

# 扇形板の非線形振動

## NONLINEAR VIBRATION OF RING SECTOR PLATES

榑木 武\*・高橋 和雄\*\*

By Takeshi Chisyaki and Kazuo Takahashi

### 1. 緒 言

周知のように、薄板の線形振動理論においては、

- (a) 板厚に比べて振幅が小さい
- (b) 板の中央面にはひずみが生じない
- (c) 支承の面内方向の移動は自由である

という仮定を用いている。しかし、高性能かつ経済的な設計を行なう見地から多用されるに至った最近の軽構造や長大構造における振動問題では、振幅の大きさがしばしば板厚と同程度またはそれ以上となるため、微小変形を前提として上記の諸事項を仮定する線形振動理論を適用するには難点がある。すなわち、このような場合には変形の影響をも考慮した振動理論、換言すれば、板のたわみおよび面内変形が連成するところの運動方程式を誘導のうえ、これを用いて解析しなければならないことになる。しかしながら、えられた運動方程式は非線形項を含むため、線形振動を解析する際に威力を発揮した重ね合わせの原理が適用できないこと、座標関数と時間関数との変数分離が困難であること、および規準関数の意味がはっきりしないことなどから、これを厳密に解くことがきわめて困難である。そこで、この問題を近似的な手法で解析する試みが多くの研究者により提案されている。すなわち 1950 年代中葉から、薄板の非線形振動に関する実験的・理論的研究が数多く行なわれるに至り、それらを展望すれば以下のとおりである。Herrmann<sup>1)</sup> は、板の有限変形理論として著名な Kármán<sup>2)</sup> の式の動的拡張ともいべき板の非線形運動方程式を提案した。そして、この基礎式を用いて Chu and Herrmann<sup>3)</sup> は、面内変位が周辺で拘束される単純支持矩形板の自由振動を摂動法により解き、また Kirchman and Greenspon<sup>4)</sup> は既知の静的な荷重一変位曲線を用いて周期的変動圧力

を受ける矩形板の近似的な応答を求めている。ついで、Yamaki<sup>5)</sup> はたわみによる慣性力の影響のみを考慮したいわば Herrmann の式の第 1 近似ともいべき運動方程式に基づいて、矩形板および円板の自由振動と定常強制振動の問題を Galerkin 法により解析した。以後 Yamaki と同様に簡易化された運動方程式を用いて数多くの研究が発表されている。すなわち、矩形板の強制振動に関する Lin<sup>6)</sup>、円板の自由振動に関する Bulkeley<sup>7)</sup>、Efstathiades<sup>8)</sup>、自由と定常強制振動の両者を取り扱った Nowinski<sup>9), 10)</sup>、熱応力下にある矩形板の自由振動を論じた砂川<sup>11), 12)</sup>、回転中の円板に関する Nowinski<sup>13)</sup>、Adavani<sup>14)</sup> ら、直交異方性三角形板の自由振動に関する Nowinski<sup>15)</sup> ら、矩形板の初期面内応力が振動数におよぼす影響を考察した Easley<sup>16), 17)</sup>、サンドイッチ板に関する Yi-Yuan Yu<sup>18)</sup> の各研究などが見受けられる。さらに、Herrmann の式に加えて、粘弾性およびせん断変形の影響をも考慮するとき運動方程式を導いた Eringen<sup>19)</sup> の研究もある。

Kármán の式はたわみ関数と応力関数からなる連立非線形偏微分方程式で与えられるため、その数学的取り扱いが一般に困難であることから適用範囲が限定される。そこで、Berger<sup>20)</sup> は板のひずみエネルギーの第 2 不変量を無視して数学的取り扱いを容易にした実用近似式を提案している。Nash and Modeer<sup>21)</sup> はこの Berger の式にたわみによる慣性力を加えて動的な場合に拡張のうえ、周辺単純支持矩形板の自由振動について解をえ、前述の Chu and Herrmann の近似解と工学的に十分な精度で合致することを示し、Berger の式が非線形振動の解析に適用できることを明らかにした。Wah<sup>22), 23)</sup> は Berger の式から面内変位の項を消去してはりの場合に類似した運動方程式を誘導のうえ、その取扱いをさらに容易にするとともに、矩形板および円板について解いた。また、Banerjee<sup>24)</sup> は全周辺がヒンジで支えられるだ円板を、Gajendar<sup>25)</sup> は弾性地盤上の矩形板および円

\* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 長崎大学講師 工学部土木工学科

板を, Berger の式に Galerkin 法を適用してそれぞれ解析し, さらに, Srinivasan<sup>26), 27)</sup> は円板を対象として, Ritz の平均法を適用のうえその振動特性を明らかにするとともに, Ritz の平均法が無限自由度系の解析にも有効であることを明らかにした。そのほか, Pal<sup>28)</sup> は加熱された矩形板を解析し, また, Wu<sup>29)</sup> らは Berger と同じ仮定を用いて, せん断変形および回転慣性の影響を同時に考慮するとき矩形板の非線形振動を論じている。一方, 実験的研究には矩形板に対する Lassiter<sup>30), 31)</sup> らの研究, 円板に対する Tobias<sup>32)</sup>, Chobotov<sup>33)</sup> らの研究などがある。

以上のように, これまで薄板の非線形振動問題に関する数多くの研究があるものの, それらは主として矩形板および軸対称な回転円板の問題にとどまっている。しかしながら, 現実には軸対称とはならない扇形板構造も多く実用に供せられており, その非線形振動問題はまだ解明されていないようである。そこで, 本論文では全周面で面内変位が拘束される扇形板において, 直線辺がヒンジにて支えられ, かつ円弧辺がヒンジまたは固定支持される場合を対象に, その非線形振動を Berger の式に基づく基礎的に Galerkin 法を適用して解析するものである。また, その結果から非線形自由振動および等分布強制力を受ける場合の定常強制振動における応答に, 振幅および扇形板の支持条件や形状特性がどのように影響をおよぼすかを定性的に把握し, さらに, その特例として扇形板の静的有限変形問題をもあわせ論じ, 扇形板のより厳密な動力学および静力学的な諸特性の検討を行なわんとするものである。

## 2. 解 法

### (1) 扇形板の非線形振動に関する基礎運動方程式の誘導

板の中央平面の変位を  $u, v, w$  とすると, ひずみは極座標  $(r, \theta)$  を用いて次のように表わされる<sup>3)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\ \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ r_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに,  $u, v$ : 板の半径および接線方向の面内変位  
 $w$ : 板のたわみ

$\epsilon_r, \epsilon_\theta$ : 板の半径および接線方向のひずみ

$r_{r\theta}$ : 板のせん断ひずみ

また, 板の中央平面におけるひずみの第 1 不変量は,

$$e_1 = \epsilon_r + \epsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \dots\dots\dots(2)$$

となり, 第 2 不変量は次のように与えられる。

$$e_2 = \epsilon_r \epsilon_\theta - \frac{1}{4} r_{r\theta}^2 \dots\dots\dots(3)$$

さて, 板のたわみによるひずみエネルギーを  $V_1$  と記号表示すれば,  $V_1$  は周知のように次式で与えられる<sup>34)</sup>。

$$V_1 = \frac{D}{2} \iint \left[ \left( F^2 w \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] \times r dr d\theta \dots\dots\dots(4)$$

ここに,  $D = Eh^3 / \{12(1-\nu^2)\}$  (板剛度),  $\nu$ : ポアソン比,  $h$ : 板厚,  $E$ : ヤング率

また, 板の中央平面の伸びによるひずみエネルギー  $V_2$  は<sup>35)</sup>,

$$V_2 = \frac{D}{2} \iint \left[ \frac{12}{h^2} \left\{ (\epsilon_r + \epsilon_\theta)^2 - 2(1-\nu) \times \left( \epsilon_r \epsilon_\theta - \frac{1}{4} r_{r\theta}^2 \right) \right\} \right] r dr d\theta \dots\dots\dots(5)$$

のようにえられる。式 (4) および式 (5) を加え合わせれば, 有限変形の場合のひずみエネルギー  $V$  が次のように算定される。

$$V = \frac{D}{2} \iint \left[ \left\{ (F^2 w)^2 + \frac{12}{h^2} e_1^2 \right\} - 2(1-\nu) \times \left\{ \frac{12}{h^2} e_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] r dr d\theta \dots\dots\dots(6)$$

一方, 板の運動エネルギーは

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) r dr d\theta \dots\dots\dots(7)$$

