

# 広域的な月水文量の解析とそのシミュレーション

## SPACE STRUCTURE ANALYSES AND SIMULATION OF MONTHLY HYDROLOGIC DATA

室 田 明\*・江 藤 剛 治\*\*・角 湯 正 剛\*\*\*  
By Akira Murota, Takeharu Eto and Masatake Kadoyu

### 1. 緒 言

近年、都市部とその周辺における都市用水・工業用水の需要の伸びはめざましく、特に京浜・京阪神などの諸都市では、近い将来、現在水源として依存している各水系の工学的限界給水量を上回る水需要量が見込まれている。このような緊迫した状況に対処するために水の再使用技術の開発・向上、多水系にまたがる広域的な水資源開発などが考えられている。

広域的な水資源開発という見地からは、水文量の変動の空間的構造に関する基礎的な特性の解明が必須であるにもかかわらず、このことさえ十分調べられているとは言いがたい。また実際に広域的計画を立てる場合に、十分な長さの同時記録が存在していることはまれであり、これが計画の策定をより困難にしていることが多い。

水文量の空間的構造を研究する手段として、気象学分野<sup>1)</sup>では相互相関行列や因子分析の手法がよく用いられる。水資源計画学においては Fiering<sup>2)</sup>がこの手法を適用した研究を行なっているし、わが国においても石原・池淵<sup>3)</sup>は近畿圏の降水観測網に対して地域相関分析を、星<sup>4)</sup>は石狩川流域の月降水量に対して因子分析法を適用した研究を行なっている。水文量の平均的変動様相を知る上で、このような手法はかなり有効であると考えられる。一方、水資源計画上もっとも重要な渇水時の相互相関特性を知るためには、既往の因子分析法や応用研究はほとんど無力である。そこで筆者ら<sup>5)</sup>は、統計的特性が、相互に異質であると考えられる高水資料、あるいは低水資料を逐次任意の個数取り除いていって、残る資料について相関係数を計算する手法を提案した。この相関係数を層別相関係数と呼ぶことにする。

本論文ではモデル・ケースとして、北海道・東北地方を除くわが国の代表的気候区がすべて隣接して存在しており、実際に広域水資源計画も考えられている近畿圏を取り上げて、主要な観測所の月降水量資料について、1) 成因分析、2) 層別相関分析を行なった。

計画に必要な同時記録の不足に対しては、水文量の simulation, generation の研究が Brittan<sup>6)</sup>, Thomas-Fiering<sup>7)</sup> らによって始められた。多地点で同時に水文量を発生する手法については、Fiering<sup>8)</sup> は成因分析法に基づいて文献 7) のモデルを改良した手法、Beard<sup>9)</sup> は多重回帰モデルにより多地点の月流量を一地点ごとに順次発生させる方法、Matalas<sup>10)</sup> は多重定常時系列モデルについて行列表示を適用する手法を発表している。Young-Pisano<sup>11)</sup> は、定常時系列を得るために水文学で良く用いられる変換

$$x_{ij}^k = \frac{X_{ij}^k - m_j^k}{\sigma_j^k} \dots \dots \dots (1)$$

ここに

$X_{ij}^k$ :  $k$  地点  $i$  年  $j$  月に対する水文量

$m_j^k$ :  $X_{ij}^k$  の  $k$  地点  $j$  月に対する計算年間の平均

$\sigma_j^k$ : 同様に  $X_{ij}^k$  の計算年間の標準偏差

$x_{ij}^k$ :  $X_{ij}^k$  を年について平均 '0', 標準偏差 '1' に変換したもの。  $X_{ij}^k \in N(m_j^k, \sigma_j^{k2})$  のときは  $x_{ij}^k \in N(0, 1)$

を行ない、Matalas のモデルにおける係数行列を比較的容易に得るために、upper triangularization method<sup>12)</sup> を用いて月流量の simulation を行なっている。しかし Young らの研究においても各月の相関係数行列は年を通じて一定であると仮定されている。ところがわが国のように水文量の季節変動の激しい国では、水文変動の空間的相関構造、時系列的相関構造ともに年を通じて一定であるとみなすことはできないので、筆者らはそれが月ごとに異なる場合について式を導き、4 地点の月流量と、前述の成因分析により代表的な観測点とみなされた 7 地

\* 正 会 員 工 博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\* 学生会員 工 修 大阪大学大学院工学研究科

\*\*\* 正 会 員 工 修 電力中央研究所技術第二研究所

点の月雨量について、simulation を行なって実測データより得られる結果と比較した。

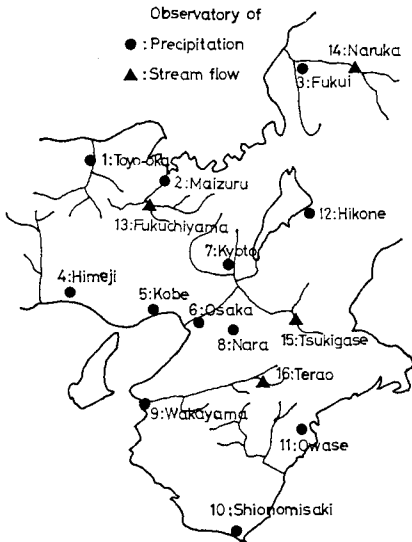
本論文で用いた資料の観測点と観測年数は **Table 1** (a), (b), **Fig. 1** に示すとおりである。

**Table 1 (a)** Observatories of Precipitation

No.	Station	No.	Station
1	Toyo-oka	7	Kyoto
2	Maizuru	8	Nara
3	Fukui	9	Wakayama
4	Himeji	10	Shionomisaki
5	Kobe	11	Owase
6	Osaka	12	Hikone

**Table 1 (b)** Gauging Stations of Streamflow

No.	Station	River	Catchment
13	Fukuchiyama	Yura	1344 km <sup>2</sup>
14	Naruka	Kuzuryu	1234
15	Tsukigase	Kizu	586
16	Terao	Kinokawa	253



**Fig. 1** Gauging stations

## 2. 成因分析

### (1) 分析の目的

導水計画を含む広域水資源計画は、次の2つの基本的な考え方のいずれかに立脚しているといっても過言ではない。すなわち、

- 1) 余剰水資源を持つ水系から、定量の水を他水系に導水することにより、水需要過多の地域の給水量を平均的に増加させる。
- 2) 平均値からの変動成分を相互に分配することによ

