に示すように、計算法によって既知または仮定される値が異なり、それに応じて必要な  $f$  関係値および利用される式が異なるためである。流量計算の場合は、5. で示すように容易に使用できる。また管径計算の①、②の場合も使用が可能と考えられる。これに対して③の場合は、式 (4) から  $f$  および  $\partial f/\partial I$  を求める計算過程が複雑過ぎるので、C・W 公式の使用は実

表-1 管網計算に必要な  $f$  関係値

計算種別	計 算 法	既知または仮定される値	必要な値	利用される式
流量計算	節点エネルギー一位を未知数とした方法	$D, H$	$\partial f/\partial H$	式(3)
管径計算	① 管路区間長を未知数として線形計画法を利用する方法	$D, Q$	$f$	式(2)
	② 管径を未知数として Lagrange の未定乗数法によって解く方法	$D, Q$	$f, \partial f/\partial D$	式(2)
	③ 節点エネルギー一位を未知数として微分法によって解く方法	$H, Q$	$f, \partial f/\partial H$	式(4)

用性にとぼしいものとなる。

### 3. C・W 公式に基づく管路流量公式の作成

表-1 に示した管径計算法のうち②と③を比較すると、C・W 公式が使用できるという以外は③がすぐれている<sup>9)</sup>。①と③とでは、①が実際の設計段階における管径決定に適しているのに対し、③は計算機の記憶容量が少なくすむという特長をもち、また計算時間が短いので多数回の机上実験を行なうときに有用である。

2. で述べたように、③に対しては C・W 公式の使用が困難なので、③を利用しようとするときには平均流速公式を採用せざるをえない。その場合に問題となるのは平均流速公式の適用範囲である。4. で示すように、H・W 公式は  $k \leq 10^{-4}$  m、他方 Manning 公式は  $k \geq 10^{-3}$  m のとき使用すべきであって、それ以外の領域では C・W 公式との差異が大となる。両公式の中間領域 ( $10^{-4}$  m  $< k < 10^{-3}$  m) には、溶接鋼管、鑄鉄管およびコンクリート管という代表的管種が属しており、この領域に適用しうる平均流速公式の存在が要望される。そこで、配水管網計算における通常の管径および流速条件に対して、C・W 公式に基づいて流量公式を作成してみる。

式 (1) を  $I, D$  で偏微分すると、それぞれ

$$\frac{\partial Q/Q}{\partial I/I} = 0.5 \left( 1 - \frac{\partial f/f}{\partial I/I} \right) \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{\partial Q/Q}{\partial D/D} = 0.5 \left( 5 - \frac{\partial f/f}{\partial D/D} \right) \dots\dots\dots(6)$$

となる。一方、式 (3) を  $I, D$  で偏微分し、これを

$$Re \cdot \sqrt{f} = \sqrt{2gID^3}/\nu \dots\dots\dots(7)$$

なる関係を用いて整理し直すと、それぞれ

$$\frac{\partial f/f}{\partial I/I} = - \frac{18.7}{2.303 Re \cdot \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right)} \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial f/f}{\partial D/D} = - \frac{4\sqrt{f}}{2.303 \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right)} \cdot \left( \frac{k}{D} + \frac{1.5 \times 9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots(9)$$

となる。式 (5) に (8) を、また式 (6) に (9) を代入すると、それぞれ次式が得られる。

$$\frac{\partial Q/Q}{\partial I/I} = 0.5 + \frac{9.35}{2.303 Re \cdot \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right)} \dots\dots\dots(10)$$

$$\frac{\partial Q/Q}{\partial D/D} = 2.5 + \frac{2\sqrt{f}}{2.303 \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right)} \cdot \left( \frac{k}{D} + \frac{1.5 \times 9.35}{Re \cdot \sqrt{f}} \right) \dots\dots\dots(11)$$

Q は I, D および k の関数であるから, 近似的に

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial I} \cdot \Delta I + \frac{\partial Q}{\partial D} \cdot \Delta D + \frac{\partial Q}{\partial k} \cdot \Delta k \dots (12)$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \left( \frac{\partial Q/Q}{\partial I/I} \right) \cdot \frac{\Delta I}{I} + \left( \frac{\partial Q/Q}{\partial D/D} \right) \cdot \frac{\Delta D}{D} + \left( \frac{\partial Q/Q}{\partial k/k} \right) \cdot \frac{\Delta k}{k} \dots (13)$$

とおくことができる。ここで

$$l = \frac{\partial Q/Q}{\partial I/I}, \quad m = \frac{\partial Q/Q}{\partial D/D}, \quad n = \frac{\partial Q/Q}{\partial k/k}$$

とにおいて一定とみなせば, 式 (13) を積分することによって次式が得られる。

$$\ln Q = \ln I^l + \ln D^m + \ln k^n + \ln C \dots (14)$$

ただし, ln C は積分定数である。C<sub>T</sub> = C · k<sup>n</sup> とおいて k に依存する流量係数とすれば次式が得られる。

$$Q = C_T \cdot I^l \cdot D^m \dots (15)$$

実際には, 指数 l, m は一定でなく, R<sub>e</sub> と k/D に応じて変化する。したがって, l, m を決定するためには, D, V および k の変域を設定しなければならない。D については規格管に準じて 0.1~2 m, V については通常の経済的流速の範囲と考えられる 0.5~2 m/sec とする。k については前述のとおりとする,

$$\left. \begin{aligned} 0.1 \leq D \leq 2 & \quad (\text{m}) \\ 0.5 \leq V \leq 2 & \quad (\text{m/sec}) \\ 10^{-4} \leq k \leq 10^{-3} & \quad (\text{m}) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