ここに,  $\rho$ : 板の密度  
 で表わされ, また外力  $pf(t)$  による板の位置のエネルギーが次のように与えられる。

$$F = \iint pf(t) w r dr d\theta \dots\dots\dots(8)$$

以上の結果を用いて Hamilton の原理を適用すれば, 本題の運動方程式が次のようにえられる。

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta F) dt = 0$$

ここに,  $L = T - V$

緒言にも述べるように, Berger の仮定にしたがって, 面内ひずみの第 2 不変量  $e_2$  を無視し, また, 板の面内変位  $u, v$  による慣性力を無視すれば, 面内ひずみの第 1 不変量  $e_1$  が板の座標系  $r, \theta$  に無関係な定数とみなすことができ, かかる場合には上式から次のような運動方程式が求められることになる<sup>23)</sup>。

$$D\nabla^4 w - N\nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = pf(t) \dots\dots\dots(9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \frac{Nh^2}{12D} = & \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ & + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 (=e_1) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

式(10)の右辺は第1不変量  $e_1$  に相等的いが、上述のごとく面内変位による慣性力を無視する場合には、座標系  $r, \theta$  に無関係な定数となるから、したがって  $N$  も  $r, \theta$  に無関係な定数と解釈することができる。そこで、式(10)を図-1に示すような扇形板の全領域にわたって積分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{Nh^2}{24D} \alpha(a^2 - b^2) = & \int_b^a \int_0^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) r dr d\theta \\ & + \int_b^a \int_0^\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} r dr d\theta \\ & + \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

ここに、 $\alpha$ : 扇形板の開角、 $a, b$ : 外径および内径  
上式の右辺第1項および第2項は、それぞれ次のように書き改めることができる。

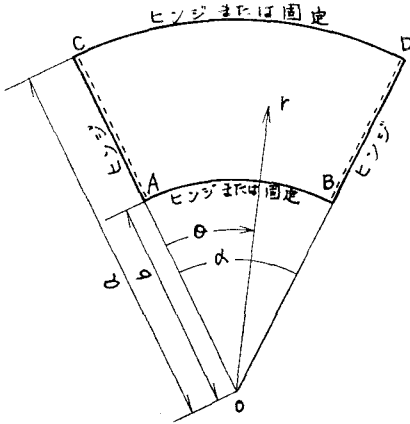


図-1

$$\left. \begin{aligned} \int_b^a \int_0^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) r dr d\theta &= \int_0^\alpha |ur|_b^a d\theta \\ &- \int_b^a \int_0^\alpha u dr d\theta + \int_b^a \int_0^\alpha u dr d\theta \\ &= \int_0^\alpha |ur|_b^a d\theta = \alpha \{ u(a)a - u(b)b \} \\ \int_b^a \int_0^\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} r dr d\theta & \\ &= \int_b^a |v|_0^\alpha dr = (a-b)(v(\alpha) - v(0)) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

扇形板 ACDB において、円弧辺 AB, CD の半径方向の面内変位  $u$  および直線辺 AC, BD の接線方向の面内

変位  $v$  は生じないものとすれば、式(12)の右辺がいずれも0となるゆえ、式(11)は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{Nh^2}{24D} \alpha(a^2 - b^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

さらに、式(13)の右辺を変形すれば

$$\begin{aligned} & \frac{Nh^2}{24D} \alpha(a^2 - b^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_b^a \left[ w \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]_0^\alpha \frac{dr}{r} + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left[ r \frac{\partial w}{\partial r} w \right]_b^a d\theta \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha w(\nabla^2 w) r dr d\theta \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

本題の扇形板は直線辺 AC, BD がいずれもヒンジで支えられているゆえ、 $w(\alpha) = w(0) = 0$  となり、したがって、式(14)の右辺第1項は0となる。同様に、円弧辺 AB, CD が単純支持または固定されているものとすれば、右辺第2項も0となり、式(14)したがって式(11)は終局的に次のように簡略化される。

$$\frac{Nh^2}{24D} \alpha(a^2 - b^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha w(\nabla^2 w) r dr d\theta \dots\dots\dots(15)$$

以上から、本題の扇形板の非線形振動に関する基礎運動方程式が式(9)および式(15)で与えられることになる。

(2) 基礎運動方程式の解

式(9)および式(15)の基礎式を厳密に解くことはなほだ困難であるから、既往研究同様、本研究でも Galerkin 法を活用して近似解を求めることにする。

式(9), (15)の解を次のように仮定する。

$$w = cW(r, \theta)F(t) \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $c$ : 振幅、 $W(r, \theta)$ : 境界条件を満足する最大値1の座標関数、 $F(t)$ : 未知の時間関数

座標関数として、扇形板の線形振動の規準関数を仮定すれば、図-1に示すような直線辺がヒンジにて支えられる扇形板では、これを厳密に算定することが可能で、次のようにえられる。すなわち、式(9)に  $N=0$ ,  $w = W(r, \theta) \cos \omega t$  を代入のうえ、整理すれば  $W(r, \theta)$  に関する次式がえられる。

$$\nabla^4 W = \rho h \omega^2 W/D \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 $\omega$ : 線形振動の固有円振動数

本題の扇形板は、直線辺 AC, BD がいずれもヒンジで支えられるから、これらの境界条件を満足する  $W(r, \theta)$  を次のように仮定することができる。

$$W(r, \theta) = R(r) \sin \chi \theta \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $\chi = \alpha/\pi$ ,  $R(r)$ :  $r$  のみの関数

式 (18) を式 (17) に代入すれば、 $R(r)$  に関する Bessel の微分方程式および変形された Bessel の微分方程式の 2 つがえられ次のとおりである。

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\chi^2}{r^2} + \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}\right)R=0 \quad \dots(19)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\chi^2}{r^2} - \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}\right)R=0 \quad \dots(20)$$

式 (19) の解は  $\chi$  次の第 1 種および第 2 種 Bessel 関数  $J_x(k, \xi)$ ,  $Y_x(k, \xi)$  で与えられ、式 (20) の解は変形された  $\chi$  次の第 1 種および第 2 種 Bessel 関数  $I_x(k, \xi)$ ,  $K_x(k, \xi)$  で与えられるので、 $R(r)$  の一般解はこれらを加え合わせることによりえられ次のようである。

$$R(r) = A_x J_x(k, \xi) + B_x Y_x(k, \xi) + C_x I_x(k, \xi) + D_x K_x(k, \xi) \dots\dots\dots(21)$$

ここに、 $A_x, B_x, C_x, D_x$  : 積分定数、 $\xi = r/a$ ,

$$k = a \sqrt{\rho h \omega^2 / D} \text{ (固有値)}$$

式 (21) の積分定数  $A_x \sim D_x$  は扇形板の円弧辺の境界条件により決定されるが、円弧辺はヒンジまたは固定のいずれかであるので、これらを組み合わせることによって、4 種類の相異なる境界条件をもつ扇形板を論ずることができる。

すなわち、ヒンジ支承に関する境界条件は

$$w=0$$

$$M_r = -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} = 0$$

であり、これを式 (21) に代入すれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} & A_x J_x(k, \xi_i) + B_x Y_x(k, \xi_i) + C_x I_x(k, \xi_i) \\ & + D_x K_x(k, \xi_i) = 0 \\ & A_x \{ J_x(k, \xi_i) - (1-\nu) \{ \chi(\chi-1) / k^2 \xi_i^2 \cdot J_x(k, \xi_i) \\ & + 1/k \xi_i \cdot J_{x+1}(k, \xi_i) \} \} + B_x \{ Y_x(k, \xi_i) \\ & - (1-\nu) \{ \chi(\chi-1) / k^2 \xi_i^2 \cdot Y_x(k, \xi_i) \\ & + 1/k \xi_i \cdot Y_{x+1}(k, \xi_i) \} \} + C_x \{ -I_x(k, \xi_i) \\ & - (1-\nu) \{ \chi(\chi-1) / k^2 \xi_i^2 \cdot I_x(k, \xi_i) \\ & - 1/k \xi_i \cdot I_{x+1}(k, \xi_i) \} \} + D_x \{ -K_x(k, \xi_i) \\ & - (1-\nu) \{ \chi(\chi-1) / k^2 \xi_i^2 \cdot K_x(k, \xi_i) \\ & + 1/k \xi_i \cdot K_{x+1}(k, \xi_i) \} \} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 $\xi_i = b/a$  または 1

