

軸力の影響を考慮した平面剛、滑節構造物 の一自動弾塑性解析

AN AUTOMATIC ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF PLANE STRUCTURES
CONSIDERING THE EFFECT OF AXIAL FORCE

星 治 雄*・児 嶋 弘 行**・平 尾 潔***

By Haruo Hoshi, Hiroyuki Kojima and Kiyoshi Hirao

1. はしがき

塑性流動条件を考慮した、2 軸組合せ応力をうける棒構造物の塑性解析としては、曲げとねじりの組合せを考えた格子構造物に対する J. Heyman¹⁾, R. Hill & M.P.L. Siebel²⁾ の研究とか、曲げと軸力の組合せを考えた 2 ヒンジアーチに対する E.T. Onat & W. Prager³⁾ の著名な研究があり、わが国でも米沢・三上^{4), 5)} の格子構造物に対する研究、前田・藤本⁶⁾ の 2 ヒンジアーチにに対する研究、あるいは、若林・野中・林⁷⁾ のラーメンにに対する研究など数年来この方面的研究もかなり行なわれるようにになった。しかしながら、これらの研究は特殊な構造物を対象としたものが多く、解析方法も機構法であるため、1) 崩壊の途中経過が不明である、2) 複雑な構造物では真の崩壊形式を見出すことが困難である、3) 電子計算機が利用しにくい、などの改良すべき点が考えられる。このような点を改良するためには内力追跡法による解析が適当と思われるが、内力追跡法に塑性流動条件を導入した場合、降伏条件式が組合せ応力の一次式となるとき以外は降伏断面における応力-ひずみの関係が非線形となり解析がかなり複雑になるためこの種の研究例はあまり見当たらない⁸⁾。著者らはさきに 2 軸組合せ応力をうける平面剛、滑節構造物と格子構造物を対象とした、内力追跡法による近似弾塑性解析について報告した^{9), 10)}が、これらは、ある断面の応力状態が降伏条件を満足した時点で同時に 2 軸方向の剛性を失うとする仮定に基づくもので、塑性流動条件を無視した不完全なものである。したがって、その解析結果は一軸応力状態を仮定した場合の結果とかなり異なり、その傾向は組合せ応力の一方が小さい場合に顕著であった。

以上のようなことから著者らは降伏条件式に組合せ応力を考え、塑性流動理論を導入した場合の弾塑性解析に対する基礎的研究として、文献 8) の線形近似の手法を参考にし、上記 9) の近似解析の修正を兼ねて、塑性流動条件を考慮した場合の一般的な平面剛、滑節構造物に対する内力追跡法による弾塑性解析について研究し、初期の input data を与えるだけで電子計算機が自動的に崩壊過程を追跡し、必要な演算結果を out put するような解析プログラムの作成をこころみ一応の成果を得た注)。以下に解析上の仮定、線形近似の方法、降伏端部材に対する基本式の誘導、解析手順および解析プログラムなどについて述べ、二、三の計算例を紹介し、上記 9) の近似解析との比較検討を行なう。

2. 解析上の仮定

本文の解析に用いた仮定は次のようである。

- 1) 材料は完全弾塑性体で、理想化された応力-ひずみ曲線をもつものとし、ひずみ硬化は無視する。
- 2) 材料の応力-ひずみ特性は時間に独立とし、塑性流動理論における応力速度増分とひずみ速度増分の関係を応力増分とひずみ増分の関係におきかえて考える。
- 3) 断面の形状係数は 1 とし、塑性域の部材軸方向の拘がりは無視する。
- 4) 降伏条件式には曲げモーメントと軸力の組合せだけを考え、せん断力の影響は考慮しない。
- 5) 崩壊機構が完成するまでに部分的、あるいは、全体的な不安定現象は生じないものとする。
- 6) 荷重としては漸増節点荷重だけを考え、変形に伴う幾何学的变化は無視する。

* 正会員 工博 近畿大学教授 理工学部土木工学科
** 正会員 工修 徳島大学助教授 工学部土木工学科
*** 正会員 工修 徳島大学助手 工学部土木工学科

注) 第 26 回土木学会年次学術講演会で一部発表、昭和 46 年 10 月、I-43

3. 降伏条件式および塑性流動理論

(1) 降伏条件式

本文の解析で採用した、矩形、対称 I 形（箱桁）およびパイプの 3 断面形に対する、曲げと軸力の組み合せを考えた場合の降伏条件式は以下のようである。

a) 矩形

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = 1 - \left(\frac{N}{N_p} \right)^2, \quad (0 \leq |N| \leq N_p) \dots (1)$$

b) 対称 I 形（箱桁）

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = 1 - 1.70 \left(\frac{N}{N_p} \right)^2, \quad (0 \leq |N| \leq 0.22636 N_p) \dots \dots \dots (2)$$

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = 1.18 \left(1 - \left| \frac{N}{N_p} \right| \right), \quad (0.22636 N_p < |N| \leq N_p) \dots \dots \dots (3)$$

c) パイプ

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = 1 - 1.15 \left(\frac{N}{N_p} \right)^2, \quad (0 \leq |N| \leq 2 N_p/\pi) \dots \dots \dots (4)$$

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = 1.47 \left(1 - \left| \frac{N}{N_p} \right| \right), \quad (2 N_p/\pi < |N| \leq N_p) \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 M_p : 全塑性モーメント、 N_p : 全塑性軸力、 M : 降伏閾値における曲げモーメント、 N : 降伏閾値における軸力、 π : 円周率。

ただし、矩形断面に対する式(1)は厳密解によるものであり、対称 I 形（箱桁）断面に対する式(2)、(3)は近似式である。この対称 I 形（箱桁）断面についても厳密解が誘導されており¹⁴⁾、本来ならば、これらの厳密解による降伏条件式を使用すべきであるが、本文では、後述の解析プログラムにおける input data の数が各断面形の場合とも同一となるように、式(2)、(3)の近似式を採用した。ただ、式(2)は中立軸がウェブ内にある場合の厳密解¹⁴⁾、式(2)' に既成の I 形鋼の w 、 Z 、 A の値を代入し、係数 $A^2/4wZ$ の平均値を求めた近似式である。

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = 1 - \frac{A^2}{4wZ} \left(\frac{N}{N_p} \right)^2 \dots \dots \dots (2)'$$

ここで、 A : 断面積、 Z : 塑性断面係数、 w : ウェブ厚。

また、パイプ断面についても、矩形および対称 I 形断面の場合と同様にして、次のような厳密解、式(3)' が得られる⁹⁾が、この式(3)' の形では内力追跡法における

$$\left| \frac{M}{M_p} \right| = \cos \left(\frac{\pi N}{2 N_p} \right), \quad \pi: 円周率 \dots \dots \dots (3)'$$

各段階での荷重倍数 k を繰り返し計算で求める必要があ

り、多くの演算時間を要するため、試算により、式(1)～(3)に類似した、近似式(4)、(5)を採用した。

(2) 塑性流動理論

文献 11) では塑性流動理論を一般化した応力とそれに対応する一般化したひずみの関係について述べているが、本文ではこれらの関係を、文献 8)、15) と同様に、後述する諸式の表現および誘導が簡単になるように直接応力 (M, N) とそれに対応する直接ひずみ (θ, δ_ξ) の関係におきかえて考える。

直接応力による降伏条件式、式(1)～(5)を $f(M, N) = C$ と表わし、横軸に M 、縦軸に N をとって図示すれば、一般に、図-1 のような原点を内部に持つ閉曲線（または直線）となり、断面の応力点がこの曲線の内部にあれば弾性的に挙動し、曲線上にあるときには塑性流れが起りうる。そして、応力点はこの曲線の外へ出ることはできない。さらに、 M, N に対応する塑性変形を θ^P, δ_ξ^P とし、図-1 のようにそれぞれの軸を一致させて考えると式(6)のような成分 θ^P, δ_ξ^P をもつ、塑性変形ベクトル δ^P を応力点 (M, N) から常に引くことができる。

$$\delta^P = \mu \cdot N \dots \dots \dots (6)$$

ただし、

$$\delta^P = \{\delta_\xi^P \ 0 \ \theta^P\}^T, \quad N = \{\partial f / \partial N \ 0 \ \partial f / \partial M\}^T \dots \dots \dots (7)$$

ここで、 μ : 流れ定数（正のスカラー量）、 N : 応力点 (M, N) における外向き法線ベクトル。

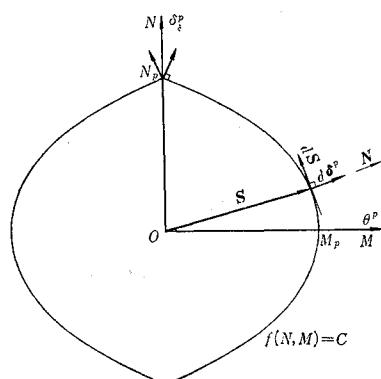


図-1 降伏曲線と流れ法則

一方、完全塑性材料では、降伏断面がその後の荷重増加に対して塑性を持続するためには、降伏断面の応力 (M, N) は降伏曲線上を移動（もしくは静止）する必要があり、したがって、降伏直後の微少な荷重増加に対する応力増分ベクトルの方向は降伏点における接線方向と一致し、次のような直交条件式、式(8)が成立する。

$$N^T \cdot dS = \partial f / \partial N \cdot dN + \partial f / \partial M \cdot dM = 0 \quad (8)$$

