

接合部における連続条件の一般的表現とその応用

THE GENERAL EXPRESSIONS FOR THE CONTINUITY CONDITIONS
ON THE STRUCTURAL JUNCTIONS, AND THEIR APPLICATIONS

秋山成興*

By Narioki Akiyama

1. はじめに

構造物は单一材の集合系として機能する。单一材の力学的性状は大いに解明されているが、構造物における構成部材としての解析は必ずしも十分ではない。

現在、構造物の解析における困難な点はこれら单一材の相互作用を評価することである。

本論文はこの相互作用の評価を行なう一方法を提案したものである。

従来、单一材そのものの力学的あるいは精細に研究されており、構造物を单一材の系として取り扱う場合各個の单一材に対する独立解はやや簡単に求まるが、これらを組み立てる場合それらの相互作用をどう評価するかは、かなりむずかしい。

相互作用は、これら单一材の接合部（单一材を二次元構造物と考えて、以下接合線という）において、応力と変形の連続条件（接合条件）を満足しなければならぬ条件より定まるが、これは接合線が空間曲線を描く場合複雑になる。したがって、单一材の境界条件（接合条件）は座標系に関して invariant な形（テンソル表示）で求めておくことは、構造物の形態によらない利点があり、より一般性がある。

本論文では、接合条件において、周方向伸びと曲率変化に注目し、これらの座標系によらない一般式を求めておいた。また、接合条件のうち特に幾何学的連続条件の評価に力点をおいた。

本理論の計算例として、もっともよく使用される補強リングをもつ無限円孔板が一樣引張りをうける場合を取り上げている。

この構造に関する研究は数多くあるが（たとえば[3]）本論文はこれらを特別な場合として含むもので、従来の研究より一般的である。

理論の展開は主として[1]に従ったが、テンソル解析にたよらざるを得ないのはやむを得ない。

テンソル記法は[2]に従っているので、これを参照されたい。

2. 変形の幾何学

曲面上の曲線の幾何学的諸量を求める場合、微分幾何学にしたがって、点の位置ベクトルを \mathbf{R} とすれば

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} = \mathbf{e}_\alpha, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} = \mathbf{e}_\beta, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{n} = \frac{[\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta]}{|\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta|}$$

で定義される基本ベクトルを用いることとする。

この基本ベクトルの微分は

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha, \beta \end{array} \right\} \mathbf{e}_\lambda \quad (2.1)$$

$$\mathbf{e}^{\alpha,\beta} = - \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta, \lambda \end{array} \right\} \mathbf{e}^\lambda \quad (2.2)$$

となる。

ここで $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta, \lambda \end{array} \right\}$ は第 2 種の Christoffel の記号で、次のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta, \lambda \end{array} \right\} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_{\gamma,\beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_{\beta,\gamma} = - \mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{e}^\alpha, \beta \quad (2.3)$$

$$= \frac{1}{2} \alpha^{\lambda} (\alpha_{\lambda\beta,\gamma} + \alpha_{\lambda\gamma,\beta} - \alpha_{\beta\gamma,\lambda}) \quad (2.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta, 3 \end{array} \right\} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_{\gamma,\beta} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{n}, \beta = - \mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{e}^\alpha, \beta \quad (2.4)$$

$$= - \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}^\alpha, \beta = - b^\alpha, \beta \quad (2.4)$$

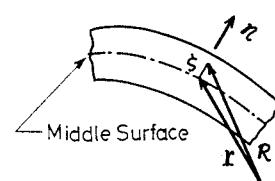


Fig. 1

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 理工学部建設基礎工学科

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \alpha\beta \end{array} \right\} = e^3 \cdot e_{\alpha,\beta} = -e_\beta \cdot e^3, \alpha = b_{\alpha\beta} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ \alpha 3 \end{array} \right\} = e^3 \cdot e_{3,\alpha} = n \cdot n, \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 33 \end{array} \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

また

$$e_\alpha \|_\beta = e_{\alpha,\beta} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \alpha\beta \end{array} \right\} e_\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

$$e^\alpha \|_\beta = e^\alpha, \beta + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\lambda \end{array} \right\} e^\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

は絶対微分と呼ばれ、Levi-Civita の意味で、基本ベクトルの平行性を示すものである。

さて、以上の基本ベクトルの微分公式を用いて、変形による回転角を求めよう。

変形前 R の位置にあった P 点が変形後 R^* に移ったとすると、変位ベクトルを u とすれば、

$$R^* = R + u \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

変形後の基本ベクトル e_i^* は次のようになる。

$$e_i^* = R^*, i = e_i + u^\alpha \|_i e_\alpha \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

