土木学会論文報告集
第 201 号・1972 年 5 月

三次元圧密の基礎理論

FUNDAMENTAL THEORY OF THREE-DIMENSIONAL CONSOLIDATION

吉　国　　洋*
By Hiroshi Yoshikuni

1. まえがき

これまで数多くの圧密理論が提案されているが，それらは大きく二つの流れに分類され，その基礎理論として Terzaghi の一次元圧密理論と Biot の三次元圧密理論があげられる。

1923 年，K. Terzaghi[15] の提案した一次元の圧密理論は特に有効応力の概念において，圧密論のみならず強度論も含めて近代土質力学の体系化に重要な役割を果たした。また，1935 年には，周知のように L. Rendulic[13] は Terzaghi が一次元圧密の方程式を導いたと同様な手法で三次元の圧密方程式を導いた。そして，彼の提案する三次元の圧密方程式に含まれる圧密係数は一次元の場合と異なり，圧密過程中一定値をとらないものであった。しかし，その後の理論的発展においては，この問題にあまり注意を払わず圧密係数一定の取扱いをするのが普通である。こうして得られた三次元圧密の方程式を現場や実験室における個々の問題に適用してその解を与えたのが，R.A. Barron[2]，Da Silveira[6]，R.E. Gibson[8] その他の人々である。特にサンドドレーンによる放射流圧密に対する Barron の解は現場の沈下解析に，また外方向の円柱放射流圧密に対する Silveira の解は実験室にと非常に広く利用されている。

このように近代土質力学の体系化に重要な役割を果たし，現場や実験室において広く利用される Terzaghi-Rendulic 系列の三次元圧密理論にも基本的問題点が含まれており，多くの人々によってその非合理性が指摘され続けている。その指摘は Terzaghi-Rendulic の三次元圧密理論の構成において土の三次元的変形則が考慮されていないということにあった。Terzaghi[14] 自身もこのことを認め，Rendulic の導いた三次元の圧密方程式を引合いに出して次のように述べている。「圧密係数の値は，線型の応力-ひずみ関係を仮定しても，三次元の場合には圧密過程中一定値とならない。またこの値を一定値とするところに三次元圧密問題の基本的誤差の原因がある。」このような記述は直感的であり，熱伝導型の三次元圧密方程式がもつ問題点の本質を明確にしていないうえ，誤ってさえいる。それはさておき，このように熱伝導型の三次元の圧密方程式は，その妥当性，または適用条件など明確にされないまま利用されており，そこには理論的混乱がある。

これに対して，1941 年 M.A. Biot[3] は三次元弾性論の立場から一組の圧密支配方程式を提案した。そして Biot の圧密理論には Terzaghi 系列の圧密理論においてあまり考慮の払われなかった変形の問題が取り入れられており，彼の圧密理論は不飽和の場合を除いて多くの人々に感銘を与え，土質力学の分野に新風をまき起こした。そして J. McNamee[11]，R.E. Gibson[11]，De Leeuw[7]，その他の人々が Biot 理論に基づいてそれぞれ個々の問題の解を与えている。Terzaghi 系列の圧密理論が基本的問題で混乱しているのに対し Biot の圧密理論は整然としており，基本的に議論する余地のない感じさえする。それにもかかわらず Biot の圧密理論は一般に使用されず，もともと混乱しているはずの Terzaghi 系列の圧密理論がもっぱら現場や実験室のデータ解析に利用され続け，最も有力であるかのような印象さえ受ける。

このように Terzaghi の圧密理論が一般的に利用され，生き続ける理由として次のことが考えられる。

（1） 三次元の圧密において土が線形の弾性体であると仮定しても，圧密過程中圧密係数は一定でありえないにもかかわらず，Biot の圧密論では，これを一定としているという誤った Terzaghi[14] の批判に Biot は何ら釈明を与えていない。

（2） Biot の圧密論の立場から Terzaghi 系列の圧密理論の非合理性あるいはそれが成立するための条件と

* 正会員　工修　広島大学講師　工学部土木工学科

いうものが，明確に指摘されておらず，もっぱら特殊な条件のもとにおける両理論の解の比較に止っている。

（3） Biot の提案した一組の圧密支配方程式が圧密方程式にまで発展されていないため，変形をとり入れた圧密論の基礎概念が十分明確にされえていない。

（4） 利用しやすい形で Biot 理論の解が用意されていない。

（5） 従来の圧密試験法は Terzaghi 系列の圧密理論のための試験法であり，Biot の圧密理論において必要な力学定数（たとえばヤング率およびポアソン比）の決定方法が確立されていない。

このように，二つの系列の圧密論が独立して存在し，他を完全に否定することもなしえず，また他を包含するにも至っていない。これは今日なお圧密の基礎概念が十分明確にされていないことを物語っている。この基礎概念の明確化をはばんでいるのは，実に Terzaghi の提案する一次元圧密の概念である。それは Terzaghi が変形ということを，あまり考慮しなくてもよい変形条件のもとで圧密の問題を考えた。そのために圧密現象を主として土中水の流れと体積変化の問題として，すなわち連続の条件的に把握しており，そこには多分に熱伝導との対応において圧密の問題を考えたことが伺われる。そしてこの連続の条件的な圧密の概念をよりはげしく一般に印象づけたのが Taylor によるピストンとスプリングからなる圧密のモデルである。このモデルから圧密における変形の概念を汲みとることはできない。

もちろん Terzaghi 系列の人達の中にも変形を考慮して Terzaghi の方程式を修正しようと試みた人達がいる。それは，R.E. Gibson[8]，E.H. Davis[16]，I.K. Lee[10] その他の人々[1),12)]であって変形の問題を全応力の変化として表現しようとした。しかしそれは連続の条件的な Terzaghi の圧密の概念と漸変荷重による圧密の概念とを結果的に組合せたもので，**4**. に議論されるようにこれは圧密方程式とはいいがたく，この方程式のみによって圧密の問題を解くことは不可能である。それにもかかわらず Terzaghi の示した圧密の概念が強く印象づけられているために，この概念が比較的容易に理解され，今日なお大きな説得力をもちそして広い支持を得ている。そしてこのようなことが圧密の問題をさらに混乱させているのである。Terzaghi 自身この過ちをおかしていることから，これがいかにおちいりやすいものであるかを伺うことができる。すなわち，Terzaghi が一次元圧密の方程式を導いたと同じ手法で Rendulic は三次元の圧密方程式を導いた。そしてそれは Terzaghi の一次元の方程式を三次元に拡張したものであると一般にも理解され，Terzaghi もそのように理解している。それは先に示した Rendulic の圧密方程式中の圧密係数に対する記述から伺うことができ，Terzaghi-Rendulic の三次元圧密方程式といわれるゆえんでもある。しかし，Rendulic の手法は Terzaghi のそれと全く異なり，むしろ Gibson や Davis らが全応力の変化を考えて圧密の方程式を導いたと同じ手法である。ただ全応力はどのような場合でも時間的に変化しないという現実にはあり得ない仮定をおいたために，結果的に熱伝導型の圧密方程式に形の上で類似した方程式が得られたに過ぎない。ともあれ Rendulic の導いた方程式は，つりあい条件およびひずみの適合条件など圧密方程式の構成に必要な要項を欠いており，圧密方程式とはいいがたい。この点において Terzaghi の一次元圧密の方程式と Rendulic のそれは，その基本的性質を異にしており，そのことを Terzaghi は気付いていない。したがって圧密係数を一定にした熱伝導型の圧密方程式は Rendulic の方程式から派生した近似式であるというより，むしろ Terzaghi の一次元圧密の方程式をただ単に熱伝導の問題との対応において三次元のケースに拡張したとみる方が妥当のようである。このようにより厳密であると考えられていた方程式が圧密方程式としての機能を果たさず，妥当性を確かめずに三次元に拡張された方程式が，**3**. において見られるように，ある特定の変形条件を伴ってはいるが，立派に圧密方程式として機能するというのは皮肉なことではある。

