

## 材料非線形有限要素解析の一手法について

A TECHNIQUE OF MATERIAL NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS

川本 肇 万\*・宮池 克人\*\*

By Toshikazu Kawamoto and Yoshihito Miyake

### 1. 緒 言

土、コンクリート、岩などを材料とする構造物の応力解析においては、それらの材料の応力-ひずみ関係がほとんど非線形性を示すため、非線形解析を行なわなければ実際の応力、変形状態が求められないだろう。鋼のように材料の性質がほぼ一定で、線形および非線形領域での挙動について明らかになっているものでは、材料の非線形特性を有限要素解析に導入することは比較的容易であり、結果の信頼性もある。しかし、土や岩のような材料では、材料の性質が一定でなく、その変形挙動は種々の因子によって影響されるため、実際の問題を解析する場合には、それぞれの材料の力学特性を正しく把握して解析に導入しなければならないとともに、解析法そのものも材料の非線形挙動を忠実に追跡してゆくものでなければならない。

このような材料の構造物の応力解析に有限要素法を適用する場合、大別して 2 種類の方法がある。その一つは、材料の応力-ひずみ関係の非線形性を実験によって求め、その結果を数式表示したものを導入して非線形解析を行なうものであり、他は、塑性理論に基づいて塑性域での応力-ひずみ関係（弾塑性マトリックス）を誘導し、これを用いて弾塑性解析を行なうものである。

塑性理論に基づいて弾塑性マトリックスが確立されているような材料に対しては、初期ひずみ法や初期応力法が適用され、また荷重漸増法を適用している例も多い。一方、土、コンクリート、岩のような塑性理論に基づいて塑性域での応力-ひずみ関係が十分に確立されていない材料に対しては、実験より求めた応力-ひずみ関係を用いて直接反復法や荷重漸増法（接線係数法）が適用される。

有限要素解析法は基本的には線形弾性連続体に対する解析法であるから、それを非線形解析に用いるために上記のような種々の解析方法が研究されてきている。直接反復法は応力とひずみの 1 対 1 の関係が非線形な応力-ひずみ曲線上の一点で与えられることに基づいて線形解析がくり返される。一方、荷重漸増法では、非線形な応力-ひずみ曲線が部分的に直線で近似されるとして、線形解析が逐次進められる。したがって、いずれの場合にも、線形有限要素解析における要素分割による誤差や電子計算機による演算過程での誤差のほかに、非線形性を線形的に取り扱う方法、すなわち、反復計算の回数や荷重増分の大きさ、降伏条件に用いる要素応力の取り扱いなどによる誤差が問題になるし、くり返し計算のための計算時間に関連して解析上の種々の問題が生じてくる。

著者らは、Zienkiewicz らが提案した初期応力法<sup>1)</sup>を適用して von Mises の降伏条件に基づく弾塑性マトリックスを用いた二、三の非線形解析を行ない、その反復計算の収束性を初期応力系の等価節点力の大きさによって判定し、各反復計算の過程での解の収束性と荷重増分量による解の精度について検討してきた<sup>2)</sup>。また、土を対象として塑性理論に基づく弾塑性マトリックスを用いた初期応力法の解と、三軸圧縮試験結果より得られた応力-ひずみ関係を数式表示して用いた荷重増分法の解とを比較検討し、前者の方法では土のような材料の非線形挙動を十分に表現し得ないことを指摘した<sup>2)</sup>。これらの非線形解析を通じて、従来の接線係数を用いる荷重漸増法によると、荷重増分量の大きさによって解析結果がかなり異なり、逐次解析を進めるにつれて、応力-ひずみ関係の非線形性からの偏差が累積されて、ますます解の精度が低下することや、初期応力法を適用するときの反復計算の収束性の判定量（打ち切り時期）が荷重増分量と関連して逐次増分計算の精度に影響することなどが明らかになった。そこで、著者らは荷重漸増法の精度を向上させるために、荷重増分の過程で修正 Newton-Raph-

\* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 中部電力（株）総合技術研究所

son 法<sup>3)</sup>の考え方を適用して反復計算を行なう修正荷重漸増法を提案し、この解析法による解の特性について考察したので、ここに報告する。

なお、この解析法を簡単に不静定トラス（軸力のみをうける一次元部材）および二軸荷重をうける正方形板（平面ひずみ状態の二次元要素）に適用して荷重-変形曲線を求め、通常の荷重漸増法による結果と比較検討し、修正荷重漸増法が荷重増分量にほとんど影響されずによく材料の非線形性を追跡して行くことを明らかにした。したがって、荷重増分量を大きくとれることおよび反復計算過程で同じ剛性マトリックスが用いられることなどから、非線形解析の時間がかなり節約されるものと思われる。

## 2. 修正荷重漸増法

材料非線形有限要素解析において接線係数を用いる荷重漸増法を適用する場合には、荷重増分の大きさによって解析結果に著しい差の生ずることが認められている。この計算過程を一次元状態に対して模式的に表わすと、図-1 のようになり、材料の非線形性質を部分的な直線の連続で置きかえたことによる影響を逐次累積するような形で変形量の誤差が生じ、したがって、所定の荷重  $P$  に対する変位量は荷重増分量に依存するものと考えられる。このような累積誤差を取り除くために、図-2 および図-3 に示すような Newton-Raphson 法や修正 Newton-Raphson 法の適用が考えられる<sup>3)</sup>。特に後者の方法では解の収束性の改良のほかに、反復計算の過程で剛性マトリックスを一定に保つため、計算時間の短縮という利点も有している。