いま、次のベクトル積を考える。

$$[e_i, e_i^*]$$

このベクトルは e_i, e_i^* に垂直で、大きさは

$$|e_i| |e_i^*| \sin \omega_{(ii)}$$

に等しい。

ここで、 $\omega_{(ii)}$ は e_i と e_i^* 間の角度、すなわち i 番目の座標軸の回転角である。

いま、大きさが $\omega_{(ii)}$ に等しく、方向は $[e_i, e_i^*]$ に一致するベクトルを

$$\vec{\omega}_{(ii)}$$

で表わそう。角度が微小である時は $\sin \omega_{(ii)} \approx \omega_{(ii)}$ であるから

$$\vec{\omega}_{(ii)} = \frac{[e_i, e_i^*]}{|e_i| |e_i^*|}$$

$$[e_i, e_i^*] = u^\alpha \|_i [e_i, e_\alpha] = \epsilon_{i\alpha\beta} u^\alpha \|_i e^\beta \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

$$|e_i| = \sqrt{g_{ii}} \text{ とおけば}$$

$$|e_i^*| = \sqrt{g_{ii}} \left(1 + \frac{\epsilon_{ii}}{g_{ii}} \right) \approx \sqrt{g_{ii}} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

であるから

$$\vec{\omega}_{(ii)} = \frac{\epsilon_{i\alpha\beta} u^\alpha \|_i e^\beta}{g_{ii}} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

ここで、 ϵ_{ii} は i 番目の座標軸の伸びひずみを表わす。

いま、

$$\vec{\omega}_{ii} = \epsilon_{i\alpha\beta} u^\alpha \|_i e^\beta \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

とすると

$$\vec{\omega}_{(ii)} = \frac{\vec{\omega}_{ii}}{\sqrt{g_{ii}}} \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

と表わされ、ここで導入したテンソルの物理成分は、こ

れに対応する座標曲線と一致する纖維の回転角ベクトルに等しい。

さらに、3階の混合テンソル

$$\omega^{ik} .. i = \epsilon^{i\alpha k} u_\alpha \|_i \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

の物理成分 $\omega_{(iki)}$ を考えると式 (2.15), (2.16) より “物理成分 $\omega_{(iki)}$ は i 番目の座標軸と一致する纖維の k 番目の座標軸まわりの回転と一致する”，ことがわかる。

一般には、回転角はある纖維から他の纖維へ移ると、変化する。

注目している点の近傍の回転の積分的な性質を与えるために、座標面の平均回転の概念を導入する。たとえば、座標面 $\alpha^3 = \zeta = \text{const.}$ の平均回転は、それぞれ、座標軸 α^1 と α^2 に平行な2個の纖維のくまわりの回転の和の半分とする。すなわち

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \frac{1}{2} (\omega^{13} .. 1 + \omega^{23} .. 2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{123} (u_2 \|_1 - u_1 \|_2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

他の座標面の平均回転も同様に定義すれば、導入した量は、物体点の近傍の回転角ベクトルの反変成分で、

$$\omega^k = \frac{1}{2} \omega^{\alpha k} .. \alpha = \frac{1}{2} \epsilon^{\beta \alpha k} u_\alpha \|_\beta \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

で表わされる。

したがって、回転角ベクトル $\vec{\omega}$ は

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \epsilon^{\beta \alpha k} u_\alpha \|_\beta e_k \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

となる。

板の場合、Kirchhoff-Love の仮定を用いると、中央面上においては

$$u_\alpha \|_3 = -u_3 \|_\alpha \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \vec{\omega}|_{\zeta=0} &= \vec{\omega} = -c^{\alpha\beta} u_3 \|_\alpha e_\beta + \frac{1}{2} c^{\beta\alpha} u_\alpha \|_\beta n \\ &= -c^{\alpha\beta} u_3 \|_\alpha e_\beta + \varrho_n n \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

ここで、

$$\varrho_n = \frac{1}{2} c^{\beta\alpha} u_\alpha \|_\beta \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

次に、 $\vec{\omega}$ の勾配を求めてみる。

$$r = e^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}$$

とすれば、

$$r \vec{\omega} = -c^{\alpha\beta} u_3 \|_\alpha e^i e_\beta + \varrho_n \|_i e^i n \quad \dots\dots\dots(2.24)$$