これまでの議論は圧密の基礎概念に関する問題であったが，圧密の問題に関するもう一つの重要な研究テーマに土の特性の究明がある。Terzaghi の圧密理論にしても Biot の圧密理論にしても，粘土の力学的性質に関する多くの仮定の上に成り立っているので，それら基礎圧密理論は実験室や現場で得られた沈下データを完全には説明し得ないものである。そこで圧密過程中における実際の上の挙動を許すようにそれぞれの系列の立場から，それぞれの基礎理論の修正ないしは適用範囲の拡大が，非常に多くの研究者によって試み続けられており，特に土質力学における最近の研究の中心は，二次圧密ないしは非線型の問題あるいはダイレタンシー効果であるとか土の非弾性挙動の究明に力点が置かれているように思える。確かに実際の土の挙動を説明することは土質力学の最終目標であり，非常に重要なことではある。しかし単純な土モデル（線型弾性体）に対する三次元圧密の基礎的概念が十分明確にされていない現在，まずそれを明確にしておくことは将来より複雑な挙動を許す圧密理論を誤りなく発展させるのに役立つという意味において重要なことがらである。

そこで本論文の目的は線形弾性体に対する三次元圧密の基礎概念を明確にし，混乱した状態にある圧密基礎理論を整理統合し，体系化するのが目的である。したがっ

て，この論文において土の非弾性挙動に関する問題はふれられていない。なおこの論文においては Rendulic によって拡張されたといわれる圧密係数を一定にした熱伝導型の圧密方程式を一次元の場合も含めて Terzaghi の圧密方程式と呼ぶことにする。

2. 圧密基礎方程式の誘導

圧密方程式の誘導にあたって土の基本的特性を次のように仮定する。

1) 土塊の等方，等質性，2) 完全飽和，3) 土粒子および間げき水の非圧縮性，4) 線型の応力-ひずみ関係，5) 微小ひずみ，6) Darcy の法則の成立，7) 透水係数一定。

これらの仮定は，現実の土に対して十分認められるものではない。しかし，本論文の目的が，単純な土モデルに対して従来提案されているいくつかの圧密基礎理論の整理統合と各理論の位置づけにあるので，先に示した仮定群の妥当性については以後ふれないこととする。

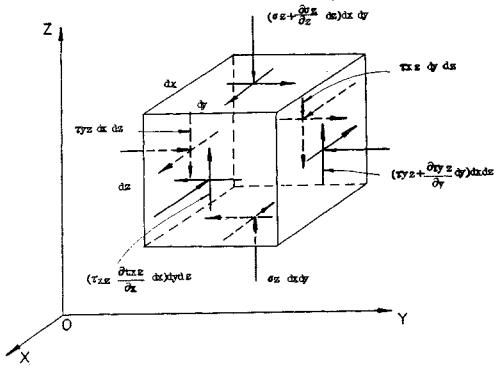

Fig. 1 Stresses on an elemental prism

Fig. 1 は任意の時刻に，微小立方体の側面に作用する応力のうちで，簡単のために x, y は省略して z 方向のつりあいに関係する応力だけを示したものである。**Fig. 1** において重力による体積力は省略されているが，この単純化はすでに弾性学において十分認められたものである。なお圧密過程を静的であると見なすならば，式 (1) に示す応力によって表わされたつりあい方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y'}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z'}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

応力-ひずみ関係として一般化された Hooke 則を Lamé の定数 (λ, μ) を用いて表わすならば

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x'&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_z\\ \sigma_y'&=\lambda\varepsilon_x+(\lambda+2\mu)\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_z\\ \sigma_z'&=\lambda\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y+(\lambda+2\mu)\varepsilon_z\\ \tau_{xy}&=\tau_{yx}=\mu\gamma_{xy}\\ \tau_{zx}&=\tau_{xz}=\mu\gamma_{zx}\\ \tau_{yz}&=\tau_{zy}=\mu\gamma_{yz}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式 (2) 中の各ひずみは，式 (3) に示すように変位の成分 (u_x, u_y, u_z) で表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\\ \varepsilon_z&=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

ただし，u_x, u_y, u_z は座標系の負の向きにある時，正とする。

そこで式 (2) および式 (3) の関係を式 (1) に代入すれば，変位で表わされたつりあい方程式が得られる。式 (4) はそれをベクトルを用いコンパクトな形で表現したものである。

$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+\mu\nabla^2\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\,u=0\ \cdots\cdots(4)$$

次に示す恒等的関係

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}&=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=e\\ \nabla^2\boldsymbol{u}&=\mathrm{grad}\cdot\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}-\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\end{aligned}\right\}$$

を式 (4) に代入するならば式 (5) が得られる。

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,e-\mu\,\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\,u=0\cdots(5)$$

そこで式 (5) の発散を考えるならば

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\equiv0$$

であるから

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,e+\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,u=0\cdots\cdots\cdots(6)$$

を得る。そで単純化のために，記号

$$\nabla^2=\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を用いるならば，式 (6) は

$$\nabla^2\{(\lambda+2\mu)e+u\}=0$$

となる。

そこで

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+\mu\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

と置くならば，式 (6) は

$$\nabla^2\varphi=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

となり，φ は調和関数であり，土塊のすべての点で Laplace の方程式を満足する。また φ はスカラー量であり，応力の次元を持つものであるが，一つのポテンシャルと考え，間げき水圧と体積ひずみで表現される量の和であるという意味において，圧密の Total Potential と呼ぶことにする。従来の圧密理論において Terzaghi は間げき水圧を，Biot は体積ひずみを結果的に一つの