4. 線形近似の方法

3) 述べたように、降伏断面における応力-ひずみ(変形)の関係は、その後の荷重増加に對しては非線形となり、解析が複雑となるため、本文の解析では文献8)による線形近似の方法を採用した。図-2により降伏断面*i*におけるこの線形近似の手順を紹介しておけば次のようである。

1) 降伏曲線上の*i*点(断面*i*における応力点)における法線ベクトル*N_i*、応力の増分ベクトル*dS_i*の方向を決定する。

2) あらかじめ定められた値*h*によって、断面*i*の応力ベクトル*S_i*を次の式(9)にしたがって*dS̄_i*だけ降伏曲線の内側へ移動させる。

$$N_i^T \cdot d\bar{S}_i = -h \quad \dots \dots \dots (9)$$

3) 断面*i*の応力ベクトル*dS_i*は降伏後の荷重増加に対しては、*i*点における接線に平行な、直線*jk*にそって変化するものとし、これが*k*点に達するまでは断面*i*の塑性変形増分ベクトル*dδ_i^P*の方向は*N_i*の方向と一致し、式(8)に相当する直交条件式、式(10)が成立するものと考える。

$$N_i^T \cdot dS_i = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

4) 応力点*k*についても*i*点におけると同様に1)～3)の手順を繰返す。

以上の1)～4)の手順を各降伏断面で繰返すことにより、非線形解析を線形解析におきかえることができる。

5. 変形法の基本式

本文では内力追跡法の計算手段として変形法を使用したが、塑性流動条件を導入したことにより降伏断面端を有する部材の基本式を新たに誘導しておく必要が生じた。以下にその誘導方法を示し、各種の材端条件に応じた基本式のstiffness matrixを紹介する。

(1) 基本式の誘導

図-3のように、部材軸とξ軸を一致させたξ-η系に対する材端力*S*と材端変形量*δ*との間には一般に次

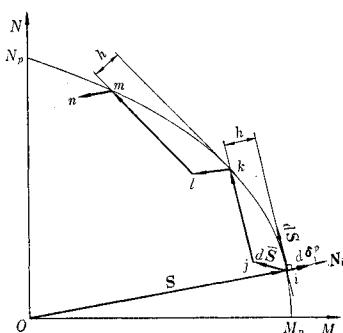


図-2 降伏断面における材端力の変化

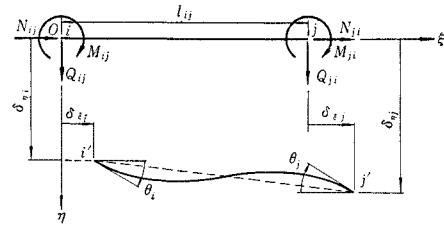


図-3 ξ-η系に対する材端力および変形量の正方向

の式(11)の関係がある。

$$S_i = K_i \cdot \delta_i + K_j \cdot \delta_j \quad \dots \dots \dots (11)$$

ここで、

$$S_i = \{N \ Q \ M\}_{ij}^T, \ \delta_i = \{\delta_\xi \ \delta_\eta \ \theta\}_i^T,$$

$$\delta_j = \{\delta_\xi \ \delta_\eta \ \theta\}_j^T \quad \dots \dots \dots (12)$$

であり、*K_i*、*K_j*はstiffness matrixである。

いま、両端剛節部材*ij*の*i*端に降伏断節が発生したものと仮定すれば、その後の微少な荷重増加に対する降伏端*i*の変形量の増分*dδ_i*は弾性増分*dδ_i^e*と塑性増分*dδ_i^P*に分解され、次の式(13)のように表わされる。

$$d\delta_i = d\delta_i^e + d\delta_i^P = d\delta_i^e + \mu_i \cdot N_i \quad \dots \dots \dots (13)$$

ここで、*μ_i*、*N_i*は前述のような降伏端*i*における流れ定数および外向き法線ベクトルであり、

$$\alpha_i = (\partial f / \partial N)_i, \ \beta_i = (\partial f / \partial M)_i \quad \dots \dots \dots (14)$$

とおけば*N_i*は次の式(15)のように表わされる。

$$N_i = \{\alpha \ 0 \ \beta\}_i^T \quad \dots \dots \dots (15)$$

したがって、この場合の材端力の増分*dS_i*は式(11)に両端における弾性変形増分*dδ_i^e*、*dδ_j*を代入すれば次の式(16)のように求まる。

$$dS_i = K_i \cdot d\delta_i + K_j \cdot d\delta_j - K_i \cdot \mu_i \cdot N_i \quad \dots \dots \dots (16)$$

次に、降伏端*i*に直交条件式、式(8)を適用し、流れ定数*μ_i*を求めるところ式(17)のようになる。

$$\mu_i = (N_i^T \cdot K_i \cdot \delta_i + N_i^T \cdot K_j \cdot \delta_j) \cdot T_i \quad \dots \dots \dots (17)$$

ただし、

$$T_i = (N_i^T \cdot K_i \cdot N_i)^{-1} \quad \dots \dots \dots (18)$$

この*μ_i*を式(16)に代入し、整理すれば、式(11)と同様な*dS*と*dδ*の関係が次の式(19)のように得られる。

$$dS_i = K_i' \cdot d\delta_i + K_j' \cdot d\delta_j \quad \dots \dots \dots (19)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} K_i' &= K_i \cdot (I - N_i \cdot N_i^T \cdot K_i \cdot T_i) \\ K_j' &= (I - K_i \cdot N_i \cdot N_i^T \cdot T_i) \cdot K_j \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (20)$$

ただし、*I*=単位行列。

以上は*i*端降伏、*j*端剛節部材に対する基本式の誘導方法であったが、その他の材端条件の場合にもこれと同様に誘導される。

(2) stiffness matrix

本文の解析に用いた stiffness matrix を各種の材端条件に応じて示せばそれぞれ次のようである。

a) i, j 両端剛節部材

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{bmatrix}_{ij}, \quad \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & c \\ 0 & -c & d' \end{bmatrix}_{ij} \quad \dots \quad (21)$$

b) i 端剛節, j 端滑節部材

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & c' & d'' \end{bmatrix}_{ij}, \quad \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b' & 0 \\ 0 & -c' & 0 \end{bmatrix}_{ij} \quad \dots \quad (22)$$

c) i 端滑節, j 端剛節部材

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij}, \quad \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b' & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \quad \dots \quad (23)$$

d) i 端降伏, j 端剛節部材

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} ad\beta_i^2 & -ac\alpha_i\beta_i & -ad\alpha_i\beta_i \\ -ac\alpha_i\beta_i & b/T_i - c^2\beta_i^2 & ac\alpha_i^2 \\ -ad\alpha_i\beta_i & ac\alpha_i^2 & ad\alpha_i^2 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_i \\ \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -ad\beta_i^2 & ac\alpha_i\beta_i & -ad'\alpha_i\beta_i \\ ac\alpha_i\beta_i & -(b/T_i - c^2\beta_i^2) & c(1/T_i - d'\beta_i^2) \\ ad\alpha_i\beta_i & -ac\alpha_i^2 & ad'\alpha_i^2 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_i \end{array} \right\} T_i = (a\alpha_i^2 + d\beta_i^2)^{-1} \quad (24)$$

e) i 端剛節, j 端降伏部材

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} ad\beta_j^2 & ac\alpha_j\beta_j & ad'\alpha_j\beta_j \\ ac\alpha_j\beta_j & b/T_j - c^2\beta_j^2 & c(1/T_j - d'\beta_j^2) \\ ad'\alpha_j\beta_j & c(1/T_j - d'\beta_j^2) & d/T_j - d'^2\beta_j^2 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_j \\ \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -ad\beta_j^2 & -ac\alpha_j\beta_j & ad\alpha_j\beta_j \\ -ac\alpha_j\beta_j & -(b/T_j - c^2\beta_j^2) & ac\alpha_j^2 \\ -ad'\alpha_j\beta_j & -c(1/T_j - d'\beta_j^2) & ad'\alpha_j^2 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_j \end{array} \right\} T_j = (a\alpha_j^2 + d\beta_j^2)^{-1} \quad (25)$$

f) i 端降伏, j 端滑節部材

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} ad'\beta_i^2 & -ac'\alpha_i\beta_i & -ad''\alpha_i\beta_i \\ -ac'\alpha_i\beta_i & ab'\alpha_i^2 & ac'\alpha_i^2 \\ -ad''\alpha_i\beta_i & ac'\alpha_i^2 & ad''\alpha_i^2 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_i \\ \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -ad''\beta_i^2 & ac'\alpha_i\beta_i & 0 \\ ac'\alpha_i\beta_i & -ab'\alpha_i^2 & 0 \\ ad''\alpha_i\beta_i & -ac'\alpha_i^2 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_i \end{array} \right\} T_i = (a\alpha_i^2 + d''\beta_i^2)^{-1} \quad (26)$$

