土木学会論文報告集
第 204 号・1972 年 8 月

不規則車両配列に対する道路橋の静的応答の確率統計的研究

STUDIES OF STATISTICAL PROPERTIES OF RANDOM VEHICLE LOADINGS ON HIGHWAY BRIDGE

中　川　建　治*
By Kenji Nakagawa

1. まえがき

土木建築構造物に作用する外力のほとんどは，時間的にも空間的にもランダムな要素をもっていると言っても過言ではない。このような外力を受ける構造物を合理的に設計することは，外力を確率統計的に有効に把握することと，所定の外力に対する構造物の応答を正確に計算することとを要求する。最近の数値計算の手段と方法との発展によって，応答計算については相応の精度を期待できるような場合が多くなったが，外力の定量的な把握については応答計算の精度にははるかにおよばない点がある。ランダム過程の取扱いには確率論は必要不可欠ではあるが，少ないデータをもとにして確率論に固執すると，非常に不経済な設計を行なってしまう危険性がある。たとえば，極値統計の理論によると 100 年に 1 回しか期待されないような過大な外力の平均値よりの偏差は，50 年に 1 回期待されるものの $\sqrt{2}$ 倍となる。これを応答（設計）計算に置換すると許容応力度を 40% 変更することに相当する。一般的な極値統計学の理論をもってデータ解析を試みると，現実の問題としては上限の存在する場合でも上限の無いものに置換されてしまうことになり，非現実的な極値が予測されてしまう場合がある。

著者の浅い知識では次のように考えられる。外力の極値の推定が構造物の安全性の検討の基礎になるが，極値統計を代表するチエビシェフの不等式はあまりにも一般的な条件であり過ぎて過大な非現実的な値を与えるから，構造設計へ確率論を導入する一つの目標は，現実的な条件（たとえば，有界分布，対称分布の条件）を可能な限り付加させて理論的な極値を小さく推定することであろう。

著者は，車両荷重がランダムに橋桁に作用する場合の静的応答を推定する方法について研究を行なって来た（文献 1)～3))。本文では，いまだ著者が解き得なかった諸点で補い得たものと導き得たものとをまじえて，このような問題を著者なりにまとめて述べてみたい。そのために，はりの応答計算における統計処理の手法と計算式を統一して述べて，計算式や考え方の項目ごとの解説は計算例の後に配置した。説明を省いた部分はすでに報告した著者の論文で述べたものである。

2. 荷重とはりの応答の統計処理

研究対象を，占有長さが一定値 b で重量 W_i がランダムでその平均値を W_0, 分散値を V_W とする車両がスパン $L(=nb)$ のはり（橋桁）上へランダムに配列する場合の静的応答とする。はりは長さ b の区間に細分割されていて，1 台の車両が隣接 2 区間にわたって配列することも重複して 2 台以上が 1 区間に配列することもないものとする。応答を求めるための影響関数を $G(x)$ として，各区間の代表値を G_i とする。

さて，このような場合の応答を統計処理して平均値・分散・極値などを推定するには，大別して次のような方法が考えられよう。

第 1 の方法は乱れた外力を構造物（はり）の入力となる前に統計処理する方法であり，道路橋設計示方書で荷重のてい減率を設定する考え方に対応したものである。

次に考えられるのはランダム外力の構造物への実際の配列に着目して，配列方法の変化によって生ずる応答の平均値と分散を求めることと，応答を極値にするような荷重の配列と極値を追求することである。本文ではこの方法をさらに 2 つに大別して，第 2 の方法は平均値と分散値を W_0, V_W とする車両 W_i の N 個の標本値より大きい方から k 個がはりに配列する場合の極値を求める方法とする。この方法では個々の車両の重量の上限は存在しないものになっている。よって，第 3 の方法は k 個

* 正会員　工博　山口大学助教授　工学部土木工学科

の車両の総重量の和（あるいは k で割った平均値）と，各車両の重量 W_i の乱れ $\sum^k (W_i-W_0)^2$ とが確率変数でなく確定値である場合の応答の極値を求める方法であると定義する。

第4の方法は，W_i の乱れや配列の乱れ，あるいは応答関数 G_i にはいっさい考慮を払わず，応答のみを一連の確率変数であるとみなして統計処理する方法である。このような応答を与える過程はいっさい black box の中にあるものとして考慮しない極値推定方法である。

(1) 第1の方法

車両の重量 W_i と配列の乱れとを確率論的に考慮して，スパン L の増加に伴う荷重てい減率 θ を規定する方法とする。車両が定速度 v で走行しているものとするならば，$\Delta t=b/v$ ごとにスパン L 上に異なる車両配列の組合せが現われる。しかしそれらが完全に独立な組合せに変わるまでの遷移時間は $n\Delta t=L/v$ である。したがって，スパンが短いと独立な配列状態の現われる回数が多いが，現われた満載状態の継続時間は短い。L が長くなるとこの状態が反対になる。このようなことから，配列状態の組合せの回数に基準を置いて導かれるてい減率 θ_1 と経過時間を基準にして導かれるてい減率 θ_2 とは異なったものになる。