なお, ここでは作成する公式に一般性をもたせるためになりに広い領域を想定しているけれども, もし D, V, k の変域がせまかったり, また式 (16) とは異なった変域の場合には, 本章の以下に述べると同様の手順によって指数を定め, 4. で述べる方法を準用して係数を定めるならば, その変域に適した公式を作成することができる。R<sub>e</sub>, k/D については, 式 (16) より

$$5 \times 10^4 \leq R_e \leq 4 \times 10^6 \dots (17)$$

$$5 \times 10^{-5} \leq (k/D) \leq 10^{-2} \dots (18)$$

なる領域を対象とすることになる。

R<sub>e</sub>, k/D が既知であるときの f の値は, 式 (2) を接線近似することによって求められる。すなわち,

$$f = f_0 + \frac{f_0 + f_0 \cdot \sqrt{f_0} \cdot \left\{ 2 \log \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{R_e \cdot \sqrt{f_0}} \right) - 1.14 \right\}}{0.5 + \frac{9.35}{2.303 \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{R_e \cdot \sqrt{f_0}} \right)}} \dots (19)$$

によって, 仮定もしくは近似値 f<sub>0</sub> に対して修正された値 f が取れんするまで反復計算すればよい。このようにして得られた f を式 (10), (11) に代入すれば l, m が求められる。結果は 表-2, 3 のごとくである。

表-2, 3 の値の平均化にあたっては, R<sub>e</sub> · (k/D) の値が V, k の関数であることに注意すべきであって,

$$R_e \cdot \frac{k}{D} = \frac{DV}{\nu} \cdot \frac{k}{D} = \frac{Vk}{\nu} \dots (20)$$

であるから, 動粘性係数 ν = 10<sup>-6</sup> (m<sup>2</sup>/sec) と式 (16) の V, k の変域を代入すれば

$$50 \leq R_e \cdot (k/D) \leq 2000 \dots (21)$$

となる。式 (17), (18), (21) によって規定される領域を代表する値として何を選ぶべきかについては任意性が伴うが, ここでは R<sub>e</sub> と k/D の組合せが多数回かつ一様に出現するよう配慮して, R<sub>e</sub> · (k/D) が 100, 200, 500, 1000 の場合に該当する 21 個の値 (表-2, 3 に太字で示されている) の算術平均を採用することにすれば,

$$l = 0.5124, \quad m = 2.637$$

となる。m については, H·W 公式の指数 2.63 との差異はないに等しい。式 (15) に代入すれば, 結局

$$Q = C_T \cdot I^{0.5124} \cdot D^{2.637} \dots (22)$$

が得られる。I, D に関して書き直しておく

$$I = C_T^{-1.952} \cdot Q^{1.952} \cdot D^{5.146} \dots (23)$$

$$D = C_T^{-0.3792} \cdot Q^{0.3792} \cdot I^{-0.1943} \dots (24)$$

表-2 l の 値

k/D \ R <sub>e</sub>	1 × 10 <sup>4</sup>	2 × 10 <sup>4</sup>	5 × 10 <sup>4</sup>	1 × 10 <sup>5</sup>	2 × 10 <sup>5</sup>	5 × 10 <sup>5</sup>	1 × 10 <sup>6</sup>	2 × 10 <sup>6</sup>	5 × 10 <sup>6</sup>	1 × 10 <sup>7</sup>
1 × 10 <sup>-6</sup>	0.5763	0.5699	0.5627	0.5582	0.5542	0.5495	0.5462	0.5434	0.5394	0.5359
2 × 10 <sup>-6</sup>	0.5763	0.5698	0.5627	0.5581	0.5541	0.5493	0.5459	0.5425	0.5376	0.5331
5 × 10 <sup>-6</sup>	0.5763	0.5698	0.5626	0.5579	0.5537	0.5485	0.5445	0.5402	0.5333	0.5269
1 × 10 <sup>-5</sup>	0.5762	0.5697	0.5624	0.5575	0.5530	0.5472	0.5424	0.5368	0.5279	0.5204
2 × 10 <sup>-5</sup>	0.5761	0.5695	0.5619	0.5568	0.5518	0.5448	0.5386	0.5315	0.5210	0.5137
5 × 10 <sup>-5</sup>	0.5757	0.5688	0.5607	0.5547	0.5484	0.5389	0.5305	<b>0.5218</b>	0.5120	0.5069
1 × 10 <sup>-4</sup>	0.5751	0.5678	0.5587	0.5516	0.5437	0.5318	<b>0.5225</b>	<b>0.5144</b>	<b>0.5069</b>	0.5037
2 × 10 <sup>-4</sup>	0.5739	0.5659	0.5551	0.5462	0.5364	<b>0.5232</b>	<b>0.5146</b>	0.5085	<b>0.5038</b>	0.5020
5 × 10 <sup>-4</sup>	0.5706	0.5606	0.5465	0.5351	<b>0.5241</b>	0.5127	<b>0.5071</b>	<b>0.5038</b>	0.5016	0.5008
1 × 10 <sup>-3</sup>	0.5655	0.5535	0.5368	<b>0.5249</b>	<b>0.5154</b>	<b>0.5072</b>	<b>0.5038</b>	0.5020	0.5008	0.5004
2 × 10 <sup>-3</sup>	0.5573	0.5413	<b>0.5258</b>	<b>0.5157</b>	0.5088	<b>0.5038</b>	0.5020	0.5010	0.5004	0.5002
5 × 10 <sup>-3</sup>	0.5413	0.5270	0.5134	<b>0.5073</b>	<b>0.5039</b>	0.5016	0.5008	0.5004	0.5002	0.5001
1 × 10 <sup>-2</sup>	0.5280	0.5165	<b>0.5074</b>	<b>0.5039</b>	0.5020	0.5008	0.5004	0.5002	0.5001	0.5000
2 × 10 <sup>-2</sup>	0.5169	0.5092	0.5039	0.5020	0.5010	0.5004	0.5002	0.5001	0.5000	0.5000
5 × 10 <sup>-2</sup>	0.5076	0.5039	0.5016	0.5008	0.5004	0.5002	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000
1 × 10 <sup>-1</sup>	0.5039	0.5020	0.5008	0.5004	0.5002	0.5001	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

