

水で満たされていない円形暗きよの取水量について

ON THE QUANTITY OF WATER INTAKEN FROM INFILTRATION GALLERY PARTIALLY FILLED WITH WATER

上田年比古*・杉尾哲**
By Toshihiko Ueda and Satoru Sugio

1. まえがき

水平な上面が湛水でおおわれている均一な透水性の半無限浸透領域内に円形暗きょがあり、円形暗きょの内部が水で満たされていない場合（以下これを未満水暗きょという）を考える。従来このような未満水暗きょの取水量の算定には、暗きょ周壁の上端とか暗きょ中心点の圧力が大気圧の水で満たされていると考えて、被圧円形暗きょの式である Muskat 式¹⁾あるいは Kirkham 式²⁾によって算定しているようである。しかしこれは被圧状態の円形暗きょの周壁が等ポテンシャル線であるのに対し、未満水状態の円形暗きょの周壁は等ポテンシャル線ではないので、一般には被圧円形暗きょの取水量算定式は用いられない。

本報では Darcy の法則が適用できる範囲の浸透流について、半無限浸透領域内および長方形浸透領域の中央軸上に未満水暗きょがある場合の暗きょ取水量の近似解を、複素ボテンシャルの解を利用して求め、ついで砂モデルによる実験結果との比較を行なった。また取水量の第1近似解の計算図表の作成および被圧暗きょ式を用いた場合の検討も行なった。

2. 半無限領域の未満水円形暗きよの取水量

(1) 基 础 式

いま 図-1 のように、水平な地表面 (y 軸) 上に水深 H_0 の湛水がある、均一な半無限浸透領域に埋設された、水深 h の未満水暗きょの取水量を考えよう。ま

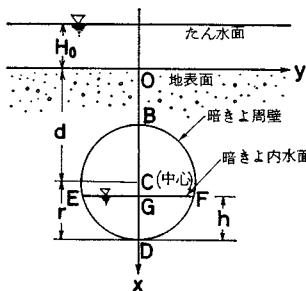


図-1 未満水円形暗きよ

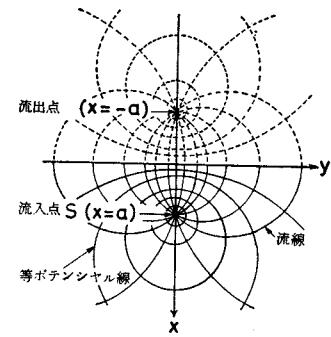


図-2 流入流出点をもつ流れの
流線網

すこの領域について暗きよを考えずに、ある1点 S ($x = a, y = 0$) に流入点をもつ場合の浸透流を考えると、この流れは 図-2 に示すように無限領域に流入流出点をもつ流れとなり、その複素ポテンシャル W は

また領域内の任意点の速度ポテンシャルと流れ関数は

となり、等ポテンシャル線は図-2のような円群をなす。次にこの流れにおいて、中心の位置が $x=d$, $y=0$ で、半径 r の、ある等ポテンシャル線の流入点の位置 ($x=a$, $y=0$) および浸透流量 Q を求めると、次のようになる³⁾。

$$a = \sqrt{(d-r)(d+r)} \text{ or } \sqrt{d^2 - r^2} \dots \dots \dots (4)$$

$$Q = \frac{2\pi k A H}{\ln \{(d + \sqrt{d^2 - r^2})/r\}} \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

ここに、 ΔH は地表面と等ポテンシャル線との間の水頭差である。

満水状態の円形暗きょ（被圧円形暗きょ）は、暗きょ周壁が等ポテンシャルであるから、図-2 の円群のう

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学科

** 正会員 九州大学助手 工学部水工土木学科

ち、この暗きょ周壁に一致する円に暗きょ内のポテンシャル値を与えると、暗きょへの流れは 図-2 の流れと全く一致し、この場合の流量が暗きょ取水量となる。すなわち式(5)は被圧円形暗きょの取水量である。しかし、本報で取り扱う未満水暗きょでは、その周壁は等ポテンシャルとはならない。すなわち 図-1 に示すように暗きょ内に水深 h の水がある場合には、周壁の圧力分布は、 \widehat{EDF} 間では静水圧分布をなし、 \widehat{EBF} 間では大気圧に等しい。したがって、暗きょ周壁の速度ポテンシャル分布は、 \widehat{EBF} 間では

$$\phi = k\{(p_a/w) - x\} = -kx \quad \dots\dots\dots(6)$$

(p_a は大気圧で 0) となって深さ方向に減少し、 \widehat{EDF} 間では

$$\phi = -k(d+r-h) \quad \dots\dots\dots(7)$$

の等ポテンシャルである。

したがって、この場合の流れは 図-2 に示す流入流出点をもつ流れと異なってきて、このような流れの厳密解を求めることは困難と考えられる。したがってここでは、次に述べるように第1近似解を求め、ついでこれに対する補正量を求めて未満水円形暗きょの取水量を算定した。

(2) 未満水暗きょの取水量の解析

a) 第1近似解

図-3 の円 BEDFB は水深 h をもつ与えられた未満水暗きょであり、そのポテンシャルは式(6),(7)より、暗きょ上端の位置 B 点で $\phi_B = -k(d-r)$ 、暗きょ下端の位置 D 点で $\phi_D = -k(d+r-h)$ である。図の点線の円群は B 点、D 点でそれぞれ上記の ϕ_B 、 ϕ_D のポテンシャル値をもつような流入流出点をもつ流れの等ポテンシャル線群で、図-2 と同じものとし、この場合の流入

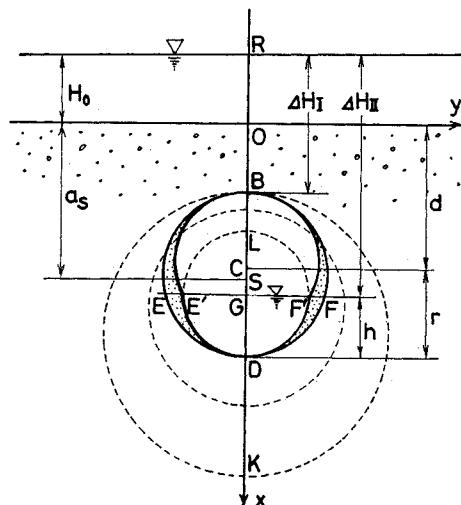


図-3 第1近似解算定の説明図

点を S 点とする。ここではこの S 点を流入点とする浸透流の流量をもって第1近似解 Q_1 とした。こうすれば Q_1 は次のようにして求められる。

流入点 S の x 座標を a_s として、B 点および D 点の座標と速度ポテンシャルを式(2)に与えると、B 点に対して

$$\phi_B = -k(d-r) = \frac{Q_1}{2\pi} \cdot \ln \frac{a_s - (d-r)}{a_s + (d-r)} + kH_0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