り、各水系の流量の変動量を小さくして、水供給パターンの安定化と給水可能量の増加をはかる。

前者を average-up, 後者を smoothing と呼ぶことにし、本論文では smoothing の場合を考えることにする。このような水文量の変動量相互の関係を客観的に評価するためには、成因分析の手法が有効であると考えられる。降水量について具体的に説明すると、各地点に全域的に降水をもたらす、いわゆる共有因子が全降水量変動に占める割合が小さいほど導水計画は有効であろうし、逆に共有因子が卓越する場合は、ある地点で渇水状態が生じたときは他の地点でも同時に渇水が生じており、他水源からの導水に期待することはできない。よって smoothing という意味からは広域水資源計画は無意味となる。

### (2) 理 論

成因分析(要因分析)とは数種の観測変量の中に含まれる共通な内因的因子の数を分析し、同時に大略の意味づけを考える手法である。

いま  $p$  種の変量を持つ  $n$  個の観測値

$$X_i = [x_{i1} x_{i2} \dots x_{ip}] \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (2)$$

が得られ、各  $x_{ij}$  は次のようにすべての  $j$  について基準化されているものとする。

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{(x_{ij})^2}{n} = 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

したがって任意の  $j$  と  $j'$  の標本共分散は標本相関係数と同じである。

$$Cov(x_{ij}, x_{ij'}) = r_{jj'} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} x_{ij'}}{n} \quad (j=1, 2, \dots, p) \quad \dots\dots\dots (4)$$

この標本相関行列を  $R$  とする。次に新しい変数  $y_1, y_2, \dots, y_p$  を導入して、この変数のいくつかで  $x_1, x_2, \dots, x_p$  を代表することを考える。

$$X = [x_1 x_2 \dots x_p] = \left[ \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{array} \right] \dots\dots\dots (5)$$

$$Y = [y_1 y_2 \dots y_p] = \left[ \begin{array}{cccc} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{np} \end{array} \right]$$

ここに  $X_i$  は  $X$  の行ベクトルであり、 $x_j$  は列ベクトルである。また  $Y$  は  $X$  を直交変換して得られたものであるとし、 $B$  をその係数行列とすると、良く知られたように<sup>13)</sup>

$$Y^T = B X^T \quad \dots\dots\dots (6)$$

とにおいて、

- 1)  $y_j$  の分散の和は  $x_j$  の分散の和に等しく、定数  $p$  になる。
- 2)  $R$  の最大の固有値  $\lambda_1$  に対する固有ベクトルを  $b_1$  とすると、 $\lambda_1$  は最大の変動成分  $y_1$  の分散を表わしており、 $b_1$  は対応する係数行列を示している。す

なわち、

$$[R - \lambda_1 I] b_1^T = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$y_1^T = b_1 X^T \dots\dots\dots(8)$$

ここに  $I$ : 単位行列

3) 全変動中に占める  $y_1$  (第1成分, 主成分, 主要因などと呼ばれる) の変動分  $V(y_1)$  の割合を知るには, 比  $\lambda_1/p$  を計算すればよい。

4)  $y_1$  のみで全変動を代表するのに不十分であるときは,  $R$  の2番目に大きい固有値  $\lambda_2$  とこれに対応する固有ベクトル  $b_2$  を用いればよい。同様にして全変動が十分説明できる程度に  $\lambda_3, \lambda_4, \dots, b_3, b_4, \dots$  を取ってゆく。このようにして  $q$  個 ( $p \geq q$ ) の変動成分  $y_1 y_2 \dots y_q$  を選ぶ。また

$$p = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \dots\dots\dots(9)$$

$$b_j \perp b_j' \dots\dots\dots(10)$$

実際の分析においては  $R$  の固有値, 固有ベクトルを計算して,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q \geq \dots \geq \lambda_p$  とすれば,  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q)/p$  が十分 '1' に近くなるように  $q$  を定め,  $q$  個の各成分について大略の意味づけを行なうわけである。

(3) 近畿圏の月雨量資料への適用

近畿圏の月雨量資料について成因分析と, 補助的手段

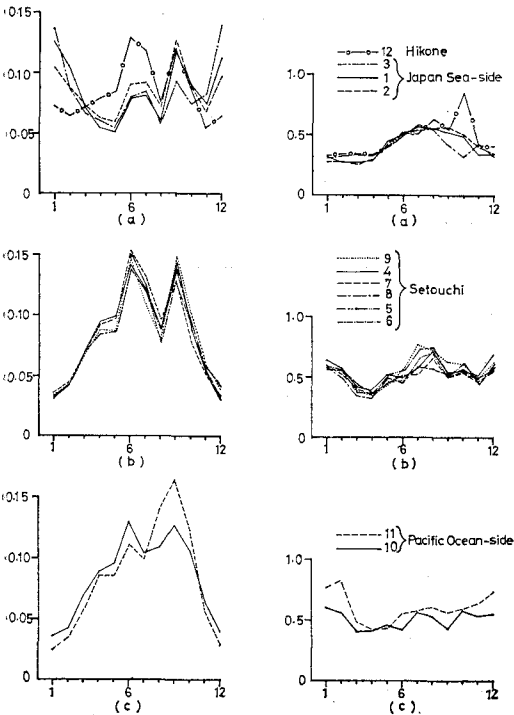


Fig. 2 Means of monthly precipitation divided by means of yearly precipitation

Fig. 3 Variation Coefficient of monthly precipitation

として平均値, 変動係数の空間的および時系列的変動特性を調べた。Fig. 2~Fig. 5 はその例である。Fig. 2~Fig. 3 より, 一般的にいわれている次の性質がわかる。

- 1) 近畿圏の降水は, 冬期の降水量が大であり, 年を通じて比較的安定な変動様相を示す日本海型, 梅雨期と台風期の降水が大であるが冬期は極度に小さく, 日本海型に比して変動係数も大であり不安定な変動様相を示す瀬戸内型, 8月~10月の降水量がより多い太平洋型に分類される。さらに季節によっては, 山陰型(豊岡, 舞鶴)と北陸型(福井)は若干異なり, 彦根・和歌山はその属する型が中間的な性質を示す。