表-3  $m$  の 値

$k/D$ \ $R_e$	$1 \times 10^4$	$2 \times 10^4$	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^5$	$2 \times 10^5$	$5 \times 10^5$	$1 \times 10^6$	$2 \times 10^6$	$5 \times 10^6$	$1 \times 10^7$
$1 \times 10^{-6}$	2.729	2.710	2.688	2.675	2.663	2.649	2.640	2.632	2.622	2.615
$2 \times 10^{-6}$	2.729	2.710	2.688	2.675	2.663	2.649	2.640	2.631	2.621	2.612
$5 \times 10^{-6}$	2.729	2.710	2.688	2.674	2.662	2.648	2.639	2.629	2.617	2.607
$1 \times 10^{-5}$	2.729	2.709	2.688	2.674	2.662	2.647	2.637	2.627	2.613	2.603
$2 \times 10^{-5}$	2.729	2.709	2.688	2.674	2.661	2.646	2.634	2.623	2.608	2.599
$5 \times 10^{-5}$	2.729	2.709	2.687	2.672	2.658	2.641	2.628	2.616	2.604	2.597
$1 \times 10^{-4}$	2.728	2.708	2.685	2.670	2.655	2.636	2.623	2.613	2.603	2.599
$2 \times 10^{-4}$	2.727	2.707	2.683	2.666	2.650	2.631	2.620	2.612	2.606	2.604
$5 \times 10^{-4}$	2.725	2.703	2.677	2.659	2.643	2.628	2.621	2.617	2.614	2.613
$1 \times 10^{-3}$	2.722	2.699	2.671	2.654	2.641	2.631	2.626	2.624	2.623	2.622
$2 \times 10^{-3}$	2.717	2.693	2.667	2.653	2.644	2.638	2.635	2.634	2.633	2.633
$5 \times 10^{-3}$	2.710	2.688	2.669	2.661	2.656	2.653	2.652	2.652	2.651	2.651
$1 \times 10^{-2}$	2.708	2.692	2.679	2.674	2.672	2.670	2.669	2.669	2.669	2.669
$2 \times 10^{-2}$	2.715	2.704	2.697	2.694	2.693	2.692	2.692	2.692	2.691	2.691
$5 \times 10^{-2}$	2.743	2.738	2.734	2.733	2.733	2.732	2.732	2.732	2.732	2.732
$1 \times 10^{-1}$	2.783	2.780	2.778	2.777	2.777	2.777	2.777	2.777	2.777	2.777

となる。ただし正確に言えば、式 (23) における  $D$  の指数は  $(\partial I/I)/(\partial D/D)$  という値となるべきであるから、表-3 の値を表-2 の対応する値で割ってから平均化しなければならない。その結果は 5.147 であったので、式 (23), (24) の指数は変更しないことにする。なお、流量係数  $C_T$  の値については 4. で示す。

4. 平均流速公式の係数決定と適用範囲の検討

(1) 係数の決定

指数型平均流速公式は、一般に

$$V = c \cdot I^l \cdot D^m \dots\dots\dots (25)$$

と表示され、断面積を乗じて流量公式の形に直すと

$$Q = c \cdot I^l \cdot D^m \dots\dots\dots (26)$$

となり、式 (15) と同形になる。ここで指数  $l, m$  は各公式に特有の値であり、係数  $c$  は管内壁面状態のみに関連づけられる。しかしながら、表-2, 3 に見られるように、 $l, m$  は  $R_e$  と  $k/D$  の関数であり、同時に  $c$  もまた  $R_e$  と  $k/D$  の関数となる。したがって、式 (26) の使用にあたっては適用範囲に留意しなければならない。

まず係数  $c$  の決定について述べる。動粘性係数を  $\nu = 1.141 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sec}$  (水温  $15^\circ\text{C}$ ) に固定して  $k, D, V$  を与えることは、 $R_e$  と  $k/D$  を与えることと同じである。すなわち、通常とられる  $D, V$  の変域を与えるならば、 $k$  に対応する  $c$  を求めることができる。このような  $c$  の求めかたのもつ利点は、①  $c$  の値が用意されていない場合でも、 $k$  の値があれば  $c$  をつくり出せること、② 適用範囲自体に問題のある式 (26) のためにすでに用意されている  $c$  ではなく、計算者自身の使用領域に適合した  $c$  を得ることができること、である。

対象とした公式は次の 3 種である。

H・W 公式 :  $Q = 0.27853 C_H \cdot I^{0.54} \cdot D^{2.63} \dots (27)$

式 (22) :  $Q = C_T \cdot I^{0.5124} \cdot D^{2.637} \dots\dots\dots (28)$

Manning 公式 :  $Q = (\pi/2^{1/3}) \cdot (1/n) \cdot I^{1/2} \cdot D^{8/3} \dots\dots\dots (29)$

ここで、 $C_H$  は H・W の流速係数、 $n$  は Manning の粗度係数として知られている。

直径  $D$  は 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 1, 1.2, 1.5, 2 m の 10 とおり (幾何平均は 0.56 m)、平均流速  $V$  は 0.2, 0.5, 1, 2 m/sec の 4 とおり (幾何平均は 0.67 m/sec) に変化させる。 $k$  を固定し、次の手順によって得られる 40 組の係数の算術平均をもって所要の係数とする。