また、固定の場合には  $w=0, \partial w / \partial r = 0$  であるから

$$\left. \begin{aligned} & A_x J_x(k, \xi_i) + B_x Y_x(k, \xi_i) + C_x I_x(k, \xi_i) \\ & + D_x K_x(k, \xi_i) = 0 \\ & A_x \{ \chi / k \xi_i \cdot J_x(k, \xi_i) - J_{x+1}(k, \xi_i) \} \\ & + B_x \{ \chi / k \xi_i \cdot Y_x(k, \xi_i) - Y_{x+1}(k, \xi_i) \} \\ & + C_x \{ \chi / k \xi_i \cdot I_x(k, \xi_i) + I_{x+1}(k, \xi_i) \} \\ & + D_x \{ \chi / k \xi_i \cdot K_x(k, \xi_i) - K_{x+1}(k, \xi_i) \} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 $\xi_i = b/a$  または 1

なる条件式をうる。円弧辺の各境界条件に対して式(22)

または式 (23) を用いれば、積分定数  $A_x \sim D_x$  を求めるための 4 つの条件式がえられるが、定数項はいずれも 0 である。したがって、解が存在するためにはこれらの条件式を連立させてえられる係数行列式の値が 0 でなければならないことから、扇形板の線形自由振動に関する固有値  $k$  が算出される。かくしてえられた  $k$  の値を連立方程式に再度代入して、積分定数  $A_x \sim D_x$  の比を算出のうえ、式 (21) の  $R(r)$  の最大値が 1 となるように積分定数を決定すれば、式 (18) の規準関数  $W(r, \theta)$  が算出されることになる。

式 (16) を式 (9) に代入し、かつ上述の規準関数を用いるとき式 (17) が成立することを考慮すれば、結局式 (9) の基礎式は次のように書き改められる。

$$c \rho h \omega^2 W F - c N V^2 W F + c \rho h W \ddot{F} = p f(t) \dots\dots\dots(24)$$

式 (24) に Galerkin 法を適用すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} & \ddot{F} c \rho h \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta + F c \rho h \omega^2 \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta \\ & - F c N \int_b^a \int_0^\alpha W (V^2 W) r dr d\theta \\ & = p f(t) \int_b^a \int_0^\alpha W r dr d\theta \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

式 (15) および式 (25) から  $N$  を消去のうえ、整理すれば、時間に関する 2 階の非線形常微分方程式が求められ次のようである。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F^3 = s \omega^2 \frac{1}{c/h} \frac{p a^4}{E h^4} f(t) \dots\dots\dots(26)$$

$$\text{ここに、} q = \frac{6}{1-\nu^2} \frac{\varphi^2}{\eta}, \quad s = \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\lambda}{\eta} \frac{1}{k^4},$$

$$\mu = b/a$$

$$\begin{aligned} \varphi = \int_\mu^1 & \{ A_x J_x(k, \xi) + B_x Y_x(k, \xi) + C_x I_x(k, \xi) \\ & + D_x K_x(k, \xi) \} \{ A_x J_x(k, \xi) + B_x Y_x(k, \xi) \\ & - C_x I_x(k, \xi) - D_x K_x(k, \xi) \} \xi d \xi, \\ \eta = \int_\mu^1 & \{ A_x J_x(k, \xi) + B_x Y_x(k, \xi) \\ & + C_x I_x(k, \xi) + D_x K_x(k, \xi) \}^2 \xi d \xi, \\ \lambda = \int_\mu^1 & \{ A_x J_x(k, \xi) + B_x Y_x(k, \xi) \\ & + C_x I_x(k, \xi) + D_x K_x(k, \xi) \} \xi d \xi \end{aligned}$$

式 (26) は 3 次の非線形復元力をもつ質点の運動方程式と同じで、Duffing 形の方程式と呼ばれているものであり、これより時間関数  $F(t)$  が求められれば本題の解がえられることになる。

### 3. 非線形自由振動

#### (1) 解析

式 (26) において  $p=0$  とおけば、非線形自由振動の運動方程式が次のようにえられる。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + 2\beta\omega^2 F^3 = 0 \dots\dots\dots(27)$$

ここに、 $\beta = 3/(1-\mu^2) \cdot \varphi^2/\eta \cdot c^2/h^2$

いま、初期条件を

$$w(r, \theta, 0) = cW(r, \theta), \quad \dot{w}(r, \theta, 0) = 0$$

とすれば、 $F$  に関して次のように表わされる。

$$F(0) = 1, \quad \dot{F}(0) = 0 \dots\dots\dots(28)$$

式 (27) を 1 回積分するとともに式 (28) の条件を考慮すれば、 $F$  に関して次式がえられる。

$$\frac{\dot{F}^2}{\beta\omega^2} = - \left\{ \left( \frac{1}{\beta} + F^2 \right) F^2 - \left( \frac{1}{\beta} + 1 \right) \right\} \dots\dots(29)$$

式 (29) の解の式形は  $1/\beta$  の各値により異なる。すなわち

$$\left. \begin{array}{ll} \textcircled{1} 1/\beta > -1, & \textcircled{2} -2 < 1/\beta < -1, \\ \textcircled{3} 1/\beta < -2, & \textcircled{4} 1/\beta = -1 \\ \textcircled{5} 1/\beta = -2 & \end{array} \right\} \dots\dots(30)$$

の各状態に対して式形の異なる種々の解がえられる<sup>36)</sup>。しかし、本題の扇形板の場合には  $1/\beta > 0$ 、したがって  $1/\beta > -1$  となることがその定義式から容易に推定されるので、結局 Jacobi のだ円関数における  $cn$  関数で与えられることになり、次のように求められる。

$$F = cn(t\omega\sqrt{2\beta+1}, 1/\sqrt{2+1/\beta}) \dots\dots\dots(31)$$

関数  $cn$  は  $4K$  の基本周期をもつから振動数  $n^*$  は次式で与えられる。

$$n^* = \sqrt{2\beta+1}/4K \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 $K = \int_0^{\pi/2} d\theta/\sqrt{1-\sin^2\theta/(2+1/\beta)}$  (第 1 種完全だ円積分)

式 (32) の振動数  $n^*$  と扇形板の線形振動数  $n_0 = \omega/2\pi$  との比を求めれば、振動数  $n^*$  におよぼすパラメータを無次元化することができ、次のようである。

$$n^*/n_0 = \pi\sqrt{1+qc^2/h^2}/(2K) \dots\dots\dots(33)$$

式 (33) より扇形板の振動数比  $n^*/n_0$  におよぼす有限

変形の影響を振幅比  $c/h$  の関数として検討することができ。

#### (2) 振動数比におよぼす各パラメーターの影響

a) 境界条件の影響および扇形板としての形状特性

図-2 (a) に示すように、 $\alpha = \pi/6$ 、 $\mu = 0.5850$  (扇形板の中央円弧長と  $(a-b)$  の比が 1 の場合) および  $\nu = 0.3$  なる扇形板において、辺 AB, CD の境界条件がいずれもヒンジ支承の場合 (HH)、辺 AB 固定、辺 CD ヒンジ支承の場合 (CH)、辺 AB ヒンジ支承、辺 CD 固定の場合 (HC) および AB, CD 両辺がいずれも固定の場合 (CC) の 4 例を対象として、その基本振動の特性を求めることにする。

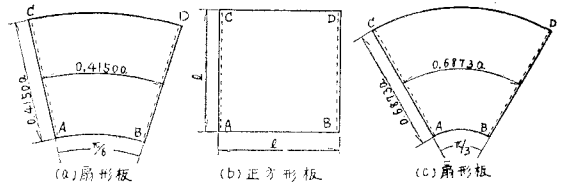


図-2

まず、特性計算に必要な諸量  $k, \varphi, \eta, \lambda$  の各値をそれぞれのケースについて算出すれば、表-1 (a) に示すようにえられる。式 (33) から振動数比  $n^*/n_0$  と振幅比  $c/h$  との関数を求め、これをプロットすれば、図-3 (a) の (a) を付した曲線のようにえられる。図より明らかなように、振動数比は振幅比の増大に伴って増加することがわかるが、境界条件の異なる 4 種の扇形板についてそ