次に各グループの代表的地点として, 豊岡・福井・彦根・大阪・和歌山・尾鷲の6地点をとりあげ, 成因分析

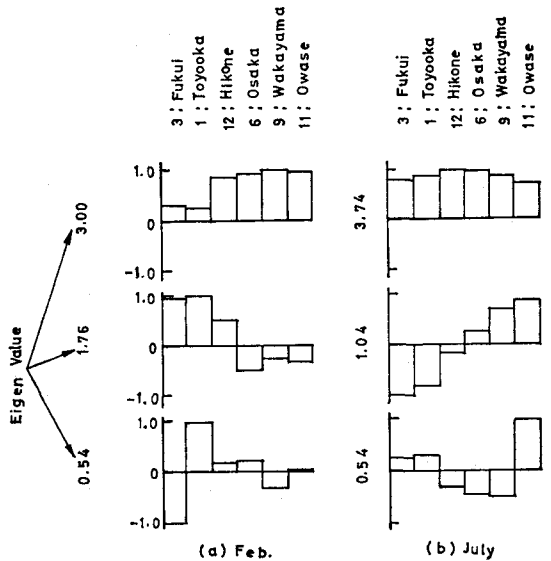


Fig. 4 Eigen vector of cross correlation matrices

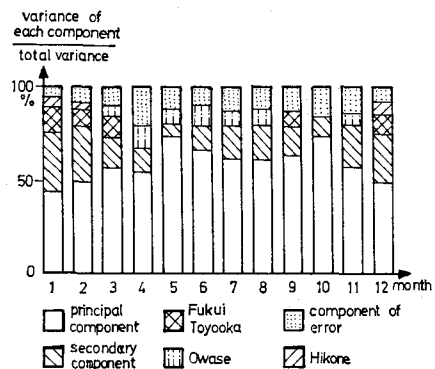


Fig. 5 Eigen values of cross correlation matrices (Contribution of each component to total variance)

を行なった結果を示す。Fig. 4 (a)~(b) は固有ベクトルの例である。Fig. 5 は固有ベクトルの形状より、各固有値に対応する変動の大略の意味づけを行なって、全変動、すなわち  $p=6$  で除した値である。これらの図より次のようなことがわかる。

- 2) どの月においても、3個の因子により全変動の 80~90% があらわされる。
- 3) 第1因子は低気圧および前線性とおもわれる全域的に降る降水と対応している。いわゆる前述の共有因子である。全変動に対する寄与は 45~75% である。
- 4) 第2因子は緯度に比例して固有ベクトルの形が変わっているから、季節風などの大規模な気象擾乱に伴う風による因子であると考えられる。全変動に対して 10~30% である。
- 5) 第3因子はある地点の降水に特有な因子であるが、夏期では尾鷲、冬期では裏日本の特定地点の降水に対応しており、季節によっては季節風による因子の中にも含めることもできるであろう。全変動の約 10% である。

実用的な意味でいうならば、第1因子が卓越するほど smoothing という見地から見た広域水資源計画の持つ意義は薄れ、逆に第2、第3因子が卓越するほどその意義は大きくなる。

次に各月ごとの特性を調べると、

- 6) 冬期においては他の季節に比して第2成分である季節風による変動成分が卓越し、第1成分とほぼ同程度である。これらの変動に彦根・福井・豊岡の特殊因子を加えると 95% に達し、近畿圏の冬期の降水に対する裏日本の降雪の寄与の高さを示している。
- 7) 5月、10月では第1因子が卓越し、全域的に同質の大規模な気象擾乱により降水がもたらされていることを示している。
- 8) 梅雨期においては第1因子も大きいですが、第2因子(夏の季節風)もかなり卓越してくる。
- 9) 8月、9月では第2因子がより卓越してくる。8月において最大であり、尾鷲の特有因子と加えると全変動の 26% に達する。

このように成因分析により、降水の成因とその季節的特性をかなり定量的に表現することができた。

### 3. 層別相関分析

#### (1) 分析の目的と意義

複数の水文量相互の関係を調べるために、因子分析論も含めた多変量解析論が用いられる。この理論を適用す

ることにより、前節にも述べたとおり、高水・低水もすべて含めたという意味での平均的な水文量の変動の相互関係について、非常に多くの有益な情報を得ることができる。しかし高水・低水などの極値的な場合の相関特性が、必ずしも全資料を用いて分析した平均的な特性と一致するとはかぎらない。そこで筆者らは新たに層別相関分析の手法を適用して、近畿圏の月降水量について高水・低水を除いた場合の相互相関特性を解析した。

#### (2) 理 論

$X, Y$  が  $X \in N(0, 1), Y \in N(0, 1)$  で母相関係数  $\rho$  なる2変数正規分布に従うとき、Fig. 6 に示すように、

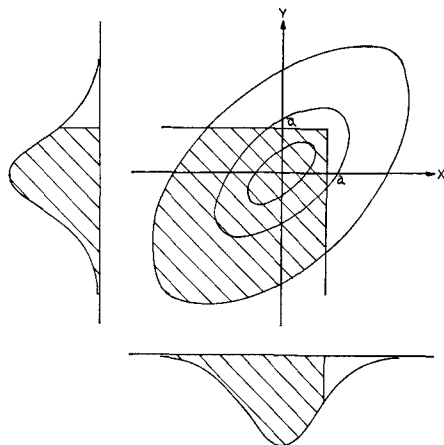


Fig. 6 Stratified sampling from bivariate normal distribution

たとえば  $X \leq a, Y \leq a$  なる範囲のみに対する見かけの相関係数  $\rho^*$  は次の式より計算される<sup>14)</sup>。

$$\rho^* = \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_X^*\sigma_Y^*\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^a \cdot (X - \mu_X^*)(Y - \mu_Y^*) e^{T} dX dY \dots (11)$$

ここに

$$\sigma_X^* = \sigma_Y^* = \left\{ \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^a \cdot (X - \mu_X^*)^2 e^{T} dX \cdot dY \right\}^{1/2},$$

$$\mu_X^* = \mu_Y^* = \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^a X e^{T} dY dY,$$

$$F = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^a e^{T} dX dY,$$

$$T = -\frac{X^2 - 2\rho XY + Y^2}{2(1-\rho^2)}$$

Fig. 7 は  $(1-F)$  を横軸に取り、見かけの相関係数  $\rho^*$  を縦軸にとった場合の理論曲線を示す。 $F$  は残りの標本数、 $(1-F)$  は取り除いた標本数の全標本数に対する割合に対応する。図よりわかるように  $|\rho| \geq |\rho^*|$  である。