- 1)  $k, D, V$  に対し、式 (19) を用いて  $f$  を求める。
- 2)  $f$  を式 (1) に代入して  $I$  を求める。
- 3)  $I$  を式 (27)~(29) のいずれかに代入して、 $C_H, C_T$  または  $n$  を求める。
- 4)  $D, V$  を変化させ、手順 1)~3) を繰り返す。

代表的な  $k$  値に対する各公式の係数の平均、標準偏差および変動係数は表-4 のごとくである。

なおここで、 $k$  の選定に伴う誤差についてふれておこう。ハンドブック類では一般に  $k$  はある範囲をもって表記されるから、表の利用者にとっては自分の選定した値と表の最大値を採用したときの差異が関心事となるであろう。その場合、式 (2) を  $k$  で偏微分して整理すると

$$\frac{\partial f/f}{\partial k/k} = \frac{4 \sqrt{f}}{2.303 \left( \frac{k}{D} + \frac{9.35}{R_e \cdot \sqrt{f}} \right)} \cdot \left( \frac{k}{D} \right) \dots (30)$$

となり、式 (30) の値は表-5 に示すごとくであって、相対粗度が大きいほど、また  $R_e$  が大きいほど大となることに留意すべきである。

表-5 を利用すれば、採用した  $k$  の違いに起因する  $f$  の差異を知ることができる。たとえば  $D=1\text{m}$  に対し、 $k=(2\sim 5) \times 10^{-4}\text{m}$  と記載されている表で  $k=2 \times 10^{-4}\text{m}$

表-4 係 数 表

k (m)	C <sub>H</sub>			C <sub>T</sub>			n		
	平均	標準偏差	変動係数	平均	標準偏差	変動係数	平均	標準偏差	変動係数
1×10 <sup>-6</sup>	150.9	3.65	0.0242	34.44	2.308	0.0670	0.00983	0.001018	0.1036
2×10 <sup>-6</sup>	150.8	3.59	0.0238	34.41	2.286	0.0664	0.00984	0.001014	0.1031
5×10 <sup>-6</sup>	150.4	3.43	0.0228	34.31	2.222	0.0648	0.00986	0.001003	0.1017
1×10 <sup>-5</sup>	149.7	3.21	0.0214	34.16	2.124	0.0622	0.00990	0.000984	0.0994
2×10 <sup>-5</sup>	148.4	2.95	0.0199	33.88	1.951	0.0576	0.00997	0.000952	0.0955
5×10 <sup>-5</sup>	145.2	3.03	0.0209	33.17	1.558	0.0470	0.01017	0.000876	0.0861
1×10 <sup>-4</sup>	141.1	4.00	0.0283	32.26	1.137	0.0352	0.01044	0.000789	0.0756
2×10 <sup>-4</sup>	135.2	5.55	0.0411	30.96	0.667	0.0215	0.01085	0.000683	0.0630
5×10 <sup>-4</sup>	124.8	7.58	0.0607	28.66	0.261	0.0091	0.01168	0.000531	0.0455
1×10 <sup>-3</sup>	115.3	8.66	0.0751	26.57	0.464	0.0175	0.01258	0.000409	0.0325
2×10 <sup>-3</sup>	104.9	9.34	0.0890	24.27	0.748	0.0308	0.01374	0.000272	0.0198
5×10 <sup>-3</sup>	90.5	9.87	0.1091	21.07	1.100	0.0522	0.01578	0.000233	0.0148
1×10 <sup>-2</sup>	79.4	10.19	0.1283	18.58	1.361	0.0733	0.01787	0.000608	0.0340

表-5  $\frac{\partial f/f}{\partial k/k}$  の 値

k/D	R <sub>e</sub>										
		1×10 <sup>4</sup>	2×10 <sup>4</sup>	5×10 <sup>4</sup>	1×10 <sup>5</sup>	2×10 <sup>5</sup>	5×10 <sup>5</sup>	1×10 <sup>6</sup>	2×10 <sup>6</sup>	5×10 <sup>6</sup>	1×10 <sup>7</sup>
1×10 <sup>-6</sup>	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.004	0.008	0.014
2×10 <sup>-6</sup>	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.004	0.007	0.015	0.026
5×10 <sup>-6</sup>	0.000	0.000	0.001	0.002	0.002	0.003	0.006	0.010	0.018	0.034	0.053
1×10 <sup>-5</sup>	0.001	0.001	0.002	0.003	0.003	0.006	0.012	0.020	0.033	0.058	0.083
2×10 <sup>-5</sup>	0.001	0.002	0.004	0.006	0.011	0.022	0.036	0.057	0.090	0.115	0.153
5×10 <sup>-5</sup>	0.003	0.005	0.009	0.016	0.026	0.049	0.073	0.101	0.135	0.153	0.177
1×10 <sup>-4</sup>	0.006	0.009	0.018	0.030	0.048	0.082	0.111	0.139	0.165	0.177	0.196
2×10 <sup>-4</sup>	0.011	0.018	0.035	0.055	0.081	0.123	0.152	0.173	0.190	0.196	0.222
5×10 <sup>-4</sup>	0.027	0.043	0.075	0.107	0.142	0.180	0.199	0.211	0.219	0.222	0.242
1×10 <sup>-3</sup>	0.050	0.077	0.122	0.159	0.190	0.218	0.230	0.236	0.240	0.242	0.265
2×10 <sup>-3</sup>	0.090	0.127	0.179	0.212	0.235	0.252	0.259	0.262	0.264	0.265	0.302
5×10 <sup>-3</sup>	0.172	0.214	0.258	0.278	0.289	0.297	0.300	0.301	0.302	0.302	0.337
1×10 <sup>-2</sup>	0.249	0.284	0.313	0.325	0.331	0.335	0.337	0.337	0.337	0.337	0.383
2×10 <sup>-2</sup>	0.329	0.353	0.370	0.376	0.379	0.381	0.382	0.382	0.382	0.383	0.464
5×10 <sup>-2</sup>	0.441	0.452	0.459	0.462	0.463	0.464	0.464	0.464	0.464	0.464	0.553
1×10 <sup>-1</sup>	0.542	0.547	0.551	0.552	0.553	0.553	0.553	0.553	0.553	0.553	0.553