ポテンシャルとして用いたことになっている。

いま，方程式 (8) の境界値問題を議論するために式 (8) の一つの解を次のように書く。

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=C_1F(r)+C_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここに，C_1, C_2 は積分定数であり，$F(r)$ は一，二および三次元の場合に，それぞれ次のようである。

$$F(r)=r,\ \log r \text{ および } \frac{1}{r}$$

ここに，$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

式 (9) は Laplace の方程式の主要解であり，点 (x', y', z') において不定となるという意味で特異性を有するけれども，方向に無関係で距離だけに関係する非常に簡単な解である。したがって，式 (9) は圧密過程の物理的，数学的意味を明らかにするのに最も効果的な式であると考えられる。圧密過程を考えるということは，土塊の中に発生している Total Potential の分布と時間過程を明らかにするということである。Total Potential の分布は式 (9) によって示されており，残る時間過程を示す関係式は，式 (9) を時間で偏微分することによって得られる。すなわち

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(C_1F(r)+C_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

一方土塊中では常に連続の条件が満足されなければならないので，次式が成立する。

$$\frac{\partial e}{\partial t}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

ここに，$\boldsymbol{v}$ は間げき水の速度ベクトルである。また間げき水の流れに関して Darcy の法則の妥当性を認めるならば，

$$\boldsymbol{v}=-\frac{k}{\gamma_\omega}\mathrm{grad}\,u \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

である。式 (12) を式 (11) に代入して，連続の方程式を書き改めるならば

$$\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{k}{\gamma_\omega}\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}\,u=-\frac{k}{\gamma_\omega}\Delta^2u \cdots\cdots\cdots (13)$$

となる。

次に式 (13) を式 (10) に代入すれば

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2u+\frac{\partial}{\partial t}(C_1F(r)+C_2) \cdots\cdots\cdots (14)$$

ここに，

$$C=\frac{k}{\gamma_\omega}(\lambda+2\mu)$$

となり，式 (14) は圧密方程式である。式 (14) の右辺第2項は境界条件項ともいうべきものであって，有限または無限のひろがりをもつ土塊の境界上の条件によって決定されるものである。またいいかえるならば，この境界条件項の決定は，いわゆる Laplace 方程式の境界値問題といわれるものである。このようにみてくると，圧密の問題は式 (8) に示した Laplace の方程式を与えられた境界条件のもとで解くことに帰着される。もちろん圧密は非定常の問題であるから式 (8) の解の時間的変化を考えねばならないことはいうまでもない。

これまで Laplace の方程式を満たす圧密の Total Potential を定義し，Laplace の方程式の主要解を用いて圧密方程式を表現してきたが，ここで式 (9) における積分定数 C_1, C_2 の物理的意味を検討しよう。

いま，$C_1=0$, $C_2=0$ と仮定すると，式 (9) は

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

となる。そこで圧縮応力および圧縮ひずみを正とし，圧密初期を0ひずみの状態であると考えるならば，任意時刻における任意点の過剰間げき水圧と体積ひずみの関係は，

$$\left.\begin{array}{ll} & u\geqq 0 \text{ のとき } e\geqq 0 \\ \text{または} & u\leqq 0 \text{ のとき } e\leqq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

である。式 (15) と式 (16) の関係を同時に満足するためには土塊中のすべての点における過剰間げき水圧と体積ひずみが，圧密過程中常に0でなければならない。しかし常に $u=0$, $e=0$ であるということは，圧密において全く無意味である。したがって $C_1=C_2=0$, すなわち $\varphi=0$ というケースの圧密は存在しないことになる。

次に $C_1=0$, $C_2\neq 0$ のケースを考えよう。

この場合，式 (9) は

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=C_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

となり，式 (1) の grad をとると

$$\mathrm{grad}\,\varphi=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

である。一方，式 (5) を変形して式 (7) を考えると

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\mu\,\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

が得られる。ここで式 (18) と式 (19) を考えると，式 (17) が成立するため変形条件は容易に求めれ，

$$\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

である。変形条件を規定する式 (20) は，**4.** で討議されるように，$x-y$, $x-z$ および $y-z$ 平面が圧密過程中つねに平面を保っている場合であり，これを平面変形と呼ぶことにする。

平面変形条件のもとでは，式 (17) が示すように圧密の Total Potential は一様に分布し，土塊の初期状態が一様であるならば，初期間げき水圧分布および最終ひずみ分布も一様である。土塊の変形が平面変形である場合の圧密方程式は，次のように書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2u+\frac{dC_2}{dt} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

最後に $C_1\neq 0$ のケースは最も一般的なケースであって

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=C_1F(r)+C_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

であり，圧密の Total Potential は，土塊内で一様では

なく，式 (19) および式 (22) が示すように，せん断応力の分布に対応したある分布をする。またこのケースの変形条件式は $C_1=0$ のケースにおける議論からすぐに得られ

$$\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}\neq 0 \quad\cdots\cdots(23)$$

である。そして式 (23) は，土塊の変形が平面変形でないことを意味しており，この場合の圧密方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial t}(C_1F(r)+C_2)$$

である。

以上積分定数 C_1, C_2 に対する議論から，圧密の問題は，土塊の変形が平面変形であるか否かによって大きく二つに分類され，圧密の Total Potential が前者においては一様に分布し，後者においてはある分布をもつ。そしてその分布は，せん断応力の分布に対応している。

3. 簡単な変形条件のもとでの圧密方程式

この節においては，現場や実験においてよく出合う三つのケースの圧密方程式が示されている。特に著者は，土塊の境界変位に関心を持っているので，圧密方程式の境界条件項が境界変位で表現されており，そしてどのような境界変位条件の場合に Terzaghi の圧密方程式が認められるかが示されている。

(1) 直交直線流れによる圧密

Fig. 2 に示すような境界を平面で囲まれた立方体の土塊を考え，その境界条件を次のように設定する。

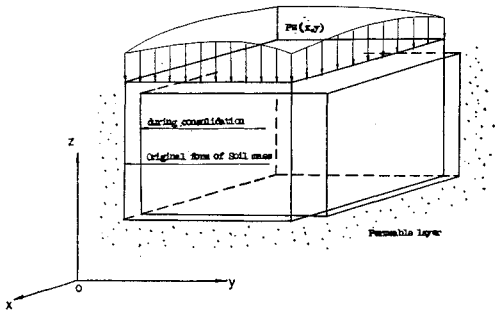

Fig. 2 Consolidation of a cubical soil mass under the condition of plane deformation

(i) 各境界面は，圧密過程中常にもとの各境界面に平行を保って変位する。したがって各境界面には，垂直荷重だけが作用している。

(ii) 土塊のすべての境界面が排水面である。

境界条件 (i) は，回転のない最も簡単な平面変形にするためにおいた条件であり

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$$

である。

境界条件 (ii) は，排水条件であって，すべての境界面上で

$$u=0.$$

前節の結果より，このような変形条件のもとでの圧密の Total Potential は

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=C_2 \quad\cdots\cdots(24)$$