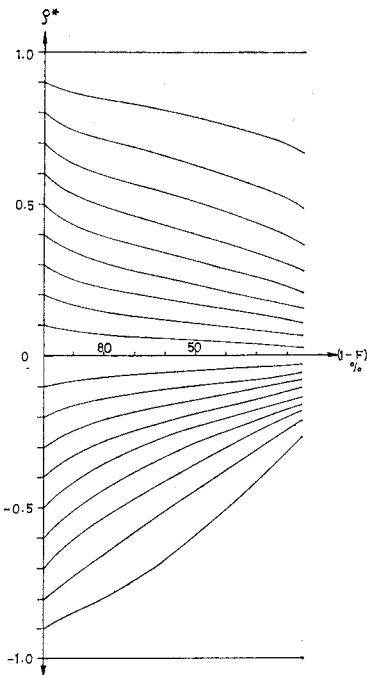


Fig. 7 Theoretical curve of correlation coefficient calculated by using stratified sampling procedure

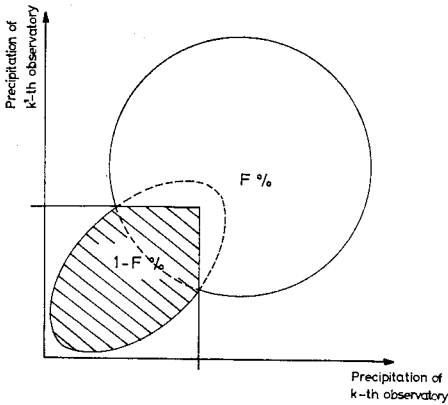


Fig. 8 Schematic representation of a monthly precipitation population

いま、 $(x_i, y_i)$  が相関特性が一様でない母集団から得られた  $p$  対 ( $i=1, 2, \dots, p$ ) の標本であるとする。たとえば Fig. 8 に示すような母集団の場合は、 $X$  あるいは  $Y$  の大きい値に対して相関係数は小、小さい値に対しては大となる。小さい値についての特性が知りたいときは、大きい方から  $F\%$  を取り除いて残りの  $(1-F)\%$  について、みかけの標本相関係数  $r^*$  を求めればよい。ところが Fig. 7 にも示したように、分布のひずみなどの理由により、 $r^*$  は真の標本相関係数  $r$  と異なる。筆者らは Fig. 7 を用いて、 $r^*$  に対応する真の標本相関

係数  $r$  を求める手法を提案した<sup>5)</sup>。実際の計算は次の順序で行なう。

- 1) 全標本  $p$  組のうち、 $X$  に対する最大の標本を  $x_{i1}$  とするとき、対応する  $(x_{i1}, y_{i1})$  の一組の標本を取り除く。残りの  $(p-1)$  組の標本のうち最大の  $y_i$  とそれに対応する  $x_i$  の組  $(x_{i2}, y_{i2})$  を取り除く。
- 2) 残りの  $(p-2)$  組の標本のうち、最大の  $x_i$  と対応する  $y_i$  の組  $(x_{i3}, y_{i3})$ 、および残りの  $(p-3)$  組のうち最大の  $y_i$  と対応する  $(x_{i4}, y_{i4})$  を取り除く。
- 3) 順次同じ操作をくり返して、 $q$  組の標本を取り除いて  $r^*$  を計算する。Fig. 7 の横軸において、 $1-F=q/p$ 、縦軸に  $r^*$  なる点を取り、 $(1-F, r^*)$  なる座標におけるパラメーター  $\rho$  を読み取る。 $\rho$  をもって標本相関係数  $r$  とする (Fig. 9 参照)。

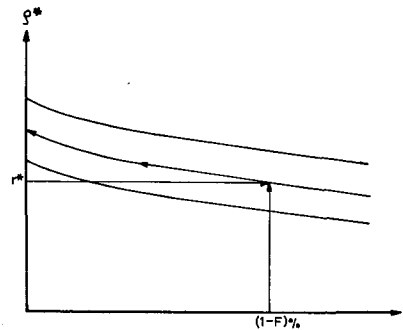


Fig. 9 Procedure to calculate virtual sample correlation coefficient

なお同様の手法は  $X$  軸あるいは  $Y$  軸のみに関する層別化の場合にも適用できる。

(3) 標本層別相関係数の分布

Fig. 7 は母層別相関係数  $\rho^*$  に関する理論曲線である。

標本層別相関係数  $r^*$  は  $\rho^*$  のまわりに分布する。この分布型を理論的に求めるのは困難であるから、simulation によって  $r^*$  の分布の平均値と楕型を求め、 $\rho^*$  および  $(\rho^*, p-q)$  をパラメーターとする  $r$  分布との比較検討を行なった。 $r$  分布とは、2変数正規母集団から抽出した大きさ  $K$  の任意標本より計算される標本相関係数  $r$  の分布であり、次式で与えられる<sup>14)</sup>。この場合は  $r=\rho^*$ 、 $K=p-q$  である。

1)  $\rho=0$  のとき

$$f(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \dots\dots\dots (12)$$

$n \geq 1$  のときは

$$f(r) = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(n-1)r^2}{2}} \dots\dots\dots(13)$$

2)  $\rho \neq 0$  のとき

$$f(r) = \frac{n-2}{\pi} (1-\rho^2)^{\frac{n-1}{2}} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \int_0^\infty \frac{dZ}{(\cosh Z - \rho r)^{n-1}} \dots\dots\dots(14)$$

Fisher の Z 変換すなわち、

$$Z = \tanh^{-1} r = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} \dots\dots\dots(15)$$

$$\zeta = \tanh^{-1} \rho = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} \dots\dots\dots(16)$$

を行なうと、 $n \geq 1$  のとき次式となる。

$$f(Z) = \frac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n-3}{2}(Z-\zeta)^2} \dots\dots\dots(17)$$

本論文では式 (13), (17) の近似式を用いた。

simulation に用いる式は、 $N(0, 1)$  の 2 変数正規分布の式より導かれる。すなわち、

$$y_i = \rho x_i + (1-\rho^2)^{1/2} t_i \dots\dots\dots(18)$$

ここに、 $t_i : N(0, 1)$  なる独立な乱数

simulation は次の手順により行なわれる。

- 1) 式 (18) を用いて、 $(x_i, y_i) : (i=1, 2, \dots, p)$  なる  $p$  組の標本を作る。
- 2)  $p$  組の標本より、前述の層別化法を用いて  $q$  組の標本を除いて  $r^*$  を計算する。
- 3) 同様にして、 $n$  ケースの simulation を行なうことにより、1 組の  $(\rho, p, q)$  に対して  $n$  個の  $r^*$  が得られる。
- 4)  $n$  個の  $r^*$  の平均・分布をそれぞれ、 $\rho^*$ , および  $(\rho^*, p-q)$  をパラメータとする  $r$  分布と比較する。