を採用したときの f 値は、k=5×10<sup>-4</sup> m に対する f 値よりも、R<sub>e</sub>=10<sup>5</sup> のときで 0.107×(-0.6) で約 6.4% 小さく、また R<sub>e</sub>=10<sup>7</sup> のときは 0.222×(-0.6) で約 13% 小さいことになる。一方、k の値を測定する実験者に対しては、k の大きいときほど内壁面状態の詳細な記述が要求されよう。

(2) 適用範囲の検討

管網の管径計算において、使用する流量公式に依存して生ずる C・W 公式との差異を調べてみる。V は (1) と同じ 4 とおりに変化させる。直径の真値 D\* は仮定値 D の ±50% の範囲におさまるとみなし、D\* = βD とおいて、β=0.5, 0.8, 1, 1.2, 1.5 の 5 とおりに変化させる。k, D を固定し、次の手順によって得られる 20 組の差異の算術平均を求める。

1) k, D, V に対して式 (19) より得られる f を式 (1) に代入して I を求め、これを I<sub>0</sub> とする。同時に、この I<sub>0</sub> を用いて係数 C<sub>H</sub>, C<sub>T</sub> または n を求める。

2) D\*, Q\*(=πD\*<sup>2</sup>V/4) と手順 1) で求めた係数を式 (27)~(29) のいずれかに代入して I を求める。

3) I/I<sub>0</sub> をもって差異の値とする。

4) V, D\* を変更し、手順 1)~3) を繰り返す。

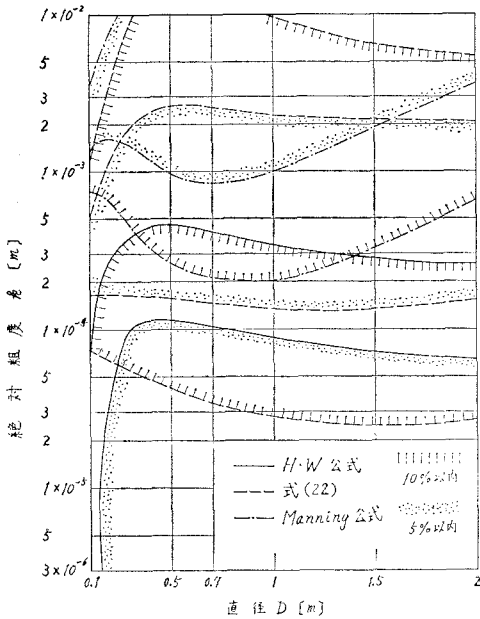
得られた平均差異が 5%, 10% となる点を結ぶと図-1 に示すごとくである。これによって、直径の真値と仮定値の比 β および流速変化が上述の変域に属するという限定はつくけれども、C・W 公式と式 (27)~(29) を用いたときの差異の目安とすることができよう。図-1 より知れることを列挙すると次のごとくである。

① H・W 公式と Manning 公式の使用境界は k=3×10<sup>-4</sup> m であり、この付近での両公式と C・W 公式との差異は 10% 程度である。

② 式 (22) は k=1.5×10<sup>-4</sup>~2×10<sup>-3</sup> m の領域に適しており、所期の目的に合致している。

③ Manning 公式と式 (22) の境界は k=2×10<sup>-3</sup> m、式 (22) と H・W 公式の境界は k=1×10<sup>-4</sup> m である。

④ D ≥ 0.2 m のときは、k の値によって 3 公式を使いわければ、C・W 公式との差異を 5% 以内におさめることができる。しかしながら、配水支管および給水管が属する D < 0.2 m の領域では、D の領域をもっと限定して指数を決定したうえで検討しなければならぬ

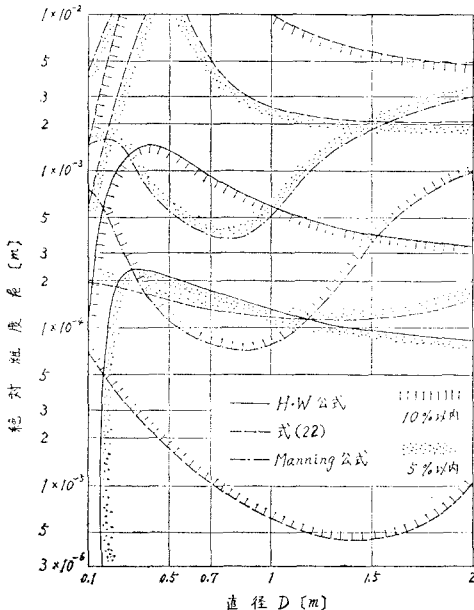


図一 管径計算におけるC・W公式との差異

い。

表一4の太字はC・W公式との差異が5%以内とみなせる領域である。

次に、直径を固定した流量計算において、平均流速公式を使用したときに生じる差異も調べてみる。流速の変化値  $V^*$  と基準値  $V$  の関係を  $V^* = rV$  とおいて、 $r = 0.5, 1, 1.5$  の3とおり、 $V = 0.2, 0.5, 1, 2$  m/sec の4とおりに変化させたとき、前記と同様の手順によって得られる12組の差異の算術平均を示せば図二のごと