組合せ回数によるてい減率

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&=1, \quad (0<L\leqq L_0)\\ &=\lambda+(1-\lambda)\sqrt{L_0/L}, \quad (L_0<L)\end{aligned}\right\} \cdots(2.1.1)$$

経過時間によるてい減率

$$\left.\begin{aligned}\theta_2&=1, \quad (0<L\leqq L_0)\\ &=\lambda+(1-\lambda)L_0/L, \quad (L_0<L)\end{aligned}\right\} \cdots(2.1.2)$$

ここに，λ は1区間の車両存在確率であり，L_0 はてい減開始スパン長であって重量の乱れ V_W も配列の乱れも考慮されたパラメーターである。このてい減曲線を適用するには，橋の重要性を考慮して適当に L_0 を選定することにするのが便利である。複線区間では，L としてそれぞれの車線の総延長を採用する。

(2) 第2の方法

n 個の載荷可能区間へ k 個（確定値である場合も確率変数である場合もある）の車両が一様の確率で配列する場合の応答 y_k を求めるために，各区間の車両存在を指定する確率変数 z_i を設ける。第 i 区間に車両が存在するなら $z_i=1$ で存在しないなら $z_i=0$ であるとする。各区間の影響関数の代表値を G_i として，記述を簡単にするために，

$$\left.\begin{aligned}A_n&=\sum_1^n G_i\\ S_n&=\sum_1^n G_i^2\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.1)$$

を定義する。

a) 平均値と分散

応答 y_k は

$$y_k=\sum_1^n z_iG_iW_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.2)$$

と表わされる。台数 k が確定値であって

$$\sum_1^n z_i=k \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.3)$$

であるならば，応答の平均値 $\bar{y}_{1,k}$ と分散 V_{y1} は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{1,k}&=\frac{k}{n}A_nW_0\\ V_{y1}&=\frac{k}{n}S_nV_W+\frac{k(n-k)}{n(n-1)}\left(S_n-\frac{1}{n}A_n^2\right)W_0^2\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.2.4)$$

台数 k が確率変数であって，

$$E(k)=\bar{k}, \quad V_{ar}(k)=\sigma_k^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2.2.5)$$

ならば，応答の平均値 $\bar{y}_{2,k}$ と分散 V_{y2} は

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{2,k}&=\frac{\bar{k}}{n}A_nW_0\\ V_{y,2}&=\frac{\bar{k}}{n}S_nV_W+\frac{\bar{k}(n-\bar{k})}{n(n-1)}\left(S_n-\frac{1}{n}A_n^2\right)W_0^2\\ &\quad+\frac{\sigma_k^2}{n(n-1)}(A_n^2-S_n)W_0^2\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.2.6)$$

である。たとえば，k の分布がパラメーター k_0 の2項分布であるならば，

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_{3,k}&=\frac{k_0}{n}A_nW_0\\ V_{y3}&=\frac{k_0}{n}S_nV_W+\frac{k_0(n-k_0)}{n^2}S_nW_0^2\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.2.7)$$

が得られる。

b) 応答の極値

載荷台数 k が確定値であるとする。平均値が W_0 で分散が V_W である分布にしたがう荷重の N 個の標本値（観測値）の大きいもの k 個を選んで載荷させる場合に予測される極値の平均値 $\bar{y}_{k,\max}$ を求めよう。応答を大きくするのは大きい車両を影響値 G_i の大きい区間へ配列させればよいので，$G_i(i=1\sim n)$ を大きい順に再配列して $g_i(i=1\sim n)$ とする。もし応答が負であるならば，G_i の符号を反転させたものを大きい順に g_i として以下の応答計算を行なってからその応答の符号を改めて反転させる。よって，

$$\left.\begin{aligned}g_1&\geqq g_2\geqq\cdots\cdots\geqq g_k\\ W_1&\geqq W_2\geqq\cdots\cdots\geqq W_k\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(2.2.8)$$

のもとに $\bar{y}_k=\sum_1^k g_iW_i$ の最大値を検討する。

1) W_i の分布に平均値 W_0 と分散 V_W を規定すること以外に制約条件を付加させない場合の極値の期待値

$\bar{y}_{k,\max,a}$ は,

$$\bar{y}_{k,\max,a}=W_0\sum_1^k g_i+\sqrt{V_W\{\sum_1^k\sum_1^k g_ig_j\mu_{ij}(N)-(\sum_1^k g_i)^2\}} \quad \cdots\cdots(2.2.9)$$

$$\mu_{ij}(N)=i\cdot j\binom{N}{i}\binom{N}{j}\frac{(2N-i-j)!\,(i+j-2)!}{(2N-1)!} \quad \cdots\cdots(2.2.10)$$