D 点に対して

$$\phi_D = -k(d+r-h) = \frac{Q_1}{2\pi} \cdot \ln \frac{(d+r)-a_s}{(d+r)+a_s} + kH_0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

次に地表面と B 点および D 点との間の水頭差を ΔH_I 、 ΔH_{II} とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_I &= H_0 + d - r \\ \Delta H_{II} &= H_0 + d + r - h \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

式(9)より

$$a_s = (d+r) \cdot \tanh \frac{\pi k \Delta H_{II}}{Q_1} \quad \dots\dots\dots(11)$$

これを式(8)に代入すれば

$$\frac{Q_1}{k \Delta H_I} = \frac{2\pi}{\ln \left[\frac{\tanh \left\{ \pi \frac{\Delta H_{II}}{\Delta H_I} / \left(\frac{Q_1}{k \Delta H_I} \right) \right\} + 1}{\tanh \left\{ \pi \frac{\Delta H_{II}}{\Delta H_I} / \left(\frac{Q_1}{k \Delta H_I} \right) \right\} - \left(1 - \frac{r}{d} \right) / \left(1 + \frac{r}{d} \right)} \right]} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで得られた流量 Q_1 は暗きょ周壁上のポテンシャルが、S 点を流入点とする浸透流のポテンシャル(点線のポテンシャル)の値をもつ場合の流量である。しかし暗きょ周壁上の実際のポテンシャルは、S 点を流入点とする浸透流のポテンシャル値とは B 点、D 点以外では一致しない。したがって実際の浸透流線は S 点を流入点とする浸透流線とはやや異なる。すなわち式(12)の流量 Q_1 は近似解である。

次にここで得られた流量 Q_1 はどのような暗きょの流量に相当するのかを、別な観点から考えてみよう。いま与えられた暗きょ周壁上のポテンシャル(式(6),(7))と同じ深さにおいて同じポテンシャルを持つ、点線の等ポテンシャル円群上の点をとって結んだ曲線を図-3 の BE'DF'B とする。すなわち \widehat{EDF} 間は $\phi = -k(d+r-h)$ の等ポテンシャルであるから、 $\widehat{E'DF'}$ は D 点を通る点線の等ポテンシャル線にそい、 \widehat{BE} および \widehat{BF} 間は式(7)に示すように、ポテンシャル値が深さ方向に $\phi = -k(d-r)$ から $\phi = -k(d+r-h)$ まで減少するから $\widehat{BE'}$ および $\widehat{BF'}$ のようになるであろう。この場合 BE'DF'B 曲線上のポテンシャルは、同じ位置の 図-2

の浸透領域内のポテンシャルと同じであるから、E'F'に水面をもつBE'DF'Bの形の暗きょに対する流線は図-2の浸透流の流線と一致する。すなわちBE'DF'Bは図-2の浸透流を変えずに、しかも与えられた暗きょの深さ方向のポテンシャルが変わらないように変形した未満水暗きょであり、上述の第1近似解の流量はこのBE'DF'Bの暗きょに対する流量になる。

いまこの第1近似解の誤差すなわち与えられた暗きょBDの流入量とBE'DF'Bの流入量との差を考えると、BE'DF'Bは円BDの中に図-3の点々の部分だけ余分に砂がつまっていることから、BE'DF'Bへの流入量は円BDのそれよりやや少なめの量を与えることが推察される。ちなみに $h/2r=0, 0.2, 0.5$ および 0.7 の4つの場合におけるそれぞれのBE'DF'Bに相当する

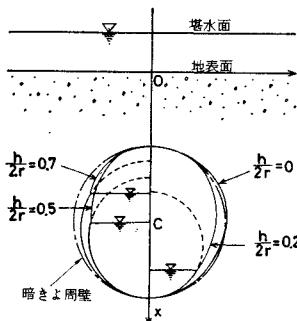


図-4 第1近似解の未満水暗きょ

曲線を作図で求めると図-4の実線のようになる。この図からわかるように、 $h/2r=0$ からの時のBE'DF'Bは暗きょ周壁にほぼ一致しており、この場合の誤差はきわめて小さいと考えられる。また満水時には両者は一致し、誤差は水位

が中間位で最大となることが想定される。しかし図-4の $h/2r=0.5, 0.7$ における断面の縮小の状態からみて、誤差は比較的小さいものと考えられる。

b) 第1近似解の計算図表

式(12)はかなり面倒な繰返し計算を要するので、次のようにして計算図表を作成した。式(12)をみると、 $Q_1/k\Delta H_1$ は $\Delta H_{II}/\Delta H_I$ と r/d との関数となる。したがってこの関数関係により計算結果を整理すると図-5の計算図表をえた。いまだとえば $H_0=1m$, $d=5m$, $r=2m$, $h=0.5m$ とすれば $\Delta H_I=4m$, $\Delta H_{II}=7.5m$ であるから、図-5の $\Delta H_I/\Delta H_{II}=0.53$, $r/d=0.4$ の位置から $Q_1/k\Delta H_1=5.3$ が得られる。

c) 第1近似解の補正量の算定

ここでは上述の第1近似の解析でとった流線すなわちS点を流入点とする流線と実際の流線における、地表面から暗きょ周壁までの流線長が両者でほぼ等しいと考えて、暗きょ周壁上のポテンシャル値の、第1近似の解析時でとった値と実際の値との差異に基づく流量の差異を求めて補正量を算定しよう。

いま図-6の暗きょ周壁上の任意の点Pの、第1近似解におけるポテンシャルを ϕ_1 、実際のポテンシャル

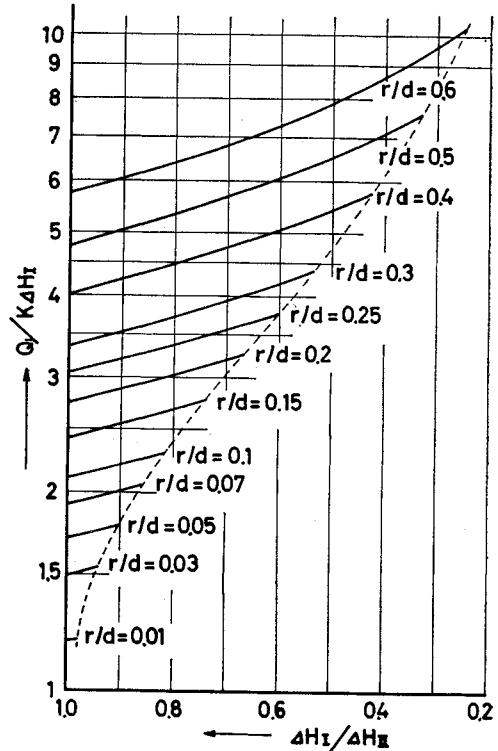


図-5 半無限浸透領域の計算図表

を ϕ_t とし、地表面のポテンシャルを ϕ_0 、地表面からの流線長を l とすれば、P点における暗きょ周壁にそろ単位長さ当たりの流量 q はDarcy則より、実際の暗きょに対して