であり，圧密方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{dC_2}{dt} \quad\cdots\cdots(25)$$

である。いま積分定数を定めるために，式 (24) を $z=0$ の全面積面について面積積分を行なう。

$$\int_S \varphi\, dV=\int_S\{(\lambda+2\mu)e+u\}dS=C_2\int_S dS$$

$$\therefore\ C_2=\frac{1}{S}\int_S\{(\lambda+2\mu)e+u\}dS=(\lambda+2\mu)\bar{e}+\bar{u} \quad\cdots\cdots(26)$$

ただし，S は $z=0$ の面積であり，$\bar{e}$ および $\bar{u}$ はそれぞれ平均体積ひずみであり，平均間げき水圧である。

一方，z 方向の有効応力 σ_z' と各ひずみの関係は，Hooke の法則から

$$\sigma_z'=\lambda e+2\mu\varepsilon_z \quad\cdots\cdots(27)$$

である。またこのような変形条件のもとでの z 方向の応力のつりあい方程式は

$$\frac{\partial\sigma_z'}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

であり，z で積分して

$$\sigma_z'+u=\sigma_z \quad (z\text{ 方向に const.})$$

が得られる。σ_z は z 方向の全応力であり z 方向に一定であるから，土塊の $x-y$ 境界面に働く垂直荷重 p_z に等しい。すなわち

$$\sigma_z=p_z=\sigma_z'+u \quad\cdots\cdots(28)$$

である。式 (27) および (28) の関係は，式 (26) を導くのに用いたと同様な方法によって，土塊全体の平均値で表わされると次の2式となる。

$$\bar{\sigma}_z'=\lambda\bar{e}+2\mu\bar{\varepsilon}_z$$

および $\bar{\sigma}_z'+\bar{u}=\bar{p}_z$

そして上の2式を式 (26) に代入すると積分定数 C_2 は

$$C_2=\bar{p}_z+2\mu(\bar{\varepsilon}_x+\bar{\varepsilon}_y)$$

となる。かくして直交直線流れの場合の圧密方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{d\bar{p}_z}{dt}+2\mu\frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}_x+\bar{\varepsilon}_y) \quad\cdots(29)$$

が得られた。ここに $\bar{p}_z$ は $x-y$ 境界面に作用する垂直荷重の平均値であり，$\bar{\varepsilon}_x$ および $\bar{\varepsilon}_y$ は，それぞれ $x-z$ および $y-z$ 境界面の変位を表わしている。

式 (29) は右辺第 2，および第3項が消失すれば Terzaghi の圧密方程式に一致する。すなわちこのケースの

圧密において Terzaghi の圧密方程式が認められるためには

$$\frac{d\bar{p}_z}{dt}=0$$

$$\bar{\varepsilon}_x+\bar{\varepsilon}_y=0$$

の2つの条件が満たされねばならない。第1の条件は，定圧密荷重の条件であるが，注意しなければならないのは，直接エレメントに作用する荷重 p_z ではなく，$x-y$ 平面に作用する圧密荷重の平均値 $\bar{p}_z$ であるということである。第2の条件は側方拘束の条件であり，K_0-圧密の条件 ($\bar{\varepsilon}_x=\bar{\varepsilon}_y=0$) である。また特異な条件ではあるが $\bar{\varepsilon}_x=-\bar{\varepsilon}_y$ でも Terzaghi の方程式が認められる。

こうした Terzaghi の圧密方程式が成立するための変形条件については **4.** においてより一般的に議論されている。

(2) 放射流れと鉛直流れによる圧密

放射流れと鉛直流れによる圧密において，現場的に最も重要なケースはバーチカルドレーンによる圧密である。周知のように R.A. Barron は変形条件によってこの問題を等ひずみと自由ひずみのケースに分割した。シリンダーの上表面に剛性荷重が載り，上表面が平面を保ちながら沈下する場合が等ひずみのケースであり，上表面に作用する荷重がたわみ性で上表面の変形を拘束せず，荷重は常に一様に分布する場合が自由ひずみのケースである。そこで Barron は，この二つの変形条件に対する圧密基礎方程式として次の二式を提案した。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}=C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

式 (30) は等ひずみのケースに対するものであり，式 (31) は自由ひずみのケースに対するものである。等ひずみのケースの圧密方程式において，$\bar{u}$ は土塊全体についての平均間げき水圧であるから，式 (30) の左辺は位置的に定数である。したがって体積ひずみに関連するところの式 (30) の右辺も位置的に定数でなければならない。すなわち体積ひずみが半径方向に常に一様分布であることを式 (30) は示している。これは Barron が式 (30) を導くにあたって用いた鉛直ひずみのみ ($\varepsilon_r=\varepsilon_t=0$, $\varepsilon_z\neq 0$) の仮定と等ひずみの条件からもたらされる当然の帰結であるが，無意味である。また，式 (31) は Terzaghi の圧密方程式であるが，自由ひずみの場合に式 (31) が成立するという理由について Barron は何も述べていない。自由ひずみの場合の変形は，平面変形ではなく，**4.** において議論されるように Terzaghi の圧密方程式は成立しない。

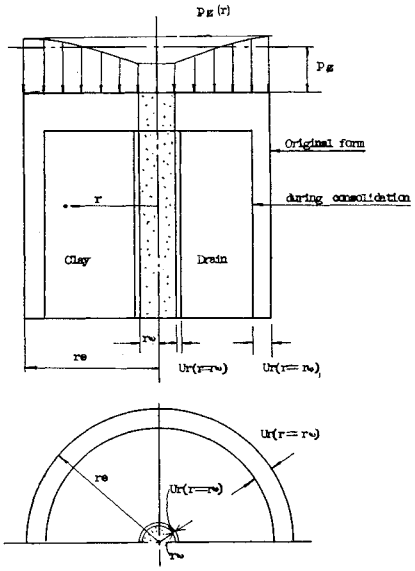

Fig. 3 Consolidation by Vertical drains (Equal strain case)

等ひずみのケースの変形条件を数学的に表現すると

$$\frac{\partial u_r}{\partial z},\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta},\ \frac{\partial u_z}{\partial r} \text{ および } \frac{\partial u_z}{\partial \theta}=0$$

すなわち，rot $\boldsymbol{u}=0$

したがって，Total Potential および圧密方程式はそれぞれ，

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+\mu=C_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{dC_2}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