によって与えられる。もし,$N>>k$ ならば

$$\bar{y}_{k,\max,a}=W_0\sum_1^k g_i+\frac{N}{\sqrt{2N-1}}\times\sqrt{V_W\sum_1^k\sum_1^k g_ig_j\binom{i+j-2}{i-1}2^{-(i+j-2)}} \quad \cdots\cdots(2.2.11)$$

で近似的に求められる。

2) このような極値を与える車両重量の分布 $F(W)$ は非現実的な分布(確率密度関数が W_0 の左側近傍で無限大になるような分布)となるので,y_k の下限値を y_ε と規定するならば次のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{y}_{k,\max,l}=W_0\sum_1^k g_i&+\frac{1}{\Sigma\Sigma\, g_ig_j(\mu_{ij}-1)}\\&\times[(W_0\Sigma\, g_i-y_\varepsilon)\Sigma\Sigma\, g_ig_j(1-\zeta_{ij})\\&+\sqrt{\{\Sigma\Sigma\, g_ig_j(1-\mu_{ij})\}^2-\{\Sigma\Sigma\, g_ig_j(1-\zeta_{ij})\}^2}\\&\times\sqrt{V_W\,\Sigma\Sigma\, g_ig_j(1-\mu_{ij})^2-(W_0\Sigma\, g_i-y_\varepsilon)^2}]\end{aligned} \quad \cdots\cdots(2.2.12)$$

$$\zeta_{ij}(N)=i\cdot j\binom{N}{i}\binom{N}{j}\frac{\{(N-1)!\}^2}{(2N-1)!} \quad \cdots(2.2.13)$$

式 (2.2.12) では $\zeta_{ij}(N)$, $\mu_{ij}(N)$ を ζ_{ij}, μ_{ij} と略記した。Σ の記号は k までの総和を意味する。

3) W_i の分布を対称分布と規定するならば,

$$\bar{y}_{k,\max,s}=W_0\sum_1^k g_i+\sqrt{V_W\sum_1^k\sum_1^k g_ig_j\{\mu_{ij}(N)-\zeta_{ij}(N)\}} \quad \cdots\cdots(2.2.14)$$

となる。

(3) 第3の方法

W_i の平均値と分散を規定しただけならば無限大の重量の存在も意味することになる。しかし,W_i の上下限を与えて解を得ることは至難であるから,k 台の車両の総重量と偏差の自乗和を規定することにする。すなわち,

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_1^k W_i&=W_0\\ \frac{1}{k}\sum_1^k (W_i-W_0)^2&=V_W'\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.3.1)$$

という制約条件のもとに極値の応答 $\bar{\eta}_{k,\max}$ を求めよう。これはより現実的な仮定である。この場合の極値は

$$\bar{\eta}_{k,\max}=W_0\sum_1^k g_i+\sqrt{V_W'\{k\sum_1^k g_i^2-(\sum_1^k g_i)^2\}} \quad \cdots\cdots(2.3.2)$$

となる。

(4) 第4の方法

応答のみを N 回 ($Y_1\sim Y_N$) 観測して母平均値と母分散を

$$\left.\begin{aligned}\bar{Y}&=\frac{1}{N}\sum_1^N Y_i\\ V_Y&=\frac{1}{N-1}\sum_1^N (Y_i-\bar{Y})^2\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.4.1)$$

と推定して,これより Y_i の N 回に1回期待される極値平均 $\bar{Y}_{N,\max}$ を求める方法である。

1) Y_i の分布は荷重 W_i の分布と配列の乱れ,および G_i の形状によって決定するものではあるが,Y_i の分布は式 (2.4.1) によって得られた平均値と分散以外には何の制約もないものとする。この場合の極値平均 $\bar{Y}_{N,\max,a}$ は,

$$\bar{Y}_{N,\max,a}=\bar{Y}+\frac{N-1}{\sqrt{2N-1}}\sqrt{V_Y} \quad \cdots\cdots(2.4.2)$$

によって求められる。

2) Y_i の分布に式 (2.4.1) 以外の制約条件として,N 回に1回現われる最小値の期待値が Y_ε であるという条件を付加すると,極値は

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{N,\max,l}=\bar{Y}+\frac{2N-1}{(N-1)^2}\Bigg[&(\bar{Y}-Y_\varepsilon)\left\{1-\frac{(N!)^2}{(2N-1)!}\right\}\\&+\sqrt{\frac{(N-1)^4}{(2N-1)^2}-\left\{1-\frac{(N!)^2}{(2N-1)!}\right\}^2}\\&\times\sqrt{\frac{(N-1)^2}{2N-1}V_Y-(\bar{Y}-Y_\varepsilon)^2}\ \Bigg]\end{aligned} \quad \cdots\cdots(2.4.3)$$