これは回転角ベクトルの変化率を表わすもので、曲率テンソルである。

この曲率テンソルの成分は、ひずみによって表わされる。たとえば $\varrho_n \|_r$ は次のように計算される。

^{*}) これ以後変位ベクトル u は、中央面上の点の変位を表わすものとする。

$$M = A_0 + B_0 \sin \theta + C_0 \cos \theta \\ + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R^2 P_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.8)$$

いまの場合、応力、変形状態は2軸対称であるから

$$B_0 = 0, \quad C_0 = 0, \quad m : \text{even}$$

したがって

$$M = A_0 + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R^2 P_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.9)$$

Σ' : even のみについて和をとる。

また、

$$T = P_0 R - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R P_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.10)$$

また閉じたリンクでは、回転角 φ は一価でなければならぬから

$$\oint \frac{d\varphi}{ds} d\theta = 0$$

フックの法則より

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{M}{EAR^2} + \frac{T}{EAR}$$

であるから

$$\oint \left(\frac{M}{EI} + \frac{M}{EAR^2} + \frac{T}{EAR} \right) d\theta = 0$$

これより

$$A_0 = - \frac{P_0 IR^2}{I + AR^2} \quad \dots \dots \dots \quad (4.11)$$

よって曲げモーメント M は

$$M = - \frac{P_0 IR^2}{I + AR^2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R^2 P_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.12)$$

したがって法線方向荷重 P によって生ずる曲率変化 $\kappa_{\theta\theta} R'$ と周方向ひずみ $\epsilon_{\theta\theta} R'$ は

$$\kappa_{\theta\theta} R' = \frac{M}{ERI} + \frac{M}{EAR^2} + \frac{T}{EAR} \\ = \frac{R^2}{ERI} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{P_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.13)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} R' = \frac{1}{ERA} \left(\frac{M}{R} + T \right) = \frac{P_0 R^3}{ERA(R^2 + I)} \quad (4.14)$$

ここで E_R : 捕強リングのヤング率

A : 捕強リングの断面積

I : 捕強リング断面の慣性モーメント

次に、接線方向荷重 q が作用する場合の変形を求める。 q も自己つりあい荷重でなければならぬので

$$q = \sum_{m=2}^{\infty} q_m \sin m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.15)$$

と表わすことができ、式 (4.6) は

$$\frac{d^3 M}{d\theta^3} + \frac{dM}{d\theta} = -R^2 q \quad \dots \dots \dots \quad (4.16)$$

となる。この解は

$$M = - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{R^2 q_m}{m(m^2 - 1)} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.17)$$

また、この場合の T は

$$T = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m R q_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.18)$$

したがって接線方向荷重 q が作用する場合の曲率変化 $\kappa_{\theta\theta} R''$ と $\epsilon_{\theta\theta} R''$ は

$$\kappa_{\theta\theta} R'' = - \frac{R^2}{ERA} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m(m^2 - 1)} \cos m\theta \\ + \frac{1}{ERA} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.19)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} R'' = \frac{R}{ERA} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.20)$$

したがって p, q が同時に作用する場合は

$$\kappa_{\theta\theta} R = \kappa_{\theta\theta} R' + \kappa_{\theta\theta} R'' \\ = \frac{R^2}{ERI} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{P_m}{m^2 - 1} \cos m\theta \right. \\ \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m(m^2 - 1)} \cos m\theta \right\} \\ + \frac{1}{ERA} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m} \cos m\theta \quad \dots \dots \dots \quad (4.21)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} R = \epsilon_{\theta\theta} R' + \epsilon_{\theta\theta} R'' \\ = \frac{R}{ERA} \left(\frac{P_0 AR^2}{I + AR^2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{q_m}{m} \cos m\theta \right) \quad \dots \dots \dots \quad (4.22)$$

(2) 円孔をもつ無限板の応力と変形

2次元問題における Airy の応力関数は周知のように表わされる。

$$F = Re[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$$

円孔をもつ無限円板の場合、領域内で正則な関数 $\varphi(z), \psi(z) = z'(z)$ は

$$\varphi(z) = \varphi^0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$$

$$\psi(z) = \psi^0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} z^{-k}$$