そこで、ここでは図-1に示すような欠点を補い、荷重漸増法の精度を向上させるために、各荷重増分に対する計算過程において、修正 Newton-Raphson 法の考え方を導入し、次のような修正荷重漸増法と呼ぶ一つの非線形解析法について検討してみた。この場合、解析する系全体として、荷重  $P$  と変位  $U$  をもって修正荷重漸増法を見るとき、これはいわゆる修正 Newton-Raphson

法であって、荷重漸増法との組み合わせでなく、修正 Newton-Raphson 法のみでも材料非線形問題を解くことができるが、それは荷重増分量として全荷重と等しい量を与えた場合に過ぎない。したがって、その場合には、荷重増加の過程での構造物の応力や変形の変化する状態は把握できない。一方、一般に材料非線形問題においては、系の構成要素各個の応力-ひずみ関係として条件が与えられ、これに対して修正 Newton-Raphson 法を適用するためには、応力あるいはひずみのいずれかを一意的に与えて、これに対して収束させる方法をとらなければならないが、これは、与えられた荷重量に対して未知量であるはずであるので、不可能である。そのため修正荷重漸増法では、次に説明するように、見かけの相当応力増分  $\Delta\sigma_{a,i}$  を考え、これが与えられた応力-ひずみ曲線上に十分収束するまで、すなわち、 $\Delta\sigma_{a,i} \rightarrow 0$  となるまで反復計算を行ない、系の構成要素に荷重分担量を再配分しようとするものである。

この方法では、各荷重増分において次のような反復計算が行なわれる。いま一般に応力-ひずみ関係が平均垂直応力  $\sigma_m$  をパラメーターとして相当応力  $\bar{\sigma}$  と相当ひずみ  $\bar{\epsilon}$  で与えられ、その関係が次式のように数式表示されるものとする。

したがって、この場合には接線せん断変形係数  $G_t$  は、

$$G_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}} = \frac{d\varphi}{d\bar{\epsilon}} = \phi(\sigma_m, \bar{\epsilon}) \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

となる。ここでもう一つの変形定数であるポアソン比が  $G_t$  と同様に次のように  $\sigma_m$  と  $\varepsilon$  の関数であるとする。

式(2)および式(3)を用いて荷重増分内の剛性マトリックスが前段階で求められた応力およびひずみより計算されるが、ある荷重増分に対する反復計算の過程ではこの剛性マトリックスは一定に保たれる。

前段階の荷重増分において収束した変位ベクトル、応力ベクトルおよびひずみベクトルをそれぞれ  $\{\delta_c\}_{i-1}$ ,  $\{\sigma_c\}_{i-1}$ ,  $\{\epsilon_c\}_{i-1}$  とすると、次の新しい荷重増分  $\{AP\}_i$  に対して用いられる接線変形係数とポアソン比は次のよ

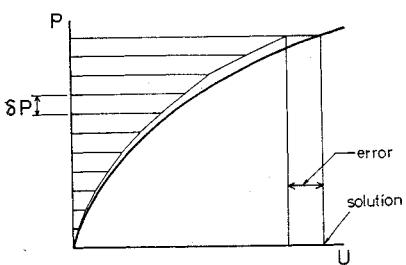


図-1 荷重漸増法（接線係数法）<sup>3)</sup>

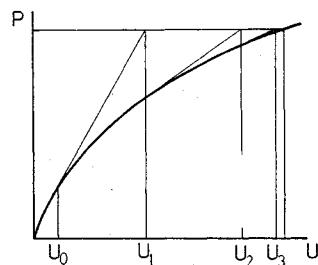


図-2 Newton-Raphson 法<sup>3)</sup>

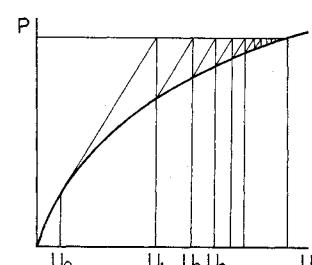


图-3 Modified Newton-Raphson 法<sup>3)</sup>

うに計算される。

$$\left. \begin{aligned} (G_t)_i &= \phi(\sigma_{m,i-1}, \bar{\varepsilon}_{c,i-1}), \\ (\nu)_i &= \psi(\sigma_{m,i-1}, \bar{\varepsilon}_{c,i-1}) \end{aligned} \right\} \dots \quad (4)$$

上式で平均垂直応力  $\sigma_{m,i-1}$  および相当ひずみ  $\epsilon_{c,i-1}$  は  $\{\sigma_c\}_{i-1}$  と  $\{\epsilon_c\}_{i-1}$  から求められる。そこで、式(4)で与えられる変形定数を用いて剛性マトリックス  $[K]_i$  を作成し、この剛性マトリックスを用いて線形解析を行なうことにより、増分荷重  $\{P\}_i$  による線形的な応力増分およびひずみ増分がそれぞれ次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta\sigma_n\}_i &= [D]_i[B]\{\Delta\theta\}_i \\ &= [D]_i[B][K]_i^{-1}\{\Delta P\}_i \\ \{\Delta\varepsilon_n\}_i &= [B][K]_i^{-1}\{\Delta P\}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