によって求められる。

3) Y_i の分布に式 (2.4.1) 以外の条件として,Y_i の分布は対称分布であるとする。この場合の極値は次の式で与えられる。

$$\bar{Y}_{N,\max,s}=\bar{Y}+\frac{N}{\sqrt{2(N-1)}}\sqrt{V_Y\left[1-\frac{\{(N-1)!\}^2}{(2N-1)!}\right]} \quad \cdots\cdots(2.4.4)$$

3. 計 算 例

いろいろな制約条件下における極値を推定する計算式は非常に煩雑な計算を必要とするので,著者が論文 2) と 3) で示した簡単なトラス桁の例をそのまま引用して,第2の方法から第4の方法をそれぞれ適用した場合の推定極値がどのようになるかを示そう。上記の論文の数値例と全く同一のトラスに対して同一の載荷例を採用

するので簡単に述べる。トラスは8パネル全長48 m で，車両は占有長さ $b=6$ m，平均重量 $W_0=6$ t，分散 $V_W=9$ とするので，載荷可能台数は $n=8$ 台となる。各載荷区間（パネルと一致）の影響関数 G_i を表—1 に示す。G_{ui} は第2パネルの上弦材の部材力 N_u の影響線値であり，$G_{Di}(G_{Li})$ は第3パネルの斜材（下弦材）の部材力 $N_D(N_L)$ の影響線値である。載荷台数 k を3と8とに分け，さらに k が確定値である場合と2項分布の場合とに分けて変動係数 $C=\sqrt{V_y}/\bar{y}$ を求めた。

表—1 影響関数

i	G_{ui}	G_{Di}	G_{Li}
1	−0.1875	−0.0781	0.2344
2	−0.5625	−0.2344	0.7031
3	−0.9375	−0.3906	1.1719
4	−1.3125	−0.5469	1.6406
5	−1.6875	−0.7031	2.1094
6	−2.0625	−0.2344	2.2031
7	−1.6875	0.2344	1.5469
8	−0.5625	0.0781	0.5156

表—2 の $\bar{y}$ は k 台の車両による応答の平均値であり，C_1 は k が確定値の場合の応答の変動係数で C_3 は k が2項分布による場合の変動係数である。N は，第2の方法においては総観測車両台数（極値を求めるには N 台より選ばれた k 台）であり，第4の方法に対しては応答の観測回数である。よって，第2の方法で $N=10k(100k)$ とすることは第4の方法で $N=10(100)$ とすることに対応する。表—2 における δy, $\delta\eta$, δY はそれぞれの方法における極値の平均値 $\bar{y}$ に対する増加率に相等するもので，k を確定値とした極値より

$$\left.\begin{aligned}\delta y&=(\bar{y}_{k,\max}-\bar{y})/\bar{y}\\ \delta\eta&=(\bar{\eta}_{k,\max}-\bar{y})/\bar{y}\\ \delta Y&=(\bar{Y}_{N,\max}-\bar{y})/\bar{y}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

として求めたものである。平均値と分散以外に条件をつけない極値 δy_a, δY_a および $\delta\eta$ は論文 1) と論文 2) ですでに示したものである。下限値を0として（$y_\varepsilon=0$, $Y_\varepsilon=0$）式 (2.2.12) より求めた値が δy_l であり，式 (2.4.3) より求めたものが δY_l である。対称分布として式 (2.2.14) より求めたのが δy_s であり，式 (2.4.4) より求めたのが δY_s である。

このような例からもわかるように，第3の方法による $\delta\eta$ が他に比較してきわめて小さい。これは制約条件式 (2.3.1) が非常に厳しいものであって，確率変数 W_i に上下限を定めているからである。他方，第2の方法による δy と第4の方法による δY とは標本数 N さえ増加すれば無限に増加する非現的要素を含んでいる。最小平均値 $y_\varepsilon(Y_\varepsilon)$ を規定したり，対称分布という条件を付けたりしても，値は小さくなるが発散を防ぐことはできない。もしこれらの方法で極値を推定するならば，標本数（あるいは再現期間）の決定がいかに大切であるかがわかる。なお，第2の方法は，非常に煩雑な計算を必要とすることと，当然なことではあるが第4の方法よりさらに大きな値を示すこととによって，その実用的な価値は第4の方法にははるかにおよばないであろう。