図二 流量計算におけるC・W公式との差異

くである。図一の場合には直径変化にともなって  $R_0$  と  $k/D$  の両方が変化するのに対し、図二の場合は流速変化とともに  $R_0$  が変化するだけという相違があるにもかかわらず、後者で領域の広がりが見られるだけで、両者ともほぼ同様の結果となっている。

### 5. C・W 公式を用いた管網流量計算

#### (1) H・W 公式を用いたときの問題点

管径計算法が開発される以前は、管網計算といえば流量計算を指し、これによって管径計算を代用していた。すなわち、仮定した管径のもとで流量計算を行ない、各節点の水圧が所要値以上であればよしとして管径を決定していた。管径計算法の開発によって、流量計算法は本来の用途である節点取り出し水量の変動下における水圧解析、多点注入系の運用あるいは増・減圧に伴う管網内水圧変化の把握を主対象とする。その場合、流速の時間的変動が大きく、また管種の多様性が予想されるので、従来どおりH・W公式を採用してよいかは問題である。主たる問題点は次のごとくである。

① 図二により、 $k \leq 10^{-4}$  m (表一4から  $C_H \geq 140$ ) のときは、通常の流速変域ではC・W公式の結果とほぼ同一とみなせるけれども、極端に流速が変動したときには適用範囲外となるおそれがある。

② 同じく図二により、 $D < 0.2$  m のときはC・W公式との差異が大となる。

③  $C_H$  の値は通水年数とともに増加するから、新設当時は  $C_H \geq 140$  であったとしても、経過年数につれてついに適用範囲外となることもありうる。特に、鑄鉄管の設計値とされている  $C_H = 100$  ( $k = 1.2 \times 10^{-3}$  m) のときは、C・W公式との差異は10%を越える。

節点エネルギー位を未知数とした流量計算法<sup>3),7)</sup>は、節点取り出し水量を容易に変更できること、エネルギー位が直接算出されること、多点注入系あるいは増・減圧時への適用が容易なことから流量計算本来の目的に合致している。すでに発表した方法ではH・W公式を用いていたから、上記のような問題点が残る。ここではC・W公式を採用した場合について示すことにする。

#### (2) 計算式の誘導

節点  $i$  と  $j$  を結ぶ管路に対して添字  $ij$  を付すと、節点エネルギー位  $E_i, E_j$  (m) と損失水頭  $H_{ij}$  (m) は

$$H_{ij} = E_i - E_j \dots\dots\dots (31)$$

なる関係にあるから、節点エネルギー位と流量  $Q_{ij}$  の関係は、式(1)を用いて次式のようになる。

$$Q_{ij} = \frac{1}{\sqrt{f_{ij}}} \cdot \sqrt{\frac{D_{ij}^5 \cdot \pi^2 g}{L_{ij}} \cdot \frac{(E_i - E_j)}{8}} \cdot \frac{(E_i - E_j)}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \dots\dots\dots (32)$$

$$= \frac{M_{ij}}{\sqrt{f_{ij}}} \cdot \frac{(E_i - E_j)}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \dots\dots\dots (32)$$

$$M_{ij} = \sqrt{\frac{D_{ij}^5 \cdot \pi^2 g}{L_{ij}} \cdot \frac{\pi^2 g}{8}} \dots\dots\dots (33)$$

他方、式 (3) は

$$\frac{1}{\sqrt{f_{ij}}} = 1.14 - 2 \log \left( \frac{k_{ij}}{D_{ij}} + \frac{N_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \right) \dots\dots\dots (34)$$

$$N_{ij} = 9.35 \nu_{ij} \sqrt{L_{ij}} / (2 g D_{ij}^3) \dots\dots\dots (35)$$

と書け、式 (34) を式 (32) に代入すると次式が得られる。

$$Q_{ij} = \frac{M_{ij}(E_i - E_j)}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \cdot \left\{ 1.14 - 2 \log \left( \frac{k_{ij}}{D_{ij}} + \frac{N_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \right) \right\} \dots\dots\dots (36)$$

式 (36) は  $E_i, E_j$  に関する非線形式であるから、接線近似によって線形化する。 $Q_{ij}, E_i, E_j$  に対する仮定値もしくは近似値をそれぞれ  $q_{ij}, e_i, e_j$  とし、その補正値を  $\Delta Q_{ij}, \Delta E_i, \Delta E_j$  とすれば

$$Q_{ij} = q_{ij} + \Delta Q_{ij} = q_{ij} + \left( \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_i} \right)_{E_i=e_i} \cdot \Delta E_i + \left( \frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_j} \right)_{E_j=e_j} \cdot \Delta E_j \dots\dots\dots (37)$$

$$E_i = e_i + \Delta E_i \dots\dots\dots (38)$$

$$E_j = e_j + \Delta E_j \dots\dots\dots (39)$$

の関係がある。式 (37) の偏微係数は、式 (36) から

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_i} = \frac{0.5 M_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \cdot \left\{ 1.14 - 2 \log \left( \frac{k_{ij}}{D_{ij}} + \frac{N_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \right) \right\} + \frac{M_{ij} \cdot N_{ij}}{2.303 |E_i - E_j| \cdot \left( \frac{k_{ij}}{D_{ij}} + \frac{N_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \right)} \dots\dots\dots (40)$$

$$= 0.5 Y_{ij} + Z_{ij} \dots\dots\dots (40)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial E_j} = -0.5 Y_{ij} - Z_{ij} \dots\dots\dots (41)$$

となる。ただし、

$$Y_{ij} = \frac{M_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \cdot \left\{ 1.14 - 2 \log \left( \frac{k_{ij}}{D_{ij}} + \frac{N_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \right) \right\} \dots\dots\dots (42)$$

$$Z_{ij} = \frac{M_{ij} \cdot N_{ij}}{2.303 |E_i - E_j| \cdot \left( \frac{k_{ij}}{D_{ij}} + \frac{N_{ij}}{\sqrt{|E_i - E_j|}} \right)} \dots\dots\dots (43)$$