上式で  $[D]$  はこの荷重増分の間の弾性マトリックスであり、式(4)で与えられ、 $[B]$  は要素内のひずみ成分と節点変位の関係を与えるマトリックスである。

次に、応力増分  $\{\Delta\sigma_n\}$  に対して相当応力増分  $\Delta\bar{\sigma}_n$  が計算される。この相当応力増分は荷重増分の間に線形的に求められたものであるから、非線形な応力-ひずみ曲線の上ではなく、ひずみ増分  $\{\Delta\varepsilon_n\}$  に対する真の相当応力増分  $\Delta\bar{\sigma}$  の間に次のように見かけの増分  $\Delta\bar{\sigma}_{a,i}$  を与えることになる。

この見かけの相当応力増分  $\Delta\sigma_{a,i}$  は荷重増分の間の応力-ひずみ曲線の非線形性に基づくものであって、各要素の  $\Delta\sigma_{a,i}$  を初期応力系として、初期応力法の場合と同様に取り扱われる。なお、 $\Delta\sigma_i$  は、荷重増分の間に平均垂直応力  $\sigma_m$  が変化せずに増分の初期の値  $\sigma_{m,i-1}$  を用いるものとすれば容易に求められるが、実際には、荷重増分の間で  $\sigma_m$  が変化するから、それを考慮すると容易に定められない。 $\sigma_m$  を反復計算の過程で一定にとるか、変化させるかの影響については、後の計算例において示される。

荷重増分  $\{ΔP\}_i$  を加えた段階でのひずみレベル  $\{\varepsilon_c\}$  は、

で求められ、これより相当ひずみ  $\bar{\epsilon}_{c,i}$  が計算される。したがって、見かけの相当応力増分  $d\bar{\sigma}_{a,i}$  は相当応力と相当ひずみを用いて次式で求められる。

$$\Delta\bar{\sigma}_{g,i} = (\bar{\sigma}_{c,i-1} + \Delta\bar{\sigma}_{n,i}) - \varphi(\sigma_{m,i-1}, \bar{\varepsilon}_{c,i}) \quad \dots (8)$$

初期応力としての見かけの相当応力増分に対する等価節点力は次のように計算される。

$$\{F\}_i{}^e = \int [B]^T \{\delta\sigma_a\}_i d(\text{vol}) \dots \quad (9)$$

ここに、増分応力ベクトル  $\{d\sigma_a\}_i$  は次式で与えられる係数  $k$  :

を用いて、次式で近似するものとする。

また、次の反復計算で用いられる応力ベクトル  $\{\sigma_c\}_i$  は次式で近似するものとする。

$$\{\sigma_c\}_i = \{\sigma_c\}_{i-1} + (1-k) \{4\sigma_n\}_i \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

なお、この応力ベクトルに対応するひずみベクトル  $\{\varepsilon_c\}_i$  は式(7)で求められる。

式(9)で求められた等価節点力は外力としてかけられ、荷重増分の初期の剛性マトリックス  $[K]_i$  を用いて線形応力解析を行なうことにより見かけの応力増分  $\{\Delta\sigma_a\}_i$  が再配分されるが、その計算には上記の手順がそのままくり返し用いられる。そして、見かけの相当応力増分  $\Delta\sigma_{a,i}$  が十分小さくなるまで反復計算が行なわれる。このようにして各反復段階での変位増分  $\{\Delta\delta\}_i$  が求められると、 $N$  回の反復計算の後の変位  $\{\delta_c\}_i$  は次のように求められる。

$$\{\delta_c\}_i = \{\delta_c\}_{i-1} + \sum_{j=1}^N \{4\delta\}_j \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

以上の計算過程を図-4および5に示す。特に図-5に示すように応力-ひずみ曲線が上に凹であるような場合には、見かけの相当応力増分  $\Delta\sigma_{a,i}$  は負となり、次の反復における  $\Delta\sigma_{n,i+1}$  は負となることに注意しなければならない。なお、上で述べた解析手順をフローチャートで示せば図-6のようである。次に、軸力のみをうける一

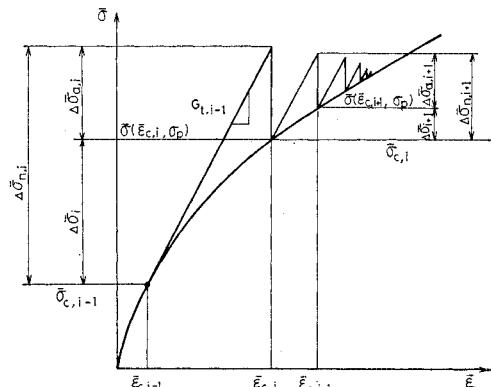


図-4 修正荷重漸増法による計算過程  
(応力-ひずみ曲線が上に凸の場合)

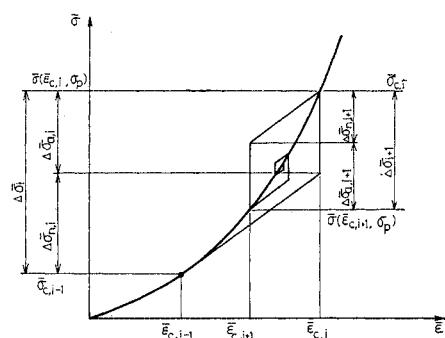


図-5 修正荷重漸増法による計算過程  
(応力-ひずみ曲線が上に凸の場合)