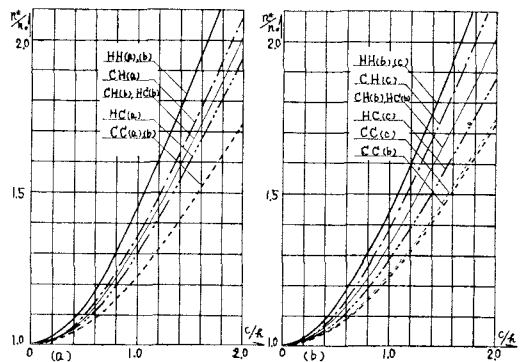


図-3

表-1

	境界条件	$k$	$\varphi$	$\eta$	$\lambda$	$q$	$s \times 10^{-3}$	$k_1$	$k_3$
(a) 扇形板	HH	10.7230	0.1644	0.1642	0.2029	1.5019	1.3397	746.4	1 121.0
	CH	11.4803	0.1393	0.1517	0.1954	1.1667	1.0311	969.9	1 131.5
	HC	11.9934	0.1229	0.1419	0.1846	0.9713	0.8741	1 144.1	1 111.2
	CC	12.9675	0.1008	0.1327	0.1745	0.6985	0.6465	1 546.7	1 080.4
(b) 正方形板	HH	10.7067	0.2500	-0.2500	0.4053	1.5000	1.3472	742.3	1 113.4
	CH, HC	11.7284	0.2232	-0.1987	0.3672	1.0609	0.9495	1 053.2	1 117.4
	CC	12.9965	0.2021	-0.1530	0.3383	0.6949	0.6495	1 546.7	1 074.8

表-2

	境界条件	$k$	$\varphi$	$\eta$	$\lambda$	$q$	$s \times 10^{-2}$
(a) 扇形板	HH	6.5019	0.2257	0.2243	0.2862	1.5104	0.9926
	CH	6.8023	0.2033	0.2144	0.2751	1.2821	0.8333
	HC	7.4335	0.1584	0.1879	0.2459	0.8880	0.5958
	CC	7.8300	0.1392	0.1811	0.2384	0.7111	0.4868
(b) 正方形板	HH	6.4641	0.2500	-0.2500	0.4053	1.5000	1.0140
	CH, HC	7.0809	0.2232	-0.1987	0.3672	1.0609	0.7147
	CC	7.8284	0.2021	-0.1530	0.3383	0.6949	0.4866

の影響の度合いを比較すれば、HH の場合が最も大きく、以下 CH, HC の順に小さくなり、CC の場合が最小となることがわかる。

なお、比較対照のために、図-2 (b) に示す1対辺単純支持正方形板において、辺 AB, CD が扇形板の円弧辺と同様の境界条件をもつ場合についてそれぞれ振動数比を算定するものとして、式 (26) の諸定数に対応する諸量を算出すれば表-1 (b) に示すようにえられる。これより各ケースの振動数比-振幅比曲線が図-3 (a) において、

(b) を付して併記するように求められる。この結果から HH の場合には正方形板の振動数比が扇形板のそれとほぼ完全に一致し、また CC の場合にもほとんど一致して、特に扇形板であることの形状特性は見受けられない。しかし、CH および HC の場合には扇形板の形状特性が現われており、正方形板の振動数比は CH と HC の両扇形板の振動数比の中間の値を示している。この事実は、ヒンジ支承の場合が固定の場合よりも振動数比におよぼす振幅比の影響が大であるという前述の結果からもうなづけることである。

図-2 (a) の扇形板は開角が小さく、その形状が正方形板に近い場合の例であるが、図-2 (c) に示すように開角が大きい場合の例として、前例の2倍の大きさの  $\alpha = \pi/3$  なる扇形板 ( $\mu = 0.3127$ ,  $\nu = 0.3$ ) について考察しよう。本例に対する  $k$ ,  $\varphi$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  の各値は表-2 (a) に示すとおりであり、したがって、 $n^*/n_0$  と  $c/h$  との関係が図-3 (b) の (c) を付す曲線のように

求められる。この結果と前述の正方形板の場合とを比較すれば次のとおりである。すなわち、HH の場合には扇形板の形状特性は見受けられない。しかし、CC の場合にはわずかながら扇形板と正方形板との間に差異が認められ、この点で前例とは異なることがわかる。また、CH および HC の場合には、扇形板の形状特性がさらに顕著であり、CH の場合の扇形板の  $n^*/n_0 - c/h$  曲線が HH の場合のそれに接近し、HC の場合が CC の場

表 3

境界条件	$\mu$	$k$	$\varphi$	$\eta$	$\lambda$	$q$	$s \times 10^{-2}$
HH	1/6	6.3339	0.2403	0.2363	0.3032	1.5080	1.1083
	2/6	6.5556	0.2223	0.2213	0.2822	1.5072	0.9600
	3/6	7.4804	0.1862	0.1871	0.2383	1.4820	0.5657
	4/6	10.1081	0.1380	0.1387	0.1766	1.4832	0.1697
	5/6	19.1401	0.0762	0.0764	0.0972	1.4949	0.0132
CH	1/6	6.3772	0.2350	0.2336	0.2996	1.4589	1.0783
	2/6	6.9112	0.1976	0.2107	0.2704	1.2515	0.7823
	3/6	8.4235	0.1493	0.1741	0.2243	1.0236	0.3541
	4/6	12.0581	0.1005	0.1261	0.1629	0.8645	0.0849
	5/6	23.6237	0.0519	0.0681	0.0882	0.7760	0.0058
HC	1/6	7.1650	0.1736	0.1997	0.2625	0.9315	0.6934
	2/6	7.5156	0.1552	0.1852	0.2423	0.8775	0.5701
	3/6	8.8421	0.1248	0.1572	0.2055	0.7921	0.2973
	4/6	12.3412	0.0898	0.1181	0.1541	0.7380	0.0782
	5/6	23.8405	0.0493	0.0661	0.0859	0.7212	0.0056
CC	1/6	7.2303	0.1680	0.1972	0.2592	0.8835	0.6690
	2/6	7.9772	0.1344	0.1782	0.2346	0.6848	0.4520
	3/6	9.9463	0.0977	0.1492	0.1967	0.5120	0.1873
	4/6	14.4411	0.0651	0.1102	0.1454	0.4148	0.0422
	5/6	28.4817	0.0338	0.0618	0.0799	0.3709	0.0028

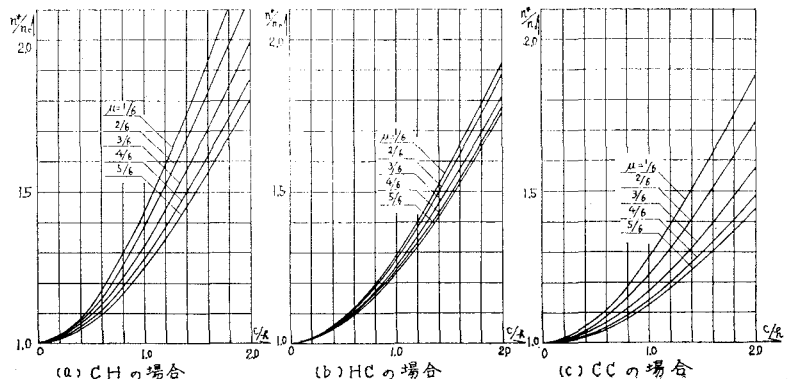


図-4

表—4

境界条件	$\alpha$	$k$	$\varphi$	$\eta$	$\lambda$	$q$	$s \times 10^{-2}$
HH	$\pi/6$	10.1704	0.1865	0.1857	0.2373	1.4976	0.1660
	$\pi/4$	8.2692	0.1873	0.1872	0.2385	1.4982	0.3788
	$\pi/3$	7.4802	0.1862	0.1871	0.2383	1.4820	0.5657
	$\pi/2$	6.8621	0.1844	0.1867	0.2385	1.4982	0.7988
CH	$\pi/6$	10.5239	0.1676	0.1745	0.2246	1.2881	0.1458
	$\pi/4$	8.9890	0.1568	0.1742	0.2242	1.1288	0.2741
	$\pi/3$	8.4325	0.1493	0.1741	0.2243	1.0236	0.3541
	$\pi/2$	8.0394	0.1410	0.1734	0.2234	0.9175	0.4289
HC	$\pi/6$	11.1493	0.1450	0.1621	0.2109	1.0373	0.1171
	$\pi/4$	9.4793	0.1327	0.1590	0.2074	0.8861	0.2246
	$\pi/3$	8.8421	0.1248	0.1572	0.2055	0.7921	0.2973
	$\pi/2$	8.3747	0.1170	0.1557	0.2039	0.7036	0.3701
CC	$\pi/6$	11.6446	0.1266	0.1528	0.2006	0.8392	0.0992
	$\pi/4$	10.3715	0.1079	0.1503	0.1979	0.6195	0.1582
	$\pi/3$	9.9463	0.0977	0.1492	0.1967	0.5120	0.1873
	$\pi/2$	9.6603	0.0889	0.1484	0.1958	0.4258	0.2107