である。そこで直交直流流れのケースに置いて用いたと同様な方法によって積分定数および応力ひずみ関係をすべて $z=0$ の面の平均値で表現すると

$$C_2=(\lambda+2\mu)\bar{e}+\bar{u}$$

$$\bar{\sigma}_z=\bar{p}_z$$

および $\bar{u}=\bar{p}_z-\{(\lambda+2\mu)e+\lambda(\bar{\varepsilon}_r+\bar{\varepsilon}_t)\}$

となる。これらの関係を式 (32) に代入すると境界条件項をシリンダーの内外面の変位で表わした等ひずみのケースの圧密方程式 式 (33) が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}+\frac{d\bar{p}_z}{dt}$$

$$+2\mu\frac{d}{dt}(\bar{\varepsilon}_r+\bar{\varepsilon}_t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

ここに，$\bar{\varepsilon}_r+\bar{\varepsilon}_t=2\left(\frac{r_e u_r(r_e)-r_w u_r(r_w)}{r_e^2-r_w^2}\right)$

なお，式(33)は直交直線流れのケースの圧密方程式式 (29) を，円筒座標に変換しても容易に求められる。そしてまた式 (33) の右辺第2および第3項を0とするような境界条件のときに Terzaghi の圧密方程式が認められることも式 (29) と同様である。すなわち放射流れおよび鉛直流れによる圧密において Terzaghi の方程式が

認められるのは，等ひずみの条件と側方拘束の条件（シリンダーの内外周面の変位がない）が満たされる時であって，Barron がいうように自由ひずみの場合ではない。

以上のバーチカル，ドレーンへの放射流れによる圧密に対する議論および結論は，Silveira らが取扱っている外向きの放射流れによる圧密の場合に対しても全く同一である。

（3） 球の圧密

C.W. Cryer は静的等方荷重による球状粘土の圧密の問題について Biot と Terzaghi 理論の解を求めた。そして，球の中心の間げき水圧の挙動について比較し，両者の解の間にきわだった相違があることを示した。その相違は次のようである。球の中心の間げき水圧が Terzaghi 理論においては単調に減少するのに対し，Biot の理論においては圧密過程の初期にいったん増加し，静的等方荷重よりも大きい極値をとり，その後減少する。そして両者の解が一致するのはポアソン比が 0.5 のときである。Cryer のこの指摘に対し R.E. Givson は検証実験を行ない，大半の実験において球の中心の間げき水圧が上昇するという現象を観測している。そして Cryer は Biot 理論の妥当性を認めながらも，両理論の相違についての彼の指摘が両者の解の比較によってなされているために，Terzaghi 理論のどこに誤りがあるのか，またどのようなメカニズムで球の中心の間げき水圧は上昇するのかについては，ほとんど明らかにされていない。

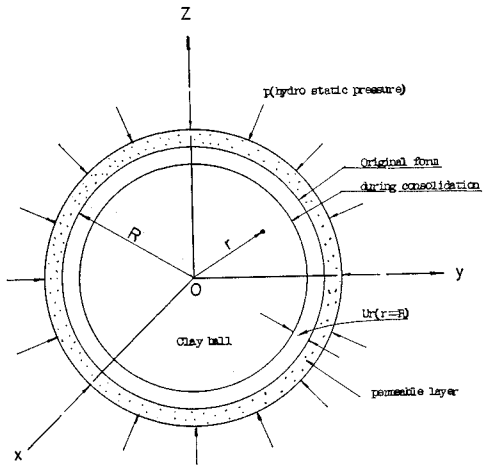

Fig. 4 Consolidation of a sphere

そこでいま一度球の圧密の問題を考え，Terzaghi 理論の不合理性および間げき水圧上昇のメカニズムを明らかにしよう。

Fig. 5 に示す球の圧密における境界条件は次のようである。すなわち球の表面はすべて排水面であって間げき水圧は 0 である。また球の表面に作用する荷重 p は，一様な直荷重であって時間的に変化しない。以上のことを数式的に表現すると，

（i） $t>0,\ r=R$ において $u=0,\ p=\sigma_r=\sigma_r'$

（ii） $\dfrac{dp}{dt}=0$

ここに r は任意時刻における球の半径である。

このような境界条件のもとにおける変形は非回転の変形であり，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$$

である。したがって，圧密の Total Potential は球全体にわたって，常に一様に分布しており，

$$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u=C_2 \quad\cdots\cdots(34)$$

である。また非回転の場合の圧密方程式は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2u+\frac{dC_2}{dt} \quad\cdots\cdots(35)$$

である。そこで境界条件 (i) を式 (34) に代入すると

$$C_2=(\lambda+2\mu)e_{r=R}$$
$$=(\lambda+2\mu)(\varepsilon_r+2\varepsilon_t)_{r=R} \quad\cdots\cdots(36)$$

となる。一方，球座標で表わされた Hooke 則は

$$\sigma_r'=(\lambda+2\mu)\varepsilon_r+2\lambda\varepsilon_t$$

であり，これを ε_r について表わすと

$$\varepsilon_r=\frac{1}{\lambda+2\lambda}(\sigma_r'-2\lambda\varepsilon_t) \quad\cdots\cdots(37)$$

である。また

$$r=R \text{ において } \sigma_r'=p,\ \varepsilon_t=-\frac{u_{r(r=R)}}{R}$$

であるから，上式の関係と式 (37) を式 (36) に代入すれば積分定数 C_2 は

$$C_2=p-4\mu\frac{u_{r(r=R)}}{R}$$

である。これを式 (34) に代入すると，球の場合の圧密方程式が得られ，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2u+\frac{dp}{dt}-4\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{u_{r(r=R)}}{R}\right) \cdots(38)$$

である。いまの場合には境界の荷重条件 (ii) を考慮すると

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2u-4\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{u_{r(r=R)}}{R}\right)\\ \text{または}\quad&\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2u+4\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{R_0-R}{R}\right)\end{aligned}\right\}\cdots(39)$$

ただし，$u_{r(r=R)}=R-R_0$

である。圧密においては式 (39) の右辺第 1 項は

$$C\nabla^2u\gtrless0$$

であり，中心部において圧密過程の初期と終期にほとんど 0 である。また第 2 項は

$$4\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{R_0-R}{R}\right)>0$$

であり，圧密過程の初期に最も大きく単調に減少する。したがって，ある要素が，

$$|C\nabla^2 u|<4\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{R_0-R}{R}\right)\cdots\cdots(40)$$

の関係を満たすとき，式 (39) は正，すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t}>0$$

であり，間げき水圧は増大過程にある。そして圧密の進行とともに式(40)の大小関係が逆転すると間げき水圧は極値をとり，その後減少過程に入ることになる。この間げき水圧がいったん増大し，その後減少する傾向は$C\nabla^2 u$の値が圧密の初期に最もながく0に近い状態に保たれている球の中心において最も著しい。

