

# 一様な断面棒の弾塑性ねじり解析\*

## ELASTO-PLASTIC TORSIONAL ANALYSIS OF UNIFORM BARS

太田俊昭\*\*  
By Toshiaki Ohta

### 1. 序 言

一様な断面を有する棒の弾塑性ねじりに関する既往研究としては、Sokolovsky<sup>1)</sup> の卵形断面に対する解、半沢・石川<sup>2)</sup> による楕円形、三角形および近似正方形断面を対象とする全ひずみ理論解、ならびに塑性流れ理論などに基づく Hodge<sup>3)</sup> の正方形および十字形断面に対する数値解などがある。

しかし構造用材に多用される矩形、I 形および T 形などの断面形に対する解は見られず、いわんや構造解析に即用できるような形の解は、いまだ一般的にえられていない。

本論文は、立体骨組構造物の弾塑性解析に適用できる形の解を見い出すことに力点を置き、薄膜屋根類似の理論<sup>4)</sup>を用いて差分法による非硬化材料の棒の弾塑性ねじり応力と変形に関する解法を確立し、そのプログラムを作製するとともに、ねじりモーメント  $T$  とねじり率  $\omega$  の曲線の定量的な数式化をはかったもので、応用例として正方形、矩形および太肉の I 形、T 形断面などの棒を選び、それらの力学的特性や  $T-\omega$  曲線式を求め、実用に便ならしめたものである。

### 2. 基礎的考察

薄膜屋根類似の理論は、文献 4) に詳しく述べられているので、ここでは骨子のみを概説する。

一様な任意形断面棒を考え、直交座標 ( $x, y, z$ ) を 図-1 のように設定する。

いま棒が  $z$  軸のまわりに一様なねじりモーメント  $T$  でねじられ、 $x$  および  $y$  軸方向にそれぞれせん断応力  $\tau_{zx}$  および  $\tau_{zy}$  を生じたと仮定する。

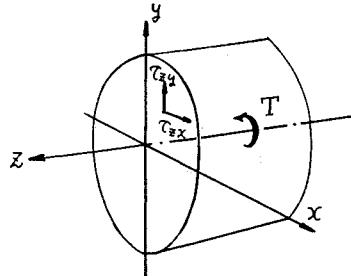


図-1

この場合の応力のつり合い式は、

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここで式 (1) のつり合い条件を満足するねじりの応力関数  $\chi$  を次のように定義導入する。

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{zy} = -\frac{\partial \chi}{\partial x} \\ \tau_{zx} = \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

またせん断応力に対応するせん断ひずみ(工学定義)を、ゆがみ関数  $\varphi$  を用いて表わせば、文献 4) から、

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{zy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega x \\ \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \omega y \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ただし、 $\omega$ : ねじり率。

これらのせん断ひずみは、弾性域ではフックの法則から次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} \\ \tau_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 $G$  は、せん断弾性係数である。

式 (2), (3), (4) から、ゆがみ関数  $\varphi$  を消去すれば、周知のねじり応力関数  $\chi$  に関する基礎方程式が次のようにえられる。

\* 第 25 回土木学会年次学術講演会において一部発表済み  
\*\* 正会員 工博 宮崎大学助教授 工学部土木工学科

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -2 \omega G \quad \dots \dots \dots \dots (5)$$

すなわち、式 (5) が単位張力で張られた石けん膜に圧力  $2\omega G$  を加えたときの膜のたわみに関する方程式に相当する。

一方、塑性域においては、はりを非硬化材料と仮定すれば、Mises の降伏条件から次式がえられる。

$$\begin{aligned} (\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2)^{1/2} &= \left\{ \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ &= |\text{Grad } \chi| \\ &= k \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \dots (6)$$

ただし、 $k = \tau_Y = \sigma_Y / \sqrt{3}$ 、 $\tau_Y$ 、 $\sigma_Y$ ：降伏せん断応力および降伏応力。

次に、断面周辺における境界条件は、周辺での法線方向のせん断応力を  $\tau_n$  として

$$\begin{cases} \tau_n = \frac{d \chi}{dt} = 0 \\ \therefore \chi = \text{Const} = 0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots \dots (7)$$

ただし、 $dt$  は、周辺上の接線方向の微小長さ。

以上により、一般的な弾塑性応力状態における  $x$  分布は、弹性域では、式 (5) と  $|\text{Grad } \chi| < k$  を、塑性域では式 (6) を満足し、かつ周辺上では 0 になるものと考えられる。これがいわゆる薄膜屋根類似の理論である。