$$q_t = \alpha(\phi_0 - \phi_t)/l \quad \dots \dots \dots (13)$$

ここに α は定数

第1近似解に対して

$$q_1 = \alpha(\phi_0 - \phi_1)/l \quad \dots \dots \dots (14)$$

したがって暗きょ周壁単位長さ当たりの補正量 d_q は

$$dq = q_t - q_1 = \alpha \frac{\phi_1 - \phi_t}{l} = q_1 \frac{\phi_1 - \phi_t}{\phi_0 - \phi_1} \quad \dots \dots \dots (15)$$

となり、暗きょ周壁全周に対する補正量 ΔQ は

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \int dq = 2 \int_D^B q_1 \frac{\phi_1 - \phi_t}{\phi_0 - \phi_1} ds \\ &= 2 \int_0^\pi q_1 \frac{\phi_1 - \phi_t}{\phi_0 - \phi_1} r d\theta \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (16)$$

円周の座標は図-6について

$$y = r \sin \theta, x = d + r \cos \theta \quad \dots \dots \dots (17)$$

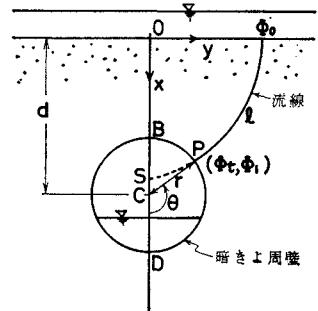


図-6 補正量の算定

これを式(3)に代入すれば

$$\psi = \frac{Q_1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2ar \sin \theta}{d^2 + r^2 - a^2 + 2dr \cos \theta} \quad \dots(18)$$

$$\therefore q_1 = \frac{d\psi}{rd\theta} = \frac{Q_1}{2\pi} \frac{2a \cos \theta (d^2 + r^2 - a^2) + 4adr}{(d^2 + r^2 - a^2 + 2dr \cos \theta)^2} + 4a^2r^2 \sin^2 \theta \quad \dots(19)$$

次に式(17)を式(2)に代入すれば

$$\phi_t = \frac{Q_1}{4\pi} \cdot \ln \frac{2(d-a)(d+r \cos \theta) + a^2 + r^2 - d^2}{2(d+a)(d+r \cos \theta) + a^2 + r^2 - d^2} + kH_0 \quad \dots(20)$$

また ϕ_t は式(6),(7)より

$$\phi_t = \begin{cases} -k(d+r \cos \theta) & (\text{暗きよ内水面より上}) \\ k(h-d-r) & (\text{暗きよ内水面より下}) \end{cases}$$

であるから、

$$\frac{\phi_1 - \phi_t}{\phi_0 - \phi_1} =$$

$$\left[k \cdot f(\theta) / \left\{ \frac{Q_1}{4\pi} \cdot \ln \frac{2(d+a)(d+r \cos \theta) + a^2 + r^2 - d^2}{2(d-a)(d+r \cos \theta) + a^2 + r^2 - d^2} \right\} \right] - 1 \quad \dots(21)$$

ここに、

$$f(\theta) = \begin{cases} H_0 + d + r \cos \theta & (\text{暗きよ内水面より上}) \\ H_0 + d + r - h & (\text{暗きよ内水面より下}) \end{cases}$$

式(19),(21)を式(16)に代入して数値積分すれば補正量 $4Q$ を算定できる。したがって与えられた暗きよの取水量 Q_t は次式で与えられる。

$$Q_t = Q_1 + 4Q \quad \dots(22)$$

(3) 実験による検討

未満水状態の暗きよ取水量を図-7に示すような、暗きよ内水面を自由に変えうるよう奥行20cmの砂モデル実験装置によって測定し、以上の解析結果を検討した。なおこのモデルの長方形浸透領域と半無限浸透領域との被圧円形暗きよの取水量の誤差を著者らの理論式(式(30))より求めてみると0.2%以下となったの

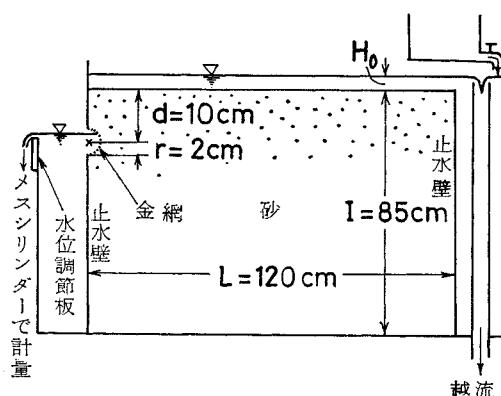


図-7 実験装置

で、このモデルの領域で十分に半無限領域とみなせると考えた。また算定に用いた透水係数の値は被圧暗きよの状態の測定流量を式(5)に代入して得た値 $k=0.48 \sim 0.43 \text{ cm/sec}$ を用いた。ここに透水係数は実験中、時間の経過とともに変化したので、適宜満水状態にして透水係数を測定していった。

実験は $H_0=3 \text{ cm}$ として、暗きよ内水面を変えて流量を測定した。この結果を図-8の丸印に示す。次に式(12)および式(22)による計算値をそれぞれ破線と実線に示す。実験値と実線とを比較すると、ほぼ近似しているといえよう。なお図中の水平な鎖線は、従来用いられた方法すなわち暗きよ中心を大気圧または暗きよ周壁上端を大気圧とする水で暗きよ内が満たされているとして、被圧円形暗きよ取水量の算定式(ここでは式(5)によった)によって算定されたもので、暗きよ内水面によって大きな誤差をもつことがわかる。