こうした土塊の中心部付近の間げき水圧が，等方荷重よりも大きな値にまで増大する現象は，球の圧密に限られたことではなく，直交直線流れによる圧密の場合にも二次元の放射流れによる圧密においても起こりうることであって，$\dot{\varphi}>0$ であることに起因する。また逆に $\dot{\varphi}\leqq 0$ を満たす境界条件のもとにおいては，土塊のすべての点の間げき水圧が単調に減少する。

4. 新理論からみた従来の圧密論

(1) 圧密方程式とは

これまでに提案された圧密方程式を大別すると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u\cdots\cdots(41)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}=C\nabla^2 e\cdots\cdots(42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C'\nabla^2 u+\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdots\cdots(43)$$

ここに，$C=\dfrac{k}{\gamma_\omega}(\lambda+2\mu)$

$$C'=\frac{k}{3\gamma_\omega}(3\lambda+2\mu)$$

$$\theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma'_z+3u$$

となる。これらはすべて圧密方程式としての条件を具備しているであろうか。圧密方程式が具備すべき条件とは何かについて考えてみる必要がある。圧密は多孔物質の変形と，多孔物質中の水の流れの問題であるから，飽和した土の圧密問題を支配する方程式は

応力のつりあい条件
ひずみの適合条件
土の応力ひずみ関係
連続の条件
土中水の移動則

など 5 つの基本的事項が加味されていなければならない。Biot は三次元圧密の支配方程式として次の 2 式を提案している。

$$\frac{\partial e}{\partial t}=C\nabla^2 e\cdots\cdots(44)$$

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{grad}\,e-\mu\,\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}\,u=0\cdots(45)$$

ここで，留意しなければならないことは式 (44) がひずみの適合条件を満たし，土中水の移動則が加味された連続の条件式であって，圧密の方程式ではないということである。式 (45) はひずみの適合条件を満たし，土の応力ひずみ関係を含ませたつりあい方程式である。確かに式 (44) を導くにあたって式 (45) のつりあい方程式が用いられてはいるが，式 (45) の div. をとった形で持ち込まれているので，div. をとる段階でつりあい方程式の機能を失ってしまっている。そのため，式 (44) は連続方程式の段階にとどまっており，圧密の問題を解くためには，再度式 (45) のつりあい方程式が必要となってくるのである。したがって，式 (44) と式 (45) が総合されて一つの方程式となり得たとき，それは圧密方程式である。この意味において Biot は，圧密の支配方程式を圧密方程式にまで到達させていないことになる。

そこで著者の提案する圧密の支配方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{\partial}{\partial t}\left(C_1\frac{1}{r}+C_2\right)\cdots\cdots(46)$$

は圧密方程式であって，前述の 5 つの基本的事項をすべて含んでいる。ただ，積分定数 C_1, C_2 を決定するためには，つりあい方程式や応力-ひずみ関係などが補助的に必要である。そして式 (41) は前節で一部議論されたように式 (46) の特別のケースであって，圧密方程式である。式 (42) は前述のように基本的には連続方程式であるが，式 (45) のつりあい方程式が全く退化してしまうような簡単な変形条件の場合には，式 (44) が単独で圧密方程式の機能を果たすこともある。ここでその変形条件を求めてみよう。それにはまず **2.** の式 (6) の関係を書き直して

$$\nabla^2 u=-(\lambda+2\mu)\nabla^2 e$$

である。この関係を圧密方程式 (46) に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-C(\lambda+2\mu)\nabla^2 e+\frac{\partial}{\partial t}\left(C_1\frac{1}{r}+C_2\right)\cdots\cdots(47)$$

が得られる。式 (42) と式 (47) とが一致するのは

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(C_1\frac{1}{r}+C_2\right)=0$$

すなわち $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial e}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$

の場合であって

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-(\lambda+2\mu)\frac{\partial e}{\partial t}$$

である。これらの関係を式 (47) に代入すると式 (42)

が得られる。結局，式 (42) が単独で，圧密支配方程式になるのは $\dot{\varphi}=0$ の場合に限ることになる。これはとりも直さず Terzaghi の圧密方程式 (41) の成立条件でもあり，$\dot{\varphi}=0$ の条件のもとでは式 (41) と式 (42) は全く等価なものである。このように圧密方程式が間げき水圧または体積ひずみのいずれか単一の量で表現できるのは，ごく限られた変形条件の場合であって，一般的には表現できない。このことは球の圧密においてみたように，球の中心の体積ひずみは変化しないのに間げき水圧は変動する。また，球の表面の間げき水圧は0に保たれているにもかかわらず，体積ひずみは時間とともに増大するなどの挙動が単一量によって圧密現象を表現できないことをよく暗示している。

Terzaghi の三次元の圧密方程式が提案されて以来，数多くの人達によってその非合理性が指摘されて久しい。そして Biot 理論の合理性を認めながらも現在なお Terzaghi の圧密方程式は，いくつかの矛盾を含みながら生きている。この原因は Biot の提案した圧密問題の支配方程式が圧密方程式ではないので，両理論の圧密方程式そのものを比べることができず，やむなく特定のケースについての両理論の解を比較したことにある。すなわち特定のケースの解の比較によって Terzaghi 理論の不合理性を一般的に指摘することはできないということである。これに対して圧密基礎方程式の比較によって Terzaghi の圧密理論の不合理性を指摘しようとした人々がいる。それは Givson[8]，Lee[10]，その他の人々[16),1),2)] であってその提案した圧密方程式が式 (43) である。そして式 (43) は，大略次のようにして導かれたものである。まず Darcy の法則を加味した連続の方程式は，

$$\frac{\partial e}{\partial t}=-\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u \quad \cdots\cdots(48)$$

である。一方体積ひずみと有効応力の第1不変量との間の関係を時間について微分すれば，

$$\frac{\partial e}{\partial t}=K\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z') \quad \cdots\cdots(49)$$

ここに，K は体積弾性係数である。また全応力の第1不変量 θ は，

$$\theta=\sigma_x'+\sigma_y'+\sigma_z'+3u$$

であるから，上式と式 (49) を式 (48) に代入すると式 (43) が得られる。そこで式 (41) と式 (43) を比較して Lee[10] は次のように述べている。

i） 三次元圧密においては一般に全応力の第一不変量は時間的に変化する。すなわち $\frac{\partial\theta}{\partial t}\neq 0$ である。しかるに Terzaghi の三次元圧密の方程式 (41) の中には $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ の項が含まれていない。したがって式 (41) は三次元の場合正しくない。

ii） 三次元の場合の Terzaghi の圧密方程式の第2の誤りは圧密係数にある。式 (41) の圧密係数 C は，一次元圧密の場合に定義されたものであって，三次元の場合にまで汎用しているのは誤りである。一次元の場合の圧密係数が三次元の場合のものと同一でないということは，式 (41) と式 (43) の圧密係数の比較によって明らかである。