となる。ここで $\varphi^0(z), \psi^0(z)$ は孔のない無限板の一様引張りの場合の解を表わす。

a_{-k}, b_{-k} は一般に複素数であるが、この問題の場合実数であることが後でわかる。

Fig. 3 のような一方向の一様引張りの場合には

$$\varphi^0(z) = \frac{P}{4}z$$

$$\psi^0(z) = -\frac{P}{2}z$$

と表わされ、また板の各応力成分 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$ は $\varphi(z), \psi(z)$ によって次のように表わされる。

$$\sigma_{rr} = 2Re[\varphi'(z)] - Re[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]e^{2iz}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2Re[\varphi'(z)] + Re[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]e^{2iz}$$

$$\tau_{r\theta} = I_m [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]e^{2iz}$$

$z = re^{i\theta}$ とおけば

$$\sigma_{rr} = Re \left[\frac{P}{2} + \frac{P}{2}e^{2iz} \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+3)a_{-k} r^{-(k+1)} e^{-(k+1)i\theta} \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} kb_{-k} r^{-(k+1)} e^{-(k-1)i\theta} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= Re \left[\frac{P}{2} - \frac{P}{2} e^{i\theta} \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) a_{-k} r^{-(k+1)} e^{-(k+1)i\theta} \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} k b_{-k} r^{-(k+1)} e^{-(k-1)i\theta} \right] \quad \dots \dots \dots (4.24) \\ \tau_{r\theta} &= Im \left[-\frac{P}{2} e^{i\theta} \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{-k} r^{-(k+1)} e^{-(k+1)i\theta} \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} k b_{-k} r^{-(k+1)} e^{-(k-1)i\theta} \right] \quad \dots \dots \dots (4.25)\end{aligned}$$

次に板における変形 $\varepsilon_{\theta\theta}^P$ と $\kappa_{\theta\theta}^P$ を求めよう。一様引張りの場合、変形による曲率変化は面内曲率変化だけであるから、これを計算する。

$\alpha^1 = r$, $\alpha^2 = \theta$ とすれば θ 曲線に沿う面内曲率変化 $\kappa_{\theta\theta}^P$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}r \kappa_{\theta\theta}^P &= \Omega^2 \cdot_{2,2} \cdot n \\ &= -c^{12} \varepsilon_{12} \|_2 - c^{21} \varepsilon_{22} \|_1 + (c^{21} \varepsilon_{21})_{,2} \\ &= -2 \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + r \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr} \\ \therefore \kappa_{\theta\theta}^P &= -\frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}}{r} \quad \dots \dots \dots (4.26)\end{aligned}$$

さてフックの法則よりこれらの変形量を応力成分で表わしてみる。

$$\begin{aligned}2 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} \\ \varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2G} (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})\end{aligned}$$

したがって円孔周線上では、

$$\begin{aligned}\kappa_{\theta\theta}^P &= -\frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{G_P} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{E_P} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2G_P} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right\} \quad \dots \dots \dots (4.27)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^P = \frac{1}{E_P} (\sigma_{\theta\theta} - \nu \sigma_{rr}) \quad \dots \dots \dots (4.28)$$

ここで、 R ：円孔の半径

$$r = R(1+\xi) \quad \dots \dots \dots (4.29)$$

とする。

(3) 接合条件

以上、補強リングと無限板の応力、変形の諸量を用いて接合線上における応力、変形の連続条件を求めよう。

応力連続条件

$$\begin{aligned}P^R &= P_0 + \sum_{m=2}^{\infty} P_m \cos m\theta \\ &= h \sigma_{rr} \Big|_{r=R} \\ &= h \left\{ \frac{P}{2} (1 + \cos 2\theta) \right. \\ &\quad \left. + Re \left[- \sum_{k=1}^{\infty} k(k+3) a_{-k} R^{-(k+1)} e^{-(k+1)i\theta} \right. \right.\end{aligned}$$

$$\left. \left. e^{-(k-1)i\theta} \right] \right\} \quad \dots \dots \dots (4.30)$$

$$\begin{aligned}q^R &= \sum_{m=2}^{\infty} q_m \sin m\theta \\ &= h \tau_{r\theta} \Big|_{r=R} \\ &= h \left\{ -\frac{P}{2} \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + Im \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{-k} R^{-(k+1)} e^{-(k+1)i\theta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k R^{-(k+1)} e^{-(k-1)i\theta} \right] \right\} \quad \dots \dots \dots (4.31)\end{aligned}$$

h : 板厚

ここで両辺の係数 P_m , q_m と a_{-k} , b_{-k} を比較してみると P_m , q_m が実数であるから、 a_{-k} , b_{-k} も実数であることがわかる。