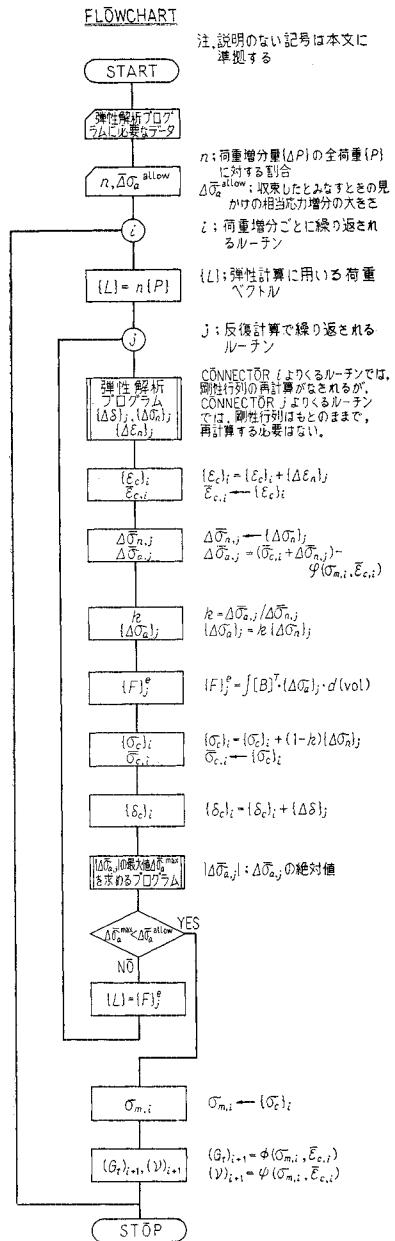


図-6 解析手順のフロー チャート

次元部材および平面ひずみ状態の簡単な構造物に対する解析例を示し、修正荷重漸増法による結果の検討を行なう。

### 3. 軸力のみをうける一次元部材に対する解析 例

図-7 に示す不静定トラスが図-8 に示すように、応力-ひずみ関係として次式で与えられる材料で構成されている場合を考える。

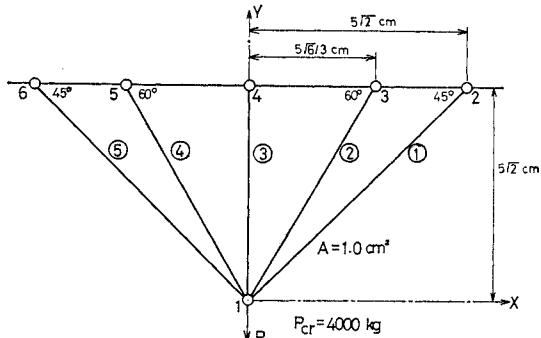


図-7 一次元部材に対する解析モデル

$$\sigma(\epsilon) = -\frac{\sigma_y}{\epsilon_y} (\epsilon - \epsilon_y)^2 + \sigma_y \quad \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 $\sigma_y$  は降伏点応力、 $\epsilon_y$  は降伏点ひずみを表わし、 $\sigma$ 、 $\epsilon$  は部材応力および部材ひずみで部材応力あるいは部材の伸びから計算される。また、接線弾性係数は次式で与えられる。

$$E_t(\epsilon) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{2\sigma_y}{\epsilon_y} \left(1 - \frac{\epsilon}{\epsilon_y}\right) \quad \dots \dots \dots (15)$$

この場合のある荷重増分における反復計算の過程を示すと図-9 のようになる。

いま、図-7 に示すトラスの節点 1 に鉛直荷重  $P_{cr}=4000 \text{ kg}$  を作用させる場合を考える。トラスの各部材の断面積をすべて  $A=1.0 \text{ cm}^2$  とし、部材材料の降伏点応力およびひずみを、それぞれ

$$\sigma_y = 1000 \text{ kg/cm}^2, \quad \epsilon_y =$$

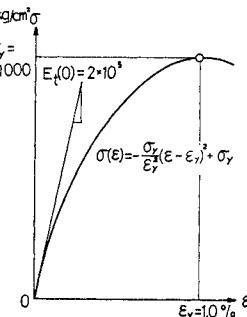


図-8 非線形解析に用いられた部材材料の応力-ひずみ関係

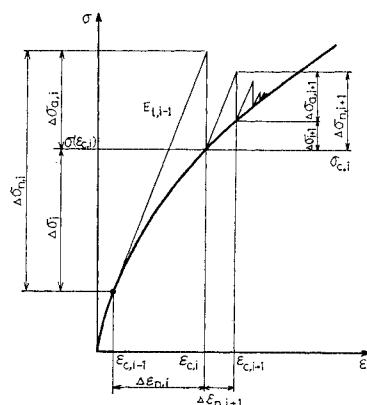


図-9 一次元部材に対する修正荷重漸増法による計算過程

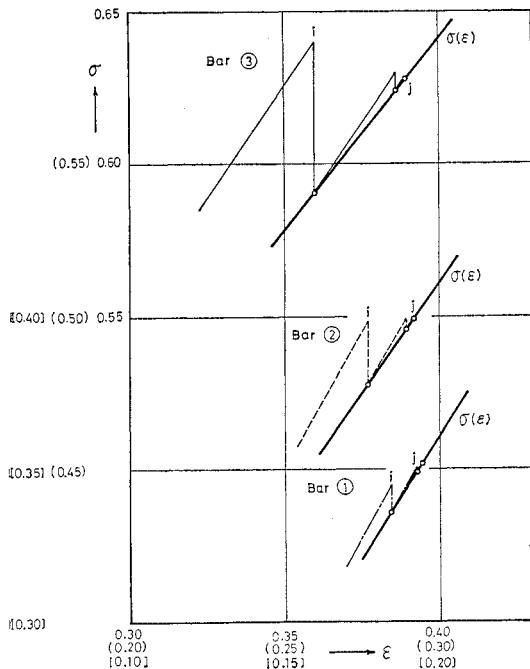


図-10 各部材のある荷重増分の間における反復計算の過程  
1%と仮定すると、この材料の初期弾性係数は  $E_t(0)=2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  となる。