$e_i, e_j$  に対する  $Y_{ij}, Z_{ij}$  の値を  $y_{ij}, z_{ij}$  と表示す

ることにすれば、式 (40), (41) を式 (37) に代入することによって、接線近似によって修正された管路流量は

$$Q_{ij} = y_{ij}(e_i - e_j) + (0.5 y_{ij} + z_{ij}) \Delta E_i - (0.5 y_{ij} + z_{ij}) \Delta E_j \dots\dots\dots (44)$$

となる。ただし、右辺第1項については、式 (42) を (36) に代入して得られる次式の関係が利用されている。

$$q_{ij} = y_{ij}(e_i - e_j) \dots\dots\dots (45)$$

節点  $i$  の隣接節点を  $r = j, k, \dots, n$  とすれば、流量の連続条件により次式が成立しなければならない。

$$\sum_{r=j}^n Q_{ir} + p_i = 0 \dots\dots\dots (46)$$

ただし、 $p_i$  は節点  $i$  の取り出し水量 ( $m^3/sec$ ) であり、取り出される時正とする。式 (46) に (44) を代入すれば

$$\Delta E_i \sum_{r=j}^n (0.5 y_{ir} + z_{ir}) - \sum_{r=j}^n (0.5 y_{ir} + z_{ir}) \Delta E_r = -p_i - \sum_{r=j}^n y_{ir}(e_i - e_r) \dots\dots\dots (47)$$

となる。単点注入系では、配水池を除く節点数を  $K$  とすれば、式 (47) が  $K$  本できるから、その  $K$  元連立一次方程式を解くことによって、 $\Delta E_i (i=1, 2, \dots, K)$  が得られる。式 (38) によって修正された  $E_i$  が式 (46) を満足すればよし、さもなければ  $E_i$  を近似値  $e_i$  とおいて再び同じ手順を繰り返す。なお多点注入系では、配水池からの流入方式および水位指定条件によって連立方程式の元数と形が異なってくる<sup>7)</sup>。

H・W 公式または Manning 公式を用いたときの式形と式 (47) の差異は、 $z_{ir}$  の項の有無だけである。C・W 公式の採用による計算手順の複雑化および計算時間の増加はわずかであり、また連立一次方程式の解法として還元解法<sup>3), 8)</sup> を利用する場合にもなら変更を必要としないので、実用上の問題はない。

### (3) 計算例

はじめに、(2) で述べた方法の確認計算用として、図-3 の網目状管網に適用した例を示す。配水池は節点番号 0 の点にあり、各節点の取り出し水量は表-6 のごとくであるとする。仮定および計算結果のエネルギー位は表-6 に示すごとくである。

本例では収束性を調べる意味から、計算結果の流向と仮定時の流向が逆転している管路が 5 本もある場合を選んだが、収束状況は順調であり、式 (46) の最大閉合誤差が仮定時の 40.8 から 5 回の修正計算によって  $2.25 \times 10^{-6} l/sec$  となった。

次に、C・W 公式の代りに H・W 公式、式 (22) および Manning 公式を用いて流量計算したときに生じる損失水頭の差異の一例を示す。対象とした管網は図-4 の樹枝状管網であり、管路長はすべて 1000 m、管径は表

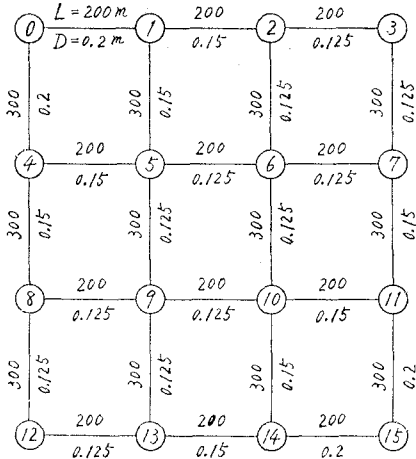


図-3 網目状管網図

表-6 節点取り出し水量とエネルギー位

節点	取り出し水量 (l/sec)		エネルギー位 (m)		節点	取り出し水量 (l/sec)		エネルギー位 (m)	
	仮定値	計算結果	仮定値	計算結果		仮定値	計算結果	仮定値	計算結果
0	-48	20	20.000		8	1	15	16.666	
1	1	19	19.021		9	1	14	16.116	
2	1	20	17.419		10	1	15	15.305	
3	4	18	16.832		11	1	14	15.155	
4	1	19	18.693		12	5	16	15.116	
5	1	18	18.118		13	1	15	15.010	
6	1	16	16.712		14	25	14	14.601	
7	1	15	16.125		15	3	13	14.758	

注:  $k=2 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $p=0.1 \text{ m}^3/\text{sec}$

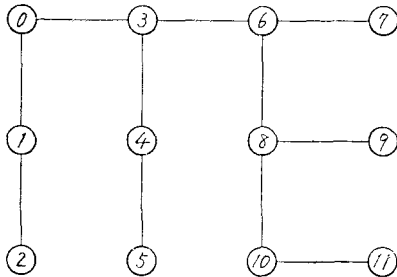


図-4 樹枝状管網図

7のごとくとする。配水池(節点0)を除くすべての節点で  $p=0.1 \times a (\text{m}^3/\text{sec})$  なる均一な水量取り出しがあるとし、 $a=0.25, 0.5, 1, 2$  の4とおりの変動を考える。各節点取り出し水量が  $0.1 \text{ m}^3/\text{sec}$  のときの管路流量と流速は表-7のごとくであり、これを  $a$  倍すれば取り出し水量変動時の値となる。図-2を参照し、絶対粗度  $k$  としては、(A) Manning 公式と式(22)の使用境界に相当する  $k=2 \times 10^{-3} \text{ m}$ 、(B) 式(22)と H-W 公式の使用境界に近い  $k=2 \times 10^{-4} \text{ m}$ 、(C) H-W 公式の適用範囲に属する  $k=2 \times 10^{-5} \text{ m}$  の3とおりを選ぶ。表-4から各  $k$  値に対応する係数  $C_H, C_T, n$  を求め、式(27)~(29)に代入して流量公式とする。