この Lee の記述について検討する前に，まず指摘されなければならないことがある。式 (43) が型の上で Terzaghi の圧密方程式 (41) に似てはいても，式 (43) と式 (41) は本質的に異なり比較の対象になるようなものではない。すなわち式 (41) は圧密方程式であり，式 (43) は連続の方程式であるということである。それは式 (48) の連続方程式に，ある特殊な応力-ひずみ関係を持ちこみ単なる変数変換によって式 (43) が得られたことから明らかである。また Lee がいうように圧密係数は，場合場合によって定義されるものではなく，式 (14) をみればわかるように排水条件および変形条件に無関係な量である。

（2） Terzaghi の圧密方程式が含んでいる変形条件

最も一般的な圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \cdots\cdots(50)$$

と書かれ，土塊のすべての点で $\varphi=0$ ということはあり得ないので式 (50) が Terzaghi の圧密方程式に一致するのは $\dot{\varphi}=0$ の場合に限ることを **2.** において述べた。そこでどのような変形条件のときに，圧密の Total Potential φ は土塊のすべての点で時間的に変化しないかを検討してみよう。

いま，圧密の Total Potential φ は Laplace の方程式を満足する。すなわち

$$\nabla^2\varphi=0 \quad \cdots\cdots(51)$$

であるから式 (51) に Green の定理を適用すると，任意点 P の Total Potential は次のように表わされる。(**Fig. 5** 参照)。

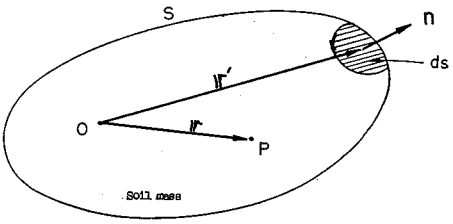

Fig. 5 An application of Green's theorem

$$\frac{\partial\varphi(r)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_S\left\{\frac{1}{(r'-r)}\frac{\partial\varphi(r')}{\partial n}-\varphi(r')\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{(r'-r)}\right)\right\}dS \quad \cdots(52)$$

ここに，S は土塊の全表面であり，n は土塊表面に垂直な方向である。そこで式 (52) は Laplace の方程式の主要解を用いた次式と等価である。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(C_1\frac{1}{r}+C_2\right)$$

いま $C_1=0$ の場合，すなわち rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ の場合には **2.** において述べたように，圧密の Total Potential φ は一様に分布し grad $\varphi=0$ である。したがってこの場合式 (52) の右辺第1項の $\partial\varphi(\boldsymbol{r}')/\partial n$ の値は 0 である。そのことは式 (52) において積分定数 C_1 のもつ主要な役割を果たしているのが右辺第1項であることを意味している。そこで $C_1\neq0$ の場合に $\dot{\varphi}=0$ であるためには，少なくとも式 (52) の右辺第1項が 0 とならなければならない。しかし任意点 P と境界面との相対位置が時間的に変化することを考えるならば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}\right)\neq0$$

である。またこの場合圧密の Total Potential は一様に分布していないことと境界面の形状変化に伴って垂直方向も時間とともに変化することを考え合せるならば，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right)\neq0$$

である。以上のことから $C_1\neq0$ の場合には

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})}\cdot\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right)\neq0 \quad \nearrow$$

であり，一般に $\dot{\varphi}=0$ とはならない。したがって $C_1\neq0$ すなわち rot・rot $\boldsymbol{u}\neq0$ の場合には Terzaghi の圧密方程式は認められない。認められるとすれば rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ の場合に限ることになる。しかし，この場合も一般には $\dot{\varphi}\neq0$ であって $\dot{\varphi}=0$ であるためにはさらに特殊な条件を必要とする。この条件は **3.** において rot $\boldsymbol{u}=0$ という変形条件の場合の圧密方程式を誘導する際に示したものと同一である。なお rot $\boldsymbol{u}=0$ の場合の圧密過程に対する結論は rot $\boldsymbol{u}\neq0$ で，かつ rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ の場合にそのまま適用できる。そのことを次に示そう。

(3) rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ の変形

著者は **2.** において，土塊のすべての点の変形が rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ を満足するか否かによって，圧密の Total Potential の性状にきわだった相違があることを示した。そして rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ で規定される変形は，平面変形であると考えたことについていま少し検討してみよう。

そこで rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ で規定される変形は，まず回転のない変形と回転の伴う変形とに大きく区分される。そして，それらの変形はそれぞれさらに二つの変形に分けられる。いまこれらを x-y 平面について数学的に表現するならば式 (53) のようである。

$$\left.\begin{array}{l}\text{rot}\,\boldsymbol{\omega}=0\\(\boldsymbol{\omega}=\text{rot}\,\boldsymbol{u})\end{array}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{\omega}=0\ (\text{非回転})\left\{\begin{array}{lll}(\text{i})\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x}=\dfrac{\partial u_x}{\partial y}=0 & (\text{単純圧縮}) & (1)\\(\text{ii})\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x}=\dfrac{\partial u_x}{\partial y}=\text{const.} & (\text{純粋せん断}) & (2)\end{array}\right.\\\boldsymbol{\omega}\neq0\ (\text{回　転})\left\{\begin{array}{lll}(\text{iii})\ \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x}=\dfrac{\partial \omega_x}{\partial y}=0 & (\text{単純せん断}) & (3)\\(\text{iv})\ \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x}=\dfrac{\partial \omega_x}{\partial y}=\text{const.} & & (4)\end{array}\right.\end{array}\right\}\cdots\cdots(53)$$

非回転の場合の第1の変形は単純圧縮または伸びであり，第2の変形は純粋せん断変形である。また式 (53) の (1) および (2) で示された変形条件は，土塊のすべての点において $\boldsymbol{\omega}=0$ であることと，ひずみの適合条件とを考慮して得られたものである。

回転を伴う場合の変形条件は，非回転の場合の変形条件との比較によって容易に求めることができる。すなわち rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ の条件のもとで，回転のない場合とある場合の変形条件は，それぞれ

$$\left.\begin{array}{l}\text{rot}\,\boldsymbol{u}=0\\\text{rot}\,\boldsymbol{\omega}=0\end{array}\right\}\cdots\cdots(54)$$

であり，形の上で全く同一である。したがって，変位を回転に置き換えるならば，非回転の場合に得られた変形条件に対する結論は，そのまま回転を伴う場合の変形条件を与えるものであり，それらは式 (53) の (3) および (4) に示されている。式 (53) の (3) が示す変形は単純せん断変形である。式 (53) の (4) の示す変形には，特別な変形の名称は与えられておらず，あまり単純な変形ではない。単純圧縮，または伸び，純粋せん断および単純せん断変形は明らかに平面変形である。これに対して式 (53) の (4) で，規定される変形は，一見平面変形ではないように見えるけれども本質的には平面変形である。その理由は次のようである。非回転 (rot $\boldsymbol{u}=0$) の変形において，純粋せん断が座標変換によって，単純圧縮または伸びの問題に置き換えられ，二つの変形が本質的に等価であることは周知のとおりである。この事実を式 (54) の対応において回転のある場合の変形に適用するならば，式 (53) の (4) で規定される変形は式 (53) の (3) で規定される単純せん断変形と等価であるということができる。