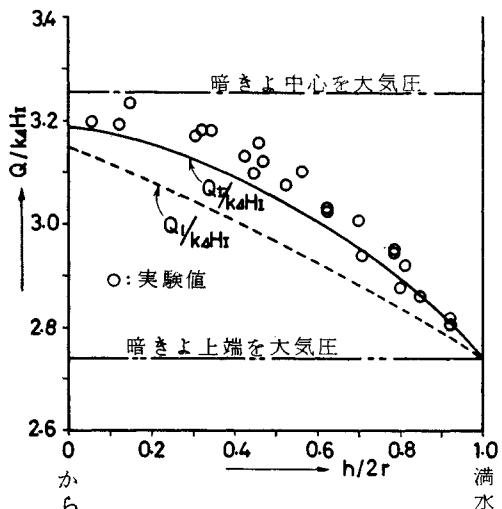


図-8 実験結果との比較

(4) 取水量算定結果の考察

式(22)による取水量算定の結果を図-9に示す。これより、 r/d が大きくなると $Q_t/k 4 H_1$ は増加する。次に $h/2r$ が小さくなるにつれて $Q_t/k 4 H_1$ は増加し、この増加率は H_0/d が小さくなるほど、また r/d が大きくなるほど大きくなる。なお r/d が小さくて H_0/d が大きいと暗きよ内水深の相違による取水量の変化はほとんどなくなる。

次に暗きよ取水量の第1近似値 Q_1 に対する補正量 $4Q$ の比率を示すと図-10のようになる。これより $4Q/Q_1$ は H_0/d が小さいほど大きくなる。また H_0/d が小さい場合 r/d が大きいほど大きくなる。またその最大になる $h/2r$ の値は H_0/d , r/d によって異なる。からの付近では、 $4Q/Q_1$ は H_0/d がほぼ 1.0 より大

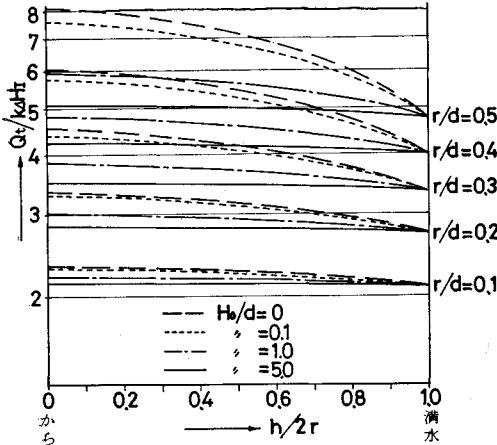


図-9 未満水円形暗きょの取水量算定結果

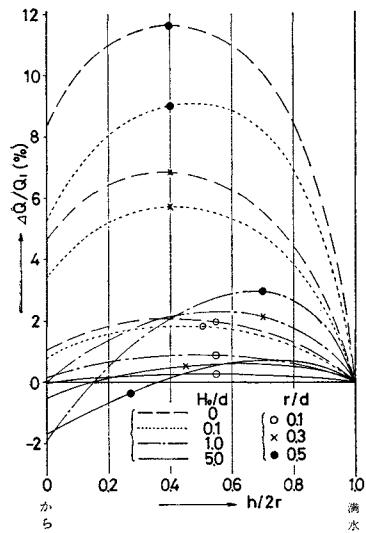


図-10 第1近似解に対する補正量の比率

きくなると r/d がほぼ 0.3 より大きい場合負の値を示すようになる。なおほぼ $H_0/d > 1.0$, $r/d < 0.5$ では $4Q/Q_1$ は 3% 以内となり、第 1 近似値でも十分な精度を持つといえよう。またこの図により第 1 近似値の概略の補正を行なうこともできるであろう。

(5) 被压円形暗きよ式を代用した場合の検討

従来、未満水暗きょの取水量については、この算定式がなかったため、暗きょ内のある一点を大気圧として被圧円形暗きょ式により算定しているようである。この場合、大気圧とする点を一点に固定すれば、暗きょ内水深によってはかなりの誤差を伴うことが 図-8 の鎖線と実線との対比からみていえる。

ここでは未満水暗きょに対して式形の簡単な被压円形暗きょ式を用いて取水量算定を行なおうとした場合、そ

の算定誤差を少なくする方法を考えてみよう。図-3についてみると、水で満たされていない円形暗きょでは地表面からの浸透流が、B点では $k \cdot \overline{RB}$ のポテンシャル差で、また \overline{EDF} 間は $k \cdot \overline{RG}$ のポテンシャル差で、 \overline{BE} 間はその中間のポテンシャル差で流入するから、この流入量が \overline{BED} 間をすべて同じポテンシャル差 $k \cdot \overline{RJ}$ (JはBG間のある一点) で流入する場合の流入量(すなわちJ点を大気圧とする水で暗きょ内が満たされている場合の流入量)と等しくなるJ点が存在するであろう。このJ点を暗きょ上端Bよりはかって

$$\bar{B}\bar{J} = C_0 \cdot r \quad \dots \dots \dots \quad (23)$$

とすれば、被压暗きょ取水量の算定式 式(5) の AH は

となる。いま未満水暗きょ取水量の算定式 式(22)により、各境界条件における取水量を求め、これを式(5)の Q に与えて ΔH を求め、ついで式(24)より C_0 を求めると 図-11 をえた。すなわちこの図の曲線で与えられる J 点の位置を大気圧にとれば、被圧暗きょ式によつて、未満水暗きょ取水量がほとんど誤差なく算定できることになる。

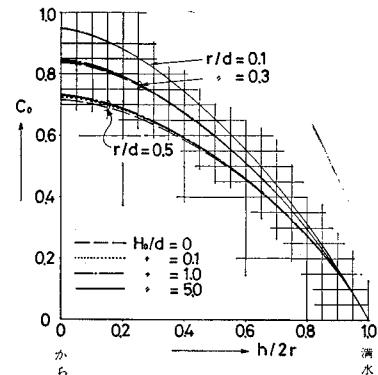


図-11 大気圧を与える点の位置 C_0 の値
 $(BJ = C_0 \cdot r)$

次にこの図の曲線をみると、 H_0/d による変化は比較的少なく、 r/d に対して曲線が群にわかっているので、これらの各曲線群について、それぞれ平均的曲線をとり、 C_0 を r/d と $h/2r$ の関数として表わすと、

$$C_0 = \left(1 - \frac{h}{2r}\right) \left\{ \left(1.75 - 0.66 \frac{r}{d}\right) - \left(0.75 - 0.11 \frac{r}{d}\right) \left(1 - \frac{h}{2r}\right) \right\} \dots \dots \dots (25)$$

をえた。いまこの C_0 を用いて式(24)により $4H$ を求め、式(5)から Q_f を求め、これと式(22)による Q_f との誤差を求めるところ図-12 となった。これより $r/d \leq 0.5$ では誤差 2% 以内で未満水暗きの取水量を算定できることがわかる。これは前述の第1近似解の値

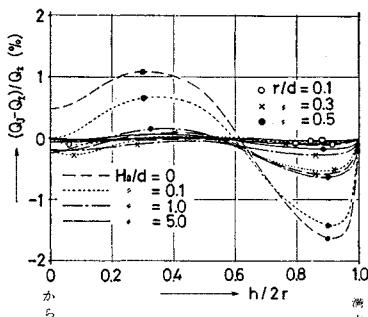


図-12 被圧暗きょ式による近似算定誤差
(式(25),(24)による)