以上の手順により、 $n=50, p=10 \sim 100, q=0 \sim 90, \rho=0.0 \sim 1.0$  (ただし  $p \geq q \geq 0$ ) について simulation を行なった。Fig. 10 は  $p=60$  に対して  $r^*$  の平均値と理論値を比較した例であり、Fig. 11 は  $p=60, \rho=0.8$  に対して  $r^*$  の度数分布と  $r$  分布を比較したものである。

これらの数値実験より次のことがわかった。

- 1) 理論値  $\rho^*$  と  $r^*$  の平均値はほとんど完全に一致する。
- 2)  $r^*$  を求めるための  $(p-q)$  個の  $(x_i, y_i)$  の母集団は、Fig. 6 に示すように直角部を有するひずんだ分布であるにもかかわらず、 $(p-q)$  と  $\rho^*$  を母数とする  $r$  分布曲線とほとんど一致する。
- 3)  $p-q < 15 \sim 20, |\rho^*| < 0.3 \sim 0.4$  では  $r^*$  の分布の広がりが大きくなって、信頼性が乏しくなる。

結論 2) より、 $r^*$  の分布として  $r$  分布を仮定することにより、各種仮説検定を行なうことができるが、ここでは省略する。

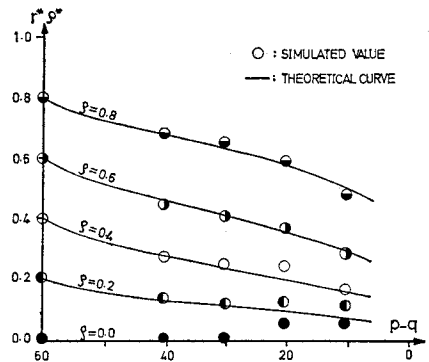


Fig. 10 Comparison  $\rho^*$  with mean of  $r^*$

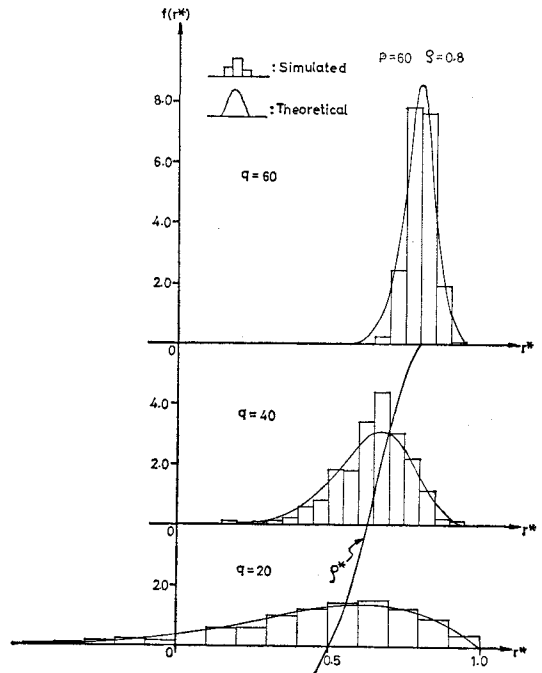


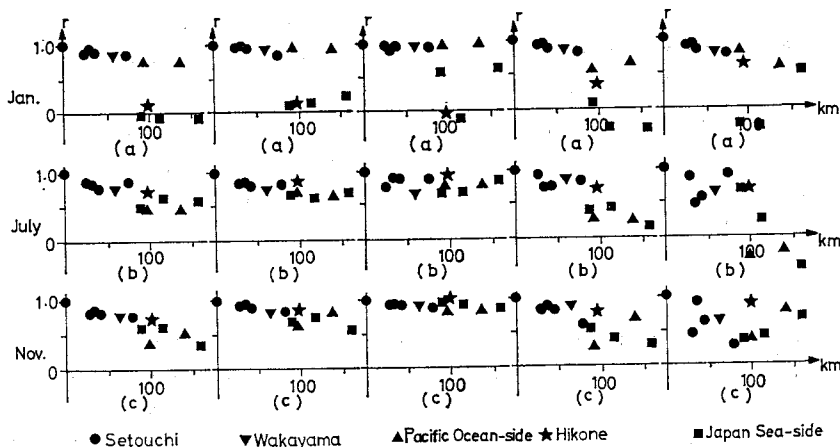
Fig. 11 Probability density of  $r^*$

(4) 近畿圏の月降水量への適用

近畿圏の月降水量資料について層別相関分析を適用した。Fig. 12 は全標本 60 組に対する標本相互相関係数、Fig. 13, 14 はそれぞれ大雨量を 20 個、40 個取り除いた場合、Fig. 15, 16 は小雨量を 20 個、40 個取り除いた場合の標本層別相関係数の例を示している。これらの図は横軸に大阪からの距離を取り、縦軸に大阪の月雨量と各地点の月雨量の相関係数を取ってプロットしている。

これらの図より次のようなことがわかる。

- 1) 冬期 (図の例は 1 月) : 裏日本側と表日本側 (太平洋岸および瀬戸内) では大雨量母集団における相



**Fig. 12** Cross correlation coefficient for all samples (60) (Origin is Osaka)  
**Fig. 13** to exclude 20 large intensity of precipitations  
**Fig. 14** to exclude 40 large intensity of precipitations  
**Fig. 15** to exclude 20 small intensity of precipitations  
**Fig. 16** to exclude 40 small intensity of precipitations

関特性と小雨量母集団における相関特性には有意な差はない。太平洋岸と瀬戸内とでは小雨量母集団についてはほとんど完全相関となり、渇水が表日本で全域的におこることを示している。しかしこの場合も日本海側の小雨量はほとんど無相関である。

- 2) 梅雨期 (図の例は7月) : 7月の場合、小雨量の相互相関係数は広域にかなり大きく、大雨量においては瀬戸内と太平洋岸・日本海岸の諸地点との相関係数は比較的小さい。すなわち7月の大雨の降雨域はかなり小さいことを示している。6月においてはこのような特性は顕著ではなかった。
- 3) 11月 : 小雨量母集団の相関が著しく高い。一方、大雨量母集団の相関はそれほど高くない。
- 4) そのほかの季節では、大雨量母集団と小雨量母集団の相互相関特性に有意な差は認められなかった。
- 5) 以上よりわかるように、成因分析により指摘された5月・10月のほかに、7月・11月においても通常の相互相関特性や因子分析から予想されるほどには、広域水資源計画のメリットは期待できない。