荷重増分量を  $\Delta P=P_{cr}/4$  にとって、荷重  $P$  が  $P=P_{cr}/4$  から  $P=P_{cr}/2$  へ移るときの反復計算の収束状況を示すと、図-10 のようである。部材要素 ①, ②, ③ はいずれも 3 回の反復で式 (14) で与えられる応力-ひずみ曲線上によく収束している。このとき、応力-ひずみ曲線の非線形性により、各部材の荷重分担は、荷重増分による最初の部材力 (図中、 $i$  で示す点) に対し、反復により再分配され、収束の完了した時点での部材力 (図中、 $j$  で示す点) は最初の部材力に比べて、部材①では増加し、部材③では減少していることがわかる。

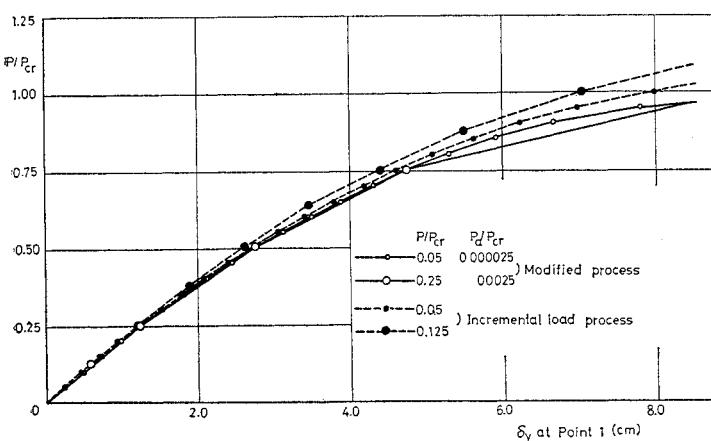


図-11 荷重-変位曲線

次に、2種の荷重増分量  $\Delta P=0.05 P_{cr}$  および  $\Delta P=0.25 P_{cr}$  に対して、反復計算の収束条件として初期応力系の等価節点力の収束値をそれぞれ  $P_a=2.5 \times 10^{-5} P_{cr}$  および  $P_a=2.5 \times 10^{-3} P_{cr}$  として、修正荷重漸増法で解析した場合の節点 1 の鉛直変位の変化を図-11 に示す。また、荷重増分を  $\Delta P=0.05 P_{cr}$  と  $\Delta P=0.125 P_{cr}$  として通常の荷重漸増 (接線係数法) により計算した結果を同時に示してある。この図より、修正荷重漸増法は荷重増分量の大きさによらず一定値に収束するが、通常の荷重漸増法では荷重増分量によって結果は著しく変化することが認められ、また、荷重増分量を小さくするに従って結果は修正荷重漸増法の結果に近づくことがわかる。

#### 4. 二次元問題の適用例

二次元問題における連続体の応力-ひずみ関係は面内での主応力および主ひずみを用いて表示されることが多い。たとえば、平面ひずみ状態では中間主応力の影響を無視して最大、最小主応力の差の半分  $\bar{\sigma}=(\sigma_1-\sigma_3)/2$  と、最大、最小主ひずみの差  $\bar{\epsilon}=\epsilon_1-\epsilon_3$  の関係を平均主応力  $\sigma_m=(\sigma_1+\sigma_3)/2$  をパラメーターとして表示したり、土の三軸圧縮試験の結果のように軸差応力  $(\sigma_1-\sigma_3)$  と軸ひずみ  $\epsilon_1$  の関係を、拘束応力  $\sigma_3$  をパラメーターとして表わしている。これらの関係を用いる場合でも、相当応力-ひずみ関係に対して説明した解析方法が同様に用いられる。

いま、図-12 に示すようにモルタルの立方供試体 (問題の対称性から 1/4 の部分が示されている) が平面ひずみ状態において二軸荷重をうける場合を考え、その荷重-変形関係をいくつかの荷重条件のもとで解析する。モルタルの応力-ひずみ関係は平面ひずみ状態での三軸圧縮試験によって得られた実験値<sup>4)</sup>を Duncan らの提案している方法<sup>5)</sup>により数式化して用いた。この場合、 $\bar{\sigma}=(\sigma_1-\sigma_3)/2$  と  $\bar{\epsilon}=\epsilon_1-\epsilon_3$  の関係を

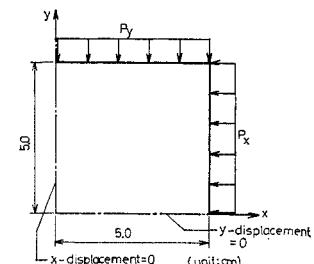


図-12 二次元解析モデル  
(二軸等分布荷重をうける正方形板)