したがって板からリングに作用する荷重は

$$\begin{aligned}P^R &= h \left\{ \frac{P}{2} (1 + \cos 2\theta) \right. \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+3) a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} k b_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \right\} \\ &= h \left\{ \frac{P}{2} (1 + \cos 2\theta) + b_{-1} R^{-2} + 2b_{-2} R^{-3} \cos \theta \right. \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+3) a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \\ &\quad \left. + \sum_{k=3}^{\infty} k b_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \right\} \quad \dots \dots \dots (4.32)\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}q^R &= h \left\{ -\frac{P}{2} \sin 2\theta + 2b_{-2} R^{-3} \sin \theta \right. \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{-k} R^{-(k+1)} \sin(k+1)\theta \\ &\quad \left. + \sum_{k=3}^{\infty} k b_{-k} R^{-(k+1)} \sin(k-1)\theta \right\} \quad \dots \dots \dots (4.33)\end{aligned}$$

前に述べたように、リングに作用する荷重は自己つりあいでなければならぬから、

$$b_{-2} = 0 \quad \dots \dots \dots (4.34)$$

また式 (4.23)～(4.25)において、 $r=R$ とおき式 (4.27), (4.28) に代入することにより、板の円孔周線上での曲率変化 $\kappa_{\theta\theta}^P$ 、伸びひずみ $\varepsilon_{\theta\theta}^P$ を得る。

途中の計算は省略するが、最終的な結果は次のようになる。

$$\begin{aligned}\kappa_{\theta\theta}^P &= -\frac{1}{G_P R} \left\{ -\frac{P}{2} \cos 2\theta \right. \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} (k+1) \left(k + \frac{5+\nu}{1+\nu} \right) a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2} (k-1) b_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \right\} \quad \dots \dots \dots (4.35)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^P = \frac{1}{E_P} \left\{ \frac{P}{2} (1-\nu) - \frac{P}{2} (1+\nu) \cos 2\theta \right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k \{(1+\nu)k + (3\nu-1)\} a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \\ - \sum_{k=1}^{\infty} (1+\nu)kb_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \dots \dots (4.36)$$

次に式(4.21), (4.22)に式(4.32), (4.33)を代入してリングの曲率変化 $\kappa_{\theta\theta}^R$ と伸びひずみ $\epsilon_{\theta\theta}^R$ を得る。

$$\kappa_{\theta\theta}^R = \frac{hR^2}{E_R I} \left\{ \frac{P}{4} \cos 2\theta - \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \right. \\ \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k-1} b_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \right\} \\ + \frac{h}{E_R A} \left\{ -\frac{P}{4} \cos 2\theta - \sum_{k=1}^{\infty} k a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \right. \\ \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k-1} b_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \right\} \dots (4.37)$$

$$\epsilon_{\theta\theta}^R = \frac{hR^3}{E_R(I+AR^2)} \left(\frac{P}{2} + \frac{b_{-1}}{R^2} \right) + \frac{hR}{E_R A} \left\{ -\frac{P}{4} \cos 2\theta \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} k a_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k+1)\theta \right. \\ \left. + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{k-1} b_{-k} R^{-(k+1)} \cos(k-1)\theta \right\} \dots (4.38)$$

式(4.35)と式(4.37), (4.36)と式(4.38)を等置して、未定係数 a_{-k} , b_{-k} を定める。

まず、周方向ひずみの $\epsilon_{\theta\theta}$ の等式において、定数項を比較して、

$$\frac{1}{E_P} \left\{ \frac{P}{2}(1-\nu) - (1+\nu) \frac{b-1}{R^2} \right\} \\ = \frac{hR^3}{E_R(I+AR^2)} \left(\frac{P}{2} + \frac{b_{-1}}{R^2} \right)$$

いま、補強リングと無限円板の弾性係数が同じであるとすれば、 $E_P = E_R$ として

$$b_{-1} = \frac{(1-\nu)(I+AR^2) - hR^3}{(1+\nu)(I+AR^2) + hR^3} \cdot \frac{P}{2} R^2 \dots \dots (4.39)$$

次に $\cos 2\theta$ の係数を比較する。

周方向ひずみ等式より

$$a_{-1} \left(\frac{4\nu}{E_P R^2} + \frac{h}{E_R A R} \right) + b_{-3} \left\{ -\frac{3(1+\nu)}{E_P R^4} - \frac{3h}{2R^3 E_R A} \right\} \\ = \frac{(1+\nu)}{2E_P} P - \frac{hR}{4E_R A} P$$