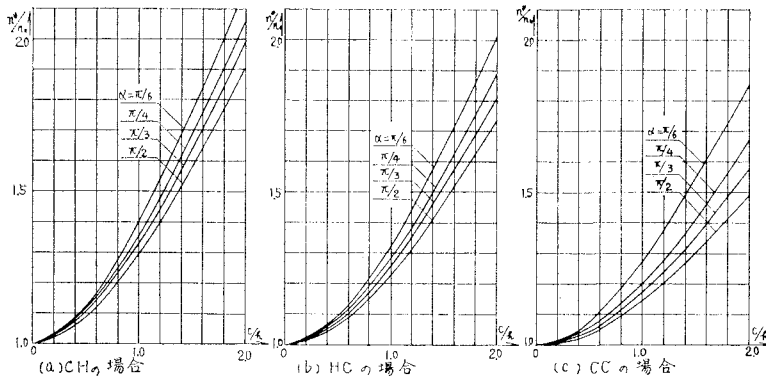
も  $\mu$  が増大するにつれて振動数比  $n^*/n_0$  におよぼす振幅比  $c/h$  の影響が減少するといえるが、このうち影響の度合いは HC の場合が最も小さいことがわかる。

c) 開角の影響

開角の影響については a) の結果からも推察できるが、ここでは4種の境界条件を有する扇形板のそれぞれについてより詳細に検討することにする。

各扇形板において、 $\mu=1/2$ ,  $\nu=0.3$  とし、 $\alpha$  を  $\pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$  と変化させる場合の各値に対する諸量  $k, \varphi, \eta, \lambda$  を算出すれば、表—4 のとおりであり、これを用いて開角  $\alpha$  が振動数比  $n^*/n_0$  におよぼす影響を求めれば以下のとおりである。

すなわち、HH の場合には、前項 b) に述べると同様に式 (34) が成立し、したがって  $\varphi^2/\eta = \text{const}$  となる。このため、振動数比は開角の影響を受けないことになる。HH 以外の他の境界条件の場合には  $n^*/n_0$  と  $c/h$  との関係が図—5 (a),



図—5

合に近づいて、扇形板の CH および HC 両ケースの差異が開角の増加にともなって増大することが容易に推察できる。

b) 内外径比の影響

開角  $\alpha=\pi/3$ ,  $\nu=0.3$  とし、また円弧辺の境界条件が HH, CH, HC および CC の各扇形板について、その内外径比  $\mu$  が振動数比におよぼす影響を調べれば次のとおりである。すなわち、 $\mu$  の値を  $1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6$  のように変化させた場合の  $k, \varphi, \eta, \lambda$  の各値を算出すれば、それぞれの境界条件に応じて表—3 に示すようにえられる。かかる諸量を用いて式 (33) から振動数比  $n^*/n_0$  と振幅比  $c/h$  との関係を求めれば、HH の場合には  $\mu$  の変化にほとんど関係がなく、図—3 (a) の HH の場合に合致する。このことは、式 (33) における振幅の影響係数  $q$  が、本例ではいずれの  $\mu$  の値に対しても  $q \approx 1.50$ ..... (34)

となることによるものである (表—3 参照)。

他の境界条件の場合、すなわち、CH, HC および CC の場合には、図—4 (a), (b), (c) に示すように、いずれ

(b), (c) に示すごとくえられる。図より明らかなように、いずれの場合も開角  $\alpha$  の影響を受け、 $\alpha$  が増大するとともに、振動数比  $n^*/n_0$  におよぼす振幅比  $c/h$  の影響が減少していることがわかる。また、影響の度合いは前項  $\mu$  と同様、 $\alpha$  においても CC の場合が最も顕著であるといえる。

4. 非線形強制振動

(1) 解析

式 (26) の右辺の  $f(t)$  を  $\cos \Omega t$  とおけば、板上に一樣に分布する周期的変動圧力を受ける場合の運動方程式が次のように与えられる。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F^3 = s \omega^2 \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \cos \Omega t \dots\dots\dots (35)$$

ここに、 $\Omega$ : 外力の円振動数

式 (35) の周期解には外力と同じ周期の周期解のほか

に、外力の周期の整数倍の亜調和共振および外力の周期の整数分の1の超調和共振が存在することが数学的に知られているが、本論文では、外力と同じ周期の周期解すなわち調和応答解のみを求めることにする。

Duffing の反復法を用いるために式 (35) の非線形項を右辺に移して、逐次近似の形に書き改めれば<sup>37)</sup>、

$$\begin{aligned} \ddot{F} + \Omega^2 F = & (\Omega^2 - \omega^2) F - q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F^3 \\ & + s \omega^2 \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \cos \Omega t \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

$\Omega = \omega$ ,  $c/h = 0$  および  $pa^4/Eh^4 = 0$  の場合すなわち、 $\Omega = \omega$  なる線形自由振動を起点として逐次近似法を適用すれば、 $F$  の第1近似解が  $F_0 = \cos \Omega t$  と与えられる。ついで、この結果を式 (36) の右辺に代入すれば、第1近似解  $F_1$  に関して次の微分方程式をうる。

$$\begin{aligned} \ddot{F}_1 + \Omega^2 F_1 = & \left\{ (\Omega^2 - \omega^2) - \frac{3}{4} q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} \right. \\ & \left. + s \omega^2 \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \right\} \cos \Omega t - \frac{1}{4} q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} \cos 3\Omega t \\ & \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

右辺第1項の特解は永年項となるから、その係数が0となる場合に限って、 $F_1$  の周期解が求められ、このような場合には振動数比  $\Omega/\omega$  と振幅比  $c/h$  との近似的な関係が次のように算定される。

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \frac{3}{4} q \frac{c^2}{h^2} - s \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \dots\dots\dots (38)$$

また、式 (37) の解が次のようにえられる。

$$\begin{aligned} F_1 = & A_1 \cos \Omega t + \frac{1}{32} q \frac{c^2}{h^2} \\ & \times \frac{1}{1 + \frac{3}{4} q \frac{c^2}{h^2} - s \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4}} \cos 3\Omega t \\ & \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ここに、 $A_1$ ：積分定数

式 (39) の積分定数  $A_1$  は、基本波の振幅が1となるような振動を考える場合には  $A_1 = 1$  とおけばよく、したがって、 $F_1$  が次のように決定される。

$$\begin{aligned} F_1 = & \cos \Omega t + \frac{1}{32} q \frac{c^2}{h^2} \\ & \times \frac{1}{1 + \frac{3}{4} q \frac{c^2}{h^2} - s \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4}} \cos 3\Omega t \\ & \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

以下同様にして第2近似解、第3近似解を求めることができるが、振動特性の定性的な把握を目的とする本研究では第1近似解を式 (36) の解  $F = F_1$  とみなして十分である。

式 (40) の周期解の安定を調べるには、周期解  $F$  にわずかな攪乱  $r(t)$  を与えたとき、もとの状態に戻ろうとするか否かを調べればよい。すなわち式 (35) に  $F+r$

を代入し、 $F$  もまた式 (35) を満足していることを考慮すれば、 $r$  に関する次のような微分方程式がえられる。

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \omega^2 r + 3 q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F^2 r + 3 q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} F r^2 \\ + q \omega^2 \frac{c^2}{h^2} r^3 = 0 \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

上式において、 $r$  は微小量であるから  $r^2, r^3$  は無視でき、また、 $F$  の近似解として  $F = F_0 = \cos \Omega t$  を代入すれば次式がえられる。

$$\ddot{r} + \omega^2 \left( 1 + 3 q \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \Omega t \right) r = 0 \dots\dots\dots (42)$$

当然ながら、式 (42) の  $r$  のすべての解が任意の  $t$  について有界であれば  $F$  は安定な解であるが、 $r$  が無限大となることがあれば、 $F$  は不安定な解である。

$z = 2\Omega t$  なる変数を導入すれば、式 (42) は次のような Mathieu の微分方程式となる。

$$\ddot{r} + (\delta + \epsilon \cos z) r = 0 \dots\dots\dots (43)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \delta = & \left( 1 + \frac{3}{2} q \frac{c^2}{h^2} \right) / \left\{ 4 \left( 1 + \frac{3}{4} q \frac{c^2}{h^2} - s \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \right) \right\} \\ \epsilon = & \frac{3}{8} q \frac{c^2}{h^2} / \left( 1 + \frac{3}{4} q \frac{c^2}{h^2} - s \frac{1}{c/h} \frac{pa^4}{Eh^4} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