次式

$$\bar{\sigma} = \frac{m \bar{\epsilon}}{a + b \bar{\epsilon}} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

で近似し、 $m$ ,  $a$  および  $b$  などの定数は、モルタルの破壊包絡線が、一軸引張強度  $\sigma_t$  とせん断強度  $\tau_0$  を用いて、次式

で表わされるとして、この関係および実験で得られた応力-ひずみ関係から決定される。

実験により得られた破壊時の  $\sigma$  を  $\sigma_f$  で表わし、式(16)より得られる理論的な終極応力を  $\sigma_{ult}$  として、それらを係数  $R_f$  を用いて次のように関係づけて考える。

このようにすると、 $R_f$  は平均主応力  $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  の関数で求められ、また、係数  $m$  も  $\sigma_m/\sigma_{cr}$  の関数で表

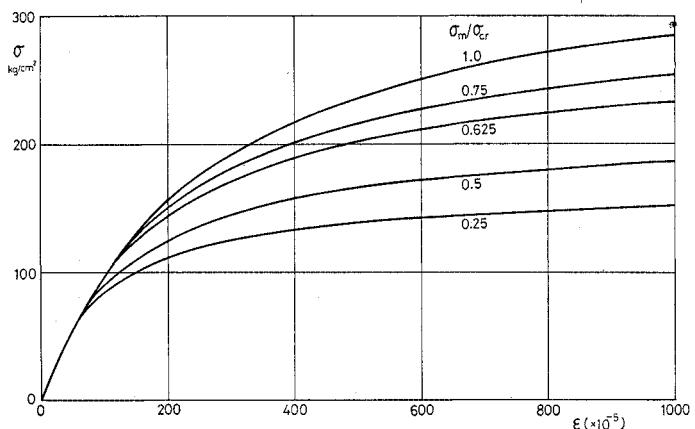


図-13 モルタルの応力-ひずみ関係（モルタルの三軸圧縮試験結果の数式表示）

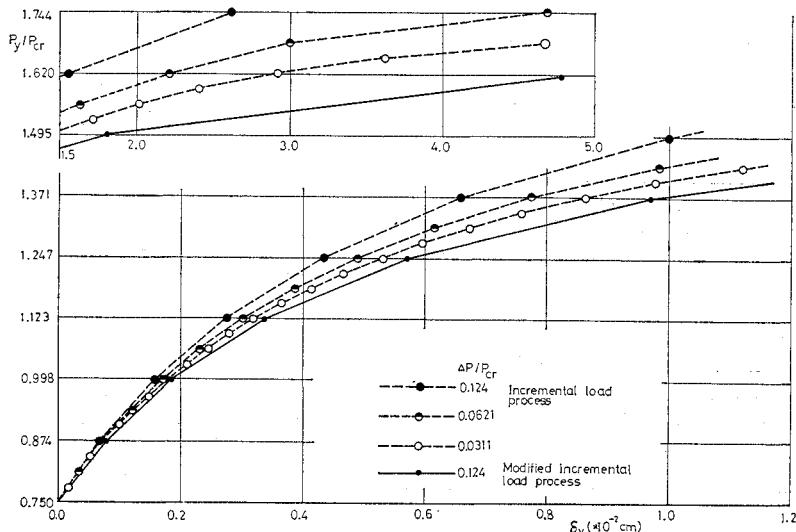


図-14 荷重-変形曲線——接線係数法と修正荷重漸増法による結果の比較

わされる。その結果、式(16)は次のように与えられる。

$$\bar{\sigma} = \frac{m \bar{\epsilon}}{1/G_i + R_f \bar{\epsilon}/\bar{\sigma}_f} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

上式で  $G_i$  は初期せん断弾性係数であり、 $\bar{\sigma}_f$  も実験によって求められるから、応力  $\bar{\sigma}$  とひずみ  $\bar{\epsilon}$  の関係が定められることになる。実験に用いたモルタルでは一軸圧縮強度  $\sigma_c = 322 \text{ kg/cm}^2$ 、引張強度  $\sigma_t = -30 \text{ kg/cm}^2$ 、せん断強度  $\tau_0 = 70 \text{ kg/cm}^2$ 、 $G_i = 1047 \text{ kg/cm}^2$  であって、ポアソン比を  $\nu = 0.25$  と仮定している。式(19)を用いて実験結果を数式表示すると、図-13 が得られる。

さて、供試体の初期応力として、 $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = 0.75 \sigma_{cr}$  を生ずるような初期荷重  $P_{x0} = P_{y0} = 0.75 p_{cr}$  ( $p_{cr} = 322.0 \text{ kg/cm}^2$ ) を与え、パラメーター  $\sigma_m$  が常に 0.75  $\sigma_{cr}$  を保つように二軸方向の荷重の増減を行なうような載荷経路を考える。その場合、荷重増分は  $4p_v = -4p_x$

のようになるが、その大きさを  $4p_{y1}$   
 $p_{cr}=0.124$  にとって解析を進める。

その結果、 $p_y$  の各荷重レベルに対する  $p_y$  載荷面の鉛直変位  $\delta_y$  を図示すると、図-14 のようになる。図は荷重増分量を  $4p_y/p_{cr} = 0.124, 0.0621, 0.0311$  として通常の荷重漸増法により計算した結果が同時に示されている。これらより、通常の荷重漸増法による解析結果が荷重増分量によって影響される程度が明らかであり、増分量を小さくするに従って修正荷重漸増法の結果に収束する傾向が認められる。