#### 4. 行列表示による多地点水水量 simulation

##### (1) データの正規化

$p$  地点・ $n$  年間の月水水量データ行列を次のように表わす。

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{pmatrix} X^1_{1,1} & X^1_{1,2} & \dots & X^1_{1,12} & X^1_{2,1} & \dots & X^1_{n,12} \\ X^2_{1,1} & X^2_{1,2} & \dots & X^2_{1,12} & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X^p_{1,1} & X^p_{1,2} & \dots & X^p_{1,12} & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix} \\
 &= (X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{1,12}, X_{2,1}, \dots, X_{n,12}) \dots \dots \dots (19)
 \end{aligned}$$

ここに  $X_{i,j}$  :  $i$  年  $j$  月の月水水量を表わす列ベクトル

$X^k_{i,j}$  :  $k$  地点,  $i$  年,  $j$  月の月水水量

$k$  : 地点を表わす添字 ( $k=1, 2, \dots, p$ )

$i$  : 年を表わす添字 ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$j$  : 月を表わす添字 ( $j=1, 2, \dots, 12$ )

多地点水水量の simulation は原則的に多変量統計論の適用により行なわれる。最近、角屋・長尾<sup>16)</sup>は2変数ガンマ分布の水文学への適用に関する研究を行なっているが、3変数以上については実用上、正規分布に関する多変量統計論に従わざるを得ないであろう。そのためにあらかじめデータの正規化を行なう。

$X^k_{ij}$  が  $N(m^k_{ij}, \sigma^k_{ij})$  に従うときは式(1)により正規化を行なえばよい。しかし一般にいわれているように、月降水量、月流量はひずみ度のそれほど大きくないガンマ分布に従う。このときは、Wilson-Hilferty<sup>17)</sup>によって導かれた次の変換を行なうことにする。

$$\begin{aligned}
 x^k_{ij} &= \frac{6}{g_j^k} \left\{ \left( \frac{g_j^k}{2} \cdot K^k_{ij} + 1 \right)^{1/3} - 1 \right\} \\
 &+ \frac{g_j^k}{6} \dots \dots \dots (20)
 \end{aligned}$$

ここに

$$K^k_{ij} = (\log_{10} X^k_{ij} - m^k_{ij}) / \sigma^k_{ij}$$

$m^k_{ij}, \sigma^k_{ij}, g_j^k$  : それぞれ  $\log_{10} X^k_{ij}$  の平均、標準偏差、ひずみ度

この変換が有効であることは Beard<sup>9)</sup>、筆者ら<sup>5)</sup>によって確かめられた。本論文に用いたすべてのデータについて式(20)による変換を行ない、その平均、標準偏差、ひずみ度を計算したが、ほとんどの場合について満足できる近似を得た。

(2) simulation model と係数の推定

以後、データ行列  $X$  は正規化変量  $x^k_{ij}$  の行列を示すことにする。また simulation model としては Matalas のモデルに月を表わす添字 “ $j$ ” をつけた次式を用いる。

$$X_{i,j} = A_j \cdot X_{i,j-1} + B_j \cdot e_{i,j} \dots (21)$$

ここに

$j=1$  のとき,  $i, j-1$  はそれぞれ  $i-1, j=12$  を示すものとする。

$A_j, B_j$ :  $j$  月に関する ( $p \times p$ ) 係数行列

$e_{i,j}$ :  $i$  年  $j$  月に対する  $N(0,1)$  乱数の ( $p \times 1$ ) ベクトル

式 (18) の両辺に  $X^T_{i,j-1}$  を乗じて,  $i$  について期待値をとる。

$$E(X_{i,j} X^T_{i,j-1}) = E(A_j X_{i,j-1} X^T_{i,j-1}) + E(B_j e_{i,j} X^T_{i,j-1}) \dots (22)$$

左辺の  $k$  行,  $k'$  列の要素  $r_{k,k'}$  は

$$r_{k,k'} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^k_{i,j} x^{k'}_{i,j-1} \dots (23)$$

である。これは  $k$  地点と  $k'$  地点の時差相関行列であり、

$$E(X_{i,j} X^T_{i,j-1}) = R_{-1}(j) \dots (24)$$

ここに、添字 “ $-1$ ” は時差が 1 であることを表わす。同様にして

$$E(X_{i,j-1} X^T_{i,j-1}) = R_0(j-1) \dots (25)$$

とおくと,  $R_0(j-1)$  は ( $j-1$ ) 月の相互相関行列となる。また  $e_{i,j}$  と  $X_{i,j-1}$  は独立であるから、

$$E(e_{i,j} X^T_{i,j-1}) = 0 \dots (26)$$

式 (22), (24), (25), (26) より

$$A_j = R_{-1}(j) R_0^{-1}(j-1) \dots (27)$$

次に、式 (18) の両辺に右より  $X^T_{i,j}$  を乗じる。

$$X_{i,j} X^T_{i,j} = A_j X_{i,j-1} X^T_{i,j-1} + B_j e_{i,j} X^T_{i,j} \dots (28)$$

式 (28) の右辺第二項の  $X^T_{i,j}$  に式 (21) を代入して、

$$X_{i,j} X^T_{i,j} = A_j X_{i,j-1} X^T_{i,j-1} + B_j e_{i,j} (X^T_{i,j-1} A_j^T + e^T_{i,j} B_j^T) \dots (29)$$

両辺の  $i$  に関する期待値をとり、次の性質および定義を利用して整理する。

$$E(e_{i,j} X^T_{i,j-1}) = 0$$

$$E(e_{i,j} e^T_{i,j}) = I$$

$$E(X_{i,j-1} X^T_{i,j-1}) = R_{-1}^T(j)$$

$$E(X_{i,j} X^T_{i,j}) = R_0(j)$$

ここに  $I$ : 単位行列

結局次のようになる。

$$R_0(j) = A_j R_{-1}^T(j) + B_j B_j^T \dots (30)$$

式 (27) を式 (30) に代入して、

$$B_j B_j^T = R_0(j) - R_{-1}(j) R_0^{-1}(j-1) R_{-1}^T(j) \dots (31)$$

式 (27), (31) より  $A_j, B_j$  を決定する。また、

$$R_0(j) = R_0(j')$$

$$R_{-1}(j) = R_{-1}(j') = R_{-1}^T(j)$$

ここに,  $j=1, 2, \dots, 12, j'=1, 2, \dots, 12$

とおけば, Matalas によって導かれ, Young-Pisano の論文においても用いられた結果と一致する。

式 (27), (31) より次のことがわかる。

- 1) 式 (31) において  $B_j B_j^T$  は対称行列となる。
- 2)  $A_j$  は式 (27) より直接計算できる。
- 3)  $B_j$  は  $n^2$  個の未知数を持つが、式 (31) は対称行列となるので独立した条件は  $n(n+1)/2$  個である。よって  $\{n^2 - n(n+1)\}/2$  個の付加的条件が必要となる。