g) i 端滑節, j 端降伏部材

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} ad''\beta_j^2 & ac'\alpha_j\beta_j & 0 \\ ac'\alpha_j\beta_j & ab'\alpha_j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_j \\ \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -ad''\beta_j^2 & -ac'\alpha_j\beta_j & ad''\alpha_j\beta_j \\ -ac'\alpha_j\beta_j & -ab'\alpha_j^2 & ac'\alpha_j^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_j \end{array} \right\} T_j = (a\alpha_j^2 + d''\beta_j^2)^{-1} \quad (27)$$

h) i, j 両端降伏部材

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 3ad'\beta_i^2\beta_j^2 & -ac\beta_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) & -3ad'\alpha_i\beta_i\beta_j^2 \\ -ac\beta_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) & ab(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)^2/2 & ac\alpha_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) \\ -3ad'\alpha_i\beta_i\beta_j^2 & ac\alpha_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) & 3ad'\alpha_i^2\beta_j^2 \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_{ij} \\ \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -3ad'\beta_i^2\beta_j^2 & ac\beta_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) & 3ad'\alpha_j\beta_i^2\beta_j \\ ac\beta_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) & -ab(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)^2/2 & -ac\alpha_j\beta_i(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) \\ 3ad'\alpha_i\beta_i\beta_j^2 & -ac\alpha_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i) & -3ad'\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j \end{bmatrix}_{ij} \cdot T_{ij} \end{array} \right\} T_{ij} = \{2a(\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j + \alpha_j^2\beta_i^2) + 3d'\beta_i^2\beta_j^2\}^{-1} \quad (28)$$

ただし、以上の式 (22) ~ (28) における a, b, c, \dots, d', d'' はそれぞれ次の式 (29) のような値である。

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{EA}{l}, \quad b = \frac{12EI}{l^3}, \quad b' = \frac{3EI}{l^3}, \quad c = \frac{6EI}{l^2} \\ c' = \frac{3EI}{l^2}, \quad d = \frac{4EI}{l}, \quad d' = \frac{2EI}{l}, \quad d'' = \frac{3EI}{l} \end{array} \right\} \dots \quad (29)$$

ここで、 E : 弾性係数、 A : 断面積、 I : 断面 2 次モーメント、 l : 部材長。

6. 弹性復活の判定

5. で紹介したような各種の降伏端部材に対する stiffness matrix を誘導する過程で式(17)に相当する μ_i の式がそれぞれ得られるが、定義 (μ_i は正のスカラーラー量) より、これらの μ_i の値が負になるときには降伏端 i は弾性復活をおこすことになる。したがって、このような弾性復活の判定に必要な μ_i の式を材端条件に応じて示しておけば次のようである。

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 G_{ii} &= \{a \alpha_i \ c \beta_i \ d \beta_i\} \\
 G_{ij} &= \{-a \alpha_i \ -c \beta_i \ d' \beta_i\} \\
 G_{ii'} &= \{a \alpha_i \ c' \beta_i \ d'' \beta_i\} \\
 G_{ij'} &= \{-a \alpha_i \ -c' \beta_i \ 0\} \\
 G_{ji} &= \{-a \alpha_j \ c \beta_j \ d' \beta_j\} \\
 G_{jj} &= \{a \alpha_j \ -c \beta_j \ d \beta_j\} \\
 T_{ij} &= (-a \alpha_i \alpha_j + d' \beta_i \beta_j) \\
 T_{ii} &= (a \alpha_i^2 + d \beta_i^2) \\
 T_{ii'} &= (a \alpha_i^2 + d'' \beta_i^2) \\
 T_{jj} &= (a \alpha_j^2 + d \beta_j^2) \\
 T_i &= 1/T_{ii}, \quad T'_i = 1/T_{ii'} \\
 T &= 1/(T_{ii} \cdot T_{ii'} - T_{jj}^2)
 \end{aligned} \right\} \dots \quad (33)$$

7. ベクトル移動

4. で述べたような線形近似を行なうためには、ある材端が降伏した場合、荷重を増加する以前に降伏端における応力ベクトルを式(9)によって移動させておく必要がある。したがって、以下に、両端剛節部材 ij の i 端が降伏した場合を例にとってその誘導方法を紹介し、そのほかの場合には結果だけを示す。

(1) 誘導方法

荷重に変化がなければ材端*i*が降伏しても全体のつりあい状態はそのまま保たれるものと仮定すれば、材端*i*では、

だけ弾性変形量に変化が生じ、したがって、部材 ij の

材端力 S は式 (11) より、次の式 (35) だけ変化することになる。

$$d\bar{S}_i = -K_i \cdot \mu_i \cdot N_i, \quad d\bar{S}_j = -K_j^T \cdot \mu_i \cdot N_i \dots \quad (35)$$

この式 (35) を式 (9) に代入して μ_i を求めれば、

$$\mu_i = (\mathbf{N}_i^T \cdot \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{N}_i)^{-1} \cdot h = T_i \cdot h \quad \dots \dots \dots \quad (36)$$

となり、これを式(35)に代入すれば求めるベクトル移動量 $d\bar{S}$ が次の式(37)のように得られる。

$$d\bar{S}_i = -K_i \cdot N_i \cdot T_i \cdot h, \quad d\bar{S}_j = -K_j^T \cdot N_i \cdot T_i \cdot h$$

.....(37)

(2) ベクトル移動量

式(37)に相当する各種の材端条件に応じた移動量を求める整理した結果を示せば次のようである。

- a) i 端降伏, j 端剛節部材

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i &= -\{a \alpha_i \ c \beta_i \ d \beta_i\}^T \cdot T_i \cdot h \\ d\bar{S}_j &= -\{-a \alpha_i \ -c \beta_i \ d'' \beta_i\}^T \cdot T_i \cdot h \\ T_i &= (a \alpha_i^2 + d \beta_i^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

b) i 端降伏, j 端滑節部材

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i &= -\{a \alpha_i \ c' \beta_i \ d'' \beta_i\}^T \cdot T_i \cdot h \\ d\bar{S}_j &= -\{-a \alpha_i \ -c' \beta_i \ 0\}^T \cdot T_i \cdot h \\ T_i &= (a \alpha_i^2 + d'' \beta_i^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

c) i 端剛節, j 端降伏部材

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i &= -\{-a \alpha_j \ c \beta_j \ d' \beta_j\}^T \cdot T_j \cdot h \\ d\bar{S}_j &= -\{a \alpha_j \ -c \beta_j \ d \beta_j\}^T \cdot T_j \cdot h \\ T_j &= (a \alpha_j^2 + d \beta_j^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

d) i 端滑節, j 端降伏部材

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i &= -\{-a \alpha_j \ c' \beta_j \ 0\}^T \cdot T_j \cdot h \\ d\bar{S}_j &= -\{a \alpha_j \ -c' \beta_j \ d'' \beta_j\}^T \cdot T_j \cdot h \\ T_j &= (a \alpha_j^2 + d'' \beta_j^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (41)$$

e) i, j 兩端降伏部材

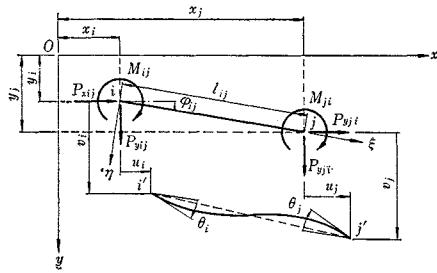
$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i &= -\{a(\alpha_i - \alpha_j) \ c(\beta_i + \beta_j) \\ &\quad d(\beta_i + \beta_j/2)\}^T \cdot T_{ij} \cdot h \\ d\bar{S}_j &= -\{-a(\alpha_i - \alpha_j) \ -c(\beta_i + \beta_j) \\ &\quad d(\beta_i/2 + \beta_j)\}^T \cdot T_{ij} \cdot h \\ T_{ij} &= (a \alpha_i^2 + d \beta_i^2 - a \alpha_i \alpha_j + d' \beta_i \beta_j)^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

なお、以上のようなベクトル移動により最初のつりあい状態の仮定がみだされることになるから、これらの移動量を節点荷重におきかえて応力の再配分を行なわなければならぬ。

8. 座標麥換

5., 6., 7. で求めた S と δ の関係は固有座標系 $\xi-\eta$ に対する結果であったが、これらの関係は座標変換行列 R によって、図-4 の基準座標系 $x-y$ に対する P と u の関係に次の式 (43) により容易に変換される。

$$P_i = R_{ii} \cdot S_i, \quad \delta_i = R_{ii}^T \cdot u_i, \quad \hat{\delta}_i = R_{ii}^{-T} \cdot u_i \quad (43)$$