次に、修正荷重漸増法による解析において、荷重レベルが  $p_y = 1.247 \sigma_{cr}$  から  $1.371 \sigma_{cr}$  (したがって、 $p_x = 0.253 \sigma_{cr} \sim 0.127 \sigma_{cr}$ ) の間の荷重増分に対して、反復計算の収束状況を示すと、図-15 のようであり、収束は最初の 2~3 回の反復で急速に進むことがわかる。

もう一つの計算例として、供試体に初期応力  $\sigma_{x0} = \sigma_{y0}$   $= 0.25 \sigma_{cr}$  を生ずるような初期荷重  $p_{x0} = p_{y0} = 0.25 p_{cr}$  ( $p_{cr} = 322.0 \text{ kg/cm}^2$ ) をあらかじめ与え、続いて  $y$  方向にのみ順次  $4 p_y = 0.25 p_{cr}$  の荷重増分を与えてゆく場合を

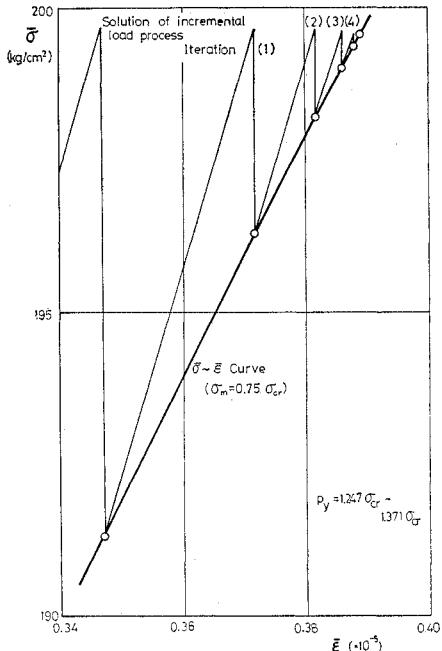


図-15 荷重増分 ( $P_y/P_{cr} = 1.247 \sim 1.371$ ) における反復計算の収束状態

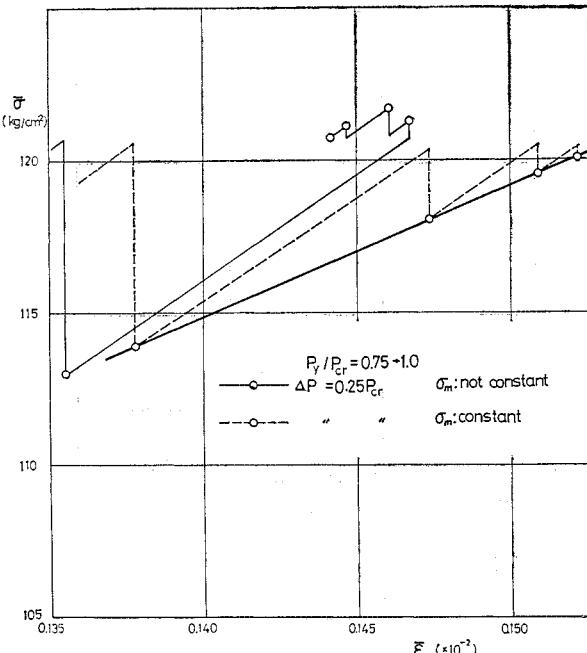


図-16 荷重増分 ( $P_y/P_{cr} = 0.75 \sim 1.0$ ) における平均主応力  $\sigma_m$  の条件と解の収束状態

考える。このような荷重条件の場合には、荷重増分内における反復計算の過程でパラメーターである平均主応力  $\sigma_m$  は変化する。図-16 に荷重レベル  $P_y/P_{cr} = 0.75$  より 1.0 までの荷重増分の間の反復計算の収束状況を示している。この図では、 $\sigma_m$  の値をこの荷重増分の初期の条件（前段階の荷重増分での収束値）のもとで決定し、反復過程ではその値を固定して計算をくり返す場合と、反復ごとの結果より  $\sigma_m$  をあらためて決定し、次の反復計算に用いる場合とが比較して示されている。平均主応力  $\sigma_m$  の値を反復過程において固定することは、前段階の荷重増分による収束値より一義的に決定された応力-ひずみ曲線群中の 1 本の曲線に沿って解を収束させてゆくことになり、荷重増分に伴う応力状態の変化を無視することになる。図-16 において、反復過程で  $\sigma_m$  を固定した場合の計算結果では、この荷重増分に対して、ある応力-ひずみ曲線上に規則的に収束しているように見られ、一方、反復ごとに  $\sigma_m$  を変化させる場合では、その荷重増分における解の収束性に規則性がないように見られるが、いずれの場合にも反復計算過程での各回における数値にはなんら物理的な

意味はない。この計算例に対する厳密解が求められていないので、その収束性は反復回数の増加によって解の変化が減少して行く程度により判断するしかない。

荷重  $p_y$  の載荷面の鉛直変位  $\delta_y$  と荷重  $p_y$  の関係を示すと図-17 のようであり、また、解析で得られた供試体内的主応力差  $\sigma$  と主ひずみ差  $\epsilon$  の関係を  $p_y$  の各荷重段階でプロットしてその変化する状態を求める、図-18 のようである。これら 2 つの結果より、平均主応力  $\sigma_m$  を反復計算過程で固定する場合と、逐次新しく算定して用いる場合との差は著しくないが、荷重増分量が大き