表—2 極値応答の増加率

		k / N	N_u 3	N_u 8	N_D 3	N_D 8	N_L 3	N_L 8
$\bar{y}$			−20.250	−54.000	−4.219	−11.250	22.781	60.750
c_1			−0.426	−0.202	−0.764	−0.283	0.422	0.201
c_3			−0.617	−0.202	−0.863	−0.283	0.614	0.201
第2の方法 δy	制約なし	10k	2.635	1.605	4.301	1.897	2.554	1.598
		100k	7.384	5.275	11.520	6.162	7.260	5.255
		1 000k	22.145	16.741	33.707	19.538	21.669	16.678
	$y_\varepsilon=0$	10k	1.885	0.802	3.345	1.559	1.828	0.796
		100k	5.246	2.776	8.565	5.170	5.186	2.755
		1 000k	15.466	8.860	24.516	16.431	15.226	8.794
	対称	10k	2.151	1.189	3.647	1.618	2.077	1.184
		100k	5.434	3.746	8.584	5.100	5.294	3.723
		1 000k	15.849	11.843	24.240	16.124	15.499	11.799
第3の方法 $\delta\eta$			0.690	0.276	1.606	0.624	0.655	0.271
第4の方法 δY	制約なし	10	0.880	0.417	1.577	0.584	0.870	0.415
		100	2.990	1.418	5.360	1.983	2.958	1.411
		1 000	9.520	4.513	17.056	6.314	9.419	4.493
	$Y_\varepsilon=0$	10	0.848	0.402	1.520	0.563	0.839	0.400
		100	2.968	1.407	5.320	1.968	2.936	1.400
		1 000	9.512	4.509	17.050	6.309	9.410	4.488
	対称	10	0.691	0.328	1.239	0.458	0.684	0.326
		100	2.136	1.013	3.828	1.417	2.113	1.008
		1 000	6.739	3.195	12.079	4.469	6.667	3.180

4. てい減率

てい減率を決定する要因には，一定区間に含まれる車両の台数の乱れ，車両の重量の乱れ，衝撃を含む時間的な乱れなどがある。さらに，台数の乱れと同等なものとして車両間隔の乱れに着目する方法も考えられる。てい減率についてはすでにいろいろな研究が報告されているが，文献 5)～7) は車両距離と車両の重量の乱れに着目して時間的な変動も考慮している。文献 8)～15) は時間的な変動を無視して，ポアッソン分布，2項分布，指数分布などによっ

て論じている。

著者がてい減率に着目するのは，上記の諸研究に対してさらに進んだ考察を加えようとするのではなく，平均値と分散以外の確率パラメーターによらない統計的方法によっててい減率曲線の傾向を求めようとするところにある。個々の研究は，多くの観測結果，あるいは，基礎になる仮定によって確率論的に詳しく論じているので，それぞれの範囲では正しいてい減率を与えているが，それゆえに異なった結果を与えていて全体を総合することは無理である。たとえば，文献 13) の実地観測による結果と O.H. Anman によるものはスパン長 L の逆数に比例するてい減率を与えているが，文献 5)～7) の観測結果によるものと文献 8～10) の理論的考察によるものはおおよそ $1/\sqrt{L}$ に比例する傾向を与えている。このような場合には，くわしい仮定や観測結果によって個々の場合のてい減率を定量的に把握することから離れて，一歩退いて，細部へ立入らずに全体的な傾向を定性的に把握しようとする姿勢が必要であろう。

著者は文献 3) においててい減率に言及したが，検討不足のため $1/L$ と $1/\sqrt{L}$ との相違に対して明解な見解を導き得なかった。これらの点を補って，式 (2.1.1) と式 (2.1.2) に至る過程を以下に示したい。

（1） 台数統計による場合

単位長さ当りに含まれる車両台数の平均値を r その分散を V_r とすれば，スパン $L(=nb)$ に含まれる台数 k の平均値と分散は

$$\left.\begin{aligned} E(k)&=rL \\ V_{ar}(k)&=V_rL \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(4.1)$$

となり，N_r 回に1回期待されるような k の極値に基づくてい減率 θ_r は次のようになることを文献 3) で示した。

$$\theta_r=rb+\frac{N_r-1}{\sqrt{2N_r-1}}b\sqrt{\frac{V_r}{L}} \quad\cdots\cdots(4.2)$$

ここで式 (2.1.1) の λ は $\lambda=rb$ となることに着目すると，式 (4.2) は式 (2.1.1) に変換されることは容易に理解されよう。

さて，第1の方法のところで述べたように，観測回数 N_r に着目せずに平均速度 v で走行しているものとして一定時間の観測データによっててい減率を導くことにすると，スパン L の大きいものには N_r を小さく，L が小さい場合には N_r を大きくするべきである。すなわち，全観測車線長を L_T とすると

$$N_rL=L_T \quad\cdots\cdots(4.3)$$

でなければならない。これを式 (4.2) へ代入して N_r を消去すると，$1/N_r\ll1$ とする近似計算より

$$\theta'\fallingdotseq rb+\sqrt{\frac{L_TV}{2}}\frac{b}{L} \quad\cdots\cdots(4.4)$$

が得られる。これは式 (2.1.2) にほかならない。

（2） 車間距離の統計による場合

車両間隔の平均値が $\bar{s}$ で分散が V_s であるとするならば，k 台の車両の車頭間隔 l_k の平均値は

$$E(l_k)=k(b+\bar{s})$$

分散は

$$V_{ar}(l_k)=kV_s$$

となる。これよりてい減率を求めるには，N_s 回の観測に1回期待されるような l_k の最小値 $l_{k,\min}$ が L であるという関係

$$l_{k,\min}=k(b+\bar{s})-\frac{N_s-1}{\sqrt{2N_s-1}}\sqrt{kV_s}=L \quad\cdots\cdots(4.5)$$