より精度はよい。すなわち式(25),(23)によってえられるJ点を大気圧とすれば、被圧暗きょ式(式(5))により比較的簡単に、しかも精度よく未満水暗きょの取水量を算定することができる。

以上のことから、未満水暗きょの取水量を求める場合に、より高い精度が要求される場合には、式(16)の数値積分を行なって式(12),(22)より求める方法によらなければならぬと考えられるが、一般には被圧暗きょ式(式(5)と式(24),(25)を用いることにより、十分に満足できる値をうることができるといえる。

3. 長方形領域の未満水円形暗きょの取水量

(1) 基 础 式

いま図-13のよう、水平な地表面(y軸)上に水深 H_0 の湛水がある均一な長方形浸透領域の中心軸上に埋設された水深 h の未満水暗きょの取水量を考えよう。まずこの領域について暗きょを考えずに、図-14のように中心軸上のある1点 $S_r(x=a, y=0)$ に流入 \nearrow

$$\phi = \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{\{sn Cx \cdot dn Cy - sn Ca \cdot (1-sn^2 Cy \cdot dn^2 Cx)\}^2 + sn^2 Cy \cdot cn^2 Cx \cdot cn^2 Cy \cdot dn^2 Cx}{\{sn Cx \cdot dn Cy + sn Ca \cdot (1-sn^2 Cy \cdot dn^2 Cx)\}^2 + sn^2 Cy \cdot cn^2 Cx \cdot cn^2 Cy \cdot dn^2 Cx} + kH_0 \quad \dots(27)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2sn Ca \cdot (1-sn^2 Cy \cdot dn^2 Cx) \cdot sn Cy \cdot cn Cx \cdot cn Cy \cdot dn Cx}{sn^2 Cx \cdot dn^2 Cy - sn^2 Ca \cdot (1-sn^2 Cy \cdot dn^2 Cx)^2 + sn^2 Cy \cdot cn^2 Cx \cdot cn^2 Cy \cdot dn^2 Cx} \quad \dots(28)$$

となり、等ポテンシャル線は図-14の点線のような图形となる。次にこの流れにおいて、領域内の中心軸上の $x=d-r$ と $x=d+r$ の二点を通る等ポテンシャル線の流入点の位置($x=a$)および浸透流量 Q は次のようになる³⁾。

$$sn(Ca, m) = \sqrt{sn\{C(d-r), m\} \cdot sn\{C(d+r), m\}} \quad \dots(29)$$

$$Q = \frac{2\pi k A H}{\ln \frac{\sqrt{sn\{C(d+r), m\}} + \sqrt{sn\{C(d-r), m\}}}{\sqrt{sn\{C(d+r), m\}} - \sqrt{sn\{C(d-r), m\}}}} \quad \dots(30)$$

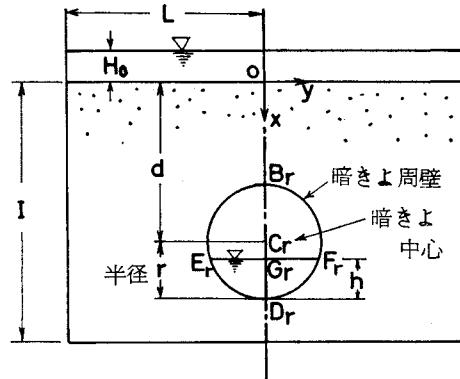


図-13 長方形漫透領域内の未満水円形暗きょ

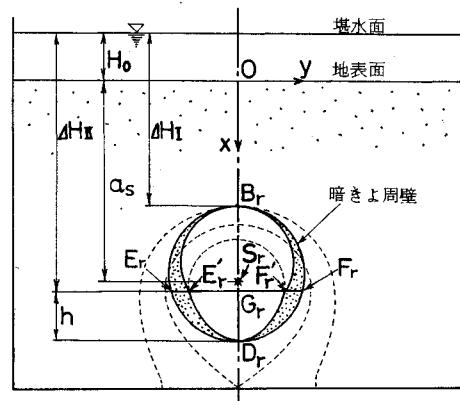


図-14 第1近似解算定の説明図

点をもつ浸透流に関する複素ポテンシャルは

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{sn(Cz, m) - sn(Ca, m)}{sn(Cz, m) + sn(Ca, m)} + kH_0 \quad \dots(26)$$

で表わされ、領域内の任意点の速度ポテンシャルと流れ関数は

ここに、 ΔH は地表面と等ポテンシャル線との間の水頭差である。

この場合の等ポテンシャル線は図-14の点線に示すように円ではないから、円形の満水暗きょ周壁(等ポテンシャル)とは一致しない。したがって式(30)は長方形領域内の満水暗きょの取水量の近似解である。さらに未満水暗きょの場合は、暗きょ周壁のポテンシャルは式(6),(7)のようになり、流れは上記の一つの流入点をもつ流れと異なってくる。したがって半無限領域の場合と同様にして、第1近似解、ついでその補正量を求めて、この場合の暗きょ取水量を算定した。

(2) 未満水暗きょ取水量の解
析

a) 第1近似解

図-14 の点線の等ポテンシャル線群は、暗きょ上端 B_r 、下端 D_r の位置で、与えられた暗きょのポテンシャルをもつ流入点 S_r への流れの等ポテンシャル線とし、この場合の流量を第1近似解 Q_1 とする。こうすれば Q_1 は半無限領域の場合と同様に、次のようにして求められる。

式(27)に B_r 点および D_r 点の座標と速度ポテンシャルの値を代入すると、 B_r 点に対して

$$\begin{aligned}\phi_B = -k(d-r) &= \frac{Q_1}{2\pi} \\ &\cdot \ln \frac{\operatorname{sn} C a_s - \operatorname{sn} C(d-r)}{\operatorname{sn} C a_s + \operatorname{sn} C(d-r)} \\ &+ k H_0 \quad \dots \dots \dots (31)\end{aligned}$$

D_r 点に対して

$$\begin{aligned}\phi_D = -k(d+r-h) &= \frac{Q_1}{2\pi} \\ &\cdot \ln \frac{\operatorname{sn} C(d+r) - \operatorname{sn} C a_s}{\operatorname{sn} C(d+r) + \operatorname{sn} C a_s} \\ &+ k H_0 \quad \dots \dots \dots (32)\end{aligned}$$