式 (43) の周期解を摂動法を用いて論ずれば、 $(\delta, \epsilon)$  平面上における Mathieu の微分方程式の近似的な安定、不安定判別図の境界線がえられ<sup>37)</sup>、この結果と式 (38) および式 (44) から  $(\Omega/\omega, |c/h|)$  平面上の周期解の安定、不安定領域を決定することができる。すなわち、 $(\delta, \epsilon)$  平面上における近似的な境界線  $\delta + \epsilon/2 = 1/4$  および  $\delta - \epsilon/2 = 1/4$  は  $(\Omega/\omega, |c/h|)$  平面上において  $d(\Omega/\omega)/d(c/h) = 0$  なる鉛直接線の軌跡および式 (38) において  $pa^4/Eh^4 = 0$  とおいた非線形自由振動の近似式で与えられ、それぞれ次のようにえられる。

$$\frac{3}{2} q \frac{c}{h} + \frac{s}{c^2/h^2} \frac{pa^4}{Eh^4} = 0 \dots\dots\dots (45)$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \frac{3}{4} q \frac{c^2}{h^2} \dots\dots\dots (46)$$

式 (38) と式 (45) の交点の軌跡からなる曲線および式 (46) からえられる曲線に囲まれる応答曲線の部分は不安定な周期解に対応するものであって、ほかの部分は安定となる。なお、式 (46) の曲線は自由振動に関するもので安定部分に含まれることはむろんである。

## (2) 非線形強制振動におよぼす各パラメーターの影響

a) 境界条件の影響および扇形板としての形状特性  
前節 3. の (2) の a) と同様に図—2 (a) に示す扇形板が4種類の境界条件を有するものとして、その基本振動の応答を求めることにする。表—1 (a) の諸値を用い



て、式(38)から各種境界条件の扇形板の応答曲線を求めることができる。線形振動の場合には振動数比  $\Omega/\omega$  を与えて振幅比  $c/h$  を求めるところであるが、非線形振動の場合には逆に  $c/h$  を与えて  $\Omega/\omega$  を求めることになる。しかし、作図上は、慣例どおり  $\Omega/\omega$  を横軸に  $c/h$  を縦軸にとり、かつ荷重強度  $pa^4/Eh^4$  をパラメータとして  $c/h$  と  $\Omega/\omega$  との関係をプロットすることにする。このとき、各境界条件を有する場合に対して、図-6(a)~(d)に示すように求められることになる。図において、肉太の実線は非線形自由振動に関するもので、細い実線は非線形強制振動の安定領域に、点線は不安定領域に対応するものである。図より扇形板の一般的な非線形振動特性に関する考察を行なうことができるが、その結果は1自由度系の非線形振動特性としてこれまで論ぜられているものとなんら変わることはないので省略する。

境界条件が異なる4種類の扇形板について、振動数比  $\Omega/\omega$  におよぼす振幅比  $c/h$  の影響を比較すれば次のとおりである。すなわち、式(38)の右辺第1,2項は、式(33)の右辺をべき級数に展開したときの第1,2項に合致するもので、いわば非線形自由振動の項を示しており、また第3項は外力の影響項を示すものであるが、これらの項に含まれる係数  $q, s$  (表-1参照)がHH, CH, HC, CCの順に小さい値となる。したがって、前節3.の(2)のaと同様に、自由振動の背骨曲線におよぼす振幅比の影響はHH, CH, HC, CCの順に減少すること、また、 $pa^4/Eh^4$  を一定とした応答振幅  $c/h$  はHH, CH, HC, CCの順に小さくなり、自由振動の背骨曲線

に近づくことがわかる。

また図-2(a), (c)に示す扇形板と図-2(b)に示す1対辺単純支持正方形板の強制振動とを比較すれば、 $|c/h|$  と  $\Omega/\omega$  の応答が、HHおよびCCの場合にはほぼ合致する。CHおよびHCの場合には扇形板の形状特性が現われて相異なる結果をうるることがわかるが、その傾向は前項3.の(2)のa)に述べる自由振動とほぼ同じである(表-1,2の  $q, s$  参照)。

#### b) 内外径比および開角の影響

4種の境界条件をもつ扇形板について、 $\mu$  を種々変化させたときの  $q$  はすでに前節3.の(2)に求めたとおりである。また  $s$  を算定すれば表-3に併記するごとくえられる。この結果から  $s$  はいずれの境界条件の場合にも  $\mu$  が増大するにつれて減少するといえる。そして、これらの値を用いて  $c/h$  と  $\Omega/\omega$  との関係曲線を求めることができるが、紙面の都合上その一部のみを示すことにすれば図-7のとおりである。これらの結果から、 $pa^4/Eh^4=0$  なる自由振動の背骨曲線は、HHの場合を除けば、 $\mu$  の増大とともにその傾きが緩やかになり、 $pa^4/Eh^4 \neq 0$  の応答曲線はいずれの境界条件の場合にも、 $\mu$  が増大すれば応答振幅が減少し自由振動の背骨曲線に漸近することがわかる。

次に、扇形板の開角  $\alpha$  の影響について検討しよう。すなわち、 $\alpha$  を種々変化させたときの  $q$  はすでに前節3.の(2)のe)に求めるとおりである。また  $s$  は表-4に併記するごとく求められる。 $s$  はいずれのケースも  $\alpha$  が増大するとともに増加する。 $q, s$  の変化の状態から、HH以外の境界条件の自由振動の背骨曲線が  $\alpha$  の増大に

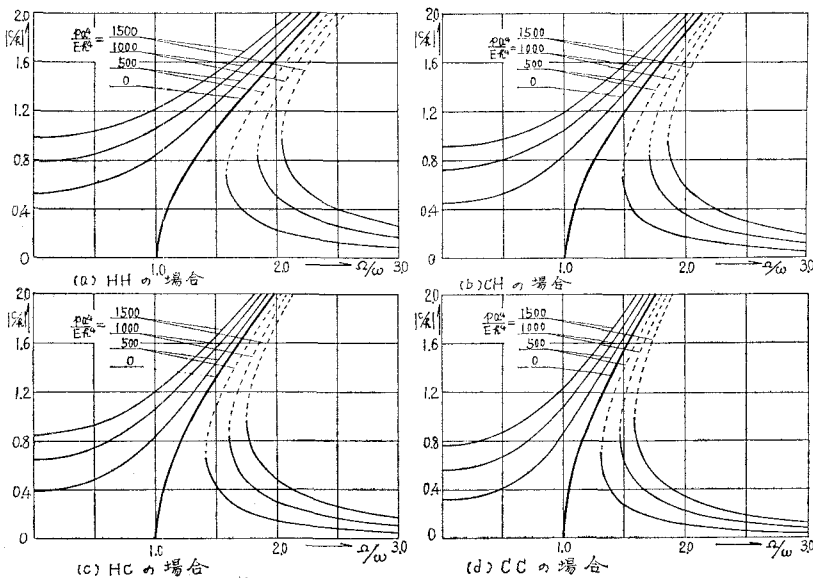


図-6

ともなって、その傾きが緩やかになり非線形項の影響が減少するといえ、また、 $pa^4/Eh^4 \approx 0$  に対応する応答曲線はいずれの境界条件をもつ扇形板に対しても  $\alpha$  が増すにつれて、応答変形が大きくなり、背骨曲線からのへだたりが増加することがわかる。なお、参考までに HH および CC の場合 ( $\alpha = \pi/4, \pi/2$ ) の応答曲線を 図-8 (a)~(d) に示した。

### 5. 静的曲げに関する有限変形問題

本法による Berger の実用有限変形理論に基づいた Galerkin 法の第 1 項近似解の妥当性を吟味するために、一様圧力を受け、周辺で面内変位が拘束された周辺単純支持正方形 ( $\nu = 0.316$ ) の静的曲げの解を求めれば次のとおりである。すなわち、式 (9) および式 (10) から時間関数を消去すれば静的曲げの基礎式がえられるが、これに与えられた境界条件を満足する関数として正方形