さらに単純せん断変形も座標変換によって単純圧縮または伸びの問題に帰る。したがって rot・rot $\boldsymbol{u}=0$ で規定される変形条件のもとでの圧密の問題は，座標変換によって rot $\boldsymbol{u}=0$ の変形条件のもとでの問題に帰着され

ることになる。また座標系の選び方は，圧密過程に何らの影響も与えないので，**3**. において得られた $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ の変形条件のもとでの圧密過程に対する結論はそのまま一般の平面変形の場合に適用できることになる。

以上 $\mathrm{rot}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ で規定される変形は平面変形であり4種の変形に分類されることを示したが，平面変形において工学的意味のある変形は，単純圧縮または伸びと単純せん断の2つの変形であって，他の2つの変形は数学的興味を呼ぶに過ぎないものと考えられる。なお，以上の議論の中にはねじりの問題が除外されているが，ねじりが直応力の分布性状に影響を与えないという理由によるものである。

5. ま と め

この論文において提案した三次元の圧密基礎方程式は Biot の提案した1組の圧密支配方程式と等価であるけれども，この論文によって，圧密というものの数学的，物理的概念とよりいっそう明確にすることができた。その結論を要約すると次のようである。

（**1**） 圧密の問題において圧密の Total Potential φ を

$$\varphi=(\lambda+3\mu)e+u$$

と定義するならば，φ は Laplace の方程式

$$\nabla^2\varphi=0$$

を満足する。そして圧密問題の解を求めることは，ある境界条件のもとで Laplace の方程式を解くことに帰着される。

（**2**） 圧密方程式の一般の形は，

$$\frac{\partial u}{\partial t}=C\nabla^2 u+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

であり，ここに φ は，ある境界条件のもとでの Laplace の方程式の解である

（**3**） 土塊の変形が平面変形であるか否かによって圧密の Total Potential の性状にきわだった相違がある。すなわち前者においては土塊中で一様に分布するのに対し後者においてはある分布をもつ。

（**4**） Terzaghi の圧密方程式は $\dot{\varphi}=0$ を満たす変形ないしは荷重条件の場合においてのみ成立する。なお $\dot{\varphi}=0$ を満たすためには，土塊の変形は平面変形で，かつ土塊全体が平均的にいわゆる K_0 圧密されるような境界変位条件であることを必要とする。

以上本論文の討議および結論は，単純な ideal soil に対してなされたものであって real soil の圧密過程中における複雑な挙動を十分説明するものではない。しかし，この研究においてえられた圧密現象に対する基本的概念は，今後非弾性挙動を考慮に入れた圧密理論を確立するにあたって役立つであろうことを信じている。

終りにあたり，この研究に対して終始多大のご指導をいただいた広島大学教授　網干寿夫博士，門田博知博士に深く感謝の意を表します。また本論文の主要部分である理論的考察に際して，心よく討議に参加していただき多大のご助言をたまわった広島大学講師　佐藤誠氏ならびに名合宏之氏に心から謝意を表します。

記　号

C：圧密係数
$e(=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$：体積ひずみ
K：体積弾性係数
k：透水係数
p：直荷重
R：球の半径
r：球および円筒座標における距離
r_ω, r_e：厚肉円筒の内，外径
$\boldsymbol{u}(=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{i}+u_z\boldsymbol{k})$：変位ベクトル
u_x, u_y, u_z, u_r：変位の成分
u：間げき水圧
$\boldsymbol{V}(=V_x\boldsymbol{i}+V_y\boldsymbol{i}+V_z\boldsymbol{k})$：間げき水の流速ベクトル
V：土塊の体積
ε_i, γ_{ij}：ひずみ成分
$\varphi(=(\lambda+2\mu)e+u)$：圧密の Total Potential
λ, μ：Lamé の定数
σ_i：全応力
σ_i'：有効応力
τ_{ij}：せん断応力

参 考 文 献

1) 赤井浩一・足立紀尚：有効応力よりみた飽和粘土の一次元圧密と強度特性に関する研究，土木学会論文集，No. 113，(1965)
2) Barron R.A.: Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Wells, Trans. A.S.C.E., 113-718, (1948)
3) Biot, M.A.: General Theory of Three-dimensional Consolidation, Journ. Appl. Phys., 12-426, (1941)
4) Carrillo, N.: Simple Two and Three Dimensional Cases in the Theory of Consolidation of soils, Journ. Math Phys., 21-1, (1942)
5) Crvyr, C.W.: A Comparison of the Three-dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi, Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., 16-401, (1963)
6) Da Silveira, I.: Consolidation of a Cylindrical Clay Sample with External Radial Flow of Water, Proc. 3rd Int. Conf. Soil Mech., 1-55, (1953)
7) De Leeuw, E.H.: The theory of Three-dimensional Consolidation Applied to Cylindrical Bodies, Proc. 6th Int. Conf. Soil. Mech., 1-287, (1965)
8) Gibson, R.E. and P. Lumb: Numerical Solution of Some Problems in the Consolidation of Clay, Proc. Instn. Civil Engrs., 2-182, (1953)
9) Gibson, R.E., K. Knight and P.W. Taylor: A Critical Experiments to Examines Theories of Three-dimensional Consolidation, Proc. Europ. Conf. Soil

Mech., 69, (1963)
10) Lee, I.K. : Soil Mechanics, 169-170, Butterworths, London, (1968)
11) McNamee, J. and R.E. Gibson : Plane Strain and Axially Symmetric Problems of the Consolidation of a Semi-Infinite Clay Stratum, Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., 13-Pt 2-210, (1960)
12) 中野 坦：放射流れをうける側方拘束圧密の理論，土木学会論文報告集，No. 192, (1971)
13) Rendulic, L. : Der Hydrodynamische Spanungsausgleich in Zentral Entwässerten Tonzylindern, Wasserwirt. und Tech., 3-1, (1935)
14) Terzaghi, K. : Theoretical Soil Mechanics, 290-296, John Wiley, New York, (1948)
15) Terzaghi. K. : Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem verlauf der hydrodynamischen Spanungserscheinungen, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. a, Vol. 132, (1923)
16) Davis, E.H. and H.C. Poulos : Triaxial Testing and Three-dimensional Settlement Analysis, Proc. 4 th Aust. N.Z. Conf. Soil Mech., 233, (1963)

(1971.11.26・受付)