曲率変化の等式より

$$a_{-1} \left\{ -\frac{h}{E_R I} - \frac{h}{E_R A R^2} - \frac{4(3+\nu)}{E_P R^3} \right\} \\ + b_{-3} \left\{ \frac{h}{2E_R I R^2} + \frac{3h}{2E_R A R^4} + \frac{6(1+\nu)}{E_P R^5} \right\} \\ = \frac{(1+\nu)}{E_P R} P - \frac{hR^2}{4E_R I} P + \frac{h}{4E_R A} P$$

前と同様補強リングと無限板が同じ材料でできている場合は

$$a_{-1} = \frac{-12(1+\nu)^2 AI + (1+\nu) AR^3 h - 3(1+\nu) IRh + R^4 h^2}{12(1+\nu)(3-\nu) AI + (3+\nu) AR^3 h + 3(5-\nu) IRh + R^4 h^2} \frac{P}{2} R^2 \dots \dots (4.40)$$

$$b_{-3} = \frac{-12(1+\nu)^2 AI - (1-\nu) AR^3 h + 3(1-\nu) IRh + R^4 h^2}{12(1+\nu)(3-\nu) AI + (3+\nu) AR^3 h + 3(5-\nu) IRh + R^4 h^2} \frac{P}{2} R^4 \dots \dots (4.41)$$

$\cos n\theta (n \geq 3)$ の係数を比較すると、

周方向ひずみ等式より

$$a_{-n+1} \left[-(n-1) \frac{hR^{-n+1}}{E_R A} \right. \\ \left. - (n-1) \{(n+2)\nu + (n-2)\} \frac{R^{-n}}{E_P} \right] \\ + b_{-(n+1)} \left\{ \frac{n+1}{n} \cdot \frac{hR^{-(n+1)}}{E_R A} \right. \\ \left. + (1+\nu)(n+1) \frac{R^{-(n+2)}}{E_P} \right\} = 0$$

曲率変化等式より

$$a_{-n+1} \left\{ -\frac{hR^{-n+2}}{E_R I} - \frac{(n-1)hR^{-n}}{E_R A} \right. \\ \left. - n(n-1) \left(n + \frac{4}{1+\nu} \right) \frac{(1+\nu)R^{-(n+1)}}{E_P} \right\} \\ + b_{-(n+1)} \left\{ \frac{1}{n} \cdot \frac{hR^{-n}}{E_R I} + \frac{n+1}{n} \cdot \frac{hR^{-(n+2)}}{E_R A} \right. \\ \left. + n(n+1) \frac{(1+\nu)R^{-(n+3)}}{E_P} \right\} = 0$$

この同次方程式の係数行列は 0 でないので、 a_{-n+1} , $b_{-(n+1)} (n \geq 3)$ はすべて 0 であることがわかる。

こうして関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ の係数はすべて決定される。

(4) 数値計算例

a) 板の応力

板の応力の計算は、次の 4 個の場合について行なう。

リングの高さ (H) 100 mm 100 mm 100 mm

リングの厚さ (t) 6 mm 9 mm 13 mm

円孔の半径 (R) 75 mm 75 mm 75 mm

およびリングの剛性が無限大の場合とある。式(4.23)～(4.25)より、板の各応力成分は次式で表わされる。

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2} + b_{-1} r^{-2} + \frac{P}{2} \cos 2\theta \\ - 4a_{-1} r^{-2} \cos 2\theta + 3b_{-3} r^{-4} \cos 2\theta \dots \dots (4.42)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2} - b_{-1} r^{-2} - \frac{P}{2} \cos 2\theta - 3b_{-3} r^{-4} \cos 2\theta \dots \dots (4.43)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{2} \sin 2\theta - 2a_{-1} r^{-2} \sin 2\theta + 3b_{-3} r^{-4} \sin 2\theta \dots \dots (4.44)$$