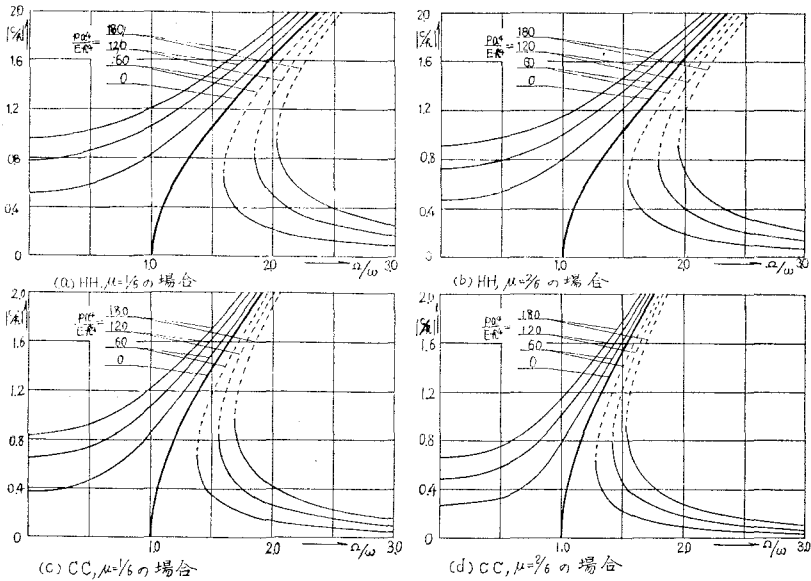


図-7

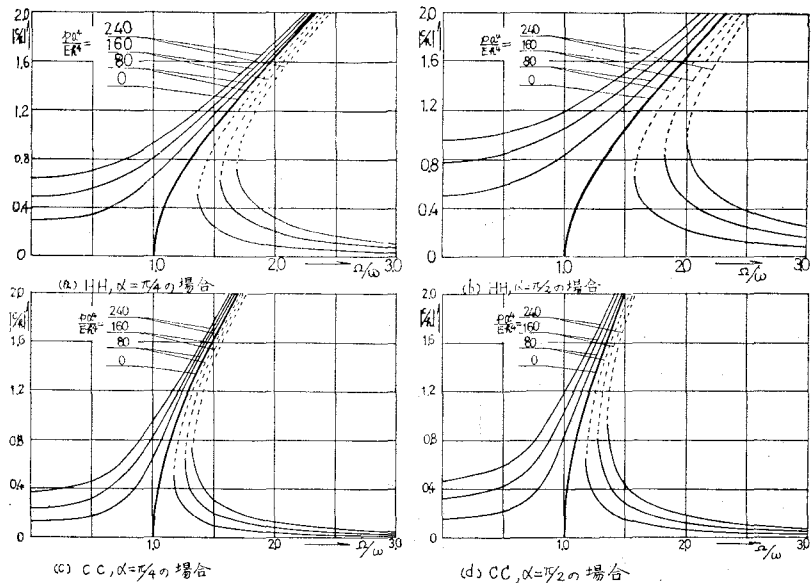


図-8

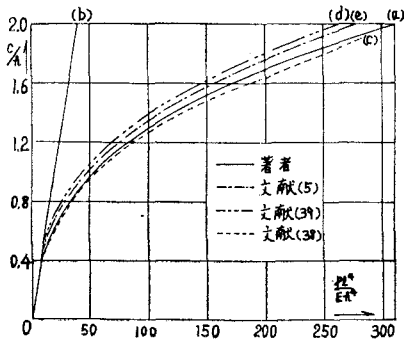


図-9

板の線形振動における基本振動の規準関数を採用して Galerkin 法を適用すれば、本例における最大たわみ  $c/h$  と荷重強度  $p^1/Eh^4$  との関係が図-9 の曲線 (a) に示すようにえられる。図中、直線 (b) は線形解すなわち微小変形理論に基づく解を示し、比較対照したものである。また、本題の正方形板に関しては、別法によりすでに種々の解析結果が提示されているので、それらを併記すれば図中の曲線 (c)~(e) のとおりである。既往の解析結果はいずれも Kármán の有限変形理論に基づくものであるが、まず曲線 (c) は Levy<sup>38)</sup> の解で、板のたわみ関数を二重フーリエ級数で表示のうえ適合条件式から応力関数を求めてのち、板のつりあい式からその展開係数を決定するとき厳密解である。一方、曲線 (d) に示す Yamaki<sup>39)</sup> の解は、板のたわみ関数として境界条件を満足する三角関数に仮定し、また、応力関数をフーリエ級数に展開のうえ、8 項まで採って求めた近似解である。曲線 (e) Iyengar and Naqui<sup>38)</sup> の解で、たわみ関数および面内変位関数としてはりの曲げ振動に由来する直交関数系を用いた解析の第 1 項近似に相当するものである。図-9 から、本法による結果は Berger の近似式に基づく Galerkin 法の第 1 項近似解であるにもかかわらず、Kármán の式に基づく厳密解および近似解に実用的に十分な精度で合致していることがわかり、しかも、本法の結果がほかの近似解法による結果よりも厳密解に近い値を示すといえ、本法が正方形板の有限変形問題に有効であることが数値的に立証される。

本法によれば板の形状が複雑なためにいまだ未解決の扇形板の静的曲げにおける有限変形問題の解析が可能であるが、前述の正方形板に関する考察から、その結果は厳密解により近い解がえられるものと推察できる。すなわち、一様圧力を受ける扇形板の静的曲げの基礎式は式 (9) および式 (15) から時間関数に関する項をすべて消去すれば、次式のように与えられる。

$$D \nabla^4 w - N \nabla^2 w = p \dots\dots\dots (47)$$

ここに、

$$\frac{Nh^2}{24D} \alpha (a^2 - b^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^a \tau w (\nabla^2 w) r dr d\theta$$

式 (47) の解を  $w = cW(r, \theta)$  と仮定のうえ、2. と同様に  $W(r, \theta)$  として扇形板の線形振動の規準関数を採用のうえ、Galerkin 法を適用すれば最大たわみ  $c/h$  と荷重強度  $p^1/Eh^4$  との関係が次のように算定される。

$$p^1/Eh^4 = k_1 c/h + k_3 (c/h)^3 \dots\dots\dots (48)$$

ここに、

$$k_1 = \frac{k^4 \pi}{48(1-\nu^2)} \frac{\eta}{\lambda}, \quad k_3 = \frac{k^4 \pi}{48(1-\nu^2)(1-\mu^2)} \frac{\phi^2}{\lambda}$$

図-2 (a) に示す扇形板に関して、前節までと同様 4 種類の境界条件を有する場合について、式 (48) の右辺の係数  $k_1, k_3$  の値を求めれば表-1 (a) のようにえられ、これらを用いれば最大たわみ  $c/h$  と荷重強度  $p^1/Eh^4$  との関係が、図-10 に示すようにえられる。図中、直線群 I は各境界条件に応ずる線形解すなわち微小変形理論に基づく解を示しており、また曲線群 II は式 (48) の有限変形理論に基づく解を示すものである。図より明らかのように、たわみの大きさ、すなわち  $c/h$  が 0.4 付近までは線形解と非線形解はほぼ一致しており、実用上は線形解でも十分であるといえる。しかし、 $c/h$  が 0.4 よりも大きくなると、非線形解に対して線形解は著しく異なることになり、このような場合にはもはや微小変形理論を用いることに無理があることが数値的に立証される。なお、図-2 (b) の正方形板の解を示せば表-1 (b) に併記するような  $k_1, k_3$  をうる。これより、HH および CC の場合には扇形板の形状特性はそれほど顕著に見受けられないが、CH および HC の場合には扇形板の形状特性が現われることは前述の非線形振動の場合と同様である。

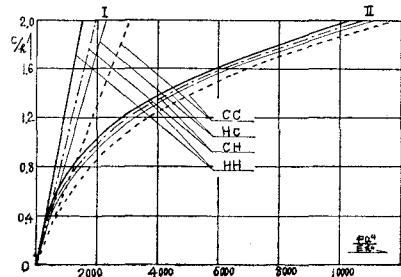


図-10

## 6. 結 語

本論文は、Berger の式を基礎として扇形板の非線形振動問題の解法を提案するとともに、開角  $\alpha$  が  $90^\circ$  以下の扇形板を対象としてその非線形振動特性および静的な有限変形曲げを考察したものであるが、その結果を要約

すれば次のとおりである。

(1) 本文では扇形板の非線形振動問題を Galerkin 法の第 1 項近似により解析したが、このような場合には時間関数  $F$  に関する式 (26) の微分方程式をうる。この微分方程式は Duffing の硬化ばねに関するものと同一形式となり、したがって、扇形板の非線形振動特性が硬化ばねのそれに合致することがわかる。

(2) 自由振動において、振幅比が増大すれば振動数比  $n^*/n_0$  は増加する。

(3) 扇形板の形状特性や振幅比を一定とするとき、支承条件によって振動数比が変化することになるが、一般にヒンジ支承の方が固定よりも振動数比を大きくするとき効果がある。

(4) Berger の有限変形理論によれば、全周辺がヒンジで支えられる矩形板の振動数比  $n^*/n_0$  は板の辺長比に無関係であることを Wah<sup>22)</sup> がすでに明らかにしている。このことは扇形板についてもいえ、全周辺がヒンジで支えられる場合にはその振動数比  $n^*/n_0$  が扇形板の形状パラメーターである内外径比および開角にほとんど無関係で、しかも矩形板のそれにほぼ完全に合致している。