図-4 $x-y$ 系に対する材端力および変形量の正方向

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \{P_x \ P_y \ M\}_i^T, \quad \mathbf{u}_i = \{u \ v \ \theta\}_i^T, \\ \mathbf{u}_j &= \{u \ v \ \theta\}_j^T \end{aligned} \quad \dots \quad (44)$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \cos \varphi_{ij} &= (x_j - x_i)/l_{ij}, \\ \sin \varphi_{ij} &= (y_j - y_i)/l_{ij} \end{aligned} \quad \dots \quad (45)$$

ただし、 φ : ξ 軸と x 軸とのなす角。

なお、これらの S , δ , および, P , u の正の向きは図-3 および図-4 に示したように、それぞれの座標軸に準拠させるものとする。

いま、節点 i に作用する荷重を $\bar{\mathbf{P}}_i = \{\bar{P}_x \ \bar{P}_y \ \bar{M}\}_i^T$ とし、その正の向きを \mathbf{P}_i と一致させれば節点 i における力のつりあい条件式は、

$$\Sigma \mathbf{P}_i = \bar{\mathbf{P}}_i \quad \dots \quad (46)$$

となり、これを全節点について立てれば、構造全体に対する解式として、

$$[\mathbf{K}'] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\bar{\mathbf{P}}\} \quad \dots \quad (47)$$

を得る。

ただし、

$[\mathbf{K}']$: 構造全体に対する stiffness matrix

$\{\mathbf{U}\}$: 全節点の変位を表わす列ベクトル

$\{\bar{\mathbf{P}}\}$: 全節点の荷重強度を表わす列ベクトル

式(47)を $\{\mathbf{U}\}$ について解けば、基準座標系における全節点変位が得られるから、これより式(11)と式(43)の関係を用いて全部材の個有座標系における材端力 $\{S\}$ が求められる。

9. 解析手順

本文における弾塑性解析は次の(1)～(5)の手順の繰返しによって進められる。

(1) 任意荷重 $\{\bar{\mathbf{P}}_0\}$ を与えて、材端力 $\{S\}$ 、および、変形量 $\{\delta\}$ を求める。

(2) 降伏端で μ_i を計算して、弾性復活の判定を行ない、 $\mu_i < 0$ のときにはその材端が弾性復活をおこしたように stiffness matrix を修正し(1)の計算に帰る。 $\mu_i \geq 0$ のときには次の(3)にうつる。

(3) 式(48)、あるいは、(49)より各材端における荷重倍数 k_i を計算し、その最小値 $k_{i\min}$ を見出す。

(4) (1)で求めた材端力 $\{S\}$ 、変形量 $\{\delta\}$ および荷重 $\{\bar{\mathbf{P}}_0\}$ を $k_{i\min}$ 倍し、前段階までの結果に加算する。

(5) $k_{i\min}$ となった材端に塑性関節が発生したものとみなし、stiffness matrix を修正し、降伏条件式が2次式の場合にはベクトル移動を行なう。

以上の(1)～(5)の手順を繰返してゆけばつりあい方程式の stiffness matrix が0に近づく(機構の形成)か変形量のある成分が限界値に達して崩壊することになる。

なお、手順(3)で求める荷重倍数 k_i は降伏条件式が2次式か1次式かによって次の式(48)、あるいは、式(49)より計算される⁹⁾。

$$k_i = (-Y + \sqrt{Y^2 - 4XZ})/2X \quad \dots \quad (48)$$

$$k_i = \frac{N_p(\alpha \cdot M_p(1 - |N_s/N_p|) - |M_s|)}{r \cdot |M_i| \cdot N_p + r' \cdot \alpha \cdot |N_i| \cdot M_p} \quad \dots \quad (49)$$

ただし、

$$X = \beta \cdot N_i^2 \cdot M_p$$

$$Y = 2\beta \cdot r' \cdot |N_i \cdot N_s| \cdot M_p + r \cdot |M_i| \cdot N_p^2$$

$$Z = |M_s| \cdot N_p^2 + \beta \cdot N_s^2 \cdot M_p - N_p^2 \cdot M_p$$

$M_s : i-1$ 個目の降伏関節が発生したときの材端モーメント

$N_s : i-1$ 個目の降伏関節が発生したときの軸力

$M_i : i$ 回目の解析における荷重 $\bar{\mathbf{P}}_{i0}$ に対する材端モーメント

$N_i : i$ 回目の解析における荷重 $\bar{\mathbf{P}}_{i0}$ に対する軸力

α : 降伏条件式(3), (5)の係数(1.18, 1.47)

β : 降伏条件式(1), (2), (4)の係数(1.0, 1.70, 1.15)

$$r = 1(M_s \cdot M_i \geq 0), \quad r = -1(M_s \cdot M_i < 0)$$

$$r' = 1(N_s \cdot N_i \geq 0), \quad r' = -1(N_s \cdot N_i < 0)$$

10. 解析例

9. 述べた解析

手順にしたがって

図-5のような肘

形ラーメンを対象

とした手計算によ

る解析結果を紹介

する。部材 $\overline{12}$, $\overline{23}$

は等断面とし、そ

の断面諸元を表一

1 のように仮定す

れば、式(29)の

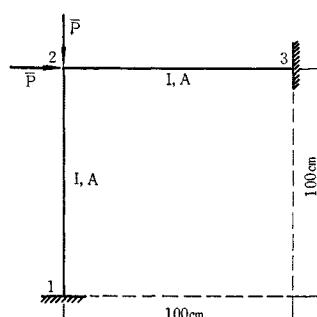


図-5

表-1 断面諸元（肘形ラーメン）

$I(\text{cm}^4)$	$A(\text{cm}^2)$	$N_p(\text{kg})$	$M_p(\text{kg}\cdot\text{cm})$	$E(\text{kg}/\text{cm}^2)$
$10^3/12$	10	3×10^4	10^6	2×10^6

表-2 械 数

a	b	c	d	d'
2×10^5	2×10^5	10^7	$2 \times 10^6/3$	$10^6/3$

表-3 方向余弦

部材	12	21	23	32
$\cos \varphi$	0	0	1	-1
$\sin \varphi$	-1	1	0	0

係数 a, b, c, \dots, d' はそれぞれ表-2 のようになる。また、この場合の方向余弦 $\cos \varphi, \sin \varphi$ はそれぞれ表-3 のようである。

(1) 第1段階

第1段階における荷重の初期値を $\bar{P}_{10}=100 \text{ kg}$ とし、表-2, 3 の値を式(21), (45)に代入して各部材の stiffness matrix および座標変換行列を求め、8.で述べた方法にしたがって線形計算を行なえば、変形量および材端力がそれぞれ表-4, 5 のようになる。この第1段階では降伏関節は発生していないから弹性復活の判定は不要であり、次の荷重倍数を求める手順にうつる。ところが、これ以後の解析では降伏条件が1次式と2次式の場合で解析方法が異なるためそれぞれの場合にわけて解析しなければならない。

表-5 材端力

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
$N_{10}(\text{kg})$	50	50	50	50
$Q_{10}(\text{kg})$	-50	-50	50	50
$M_{10}(\text{kg}\cdot\text{cm})$	-2500	-2500	2500	2500

1) 降伏条件式が1次式の場合

降伏条件式として式(3)を採用し、式(49)より各材端における荷重倍数を求めるとき、この場合には各材端ですべて等しくなり(表-5 参照)、 $k_1=264.179$ を得る。

したがって、

$$\bar{P}_1=\bar{P}_{10} \cdot k_{1\min}=26417.9 \text{ kg}$$

すべての材端が降伏し、その時の変形量および材端力は、表-4, 5 の値を $k_{1\min}$

倍して、表-6, 7 のよう

な値となる。次に、式(14)

より各降伏関節における法

線ベクトルの成分 α_i, β_i を

求めると

$$\alpha_i=\partial f/\partial N=1.18/N_p=3.93333 \times 10^{-5}$$

$$\beta_i=\partial f/\partial M=\pm 1/M_p=\pm 1 \times 10^{-6}$$

となり、前述のように M, N に関係なく一定であるからベクトル移動は不要となる。ただし、 β_i については材端モーメントが正の場合には+の値、負の場合には-の値がそれぞれ対応する。

表-6 変形量

	$u_{2(1)}(\text{cm})$	6.6045×10^{-2}
$v_{2(1)}(\text{cm})$	6.6045×10^{-2}	
$\theta_{2(1)}(\text{rad.})$	0	

表-7 材端力

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
$N_i(\text{kg})$	13209	13209	13209	13209
$Q_i(\text{kg})$	-13209	-13209	13209	13209
$M_i(\text{kg}\cdot\text{cm})$	-660448	-660448	660448	660448

次に、これらの α_i, β_i および、 $\alpha_j=-\alpha_i, \beta_j=\beta_i$ の関係を用いて式(28)より降伏後の各部材の stiffness matrix を求めるとそれぞれ表-8 のような値となる。