① リングの厚さ 6 mm の場合

$$h = 0.6 \text{ cm}, t = 0.6 \text{ cm}, R = 7.5 \text{ cm}$$

$$A = 0.6 \times 10 = 6 \text{ cm}^2, D = 0.3$$

$$I = \frac{1}{12} \times 10 \times 0.6^3 = 0.180 \text{ cm}^4$$

$$a_{-1} = \frac{-12(1+\nu)^2 AI + (1+\nu) AR^3 h - 3(1+\nu) IRh + R^4 h^2}{12(1+\nu)(3-\nu) AI + (3+\nu) AR^3 h + 3(5-\nu) IRh + R^4 h^2} \frac{P}{2} R^2 \dots \dots (4.40)$$

$$b_{-3} = \frac{-12(1+\nu)^2 AI - (1-\nu) AR^3 h + 3(1-\nu) IRh + R^4 h^2}{12(1+\nu)(3-\nu) AI + (3+\nu) AR^3 h + 3(5-\nu) IRh + R^4 h^2} \frac{P}{2} R^4 \dots \dots (4.41)$$

長方形断面の場合には、

$$K = \frac{\rho}{t} \ln \frac{\rho+t/2}{\rho-t/2} - 1 \\ \div \frac{1}{3} \left(\frac{t}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{t}{2\rho} \right)^4 + \dots \quad \dots \dots (4.59)$$

であるから、

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \frac{T}{A} + \frac{M}{A\rho} \left\{ 1 + \frac{t/2}{K(\rho+t/2)} \right\} \quad \dots \dots (4.60)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \frac{T}{A} + \frac{M}{A\rho} \left\{ 1 - \frac{t/2}{K(\rho+t/2)} \right\} \quad \dots \dots (4.61)$$