また、式 (2) のせん断応力に対するねじりモーメント  $T$  は、内力と外力のつり合い式を Green の公式で変形することによってえられる次式で求められる（ただし断面は中実断面とする）。

$$\begin{aligned} T &= \iint (x \cdot \tau_{zy} - y \cdot \tau_{zx}) dx dy \\ &= 2 \iint \chi dx dy \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \dots (8)$$

### 3. 棒の弾塑性ねじり解法

上述の薄膜屋根類似の理論と差分法とを併用すれば、電子計算機による棒の弾塑性ねじり応力解析が可能となり、その骨子は次のとおりである。

まず、せん断応力およびせん断ひずみを、それぞれ  $Ga_0\omega_Y$  および  $a_0\omega_Y$  で除して無次元化すれば、式 (2) より式 (4) から弹性域では

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{zy} = -\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{\tau}_{zx} = \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \bar{y}} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \dots (9)$$

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{zy} = \bar{\tau}_{zy} \\ \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zx} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \dots (10)$$

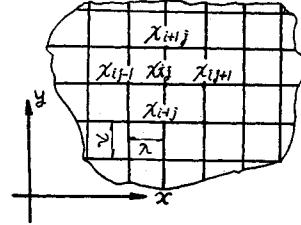


図-2

ただし、 $\bar{\tau} = \tau / Ga_0\omega_Y$ 、 $\bar{r} = r / a_0\omega_Y$ 、 $\bar{\chi} = \chi / Ga_0^2\omega_Y$ 、 $\bar{x} = x / a_0$ 、 $\bar{y} = y / a_0$ 、 $a_0$ ：基準長さ、 $\omega_Y$ ：弹性限界時のねじり率。

いま、断面を格間長  $\lambda$  で等分割し、格子点番号を 図-2 のように定めれば、式 (9) は

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{zy} = -\frac{1}{2\lambda} (\bar{\chi}_{ij+1} - \bar{\chi}_{ij-1}) \\ \bar{\tau}_{zx} = \frac{1}{2\lambda} (\bar{\chi}_{i+1,j} - \bar{\chi}_{i-1,j}) \end{cases} \quad \dots \dots \dots \dots (11)$$

ただし  $\bar{\lambda} = \lambda / a$

また式 (5) は

$$\frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial \bar{y}^2} = -2 \bar{\omega} \quad \dots \dots \dots \dots (12)$$

ただし、 $\bar{\omega} = \omega / \omega_Y$

となるゆえ、結局次のようになる。

$$4 \bar{\chi}_{ij} - \bar{\chi}_{ij-1} - \bar{\chi}_{ij+1} - \bar{\chi}_{i-1,j} - \bar{\chi}_{i+1,j} = 2 \bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \quad \dots \dots \dots \dots (13)$$

次に、塑性域の応力関数は、前述の考察から一定勾配  $k$  の屋根の高さ  $\chi^p$  で与えられる。

すなわち、塑性域では、

$$\bar{\chi}_{ij} = \bar{\chi}_{ij}^p \quad \dots \dots \dots \dots (14)$$

ただし、 $\bar{\chi}_{ij}^p = \chi_{ij}^p / Ga_0^2\omega_Y$ ：弹性限界時の  $\bar{\chi}$  値より、屋根の勾配を規定する  $\bar{\tau}_Y = \max \bar{\tau}$  を求めれば、 $\chi^p$  は幾何学的に屋根の高さで定められる。

以上から任意の格子点  $(i, j)$  において、弹性および塑性応力状態のいずれの場合にも適用できる  $\chi$  に関する方程式が次のように求められる。

$$(1 + 3 \alpha_{ij}) \bar{\chi}_{ij} - \alpha_{ij} \bar{\chi}_{ij-1} - \alpha_{ij} \bar{\chi}_{ij+1} - \alpha_{ij} \bar{\chi}_{i+1,j} - \alpha_{ij} \bar{\chi}_{i-1,j} = 2 \bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \alpha_{ij} + (1 - \alpha_{ij}) \bar{\chi}_{ij}^p \quad \dots \dots \dots \dots (15)$$