より k を解いて $\theta_s=k/n$ とすればよいと著者は文献 3) で述べた。しかし，著者はここで N_s と N_r との関係を式 (4.5) へ導入する配慮に欠けていた。台数統計の場合の観測総車線長 N_rL と車間距離統計の平均総車線長 $N_sk(b+\bar{s})$ とが等しい場合でないと両者の比較はできない。すなわち，

$$N_sk(b+\bar{s})=N_rL \quad\cdots\cdots(4.6)$$

を式 (4.5) へ代入しててい減率を $\theta_s=k/n$ と定義すると，

$$\theta_s=\frac{b}{b+\bar{s}}+\frac{b}{b+\bar{s}}\sqrt{\frac{N_rV_s}{2(b+\bar{s})L}} \quad\cdots\cdots(4.7)$$

が得られる。$\lambda=b/(b+\bar{s})=rb$ であるから，式 (4.7) は式 (4.2) と同等なものであることがわかる。式 (4.3) の関係を式 (4.7) へ代入すると式 (4.4) すなわち，式 (2.1.2) に対応した式になることも明らかである。

（3） 車両の重量の乱れについて

車両の重量 W_i の乱れと台数 k の乱れは独立な確率分布にしたがっているから両者のてい減率の積を全体のてい減率とすればよいと著者は文献 3) で述べた。しかし，これは著者の軽卒な早合点であった。W_i も確率変数であり，台数 k も式 (4.1) にしたがう確率変数であるとして，てい減率に相当した

$$\xi=\frac{1}{W_0n}(W_1+W_2+\cdots+W_k) \quad\cdots\cdots(4.8)$$

を定義する。これは，ξ が複合分布にしたがうことを意味しているので，式 (2.2.6) によって平均値と分散が求められる。$A_n=1/W_0$，$S_n=1/nW_0^2$ となることは，式 (4.8) と式 (2.2.1) の関係より容易に求められるので，式 (2.2.6) より

$$\left.\begin{aligned} E(\xi)&=rb \\ V_{ar}(\xi)&=\frac{b}{L}\left(r\frac{V_W}{W_0^2}+V_r\right) \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(4.9)$$

を得る。これより次のような結論が得られよう。車両の重量 W_i の乱れを台数の乱れに換算するには V_r を rV_W/W_0^2 だけ増加させるだけでよい。てい減率曲線はこの V_r によって決定すればよい。しかるに，b, r, V_r, W_0, V_W などのパラメーターを推定しててい減率を推定するかわりに，てい減開始スパン長 L_0 を何らかの方法で決定し得るならば，この L_0 に上記のパラメーターの情報がすべて繰り入れられた形となり，式 (2.1.1) と式 (2.1.2) のように簡単なてい減率が得られる。

5．複合分布の分散

載荷台数 k が確定値で式 (2.3.3) が成立している場合の式 (2.2.2) に定義した y_k の平均値 $\bar{y}_{1,k}$ と V_{y1} が式 (2.2.4) によって与えられることは，著者が文献 2) で示した。

k が確率変数で式 (2.2.5) を満足しているものとするならば，y_k は複合分布にしたがっている。k の確率密度を $p(k)$ とするならば，y_k の分散は

$$V_{ar}(y_k)=V_{y,2}=\sum_0^\infty\{V_{y,1}+\bar{y}_{1,k}^2\}p(k)-\{\sum_0^\infty \bar{y}_{1,k}p(k)\}^2 \cdots\cdots(5.1)$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{k}&=\sum_0^\infty kp(k)\\ \sigma_k^2&=\sum_0^\infty k^2p(k)-\bar{k}^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.2)$$

によって求められる。式 (5.1) へ式 (2.2.4) を代入して式 (5.2) の関係を用いると，式 (2.2.6) の $V_{y,2}$ が容易に得られる。$\bar{y}_{2,k}$ については断るまでもない。式 (2.2.7) は $\bar{k}=k_0$, $\sigma_k^2=(n-k_0)k_0/n$ より得られる。

6．積和の極値平均

車両の重量 W_i は

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1 W_i(F)dF=W_0\\ &\int_0^1\{W_i(F)-W_0\}^2dF=V_W\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6.1)$$