(5) 全周辺がヒンジで支えられる場合を除くほかの 3 種類の境界条件を有する扇形板の振動数比  $n^*/n_0$  は、内外径比および開角の影響を受けることになるが、いずれのパラメーターもその値が小さいほど振動数比  $n^*/n_0$  の値および振幅比  $c/h$  の変化に対する割合が大きくなる。

(6) 定常強制振動の応答振幅は、支持条件により異なる値を示すが、一般にヒンジ支承の方が固定よりも大きな値を示す。

(7) 応答振幅は内外径比および開角の影響を受け、内外径比が大きいほど応答振幅が減少し、開角が大きいほど増大する。

(8) 正方形板と、中央円弧長が正方形の一辺の長さに等しい扇形板 (ただし、中央円弧長  $l/(a-b)=1$  とする) とを比較すれば、線形自由振動の固有値  $k$ 、非線形自由振動における  $n^*/n_0$  と  $c/h$  との関係、非線形定常強制振動における  $c/h$  と  $\Omega/\omega$  との関係および静的曲げにおける  $c/h$  と  $pa^4/Eh^4$  との関係が、両端辺がともにヒンジで支えられる場合または固定の場合にはいずれもほぼ完全に合致し、ヒンジ支承と固定の組合せである CH および HC の場合には扇形板の特性が現われ、正方形板は両扇形板の中間の値を与える。

(9) 周辺が単純支持される正方形板の静的曲げについて既往の結果と比較したところ、実用的に十分な精度で合致することがわかり、本文に用いた Berger の近似式に基づく Galerkin 法の第 1 項近似による解法の妥当性が確認された。

なお本研究では強制振動に関しては定常状態のみを取り扱ったが、過渡状態についても式 (26) の微分方程式を適当に変数変換のうえ齊次化して、これを摂動法により解くことも可能である。

本論文の数値計算には、九州大学の大型計算機 FACOM 230-60 を使用したことを付記する。

#### 参考文献

- Herrmann, G. : Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, NACA Technical Note, 3578, 1955.
- Kármán, T. : Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 4, No. 4, 1910, pp. 311-385.
- Chu, H.N. and Herrmann, G. : Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol. 23, 1956, pp. 532-540.
- Kirchman, E.J. and Greenspon, J.E. : Nonlinear Response of Aircraft Panels in Acoustic Noise, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 29, 1957, pp. 854-857.
- Yamaki, N. : Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, Z. Angew. Math. Mech., Vol. 41, 1961, pp. 501-510.
- Lin, Y.K. : Response of a Nonlinear Flat Panel to Periodic and Randomly-Varying Loadings, J. Aerospace Sci., Vol. 29, 1962, pp. 1029-1033, 1066.
- Bulkeley, P.Z. : An Axisymmetric Nonlinear Vibration of Circular Plates, J. Appl. Mech., Vol. 30, 1963, pp. 631-632.
- Efastathiades, G.J. : A New Approach to the Large-Deflection Vibrations of Imperfect Circular Disks Using Galerkin's Procedure, J. Sound Vib., Vol. 16, 1971, pp. 231-253.
- Nowinski, J.L. : Nonlinear Transverse Vibrations of Circular Elastic Plates Built-In at the Boundary, Pro. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1962, pp. 315-334.
- Nowinski, J.L. : Nonlinear Vibrations of Elastic Circular Plates Exhibiting Rectilinear Orthotropy, Z. Angew. Math. Phys., Vol. 14, 1963, pp. 112-124.
- 砂川 恵 : 長方形平板の自由振動特性に及ぼす温度変化および振幅の影響, 日本機械学会論文集, 第 30 巻, 212 号, 1964, pp. 558-566.
- 砂川 恵, 他 3 名 : 初期変形を有する加熱平板の非線形自由振動, 日本航空学会誌, 第 15 巻, 第 157 号, 1967, 12 月, pp. 39-46.
- Nowinski, J.L. : Nonlinear Transverse Vibrations of a Spinning Disk, J. Appl. Mech., Vol. 31, 1964, pp. 72-78.
- Advani, S.H. and Bulkeley, P.Z. : Nonlinear Transverse Vibrations and Waves in Spinning Membrane Disks, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 3, 1968, pp. 123-127.
- Nowinski, J.L. and Ismail, I.A. : Large Oscillations of an Anisotropic Triangular Plate, J. Franklin Inst., Vol. 280, 1965, pp. 417-424.
- Eisley, J.G. : Nonlinear Vibration of Beams and Rectangular Plates, Z. Angew. Math. Phys., Vol. 15, 1964, pp. 167-175.
- Eisley, J.G. : Large Amplitude Vibration of Buckled Beams and Rectangular Plates, AIAA. J., Vol. 2,

- 1964, pp. 2207-2209.
- 18) Yi-Yuan Yu : Nonlinear Flexural Vibrations of Sandwich Plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 34, 1962, pp. 1176-1183.
  - 19) Eringen, A.C. : On the Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 22, 1955, pp. 563-567.
  - 20) Berger, H.M. : A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 22, 1955, pp. 465-472.
  - 21) Nash, W.A. and Modeer, J.R. : Certain Approximate Analysis of the Nonlinear Behavior of Plates and Shallow Shells, *Pro. Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells*, Deft, The Netherlands, 1959, Interscience Publishers, Inc. New York, N.Y., 1960.
  - 22) Wah, T. : Large Amplitude Flexural Vibration of Rectangular Plates, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 5, 1963, pp. 425-438.
  - 23) Wah, T. : Vibration of Circular Plates at Large Amplitudes, *Pro. ASCE, J. Engng. Mech. Div.*, Vol. 89, EM 5, 1963, pp. 1~15.
  - 24) Banerjee, B. : Large Amplitude Free Vibrations of Elliptic Plates, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 23, 1967, pp. 1169-1172.
  - 25) Gajendar, N. : Large Amplitude Vibrations of Plates on Elastic Foundations, *Int. J. Non-Linear Mech.* Vol. 2, 1967, pp. 163-172.
  - 26) Srinivasan, A.V. : Large Amplitude-Free Oscillations of Beams and Plates, *AIAA. J.*, Vol. 3, 1965, pp. 1951-1953.
  - 27) Srinivasan, A.V. : Nonlinear Vibrations of Beams and Plates, *Int. J. Nonlinear Mech.*, Vol. 1, 1966, pp. 179-191.
  - 28) Pal, M.C. : Large Amplitude Free Vibration of Circular Plates Subjected to Aerodynamic Heating, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, 1970, pp. 301-313.
  - 29) Cheng-ih Wu and Vinson, J.R. : Influences of Large Amplitudes, Transverse Shear Deformation, and Rotatory Inertia on Lateral Vibrations of Transversely Isotropic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 36, 1969, pp. 254-260.
  - 30) Lassister, L.W. and Hess, R.W. : Calculated and Measured Stresses in Simple Panels Subjected to Intense Random Acoustic Loading Including the Near Noise Field of a Turbojet Engine, *NACA Report 1367*, 1957.
  - 31) Lassister, L.W., Hess, R.W. and Hubbard, H.H. : An Experimental Study of the Response of Simple Panels to Intense Acoustic Loading, *J. Aeron. Sci.*, Vol. 24, 1957, pp. 11-24, 80.
  - 32) Tobias, S.A. : Nonlinear Forced Vibrations of Circular Discs, *Engng.*, Vol. 186, 1958, pp. 51-56.
  - 33) Chobotov, V.A. and Binder, R.C. : Nonlinear Response of a Circular Membrane to Sinusoidal Acoustic Excitation, *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 36, 1964, pp. 59-73.
  - 34) Timoshenko, S. and Young, D.H. : *Vibration Problems in Engineering*, 3th Edition, 1947, D. Van Nostrand Co., New York, pp. 427.
  - 35) Love, A.E.H. : *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Edition, 1926, University Press, Cambridge, pp. 530.
  - 36) Burgreen, D. : Free Vibrations of a Pin-Ended Column with Constant Distance between Ends, *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, 1951, pp. 135-139.
  - 37) Stoker, J.J. : *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, New York, 1950, Interscience Publishers, pp. 85, pp. 208-219.
  - 38) Levy, S. : Bending of Rectangular Plate with Large Deflections, *NACA Report No. 737*, 1942.
  - 39) Iyengar, K.T. and Naqui, M.M. : Large Deflections of Rectangular Plates, *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 1, 1966, pp. 109-122.

(1972. 1. 5・受付)