次に地表面と B_r 点および D_r 点との間の水頭差 ΔH_1 、 ΔH_{II} は式(10)で表わされるから、式(32)より

$$\frac{Q_1}{k \Delta H_1} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d+r)/I, m\} \cdot \tanh \{\pi(\Delta H_{II}/\Delta H_1)/(Q_1/k \Delta H_1)\} + \operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d-r)/I, m\}}{\operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d+r)/I, m\} \cdot \tanh \{\pi(\Delta H_{II}/\Delta H_1)/(Q_1/k \Delta H_1)\} - \operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d-r)/I, m\}}} \quad \dots \dots \dots (34)$$

をうる。これが第1近似解である。なお図-14の $B_r E_r' D_r F_r' B_r$ は図-3における $BE'DF'B$ に相当するものである。

b) 第1近似値の計算図表

ここで式(34)の算定に便利なように計算図表を作成する。まず式(34)の変数を考えると、 \tanh の項は $\Delta H_1/\Delta H_{II}$ および $Q_1/k \Delta H_1$ の関数で表わされ、 sn の項は I/d 、 r/d および m の関数で表わされる。また m は領域の形状 $L/I = (L/d)/(I/d)$ により決まる値である。したがって $Q_1/k \Delta H_1$ は $\Delta H_1/\Delta H_{II}$ 、 I/d 、 L/d および r/d の4変数によって求められる。このような考察により求めた計算図表を図-15に示す。いまたとえば前述の計算例の円形暗きょが $I=9\text{m}$ 、 $L=4\text{m}$ の長方形領域内にある場合を考えれば、 $I/d=1.8$ 、 $L/I=$

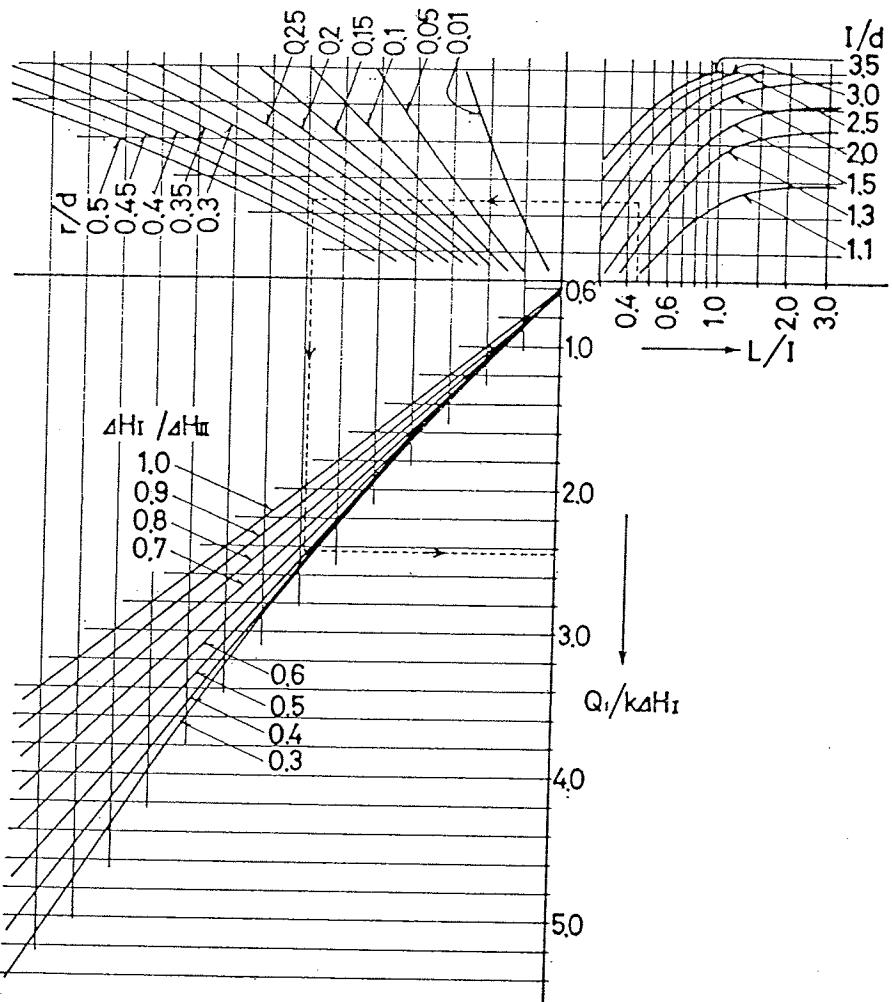


図-15 長方形浸透領域の計算図表

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(C a_s, m) &= \operatorname{sn}\{C(d+r), m\} \\ &\cdot \tanh(\pi k \Delta H_{II}/Q_1) \quad \dots \dots \dots (33)\end{aligned}$$

これを式(31)に代入して整理すると

$$\frac{Q_1}{k \Delta H_1} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d+r)/I, m\} \cdot \tanh \{\pi(\Delta H_{II}/\Delta H_1)/(Q_1/k \Delta H_1)\} + \operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d-r)/I, m\}}{\operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d+r)/I, m\} \cdot \tanh \{\pi(\Delta H_{II}/\Delta H_1)/(Q_1/k \Delta H_1)\} - \operatorname{sn} \{K(m) \cdot (d-r)/I, m\}}} \quad \dots \dots \dots (34)$$

0.44、 $r/d=0.4$ 、 $\Delta H_1/\Delta H_{II}=0.53$ であるから、図の点線のようによみとて $Q_1/(k \Delta H_1)=2.43$ がえられる。

c) 第1近似解の補正量の算定

半無限領域の場合と同様にして、式(13)～(22)にしたがって求めよう。まず第1近似解における暗きょ周壁にそぐ単位長さ当たりの流量 q_1 は式(28)と式(17)を用いて、

$$q_1 = d\psi/r d\theta = F(\theta) \quad \dots \dots \dots (35)$$

また式(27)と式(17)を用いて、

$$(\phi_1 - \phi_t)/(\phi_0 - \phi_1) = k \cdot f(\theta)/G(\theta) - 1 \quad \dots \dots \dots (36)$$

ここに $f(\theta)$ は式(21)のものと同じであり、 $F(\theta)$ 、 $G(\theta)$ は

$$\begin{aligned}SX &= \operatorname{sn}\{K \cdot (d+r \cdot \cos \theta)/I, m\}, \\ SY &= \operatorname{sn}\{K' \cdot r \cdot \sin \theta/L, m'\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CX &= cn\{K \cdot (d + r \cdot \cos \theta) / I, m\}, \\
 CY &= cn\{K' \cdot r \cdot \sin \theta / L, m'\} \\
 DX &= dn\{K \cdot (d + r \cdot \cos \theta) / I, m\}, \\
 DY &= dn\{K' \cdot r \cdot \sin \theta / L, m'\} \\
 SA &= sn\{K \cdot a_s / I, m\} \\
 AA &= SY \cdot CX \cdot CY \cdot DX, \\
 BB &= 1 - SY^2 \cdot DX^2
 \end{aligned}$$