という条件を満足する以外は任意の分布 $F(W)$ にしたがっているものとする。この母集団よりの N 個の標本を大きさの順に並べて順序統計量 W_i（式 (2.2.8) を満足する）として，式 (2.2.8) を満足する影響関数 g_i との k 個の積和

$$\bar{y}_k=\sum_1^k g_iW_i \cdots\cdots(6.2)$$

を最大にするような分布 F をとり，この場合に期待される $\bar{y}_{k,\max}$ を求めることを考えよう。

分布 F に対して条件式 (6.1) 以外を付けない場合の極値 $\bar{y}_{k,\max,a}$ は式 (2.2.9) で与えられることは，著者が文献 3) ですでに述べた。第 4 の方法における式 (2.4.2) は，式 (2.2.9) において $k=1$, $W_i\to Y_i$, $\bar{y}_{k,\max,a}\to\overline{Y}_{N,\max,a}$, $g_1=1$ の変換を行なうことによって簡単に得られる。すなわち，式(2.4.2)は式(2.2.9)の特殊な場合である。なお，このような変換によって第 2 の方法の式 (2.2.12) と式 (2.2.14) とはそれぞれ第 4 の方法の式 (2.4.3) と式 (2.4.4) に変換されることがわかる。よって，式 (2.2.12) と式 (2.2.14) の誘導を示せばよい。

(1) 下限値を規定する場合

分布関数 F に対して条件式 (6.1) 以外に，N 個の標本値から選ばれた小さい車両 k 台 $W_{N-k+1}\cdots W_N$ によって得られる最小値を y_ε としてあらかじめ規定する条件，

$$\bar{y}_\varepsilon=\sum_1^k g_iW_{N+1-i}$$

すなわち，

$$\int_0^1 W(F)\sum_1^k g_i i\binom{N}{i}(1-F)^{N-i}F^{i-1}dF=\bar{y}_\varepsilon \cdots\cdots(6.3)$$

という条件も付加させる場合の $\bar{y}_k$ の極値 $\bar{y}_{k,\max,l}$ を求めよう。これは，

$$\psi_k(F)=\sum_1^k g_i\cdot i\cdot\binom{N}{i}(1-F)^{i-1}F^{N-i} \cdots(6.4)$$

とすれば，$\bar{y}_{k,\max,l}$ を求める問題は

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^1\{W(F)-W_0\}dF=0\\ &\int_0^1\{W(F)-W_0\}^2dF=V_W\\ &\int_0^1 W(F)\psi_k(1-F)dF=\bar{y}_\varepsilon\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6.5)$$

という条件のもとに

$$\bar{y}_{k,\max,l}=\int_0^1 W(F)\psi_k(F)dF$$

を最大にする変分の問題となる。任意定数を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ として Euler の方程式を導いて解くと次のようになる。

$$J=W\psi_k(F)-\lambda_1(W-W_0)-\lambda_2(W-W_0)^2-\lambda_3W\psi_k(1-F)$$

$$\frac{\partial J}{\partial W}=0$$

$$W(F)=W_0+\frac{1}{2\lambda_2}\{\psi_k(F)-\lambda_1-\lambda_3\psi_k(1-F)\} \cdots\cdots(6.6)$$

式 (6.6) の $\lambda_1\sim\lambda_3$ を決定するために式 (6.6) を条件式 (6.5) へ代入すれば，

$$\lambda_1=(1-\lambda_3)\sum_1^k g_i$$

$$\frac{1}{2\lambda_2}=\left[\frac{V_W\Sigma\Sigma g_ig_j(\mu_{ij}-1)-(W_0\Sigma g_i-\bar{y}_\varepsilon)^2}{\{\Sigma\Sigma g_ig_j(\mu_{ij}-1)\}^2}-\{\Sigma\Sigma g_ig_j(\zeta_{ij}-1)\}^2\right]^{1/2}$$

$$\lambda_3=\frac{\Sigma\Sigma g_ig_j(\zeta_{ij}-1)+2\lambda_2(W_0\Sigma g_i-\bar{y}_\varepsilon)}{\Sigma\Sigma g_ig_j(\mu_{ij}-1)}$$

$$\bar{y}_{k,\max,l}=W_0\Sigma g_i+\frac{1}{2\lambda_2}\{\Sigma\Sigma g_ig_j(\mu_{ij}-1)-\lambda_3\Sigma\Sigma g_ig_j(\zeta_{ij}-1)\}$$

$$\mu_{ij}=i\cdot j\binom{N}{i}\binom{N}{j}\frac{(2N-i-j)!(i+j-2)!}{(2N-1)!}$$

$$\zeta_{ij}=i\cdot j\binom{N}{i}\binom{N}{j}\frac{\{(N-1)!\}^2}{(2N-1)!}$$

となる。ここで総和記号は1より k までの和を示す。これらの関係を逐次代入して整理すると式 (2.2.12) が得られる。

(2) 対称分布の場合

W_i の分布 F に対して条件式 (6.1) 以外に対称分布という条件を付加しよう。この場合は式(6.2)の $\bar{y}_{k,\max}$ と y_ε は平均値のまわりで対称になるから，式(2.2.12) の y_ε に対して

$$y_\varepsilon=2W_0\sum_1^k g_i-\bar{y}_{k,\max,l} \quad\cdots\cdots(6.7)$$

を代入して $\bar{y}_{k,\max,l}$ を $y_{k,\max,s}$ とすると簡単に式 (2.2.14) の結果を得る。

7. 応答の変動係数

前節まではすべて応答の極値を求めることを目標にしている。最後に応答の平均値と分散による変動係数 C_y を検討しなければならない。載荷率 $k/n=r$ を一定にする条件のもとに $L\to\infty(n\to\infty)$ の場合の変動係数を近似的に求めよう。式 (2.2.1) の影響関数 G_i が L の β 次の次元をもつならば $n\to\infty$ とともに