以上で第1段階の解析は終了することになるが、この段階では、変形量あるいは stiffness matrix から判定して、まだ崩壊していないものと思われるから次の第2段階の解析にうつる。

(2) 第2段階

第1段階と同様に、 $\bar{P}_{20}=100 \text{ kg}$ を与え、表-8 の修正された stiffness matrix を使用して線形計算を行なえば、変形量および材端力がそれぞれ表-9, 10 のようになる。この表-9 と表-4 の比較により、降伏後の stiffness は降伏前に対して $2.5/177.9=1/71$ に減少していることがわかり、また、表-10 の値は直交条件式、式(8)を満足している。次に、各降伏関節における弹性復活を判定するため、式(32)に $\alpha_i=-\alpha_j, \beta_i=\beta_j$ なる関係を代入して、各材端の μ_i を求めると、

$$\mu_i=(a \cdot \alpha_i \cdot \delta_{\xi 2} + c \cdot |\beta_i| \cdot \delta_{\eta 2}) / (2a \cdot \alpha_i^2 + 3d' \cdot \beta_i^2) > 0$$

表-8 stiffness matrix ($\times 1.52525 \times 10^8$)

K	12 or 21			23 or 32		
	81	63.72	3186	81	-63.72	-3186
K_i	63.72	50.1264	2506.32	-63.72	50.1264	2506.32
	3186	2506.32	125316	-3186	2506.32	125316
	-81	-63.72	3186	-81	63.72	-3186
K_j	-63.72	-50.1264	2506.32	63.72	-50.1264	2506.32
	-3186	-2506.32	125316	3186	-2506.32	125316

となり、いずれの材端でも

弾性復活はおこらないこと
になる。したがって、この

第2段階以後では、表-10

より明らかのように、荷重の増加とともに、材端力は軸力が増大し、モーメントが減少する方向に降伏曲線上を

表-9 変形量

$u_{2(20)}$ (cm)	1.7785×10^{-2}
$v_{2(20)}$ (cm)	1.7785×10^{-2}
$\theta_{2(20)}$ (rad)	0

表-10 材端力

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
N_{20} (kg)	468.75	468.75	468.75	468.75
Q_{20} (kg)	368.75	368.75	-368.75	-368.75
M_{20} (kg·cm)	18 437.5	18 437.5	-18 437.5	-18 437.5

移動することになり、軸力が全塑性軸力に達したとき材端モーメントは0となる。そして、このときを崩壊と考えれば、崩壊荷重 \bar{P}_c は、

$$\bar{P}_c = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{P}_1 + (N_p - N_1) / 4.6875$$

$$= 3 \times 10^4 \text{ kg}$$

として求まり、崩壊時の変形量および材端力はそれぞれ表-11, 12 のような値となる。

表-11 変形量

$u_{2(c)}$ (cm)	0.68853
$v_{2(c)}$ (cm)	0.68853
$\theta_{2(c)}$ (rad)	0

表-12 材端力

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
N_c (kg)	3×10^4	3×10^4	3×10^4	3×10^4
Q_c (kg)	0	0	0	0
M_c (kg·cm)	0	0	0	0

2) 降伏条件式が2次式の場合

降伏条件式として式(1)を用いると各材端における荷重倍数 k_1 は式(48)より、 $k_1=300$ となる。したがって、この場合には、

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_{10} \cdot k_{1\min} = 30 000 \text{ kg}$$

で各材端が降伏し、その時

の変形量および材端力はそれぞれ表-13, 14 のよう

な値となる。次に、法線ベ

クトルの成分 α_i, β_i を式(14)より求めてみると、

$$\alpha_i = \partial f / \partial N = 2 N_i / N_p^2 = 1 \times 10^{-4} / 3$$

$$\beta_i = \partial f / \partial M = \pm 1 / M_p = \pm 1 \times 10^{-6}$$

となり、 α_i は N とともに変化し、一定とはならない。したがって、この場合には線形近似によるベクトル移動が必要であるから、式(42)よりその移動量を求める

表-13 変形量

$u_{2(1)}$	7.5×10^{-2}
$v_{2(1)}$	7.5×10^{-2}
$\theta_{2(1)}$	0

表-14 材端力

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
N_1	15 000	15 000	15 000	15 000
Q_1	-15 000	-15 000	15 000	15 000
M_1	-750 000	-750 000	750 000	750 000

と、

$$d\bar{S}_i = \{-4/3 \pm 2 \pm 100\}^T \cdot 9 \times 10^4 \cdot h / 13$$

$$d\bar{S}_j = \{4/3 \mp 2 \pm 100\}^T \cdot 9 \times 10^4 \cdot h / 13$$

となるが、このベクトル移動による降伏関節の曲げモーメントの減少が0.5%となるように h の値を定めると、

$$h = 5 \times 10^{-3} \times |M_1| \times 13 / 9 \times 10^6 = 1.625 / 300$$

となり、上式にこれを代入して、各降伏端における移動量を求めれば表-15 のようになる。また、式(28)より、修正された各部材の stiffness matrix がそれぞれ表-16 のように得られる。

表-15 ベクトル移動量

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
\bar{N}	-50	-50	-50	-50
\bar{Q}	75	75	-75	-75
\bar{M}	3 750	3 750	-3 750	-3 750

表-16 stiffness matrix ($\times 2.11037 \times 10^4$)

K	1 (12) or 2 (21)			2 (23) or 3 (32)		
	6.561	4.374	218.7	6.561	-4.374	-218.7
K_i	4.374	2.916	145.8	-4.374	2.916	145.8
	218.7	145.8	7 290	-218.7	145.8	7 290
K_j	-6.561	-4.374	218.7	-6.561	4.374	-218.7
	-4.374	-2.916	145.8	4.374	-2.916	145.8
	-145.8	-145.8	7 290	218.7	-145.8	7 290

(2) 第2段階

$\bar{P}_{20}=100 \text{ kg}$ を与え、表-16 の stiffness matrix を使って線形計算を行なった場合の変形量および材端力はそれぞれ表-17, 18 のよ

うになり、この場合も直交条件式、式(8)を満足しており、 μ_i も1の場合と同じ様に各材端で >0 となって

表-17 変形量

$u_{2(20)}$	6.5×10^{-3}
$v_{2(20)}$	6.5×10^{-3}
$\theta_{2(20)}$	0

表-18 材端力

材端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
N_{20}	300	300	300	300
Q_{20}	200	200	-200	-200
M_{20}	10 000	10 000	-10 000	-10 000

弹性復活はおこらない。一方、表-15 のベクトル移動量を節点荷重におきかえて再配分した場合の変形量および材端力はそれぞれ表-19, 20 のようになるから、この第2段階における荷重倍数 k_2 は表-14, 15, 18, 20 の値を式(48)に代入し、 $k_2=6.276$ となる。したがって、第2段階における荷重增加が、 $4 \bar{P}_2=627.6 \text{ kg}$ に達したとき各材端の材端力が再び降伏条件を満たすこと

表-19 変形量

u'_2	8.125×10^{-3}
v'_2	8.125×10^{-3}
θ'_2	0

表-20 材 端 力

材 端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
N'	325.0	325.0	325.0	325.0
Q'	325.0	325.0	-325.0	-325.0
M'	16 250	16 250	-16 250	-16 250

になり、そのときの荷重強度 \bar{P}_2 は

$$\bar{P}_2 = \bar{P}_1 + 4\bar{P}_2 = 30 627.6 \text{ kg}$$

として求まり、変形量および材端力はそれぞれ表-21, 22 のような値となる。

また、このときの降伏端における法線ベクトル成分

α_i, β_i は、

$$\alpha_i = 2N_i/N_p^2 = 3.82399 \times 10^{-5}$$

$$\beta_i = \pm 1/M_p = \pm 1 \times 10^{-6}$$

となるから、第1段階と同様に、これらの値を使ってベクトル移動を行ない stiffness matrix を修正し、次の第3段階へ解析を進める。このような手順を繰返すことにより、軸力が全塑性軸力に達するか、変形量がある限界値に達して崩壊することになるが以下の説明は省略する。

表-21 变 形 量

$u_{z(2)}$	0.12391
$v_{z(2)}$	0.12391
$\theta_{z(2)}$	0

表-22 材 端 力

材 端	1 (12)	2 (21)	2 (23)	3 (32)
N_2	17 208	17 208	17 208	17 208
Q_2	-13 420	-13 420	13 420	13 420
M_2	-670 985	-670 985	670 985	670 985

11. 解析プログラム

著者らは 9. で述べた解析手順にしたがって、初期の input data を与えるだけで、漸増荷重をうける平面剛滑節構造物の崩壊過程を電子計算機が自動的に追跡し、必要な演算結果を output するような自動追跡プログラムを作成しているが、これについての詳しい説明は省略し、そのフローチャート、input data、および output data だけを紹介する。

(1) フローチャート

計算機の行なう演算の流れは図-6 のフローチャートのようであり、各ブロック (1)～(5) がそれぞれ 9. で述べた解析手順 (1)～(5) に対応している。また、崩壊の判定については①の部分で係数行列の determinant の正負による判定を行ない、②の部分で変形量の大きさによる判定を行なうようにしている。