Young-Pisano<sup>11)</sup> は  $B_j$  を三角行列として解いた。すなわち  $b_{kk'} = 0 (k < k')$  とする。本論文においても同じ手法を用いた。

simulation においては、式 (21) により一次マルコフ型として正規乱数を発生させ、それを式 (20) により逆変換すればよい。

(3) simulation の結果と検討

月雨量については Table 1 (a) に示す 7 地点、月流量については観測点の数を多くすると、安定した係数行列を得るのに必要な、十分な長さの同時記録が得られないので、Table 1 (b) に示す 4 地点について 100 年間の simulation を行なった。実際の計画に本論文の手法を適用する場合に、同時記録の不足の問題が生じたときは、最近の Crosby-Maddoch<sup>18)</sup> の研究を参照すれば、かなりの解決が与えられるであろう。

観測資料と simulation により得られた資料の平均、標準偏差、ひずみ度を比較したものの例を Table 2 に示す。また Hazen-plot の例を Fig. 17, 18, 相関行列の例を Table 3, 4, 5 に示す。これらの図表よりわかるように、月雨量についても月流量についても、3 次までのモーメント、全資料を用いた場合の相関特性は十分 simulate されている。

次に、層別相関特性が実際的な問題においてはどの程度計画の精度に関係してくるかを調べる目安として、数地点の月雨量の和の分布を比較した。層別相関構造が一樣であれば、simulate された値・実測値それぞれの場合における和の分布は、大雨量・小雨量などの極値的分布においても一致するはずである。

Fig. 19, 20 に数地点の月雨量の和を Hazen-plot したものの例を示す。これよりわかるように、和の分布は



**Table 2** Moments of probability distribution of monthly Precipitation (Example for Osaka)

Month	Mean		Standard Deviation		Skewness	
	Observed	Simulated	Observed	Simulated	Observed	Simulated
Jan.	45.3	43.5	26.9	26.9	0.79	0.91
Feb.	60.2	59.3	33.1	32.6	1.01	0.95
Mar.	96.2	93.4	36.4	37.4	0.50	0.52
Apl.	124.4	122.4	46.2	41.1	1.07	0.77
May	129.1	126.0	60.4	63.0	1.05	1.07
June	199.3	208.3	93.7	97.5	0.78	0.91
July	160.7	158.6	106.5	117.1	0.96	1.05
Aug.	103.4	98.5	73.0	70.8	1.04	1.09
Sept.	175.3	181.7	86.2	98.5	0.75	1.07
Oct.	120.2	120.4	65.1	64.7	0.97	1.21
Nov.	76.5	73.9	38.4	34.8	0.84	0.87
Dec.	48.8	50.2	28.4	31.4	0.86	0.90

**Table 3** Cross correlation coefficient matrix of monthly precipitation (January)

(a) Observed

Station	1	3	4	6	9	11	12
1	1.00	0.49	-0.08	-0.13	0.00	-0.07	0.32
3	0.49	1.00	-0.19	-0.14	-0.09	-0.09	0.51
4	-0.08	-0.19	1.00	0.88	0.83	0.80	0.05
6	-0.13	-0.14	0.88	1.00	0.92	0.81	0.11
9	0.00	-0.09	0.83	0.92	1.00	0.83	0.13
11	-0.07	-0.09	0.80	0.81	0.83	1.00	0.09
12	0.32	0.51	0.05	0.11	0.13	0.09	1.00

(b) Simulated

Station	1	3	4	6	9	11	12
1	1.00	0.34	0.01	0.00	0.16	0.05	0.19
3	0.34	1.00	0.00	0.04	0.03	0.01	0.42
4	0.01	0.00	1.00	0.88	0.82	0.82	0.23
6	0.00	0.04	0.88	1.00	0.91	0.77	0.25
9	0.16	0.03	0.82	0.91	1.00	0.82	0.24
11	0.05	0.01	0.82	0.77	0.82	1.00	0.15
12	0.19	0.42	0.23	0.25	0.24	0.15	1.00

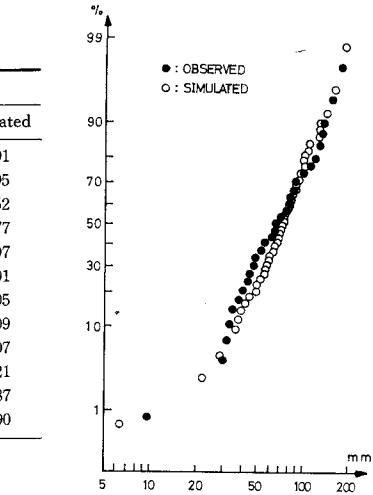
**Table 4** Cross correlation matrix of monthly streamflow (January)

(a) Observed

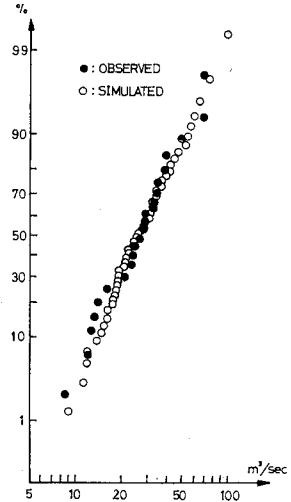
Station	1	2	3	4
1	1.00	0.43	0.49	0.56
2	0.43	1.00	0.18	0.38
3	0.49	0.18	1.00	0.44
4	0.56	0.38	0.44	1.00

(b) Simulated

Station	1	2	3	4
1	1.00	0.41	0.54	0.50
2	0.41	1.00	0.15	0.30
3	0.54	0.15	1.00	0.40
4	0.50	0.30	0.40	1.00



**Fig. 17** Hazen-plot of monthly precipitation (Nov., Osaka)



**Fig. 18** Hazen-plot of monthly streamflow (Sept., Tsukigase)

**Table 5** Lag correlation matrix of monthly streamflow (January)

(a) Observed

Station	1	2	3	4
1	0.45	0.06	0.33	0.34
2	0.50	0.58	0.42	0.25
3	0.07	0.04	0.40	0.14
4	0.56	0.30	0.43	0.65