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}A_n&=A_0L^{\beta+1}\\ \lim_{n\to\infty}S_n&=S_0L^{2\beta+1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(7.1)$$

が近似的に成立するような A_0, S_0 が定まる。これを式 (2.2.4) の $\bar{y}_{1,k}$, $V_{y,1}$ へ代入すと，

$$\lim_{n\to\infty}C_y{}^2=\frac{1}{rL}\left\{C_W{}^2\frac{S_0}{A_0{}^2}+(1-r)\left(\frac{S_0}{A_0{}^2}-b\right)\right\}\quad\cdots\cdots(7.2)$$

$$C_W{}^2=\frac{V_W}{W_0}$$

となり，変動係数は $1/\sqrt{L}$ に比例する

$$\lim_{L\to\infty}C_y\propto\frac{1}{\sqrt{L}}\quad\cdots\cdots(7.3)$$

という結論が得られる。実際の橋梁設計ではスパンの増加とともに死荷重の比率が大きくなるので，活荷重による応答の変動率はさらに小さくなることがわかる。

8. むすび

荷重てい減率のてい減開始スパン長 L_0 をいかなる値とするかという問題は，実際の経験には疎い著者の力のおよぶところではない。回数に着目するよりは時間に着目して式 (2.1.2) の $1/L$ の方式のてい減率を採用するべきであろう。長大スパンの橋でも交通事故などで満載する可能性は大きいが，台数の乱れではなく重量の乱れだけに着目しても活荷重分布をてい減させることは合理的である。式 (7.3) の結果からも，少なくとも式 (2.1.1) でてい減させることの合法性は認められよう。

応答の極値の推定法についての第2の方法から第4の方法は，このような問題の観点を類別して，計算式の実用性を度外視して解法を導いたのみというきらいがあろう。ここに述べた着目方法は確率論に知識の浅い著者の独断的な部分が多いことかとも思うが，このような問題の提起としてでも役立てば幸である。

本文をまとめるに際して，終始適切な御批判，御指導を賜った名古屋大学の成岡教授には心から深甚な敬意を表したい。

参考文献

1) 中川：換算等分布活荷重の確率論的考察，土木学会論文集，第 125 号，pp. 1〜8, 昭和 41 年 3 月.
2) 中川：はりに作用する荷重の統計的な扱いについて，土木学会論文報告集，第 175 号，pp. 15〜22, 昭和 45 年 3 月.
3) 中川：静荷重に対するはりの応答の極値に関する二，三の考察，土木学会論文報告集，第 183 号，pp. 31〜42, 昭和 45 年 3 月.
4) Gumbell, E.G. : Statistics of Extremes, Columbia Univ. Press, 1957.
5) Freudenthall, A.M. : The Safty of Structures, Trans. of ASCE, 112, pp. 125〜180, (1947)
6) Freudenthall, A.M. : Reflections on Standard Specifications for Structural Design, Trans. of ASCE, 113, pp. 269〜292, (1948)
7) Freudenthall, A.M. : Safty and the Probability of Structural Failure, Trans. of ASCE, 121, pp. 1337〜1397, (1956)
8) Ichiro Konishi, Masanobu Shinozuka : Stochastic Study on Uniform Live Load in the Design of Highway Bridge, Technical Reports of Engineering Research Institute, Kyoto Univ. Report, No. 28, pp. 13〜24, Feb. 1956.
9) Asplund, S.O. : Probabilities of Traffic Loads on Bridges, Proc. of ASCE, 81, No. 585, (1955)
10) Stephenson, H.K. : Highway Bridge Live Load Based on Laws of Chance, Proc. of ASCE, 83, No. 1314, (1957)
11) 西村 昭：鋼道路橋設計荷重に関する考察，土木学会論文集，第 35 号，pp. 15〜20, 昭和 31 年 6 月.
12) 西村 昭：荷重列としての自動車交通流の二三の解析，土木学会誌，第 46 巻第 2 号，pp. 37〜42,（昭和 36 年

２月）
13) 伊吹山四郎・大橋昭光：長大橋の設計荷重について，土木技術資料，6-9，pp. 1〜8,（昭和 39 年 4 月）
14) 田原保二：交通量と車両間隔の確率論，第２回道路会議論文集，昭和 29 年，pp. 471〜473.
15) 田原保二：車両交通量と構造（橋りよう）の安全度について，第 3 回道路会議論文集，昭和 30 年，pp. 656〜657.

（1972．2．1・受付）