(2) input data

上記の解析プログラムでは次の a)～g) の input data が必要である。

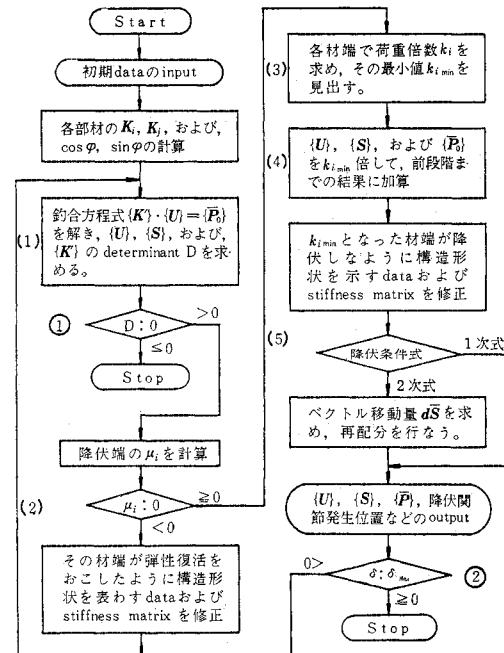


図-6 Flow Chart

- a) 支点も含めた全節点数
- b) 全部材数
- c) 各節点に集まる部材数
- d) 各節点の x 方向 (u)、 y 方向 (v)、回転 (θ) 変形の有無
- e) ベクトル移動量 h
- f) 各節点に作用する荷重 $\{P_0\} = \{\bar{P}_{x0}, \bar{P}_{y0}, \bar{M}_0\}^T$ の初期値
- g) 各部材ごとに
 - 1) x 軸への投影長 ($x_j - x_i$)
 - 2) y 軸への投影長 ($y_j - y_i$)
 - 3) 断面積 (A)
 - 4) 断面 2 次モーメント (I)
 - 5) 各部材が接続する両端の節点番号 (i, j)
 - 6) 全塑性モーメント (M_p)
 - 7) 全塑性軸力 (N_p)
 - 8) 断面形状 (矩形、対称 I 形 (箱形)、パイプ)
 - 9) 材端条件 (両端剛節、 i 端滑節 j 端剛節、 i 端剛節 j 端滑節)

(3) output data

演算結果より崩壊過程が判別できるように、降伏関節が発生するたびに、次の a)～g) の data を output するようにしている。

- a) 降伏関節の発生数および発生位置
- b) 係数行列の determinant

- c) 各材端における材端力 $\{S\} = \{N \ Q \ M\}^T$
- d) 各節点における変形量 $\{U\} = \{u \ v \ \theta\}^T$
- e) 各節点に作用する荷重強度 $\{\bar{P}\} = \{\bar{P}_x \ \bar{P}_y \ \bar{M}\}^T$
- f) 各部材の材端状態 (両端剛節, i 端滑節 j 端剛節, i 端剛節 j 端滑節, i 端降伏 j 端剛節, i 端剛節 j 端降伏, i 端滑節 j 端降伏, i 端降伏 j 端滑節, i, j 両端降伏)
- g) 弹性復活の有無 (μ_i)

12. 計算例

11.で紹介した解析プログラムによる計算結果を, (1) 肘形ラーメン, (2) 2 ヒンジアーチについて示す。

(1) 肘形ラーメン

10.の解析例で扱ったと同様の 図-5 の肘形ラーメンを対象として, 矩形およびパイプ断面について, ベクトル移動による降伏関節の曲げモーメントの減少が 1%, 0.5%, 0.1% となるように, h の値を 3 通りに変化させ場合の計算を行なってみた。本例では, 10.で述べたように, ある荷重強度すべての材端が同時に降伏し, その後, 線形近似により数回降伏を繰返し, 節点 2 の水平変位 u_2 (= 垂直変位 v_2) が増大して崩壊することになる。これらの計算結果を n 回目の降伏関節が発生するときの荷重強度 \bar{P} および節点 2 の水平変位 u_2 につい

表-23 荷重強度および変形量 (矩形)

a) $h=1\%$ の場合 b) $h=0.5\%$ の場合

n	1	2	3	n	1	2	3	4
$\bar{P}(t)$	30.000	30.824	31.215	$\bar{P}(t)$	30.000	30.628	31.039	31.233
$U_2(\text{cm})$	0.071	0.138	0.268	$U_2(\text{cm})$	0.071	0.118	0.191	0.328
$U'_2(\text{cm})$	0.015	0.049	0.645	$U'_2(\text{cm})$	0.008	0.016	0.051	0.667

c) $h=0.1\%$ の場合

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{P}(t)$	30.000	30.307	30.572	30.792	30.970	31.104	31.194	31.242
$U_2(\text{cm})$	0.071	0.092	0.117	0.147	0.187	0.237	0.312	0.438
$U'_2(\text{cm})$	0.002	0.002	0.003	0.005	0.008	0.015	0.041	0.298

表-24 荷重強度および変形量 (パイプ)

a) $h=1\%$ の場合 b) $h=0.5\%$ の場合

n	1	2	3	4	n	1	2	3
\bar{P}	29.146	29.679	29.823	30.000	\bar{P}	29.146	29.569	29.767
U_2	0.069	0.159	0.469	4.600	U_2	0.069	0.132	0.253
U'_2	0.029	0.193	—	—	U'_2	0.014	0.046	0.663

c) $h=0.1\%$ の場合

n	1	2	3	4	5	6
\bar{P}	29.146	29.363	29.536	29.663	29.744	29.781
U_2	0.069	0.097	0.133	0.181	0.255	0.391
U'_2	0.003	0.005	0.008	0.017	0.053	1.014

て示せば, 矩形, パイプ断面に対して, それぞれ, 表-23, 24 のようである。なお, 表中の u_2' はベクトル移動量を節点荷重におきかえて再配分したときの節点 2 の水平変位である。

これらの \bar{P} と u_2 の関係を縦軸に \bar{P} , 横軸に u_2 をとって図示すれば, それぞれ 図-7, 8 のようになり, u_2 が 0.5 cm をこえたところではこの $\bar{P}-u_2$ 曲線は水平となっている。したがって, u_2 が 0.5 cm に達したときを崩壊と考えれば, それぞれの h に対する, 矩形およびパイプ断面の崩壊荷重とそれらの $h=1\%$ の場合に対する比は 表-25, 26 のようになる。表-23, 24, 25 および 26 より明らかなように, ベクトル移動量 h が小さくなるにつれて崩壊に至るまでの線形近似による繰返し回数は増すが, 崩壊荷重にはほとんど変化がなく, 矩形断面で 0.01% 以下, パイプ断面で 0.2% 以下となっている。しかしながら, 変形量 u_2 については図-7, 8 から明らかなように移動量 h の値によってか

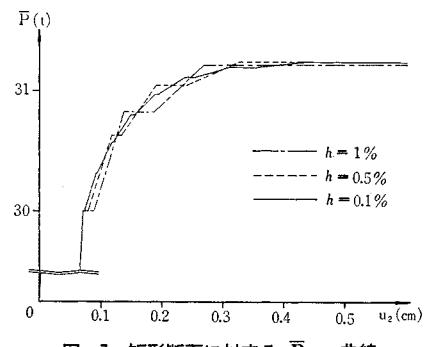


図-7 矩形断面に対する $\bar{P}-u_2$ 曲線

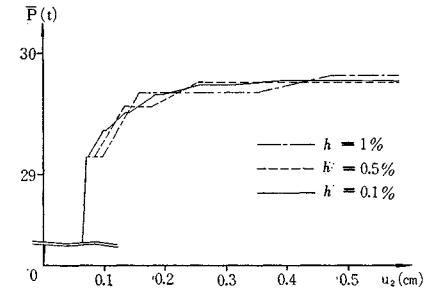


図-8 パイプ断面に対する $\bar{P}-u_2$ 曲線

表-25 崩壊荷重および崩壊荷重の比 (矩形)

h	1%	0.5%	0.1%
P_c	31.215	31.233	31.242
$P_{ch}/P_c(1\%)$	1.0000	1.0006	1.0009

表-26 崩壊荷重および崩壊荷重の比 (パイプ)

h	1%	0.5%	0.1%
P_c	29.823	29.767	29.781
$P_{ch}/P_c(1\%)$	1.0000	0.9981	0.9986

なりの変化がみられ、線形近似による影響が大きいことがわかる。

(2) 2 ヒンジアーチ

表-27 のような断面諸元をもつ等断面部材からなる図-9 の 2 ヒンジアーチを対象として、載荷方法を図-10 の a), b), c) のように 3 通りに変化させた場合について、本文による解析、文献 9) による近似解析、および、一軸応力状態を考えた通常の弾塑性解析のそれぞれの場合に対する計算結果を紹介する。なお、以下では、これらの解析方法、載荷方法および断面形の相違による分類を case i-j-k の表現で行なう。ただし、添字 i は解析方法による分類で、