表-7 直径と流量, 流速

管路	直径 (m)	流量 (m <sup>3</sup> /sec)	流速 (m/sec)	管路	直径 (m)	流量 (m <sup>3</sup> /sec)	流速 (m/sec)
0-1	0.4	0.2	1.59	6-7	0.3	0.1	1.41
0-3	1.0	0.9	1.15	6-8	0.5	0.4	2.04
1-2	0.3	0.1	1.41	8-9	0.3	0.1	1.41
3-4	0.4	0.2	1.59	8-10	0.5	0.2	1.02
3-6	0.7	0.6	1.56	10-11	0.4	0.1	0.80
4-5	0.4	0.1	0.80				

表-8 4公式による節点エネルギー位 (m)

節点	公式			
	C-W 公式	H-W 公式	式(22)	Manning 公式
0	0.00	0.00	0.00	0.00
1	-5.67	-5.31	-5.95	-6.42
2	-12.09	-11.29	-12.71	-13.87
3	-0.98	-0.99	-1.00	-0.98
4	-6.66	-6.31	-6.95	-7.41
5	-8.13	-7.78	-8.49	-9.01
6	-3.74	-3.66	-3.85	-3.90
7	-10.16	-9.63	-10.61	-11.35
8	-10.75	-10.13	-11.15	-11.72
9	-17.16	-16.10	-17.91	-19.17
10	-12.56	-11.92	-13.04	-13.68
11	-14.04	-13.39	-14.57	-15.28

比較の都合上、配水池水位は  $0 \text{ m}$  とする。 $k=2 \times 10^{-4} \text{ m}$  および  $p=0.1 \text{ m}^3/\text{sec} (a=1)$  のときの各節点エネルギー位を示せば表-8のごとくである。配水池から各節点に至るまでの損失水頭(いまの場合、各節点エネルギー位の絶対値に等しい)について、上記3公式を用いたとき C-W 公式を用いたときの比

$$(E_0 - E_i) / (E_0 - E_i)_{C-W}$$

の最大値と最小値は図-5のように変化する。これより次のことが知れる。

- ① 各公式の適用範囲外で用いられたときは、最大値と最小値の幅が広がり、また流速変化の影響を強く受け(図-5で傾斜が急)、適用範囲内ではその逆となる。
- ② この例では、図-2の適用範囲とよい対応を示しており、 $k$  が (A) のときは Manning 公式と式(22)、(B) のときは式(22)、(C) のときは H-W 公式による結果は C-W 公式の結果との差異が小さい。

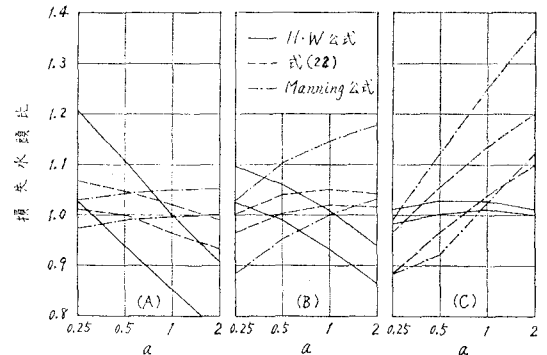


図-5 3公式の比較



③ 式(22)の場合に顕著に見られるように、適用可能な領域の $k$ よりも小さいときには低流速側で、また大きいときには高流速側で損失水頭が過小となる。

## 6. ま と め

現在のところ最も信頼しうる摩擦損失係数の表現式と考えられるC・W公式に基づき、管網の管径計算と流量計算の両方について検討を加えた。

流量計算については、本論文で示した計算法によってC・W公式を直接適用することが可能となった。管径計算に対しては、従来から使用されてきた平均流速公式のH・W公式とManning公式ならびに新たに作成した式(22)の係数値および適用範囲を明らかにし、その精度向上を図った。

なお計算には北海道大学大型計算機センターのFA-COM 230-60を使用した。

終わりに、本研究を進めるにあたって有益なるご教示をいただいた北海道大学工学部教授丹保憲仁博士に深甚なる謝意を表す。

### 参 考 文 献

- 1) 高桑哲男：管水路における流速公式の比較と計算手順について，第3回衛生工学研究討論会講演論文集，pp. 65～73，1966年11月。
- 2) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究（Ⅰ），水道協会雑誌，第421号，pp. 41～56，1969年10月。
- 3) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究（Ⅲ），水道協会雑誌，第423号，pp. 46～60，1969年12月。
- 4) 高桑哲男：配水管網設計法に関する研究（Ⅰ），水道協会雑誌，第443号，pp. 2～16，1971年8月。
- 5) 高桑哲男：配水管網設計法に関する研究（Ⅱ），水道協会雑誌，第447号，pp. 2～22，1971年12月。
- 6) 土木学会水理公式集改訂委員会：水理公式集（昭和46年改訂版），pp. 382～384，土木学会，1971年11月。
- 7) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究（Ⅳ），水道協会雑誌，第425号，pp. 32～47，1970年2月。
- 8) 高桑哲男：配水管網流量計算法に関する研究（Ⅱ），水道協会雑誌，第422号，pp. 27～36，1969年11月。  
(1972. 3.21・受付)