(b) Simulated

Station	1	2	3	4
1	0.32	0.03	0.26	0.30
2	0.57	0.55	0.35	0.31
3	0.05	0.00	0.39	0.14
4	0.46	0.23	0.44	0.58

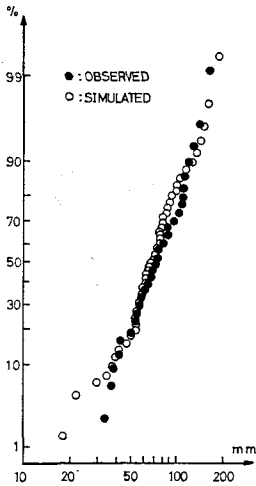


Fig. 19 Hazen-plot of sums of monthly precipitations at Himeji, Osaka, Wakayama and Hikone (Nov.)

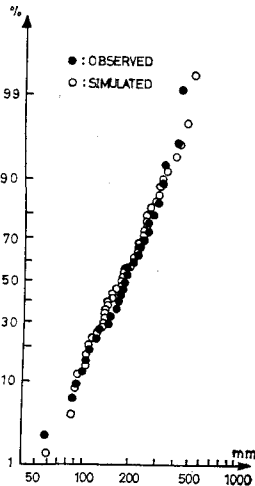


Fig. 20 Hazen-plot of sums of monthly precipitations at Himeji, Osaka, Wakayama and Hikone (June)

数地点を平均化することにより、ほとんどの月で計算値と実測値の適合度が高くなっているが、大雨量と小雨量で層別相関特性が大きく異なる11月などでは、極値に若干の不一致が見られる場合があった。この程度の不一致が許容できるか否かは、本研究が適用される実際の計画それぞれの性格自体にかかわるので、一概には言えない。

結論として、本論文に示した simulation 手法により、平均値、標準偏差などの低次のモーメントだけでなく、各月ごとの水文量の平均的空間構造までは、十分な精度で simulate できるといえるだろう。また適用範囲さえ誤まらなければ、広域水資源計画に対して、本論文の手

法は有効なデータを提供するものと考えられる。

## 5. 結 論

広域水資源計画のための基礎的研究の一環として、近畿圏を取り上げ、月水文量の空間的構造の解析とその simulation を行なった。結論は次のとおりである。

(1) 近畿圏の月水文量については、日本海側、瀬戸内側、太平洋側に分類できる。

(2) 要因分析により、近畿圏の月降水量は3個の因子によりほとんど説明される。第1因子は全域的に降る降水、第2因子は季節風性降雨、第3因子はある地点に特有な降水とそれぞれ対応している。

(3) smoothing を目的とした導水計画では、計画の持つメリットと第1因子の大きさは逆比例の関係にあると考えられるが、5月・10月では第1因子が卓越し、冬期・台風期では他の因子が卓越する。

(4) さらに層別相関特性の解析により、7月・11月は通常の相互相関特性や因子分析から予想される以上に、広域的な渇水がおこることが予想される。

(5) 行列表示を用いて多地点水文量の simulation を行なったが、各月・各地点に対して、分布・相関構造ともに十分な精度で simulate することができた。ただし、層別相関特性を再現するまでにはいたらなかった。

最後に、本研究を進めるにあたって有益な助言を頂いた大阪大学 神田徹講師、卒業研究として計算・資料整理に協力していただいた田中剛氏に深謝の意を表する次第である。また本研究は室田を代表者とする特定研究「水資源に関する貯留・調節機能の研究」の課題で昭和45年度および46年度文部省科学研究費の援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) たとえば、鈴木栄一：気象統計学，地人書館，昭 43
- 2) Fiering, M.B.: Multivariate techniques for synthetic hydrology, J. Hy. div., Proc. ASCE, Vol. 90, No, Hy. 5, pp. 43-60, 1964
- 3) 石原藤次郎・池淵周一：降水観測網の統計的検討，京大防災研究所年報第 13号 B, pp. 33-51, 昭 45
- 4) たとえば、星 清・八木哲郎：グループ主軸法による月降水量の相関分析について，土木学会年講演集第2部, pp. 399-402, 昭 46
- 5) Murota, A. and Kanda, T.: A stochastic model to simulate monthly river flow sequences, Proc. 13th Cong. IAHR, Vol. 1, pp. 163-170, 1969
- 6) Brittan, M.R.: Probability analysis applied to the development of synthetic hydrology for Colorado river, pt. IV of "Past and probable future variations in streamflow in the upper Colorado river," Univ. of Colorado, Bureau of Economic Research, Boulder, Colo., Oct. 1961
- 7) Thomas, H.A. Jr. and Fiering, M.B.: Mathematical synthesis of streamflow sequences for the analysis

- of river basin by simulation, chap. 12 in Arthur Maas, et al., "Design of water-resources systems," pp. 459-493, Harvard Univ. press, Cambridge, Mass., 1962
- 8) 2) に同じ
- 9) Beard, L.R. : Use of interrelated records to simulate streamflow, J. Hy. dev., Proc. ASCE, Vol. 91, No. Hy. 5, pp. 13-22, 1965
- 10) Matalas, N.C. : Mathematical assesment of synthetic hydrology, WRR, Vol. 3, No. 4, pp. 937-945, 1967
- 11) Young, G.K. and Pisano, W. C. : Operational hydrology using residuals, J. Hy. div., Proc, ASCE, Vol. 94, No, Hy. 4, pp. 909-923, 1968
- 12) 11) に同じ
- 13) たとえば, 北川敏男編 : 多変量解析論, 共立出版, 昭 42
- 14) 岸根卓郎 : 理論・応用統計学, pp. 283-284, 養賢堂, 昭 43
- 15) 14) に同じ, pp. 313-315
- 16) 長尾正志・角屋 睦 : 2変数ガンマ分布とその適用に関する研究, (1), (2), 京大防災研究所年報, 13号, 14号, 昭 45, 46
- 17) Wilson, E.B. and Hilferty, M.M. : Distribution of chi-square, Proc. Nat. Acad. Science, 17, pp. 684-688, 1931
- 18) Crosby, S.D. and Maddock, T., III : Estimating coefficient of a flow generator for monotone samples of data, WRR, Vol.6, No. 4, pp. 1079-1086, 1970  
(1971.12.27・受付)
-