$i=1$: 本文による解析

$i=2$: 文献 9) による近似解析で、降伏断面は軸力および曲げモーメントを伝達しないとした場合

$i=3$: 文献 9) による近似解析で、降伏断面は軸力は伝達するが、曲げモーメントは伝達しないとした場合

$i=4$: 一軸応力状態を考えた通常の弾塑性解析であり、添字 j は載荷方法による分類で、

$j=a$: 1/4 点載荷 (図-10 a))

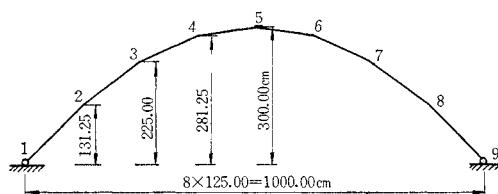


図-9

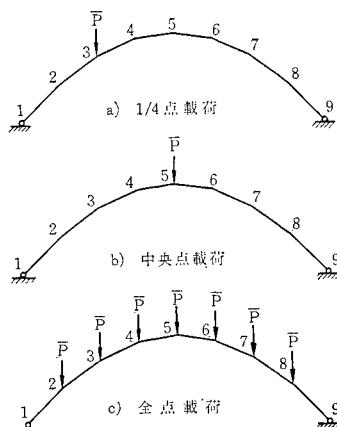


図-10 載荷状態

表-27 断面諸元 (2 ヒンジアーチ)

$I(\text{cm}^4)$	$A(\text{cm}^2)$	$M_p(\text{kg}\cdot\text{cm})$	$N_p(\text{kg})$	$E(\text{kg}/\text{cm}^2)$
2.4×10^4	90	3.8×10^6	2.52×10^5	2.1×10^6

$j=b$: 中央点載荷 (図-10 b))

$j=c$: 全点載荷 (図-10 c))

である。また、添字 k は断面形による分類で次のようにある。

$k=1$: 矩形断面

$k=2$: 対称 I 形 (箱形) 断面

$k=3$: パイプ断面

a) 計算結果 (崩壊過程、崩壊荷重)

① case 1-j-k

case 1-a では、

図-11 a) のように、最初に部材 $\overline{32}$ の材端 3 が降伏し、ベクトル移動量 h の値が 0.5% と 0.1% の場合には線形近似により 1 ~ 2 回の降伏を繰返したあとで新たに部材 $\overline{78}$ の材端 7 が降伏し、その時点で stiffness matrix の determinant が負となって崩壊する。

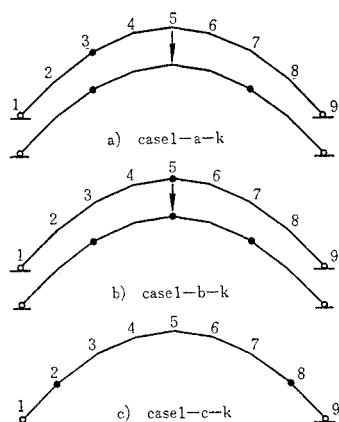


図-11 case 1 の崩壊過程

case 1-b では、図-11 b) のように、最初に節点 5 が降伏し、 h の値によって 1 ~ 3 回降伏を繰返したあとで新たに部材 $\overline{32}$ の材端 3 と部材 $\overline{78}$ の材端 7 が同時に降伏し、case 1-a の場合と同様に、この時点で determinant が負となって崩壊する。

case 1-c では、図-11 c) のように、部材 $\overline{21}$ の材端 2 と部材 $\overline{89}$ の材端 8 が最初に降伏し、 h の値によって 1 ~ 4 回降伏を繰返したあとで、新たな降伏関節の発生なしに、determinant が負となって崩壊する。

以上で述べた、case 1-a, case 1-b および、case 1-c の最初に降伏関節が発生する第 1 段階と新たな降伏関節が発生して崩壊する第 2 段階における荷重強度ならびに線形近似による降伏の繰返し回数はそれぞれ表-28, 29, 30 のようであり、これらの表の第 2 段階における

表-28 荷重強度および繰返し回数 n (case 1-a-k)

k	段階	h	1 %		0.5 %		0.1 %	
			n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i
1	1	0	0	45.440	0	45.440	1	45.440
	2	0	0	58.566	0	58.728	0	58.766
2	1	0	0	44.770	1	44.770	2	44.770
	2	0	0	57.349	0	57.330	0	57.460
3	1	0	0	45.294	0	45.294	1	45.294
	2	0	0	58.298	0	58.459	0	58.456

表-29 荷重強度および繰返し回数 n (case 1-b-k)

k	段階	h	1%		0.5%		0.1%	
			n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i
1	1	0	65.826	1	65.826	2	65.826	
	2	0	95.376	0	95.623	0	95.728	
2	1	0	64.342	1	64.342	3	64.342	
	2	0	88.830	0	88.830	0	88.830	
3	1	1	65.497	1	65.497	2	65.497	
	2	0	94.117	0	94.370	0	94.466	

表-30 荷重強度および繰返し回数 n (case 1-c-k)

k	段階	h	1%		0.5%		0.1%	
			n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i
1	1	1	51.321	2	51.321	4	51.321	
	2		52.735		52.702		52.686	
2	1	1	50.682	2	50.682	4	50.682	
	2		52.138		52.131		52.125	
3	1	1	50.992	2	50.992	4	50.992	
	2		52.467		52.443		52.417	

荷重強度が崩壊荷重となる。なお、各 case とも断面形 (k) の相違による崩壊過程の変化は見られなかった。

② case 2-j-k

降伏関節は降伏後の荷重増加に対して軸力および曲げモーメントを伝達できないという仮定により、断面形 (k) の相違に関係なく、case 2-a, case 2-b, case 2-c の各 case ともある材端に降伏関節が発生した時点での崩壊することになり、各 case に対する崩壊過程はそれぞれ図-12 の a), b), c) のようである。ただし、図中の点線部材は軸力を伝達できない部材を表わす。

また、各 case に対する崩壊荷重は表-31 のようである。

表-31 崩壊荷重 (case 2-j-k)

k	段階	j	a		b		c	
			n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i
1	1		45.440		65.826		51.321	
2	1		44.770		64.342		50.682	
3	1		45.294		65.497		50.992	

③ case 3-j-k

この場合の崩壊過程は、線形近似による降伏の繰返しを除けば、case 1 の場合とまったく同様であり、各

表-32 荷重強度 (case 3-j-k)

k	段階	j	a		b		c	
			n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i
1	1	1	45.440		65.826		51.321	
	2	2	59.492		97.915		—	
2	1	1	44.770		64.342		50.682	
	2	2	58.759		92.789		—	
3	1	1	45.294		65.497		50.992	
	2	2	59.305		96.844		—	

case に対してそ

れぞれ図-13 の
a), b), c) のよう
になり、各段階に
における荷重強度は
表-32 のようで
ある。

④ case 4-j-k

一軸応力状態を
考えた解析である
ため、塑性関節は
各節点に発生する
が、case 4-a, case
4-b の崩壊過程は
図-14 の a), b)
のように case 1,
あるいは、case 3
の場合と類似して
いる。ただ、case
4-c の場合には、
図-14 c) のよう
に、最初に部材 21
と部材 89 が軸力
によって降伏し、
ついで、節点 5 に
塑性関節が発生し
て崩壊することに
なる。なお、この
case 4 における

各段階の荷重強度は表-33 のようである。

最後に、以上の case 1～case 4 の崩壊荷重ならびに case 4 に対するそれらの比をまとめて表示しておけば表-34 のようである。ただし、case 1 については、

表-33 荷重強度 (case 4-j-k)

k	段階	j	a		b		c	
			n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i	n	\bar{P}_i
1, 2, 3	1	1	46.471		68.202		52.293	
	2	2	60.800		106.400		53.945	