ここで、

$\sigma_{\theta\theta}^0$ ：補強リング外面側での周方向曲げ応力

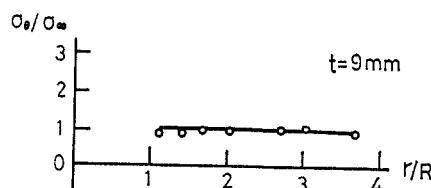


Fig. 4 Stress Distribution at $\theta = \pi/2$

Comparisons of the Theoretical Curves and the Measured Values

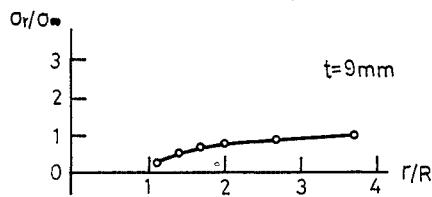


Fig. 5 Stress Distribution at $\theta = 0$

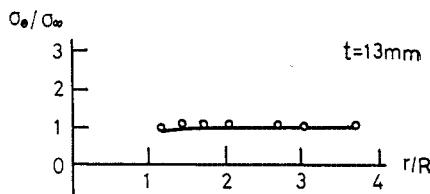


Fig. 6 Stress Distribution at $\theta = \pi/2$

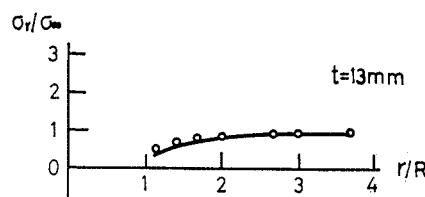


Fig. 7 Stress Distribution at $\theta = 0$

Stress Distribution on the Outer Surface of the Ring

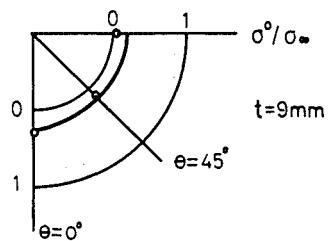


Fig. 8

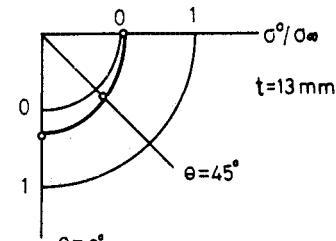


Fig. 10

Stress Distribution on the Inner Surface of the Ring

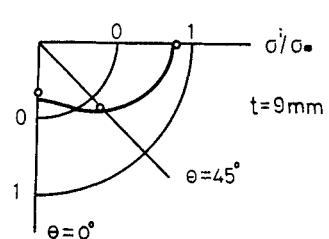


Fig. 9

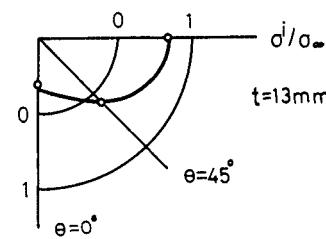


Fig. 11

$\sigma_{\theta\theta}^i$ ：補強リング内面側での周方向曲げ応力

以下、3つの場合について、補強リングの周方向曲げ応力を計算する。

① リングの厚さ 6 mm の場合

$\rho = 7.2\text{cm}$, $t = 0.6\text{cm}$, $A = 6\text{cm}^2$ として、

$$M = (-0.0088 + 0.101 \cos 2\theta) \times P \quad \dots \dots (4.62)$$

$$T = (2.103 - 2.141 \cos 2\theta) \times P \quad \dots \dots (4.63)$$

また、式 (4.59) より、

$$K = 0.00058$$

これらの値を式 (4.60), (4.61) に代入すれば、補強

リングの応力が得られる。

② リングの厚さが 9 mm の場合

$$\rho = 7.05 \text{ cm}, t = 0.9 \text{ cm}, A = 9 \text{ cm}^2 \text{ として,}$$

式 (4.48) を式 (4.57), (4.58) に代入すれば,

$$M = (-0.0225 + 0.337 \cos 2\theta) \times P \dots\dots\dots(4.64)$$

$$T = (2.350 - 2.248 \cos 2\theta) \times P \dots\dots\dots(4.65)$$

式 (4.59) より,

$$K = 0.00136$$

③ リングの厚さ 13 mm の場合

$$\rho = 6.85 \text{ cm}, t = 1.3 \text{ cm}, A = 13 \text{ cm}^2 \text{ として,}$$

式 (4.51) を式 (4.57), (4.58) に代入して,

$$M = (-0.0512 + 0.901 \cos 2\theta) \times P \dots\dots\dots(4.66)$$

$$T = (2.499 - 2.310 \cos 2\theta) \times P \dots\dots\dots(4.67)$$

上記の計算結果のうち、代表的なものを実験結果とともに Fig. 4~Fig. 11 に示す。

5. 結 論

接合線に沿って、接線、これに直交する接平面内の法線、接平面に対する法線、方向の直交曲線座標系を考え、これについての変形量を計算して、連続条件を用いた。

計算結果*), 実験結果より、これらはかなりの精度をもって一致していることがわかる。

構造物の形態より、接合線の形が定まるが、上記の直交座標系に関する基本ベクトルが与えられれば、前記の理論はこれに関する不变量を対象としているので、全く同じ方法で、他の場合における相互作用が計算できる。

今回はもっとも簡単な平面曲線（円）について計算を行なったが、さらに複雑な空間曲線の場合についても、計算を行ないたい。

終りに、有益なご助言を頂いた東京大学 奥村敏恵先生および、数値計算、図作成、実験に際し助力を頂いた飯塚嘉雄（日本国土開発（株））、大条光太郎（大成建設（株））、腰越貞次（千葉県）、福井為佐栄（桜井鉄工（株））の諸氏に感謝致します。

*) 式(4.39)～(4.41) は [3] pp. 67～68 の結果と一致する。

記 号

• : スカラー積

× : ベクトル積

α^1, α^2 : 中央面上の曲線座標

r : 中央面上の位置ベクトル

$$,k = \frac{\partial}{\partial \alpha^k}$$

$$e_k = R_{,k}$$

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j$$

$$[e_i, e_j] = e_i \times e_j$$

$a_{ij} = g_{ij}|_{\zeta=0} = r_{,i} \cdot r_{,j}$ 中央面上の第一種基本計量
テンソル

$$a = |a_{ij}| = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2$$

$$g = |g_{ij}|$$

$$\epsilon_{ijk} = [e_i, e_j, e_k] = (e_i \times e_j) \cdot e_k$$

指標 i, j, k について反対称な discriminant tensor

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{213} = \sqrt{g}$$

$$c_{ij} = \epsilon_{ij3}|_{\zeta=0} = [e_i, e_j, n]|_{\zeta=0}$$

$$c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}$$

$$\epsilon_{ij3} = \sqrt{\frac{g}{a}} c_{ij}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} m \\ kl \end{array} \right\} = \frac{1}{2} a^{mp} (a_{jp,k} + a_{kp,l} - a_{kl,m}) \text{ Christoffel の}$$

記号

δ^{ij} : Kronecker のデルタ

a^{kl} : a_{kl} に対して相逆なテンソル

すなわち

$$a^{kp} a_{pl} = \delta^{kp}$$

参 考 文 献

- Chernykh, K.F. : "Linear Theory of Shells," I, II, Leningrad Univ. Press.
- Green, A.E. and Zerna, W. : "Theoretical Elasticity," Oxford, 1963.
- Scheremet'ev, M.P. : "Plates with Stiffened Edges," L'vovski Univ. Press, 1960.

(1971.6.21
1972.2.4・受付)