で表示すると、

$$\begin{aligned}
 F(\theta) &= 2 SA \cdot AA \cdot (K/I) \cdot F_1(\theta) / F_2(\theta) \\
 F_1(\theta) &= \{-2 AA \cdot (DX \cdot DY \cdot \cos \theta / CX \\
 &\quad + m^2 \cdot SX \cdot SY \cdot \sin \theta / CY) \\
 &\quad + BB \cdot SX \cdot DY \cdot (CY \cdot \cos \theta / SX / SY) \\
 &\quad + DX \cdot \sin \theta / CX / DY - SY \cdot \cos \theta / SX / CY \\
 &\quad + m^2 \cdot CX \cdot \sin \theta / DX / DY\} \cdot \{(SX \cdot DY)^2 \\
 &\quad - SA^2 \cdot BB^2 + AA^2\} \\
 &\quad - 2 BB \cdot \{-SX \cdot CX \cdot DX \cdot DY^2 \cdot \sin \theta \\
 &\quad + 2 SA^2 \cdot BB \cdot AA \cdot SX \cdot DY \\
 &\quad \cdot (DX \cdot \cos \theta / SX / CX) \\
 &\quad + m^2 \cdot SY \cdot \sin \theta / CY / DY) \\
 &\quad + AA \cdot SX \cdot DY \cdot (CX \cdot CY^2 \cdot DX \cdot \cos \theta / SX \\
 &\quad + SY \cdot CY \cdot DX^2 \cdot \sin \theta / DY) \\
 &\quad - SY^2 \cdot CX \cdot DX \cdot \cos \theta / SX + m^2 \cdot SY \\
 &\quad \cdot CX^2 \cdot CY \cdot \sin \theta / DY\} \\
 F_2(\theta) &= \{(SX \cdot DY)^2 - SA^2 \cdot BB^2 + AA^2\}^2 \\
 &\quad + 4 SA^2 \cdot AA^2 \cdot BB^2 \\
 G(\theta) &= \frac{Q_1}{4\pi} \cdot \ln \frac{(SX \cdot DY + SA \cdot BB)^2 + AA^2}{(SX \cdot DY - SA \cdot BB)^2 + AA^2}
 \end{aligned}$$

式(35), (36)を式(16)に代入して数値積分すれば補正量 ΔQ が算出できる。

次に前述のように長方形領域内の満水円形暗きょの取水量算定式式(30)は近似解である。これは1個の流入点をもつ流れの等ポテンシャル線が長方形領域内では円とならないためである³⁾。しかし、この満水状態の円形暗きょ取水量に対する補正量もここで述べた方法で求められる。すなわち式(33)の代りに式(29)を用い、 $f(\theta) = \Delta H$ (地表面と暗きょ内との水頭差)として式(16)の数値積分を行なえば補正量 ΔQ が求められる。

(3) 実験による検討

実験装置は図-7と同じで、長方形領域の条件をもたせるように I, L を短くした。ここでは $I=20\text{ cm}$, $L=10\sim40\text{ cm}$, $d=10\text{ cm}$, $r=2\text{ cm}$, $H_0=2.8\sim3.4\text{ cm}$ として、暗きょ内水深を変化させて流量を測定した。すなわち $r/d=0.2$, $I/d=2.0$, $H_0/d=0.28\sim0.34$ の場合について、 $L/I=0.5, 1.0$ および 2.0 の浸透領域における各 $h/2r$ に対する暗きょ取水量を測定した。これらの測定結果を図-16に示す。なお算定に用いた透水係数

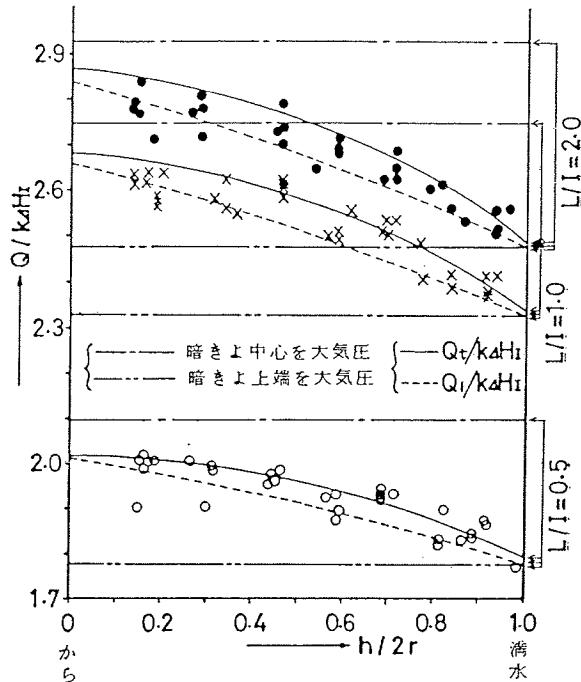


図-16 実験結果との比較

の値は被圧暗きょ状態の測定流量を、満水状態の算定結果 $Q_t/k\Delta H_1$ に代入して求めた値を用いたが、実験砂の締め固めの程度で異なり、 $k=0.27\sim0.36\text{ cm/sec}$ の値を示した(実験砂は前述1.(3)とは別のものである)。

いま $H_0/d=0.3$ の場合についての算定結果 $Q_t/k\Delta H_1$ (実線) および第一近似値 $Q_1/k\Delta H_1$ (破線) と実験結果とを比較すると、 $Q_t/k\Delta H_1$ と $Q_1/k\Delta H_1$ との相違は比較的少なく、実験結果はこれら両曲線とほぼ一致しているようである。なおこれから、 $Q_1/k\Delta H_1$ は未満水暗きょの取水量として十分の精度をもつものと考えてよいであろう。次に図中には被圧円形暗きょ式(式(30))を用いて、暗きょ中心を大気圧とおいた場合(一点鎖線)と暗きょ周壁上端を大気圧とおいた場合(二点鎖線)の算定結果を示している。これによると $h/2r$ の値によってかなり大きな誤差を持つことがわかる。

(4) 浸透領域の拡大

いま、式(34)から浸透領域の横幅を拡げた場合の流量の変化を求めるとき、図-17のようになり、未満水状態 ($\Delta H_1/\Delta H_{II}=0.9, 0.8$) と満水状態 ($\Delta H_1/\Delta H_{II}=1.0$) で同じ傾向を示し、ある程度領域の横幅が大きくなると、横方向無限大の領域の算定結果とほぼ同じ値になることがわかる。また浸透領域が縦方向に長い場合も同様なことがいえる。