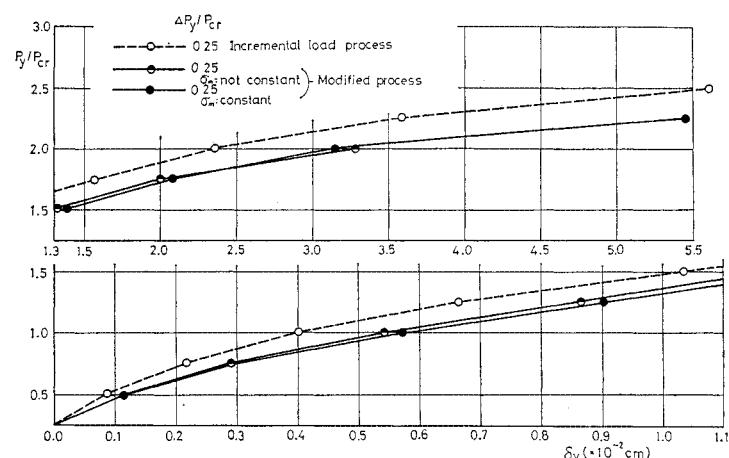


図-17 荷重-変形曲線——同一の荷重増分量を用いたときの二、三の解析法の比較

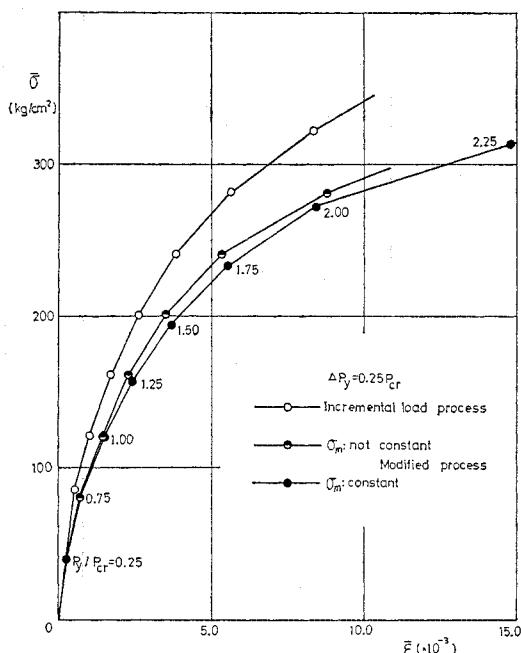


図-18 二、三の解析法によって得られた応力ひずみ曲線の比較

きくなると結果に差が生じることが予想される。一方、通常の荷重漸増法による結果は、修正荷重漸増法に比べて非線形性の追隨が悪く、一般に、同一の荷重レベルに対してかなり小さい変形量を与えることが認められる。

## 5. 結 語

有限要素法による材料非線形解析の一手法として、荷重漸増法の荷重増分過程で Newton-Raphson 法の考えを導入して反復計算を行なう修正荷重漸増法を提案し、一次元要素および二次元要素よりなる簡単な構造物を解析することによって、この計算法による解の特性について考察した。

特に、土や岩のような材料では、応力-ひずみ関係は応力状態に依存し、一般に、相当応力-相当ひずみの関係

が、平均垂直応力  $\sigma_m$  をパラメーターとする曲線群で表示されて、金属材料のように1本の曲線で表示することができない。本論文では、モルタルの三軸圧縮試験の結果を数式表示して、それを解析に導入したが、上記のようないずれ特性のために、反復計算過程における応力変化に伴うパラメーター  $\sigma_m$  の取り扱いが計算上問題になった。計算の結果では、ある荷重増分の段階での  $\sigma_m$  の値として前荷重段階の最終値を用い、反復計算中一定とした計算でも、荷重増分量が小さい場合には、反復計算中に  $\sigma_m$  の値を変化させて解析した場合とかなり一致した結果が得られることがわかった。また、各応力レベルでそれに対応した応力-ひずみ曲線の接線係数を用いる通常の荷重漸増法（接線係数法）による解析結果と比較して、修正荷重漸増法による結果が荷重増分量の大きさによってほとんど影響されずによく材料の応力-ひずみ関係の非線形性に追随してゆくことが明らかになった。したがって、荷重増分量を大きくとれることや反復計算過程で剛性マトリックスを変える必要がないことから、材料非線形解析の計算時間がかなり節約できるものと思われる。

終りに、本計算は京都大学大型計算センター FACOM 230-60 によったことを付記しておく。

## 参考文献

- Zienkiewicz, O.C., S. Valliappan and I.P. King : Elasto-plastic Solutions of Engineering Problems "Initial Stress", Finite Element Approach, Int. J. for Numerical Method in Eng., pp. 75-100, 1 (1969).
- 宮池克人：二次元連続体の有限要素解析に関する基礎的研究，名大土木研究報告書 No. 71112 (昭和46年2月)。
- Orden, J.T. : Finite Element Applications in Nonlinear Structural Analysis, Proc. of Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, Nashville pp. 419-456 (Nov. 1969).
- 富田和政・秋本昌胤・川本勝万：三軸圧縮応力下におけるモルタルの変形特性，土木学会論文報告集，175 pp. 75-83 (1970).
- Duncan, J.M. and C.Y. Chang : Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, ASCE, SM 5, pp. 1629-1653 (1970).

(1971.10.28・受付)