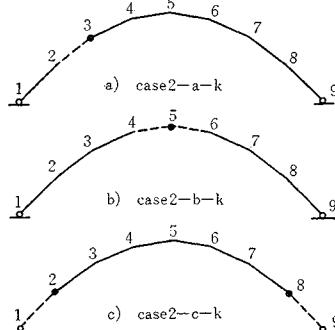


図-12 case 2 の崩壊過程

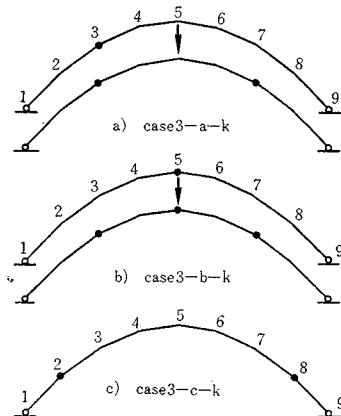


図-13 case 3 の崩壊過程

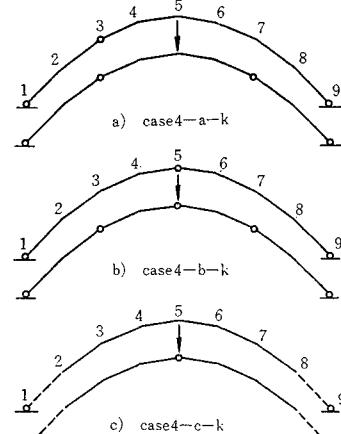


図-14 case 4 の崩壊過程

表-34 参考文献崩壊荷重および崩壊荷重の比
($\phi = \bar{P}_c / \bar{P}_c$ case 4)

case	k	j	a	b	c
1	1	\bar{P}_c	58.566	95.376	52.735
		ϕ	0.9633	0.8964	0.9776
	2	\bar{P}_c	57.349	88.830	52.138
		ϕ	0.9432	0.8349	0.9665
	3	\bar{P}_c	58.298	94.117	52.467
		ϕ	0.9588	0.8846	0.9726
2	1	\bar{P}_c	45.440	65.826	51.321
		ϕ	0.7474	0.6187	0.9514
	2	\bar{P}_c	44.770	64.342	50.682
		ϕ	0.7363	0.6047	0.9395
	3	\bar{P}_c	45.294	65.497	50.992
		ϕ	0.7450	0.6156	0.9453
3	1	\bar{P}_c	59.492	97.915	51.321
		ϕ	0.9785	0.9168	0.9514
	2	\bar{P}_c	58.759	92.789	50.682
		ϕ	0.9664	0.8721	0.9395
	3	\bar{P}_c	59.305	96.844	50.992
		ϕ	0.9754	0.9102	0.9453
4	1, 2, 3	\bar{P}_c	60.800	106.400	53.945
		ϕ	1.0000	1.000	1.0000

表-28, 29, 30 よりわかるように、 h の値による崩壊荷重の変化はほとんどないから、 $h=1\%$ に対する値を引用した。

b) 考 察

a) で紹介した計算結果より、case 1を中心にして、考察を加えてみれば次のようである。

④ case 1 では、(1) の肘形ラーメンの場合と同様に、ベクトル移動量 h が小さくなるにつれて線形近似による降伏の繰返し回数は増すが崩壊荷重にはほとんど変化が見られない(表-28, 29, 30)。したがって、本例ではベクトル移動量 h を小さな値にとりすぎた感じで、もう少し大きめな値にとってもよいものと思われる。

⑤ case 1 の崩壊荷重は case 4 の崩壊荷重よりすべて小さく、その差は、断面形(k)により多少となるが、載荷状態 a と c では、4~6% と 2~3% で比較的少なく、載荷状態 b では 10~17% とかなり大きくなっている(表-34)。このことより、そのたの構造物でも載荷状態によっては case 1 と case 4 の崩壊荷重にかなりの差が生ずる場合も考えられ、case 4 だけで解析したのでは危険な場合があるものと思われる。

⑥ case 1 と case 3 の崩壊荷重の差は 2% 前後と比較的少なく(表-34)、崩壊過程もよく一致しており(図-11, 13)、本例のような 2 ヒンジアーチに対しては、case 3 を case 1 の近似解析と考えてさしつかえないものと思われる。

⑦ case 1 と case 2 では崩壊荷重および崩壊過程にかなりの差があり(表-34、図-11, 12)、case 2 を case 1 の近似解析と考えるのは不適当と思われる。

⑧ 断面形(k)によって崩壊荷重は変化し、矩形、パイプ、対称 I 形(箱形)の順で小さくなる(表-34)。このことは降伏条件式からも推察される。

13. む す び

本文の解析によれば、電子計算機を利用し、11. (2) で紹介したような input data を与えるだけで、自動的に、漸増節点荷重をうける任意の平面棒構造物の崩壊過程を追跡しながら弾塑性解析を進めることができ、崩壊の経過などを知る上で機構法による解析にくらべて有利な解法と思われるが、本解析は、4. で述べたような、線形近似の手順を含んでいるため、この手順におけるベクトル移動量 h の値が問題になる。

一般に、 h の値が大きすぎれば解の精度は低下し、小さければ、繰返しの手順がふえ、多くの演算時間を要することになり、これらの傾向は構造形式とか載荷形式によっても異なるものと考えられる。さらに、この移動量 h の値による影響は本文の 12. で紹介した肘形ラーメンに対する計算例からもわかるように、材端力よりも変形量に顕著に表われるものと思われ、変形量の値から崩壊を判定する場合には、本文の計算例とは異なり、 h の値によってかなり崩壊荷重に変化がある場合も予想される。したがって、そのような場合には、演算時間は増大しても、できるだけ h の値を小さな値にとって解析することが必要と思われる。また、このことから、解析を容易にするため、従来行なわれていた降伏条件式を直線近似することにも問題があり、より正確な降伏条件式の導入が重要であろう。

次に、12. で紹介した解析プログラムでは漸増節点荷重だけを対象としたが、死荷重とか残留応力などの一定荷重が作用する場合には、9. で述べた解析手順(1)の以前に、これらの影響による材端力 $\{S\}$ の初期値 $\{S_0\}$ を計算によって求めるか、あるいは、input data で与えるようにすればその後の解析手順は同様であり、本文の解析プログラムを多少修正すればこれらの一定荷重の影響を考慮した解析も可能である。

また、降伏条件式に組み合せ応力をえた本文のような解析では降伏閾値が組み合せ応力方向の剛性を完全に失わないため、一軸応力状態を与えた弾塑性解析のように、機構化による崩壊の判定は不可能であるが、本文の計算例でも紹介したように、stiffness matrix の determinant の符号とか、変形量に制限がある場合には、節点変形量の値によって比較的容易に崩壊の判定はできる

ものと思われる。

なお、本文の解析は 2. で述べたような多くの仮定に基づくものであり、これらの仮定を取り除く方向に研究を進める必要があるが、(5) と (6) の仮定については文献 12) の手法、あるいは、有限変位理論などを導入することも一つの方法と考えられる。また、1) のひずみ硬化の影響については、文献 16) に、平面応力状態に対する研究例が報告されており、本文のような平面棒構造物に対してもこの理論の拡張は可能と考えられ、今後研究しなければならない問題と思われる。

最後に、本文の解析には、前述したようなベクトル移動量 h の値とか、解析上の仮定を取り除くことなど、まだかなりの問題点が残されているが、降伏条件式に曲げとねじりの組み合せを考えた、格子構造物に対する弾塑性解析も本文の場合と同様な手順で解析可能であり、本文がこの種の研究の一つの手がかりとなれば幸いである。なお、本研究を進めるにあたり、文献 16) などの資料を提供していただきました大阪市立大学工学部 園田恵一郎氏に深く感謝の意を表する次第である。

参考文献

- 1) Heyman, J. : The Limit design of Space Frames, J. Applied Mechanics, 1951.
- 2) Hill, R. and Sichel, M.P.L. : On the Plastic Distortion of Solid Bars by Combined Bending and Twisting, J. Mech. and Phys. of Solid, 1953.
- 3) Onat, E.T. and Prager, W. : Limit Analysis of Arcches, J. Mech. and Phys. of Solid, 1953.
- 4) 米沢 博：格子桁構造の極限荷重に関する一研究、土木学会論文集, 65 号, 昭和 34 年.
- 5) 米沢・三上：曲線格子桁の極限解析について、土木学会論文集, 132 号, 昭和 41 年 8 月.
- 6) 前田・藤本：2 ピンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について、土木学会論文集, No. 174, 1970-2.
- 7) 若林・野中・林：架構の塑性崩壊荷重に及ぼす部材軸力の影響について、日本建築学会近畿支部研究報告集, 昭和 45 年 5 月.
- 8) Glenn A. Morris and Steven J. Fenves : Elastic-Plastic Analysis of Frameworks, J. of St. Div. Proc. A.S.C.E., Vol. 96, May, 1970.
- 9) 星・児嶋・平尾：曲げモーメントと軸力の組み合せ応力を考慮した平面棒構造物の一塑性解析、徳大工学部研究報告, 第 16 号, 1971.
- 10) 星・児嶋・平尾：格子桁の崩壊過程の追跡について、第 23 回土木学会年次学術講演会講演概要集第 I 部, 昭和 43 年 10 月.
- 11) Hodge, P.G. : Plastic Analysis of Structure, Mc. Graw Hill, 1959.
- 12) 星・児嶋・平尾：安定性を考慮した平面棒構造物の塑性解析について、第 23 回土木学会中国四国支部講演概要集, 昭和 46 年 5 月.
- 13) Prager, W. and Hodge, P.G. : Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.
- 14) 木原 博：塑性設計法、森北出版.
- 15) Shosuke Morino and Le-Wu Lu : Analysis of Space Frames, Fritz Engineering Laboratory Report No.331. 13 Lehigh University Bethlehem, Pennsylvania (1971).
- 16) Isakson, G., Armen, H. Jr. and Pifko, A. : Discrete-Element Method for The Plastic Analysis of Structures, NASA CR-66364.

(1971.9.28・受付)