いま浸透領域が横方向あるいは縦方向に無限大の場合の未満水暗きょの取水量を式(34)の拡張として求めみよう。橢円関数の一般的性質として、

を式 (34) に適用すると,

$$\left(\frac{Q_1}{k A H_1} \right)_{L \rightarrow \infty} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\sin \pi(d+r)/2 I \cdot \tanh(\pi k A H_1/Q_1) + \sin \pi(d-r)/2 I}{\sin \pi(d+r)/2 I \cdot \tanh(\pi k A H_1/Q_1) - \sin \pi(d-r)/2 I}} \quad \dots \dots \dots \quad (38)$$

$$\left(\frac{Q_1}{k \Delta H_I} \right)_{I \rightarrow \infty} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\tanh \pi(d+r)/2 L + \tanh(\pi k \Delta H_I/Q_1)}{\tanh \pi(d+r)/2 L - \tanh(\pi k \Delta H_I/Q_1)}} \dots \dots \dots (39)$$

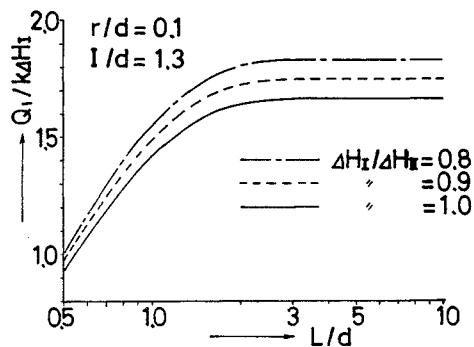


図-17 長方形領域の横幅増加による取水量の変化

となる。また式 (38) を $d+r \ll I$ あるいは式 (39) を $d+r \ll L$ として Maclaurin 展開して整理すると、式 (12) すなわち半無限領域の解と一致する。

次に式(34)を用いて、横方向に長い領域あるいは縦方向に長い領域での計算を行なおうとすると、梢円関数の母数 m の値が 0 あるいは 1 に非常に近くなつて高精度の計算が必要になる。したがつてある程度大きな領域の場合には、式(38), (39)あるいは式(12)を用いて

計算する方がよい。そこで式(34)と式(38),(39)あるいは式(12)との算定誤差が1%および5%になるような領域の大きさを $r/d=0.1$ および0.5で、暗きょ内が満水状態の場合($\Delta H_1/\Delta H_{II}=1.0$)と $\Delta H_1/\Delta H_{II}=0.6$ の場合について求めてみると図-18のようになる。ここに $\Delta H_1/\Delta H_{II}=1.0$ の場合を実線で、 $\Delta H_1/\Delta H_{II}=0.6$ の場合を一点鎖線で示している。この図の意味は、aa'線群より右側の部分に相当する浸透領域では式(38)を用いて算定しても、式(34)の算定結果との誤差が1%あるいは5%以下であることを示し、同様にbb'線群より上側の部分に相当する浸透領域では式(39)、またaとbとをなめらかに結ぶab線群より右上側の部分に相当する浸透領域では式(12)を用いて算定しても、式(34)との算定誤差が1%あるいは5%以下であることを示す。

4. むすび

以上によって、浸透領域が半無限、長方形、帯状および縦に長い場合について、その中央軸上にある未満水暗きよの取水量の近似解を求めることができたものと考える。なおこの結果は砂モデルの実験結果と比較して、十分の精度をもつことを確かめた。

この取水量算定法は第1近似解における繰返し演算および第1近似解を補正するための数値積分が含まれる。なお、それほどの精度を要求しない場合には、第1近似解の値を暗きよ取水量とみなしても十分であると考える。この第1近似解については計算図表を示しているので、簡単に所要の値を求められるであろう。

また半無限領域の未満水暗きよの取水量を、式形の簡単な被圧暗きよ式により求める場合を考え、この場合に暗きよ内で大気圧を与

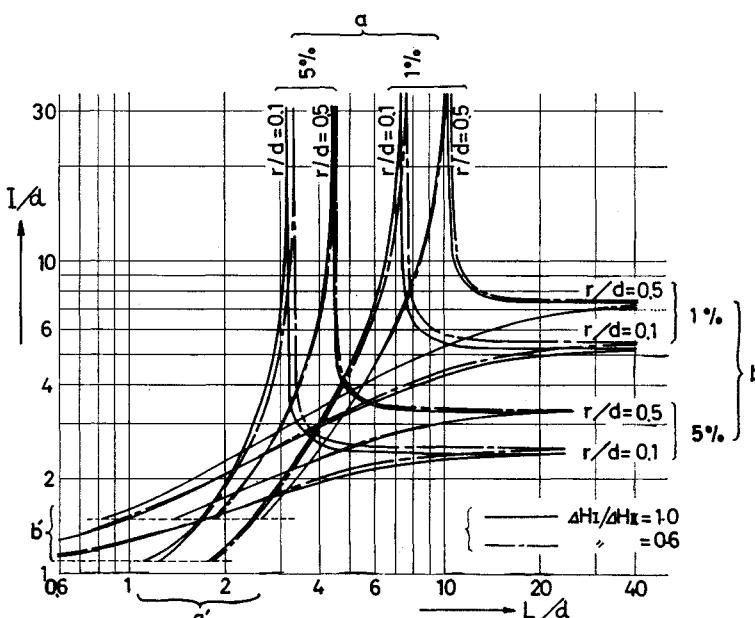


図-18 各種浸透領域に対する取水量算定式の適用範囲

える点の位置を示す式を求めた。これによれば比較的簡単に、しかも第1近似解よりも精度よく未満水暗きょの取水量が求められる。

以上の解析は、地表面上に湛水がある場合について検討したものであるが、湛水がなく、地盤中に自由地下水を生ずる場合は、暗きょへの流れの状態がこれまで解析したものと異なったものとなるので、以上の取水量算定式では取水量を求めることができない。今後この場合について検討してゆきたいと考えている。

終りに、卒業研究として実験および整理にご協力いただいた有田建男君ならびに本学 林 謙蔵氏に感謝します。なお上記の計算には、本学中央計数施設の電子計算

機 OKITAC 5090 H および同大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。また本研究は文部省科学研究費の援助をうけた。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Muskat, M. : The flow of homogeneous fluids through porous media, p. 175~181, McGraw Hill, 1946.
- 2) Kirkham, D. : Flow of ponded water into drain tubes in soil overlying an impervious layer, Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 30, p.369~385, 1949.
- 3) 上田・杉尾：被圧水で満たされた円形暗きょの取水量について、土木学会論文報告集, No. 194. p. 91~101, 1971.

(1971.11.20・受付)