ここに、 $\alpha_{ij}$  は、格子点  $(i, j)$  が弹性であるか塑性であるかを判明するパラメーターで次のようにになる。

$$\begin{cases} \text{弹性 } (\bar{\chi}_{ij} < \bar{\chi}_{ij}^p) \text{ では } \alpha_{ij}=1 \\ \text{塑性 } (\bar{\chi}_{ij} = \bar{\chi}_{ij}^p) \text{ では } \alpha_{ij}=0 \end{cases} \quad \dots \dots \dots \dots (16)$$

いま断面の周辺を除く全部の格子点に通し番号をつけ、格子点  $(i, j)$  の通し番号を  $k$  とする。式 (15) を全格子点に順々に適用してゆけば、 $\bar{\chi}(k)$  (通し番号  $k$  すなわち格子点  $(i, j)$  の  $\bar{\chi}$  値) に関する次の連立方程式をえる。

$$\begin{bmatrix}
 \{1+3\alpha(1)\}\beta_{11} & -\alpha(1)\beta_{12} & -\alpha(1)\beta_{13} & \cdots & -\alpha(1)\beta_{1n} \\
 -\alpha(2)\beta_{21} & \{1+3\alpha(2)\}\beta_{22} & -\alpha(2)\beta_{23} & \cdots & -\alpha(2)\beta_{2n} \\
 -\alpha(3)\beta_{31} & -\alpha(3)\beta_{32} & \{1+3\alpha(3)\}\beta_{33} & \cdots & -\alpha(3)\beta_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 -\alpha(n)\beta_{n1} & -\alpha(n)\beta_{n2} & -\alpha(n)\beta_{n3} & \cdots & \{1+3\alpha(n)\}\beta_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{x}(1) \\
 \bar{x}(2) \\
 \bar{x}(3) \\
 \vdots \\
 \bar{x}(n)
 \end{bmatrix}
 \\
 = 2\bar{\lambda}^2\bar{\omega} \begin{bmatrix}
 \alpha(1) \\
 \alpha(2) \\
 \alpha(3) \\
 \vdots \\
 \alpha(n)
 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix}
 \{1-\alpha(1)\}\bar{x}^p(1) \\
 \{1-\alpha(2)\}\bar{x}^p(2) \\
 \{1-\alpha(3)\}\bar{x}^p(3) \\
 \vdots \\
 \{1-\alpha(n)\}\bar{x}^p(n)
 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (17)$$

ただし、 $n$  は、周辺を除く格子点の通し番号の総数、  
小かっこの中の数は、格子点の通し番号、  
 $\beta_{ij}$  は格子点  $i$  に対して、格子点  $j$  が直接  
隣接している場合は 1、そうでない場合は 0  
なる値をとる。

式 (17) を行列表示して

$$(A)(\bar{x}) = 2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}(\mathbf{B}) + (\mathbf{C})$$

よって

$$(\bar{x}) = 2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}(A)^{-1}(\mathbf{B}) + (A)^{-1}(\mathbf{C}) \quad \dots \quad (18)$$

ここに、 $(A)$  :  $n$  次の正方行列で、第  $i$  行、第  $j$  列  
の要素  $A_{ij}$  は、 $A_{ij} = \{1+3\alpha(i)\}\beta_{ij}$   
となる、  
 $(\mathbf{B})$  :  $n$  次の列行列で、第  $i$  行の要素  $B_i$  は  
 $B_i = \alpha(i)$  となる、  
 $(\mathbf{C})$  :  $n$  次の列行列で、第  $i$  行の要素  $C_i$  は  
 $C_i = \{1-\alpha(i)\}\bar{x}^p(i)$  となる、  
 $(A)^{-1}$  :  $(A)$  の逆行列。

一方ねじりモーメント  $T$  は、式 (8) から近似的に、分割正方形上の  $x$  の体積（各隅角部の  $x$  の平均値に底面積  $\lambda^2$  を乗じたもの）の総和を 2 倍したもので与えられる。すなわち

$$T = 2 \sum_{ij} \frac{\lambda^2}{4} (\chi_{ij} + \chi_{ij+1} + \chi_{i+1j} + \chi_{i+1j+1}) \quad \dots \quad (19)$$

式 (19) を弾性限界時の降伏ねじりモーメント  $T_Y$  で除して無次元化すれば次式をえる。

$$\begin{aligned}
 \bar{T} &= \frac{T}{T_Y} = \left\{ 1 / \left( \frac{1}{2} \bar{\lambda}^2 t_0 \omega_Y G a_0^2 \right) \right\} \\
 &\cdot \sum_{ij} \frac{\lambda^2}{2} (\chi_{ij} + \chi_{ij+1} + \chi_{i+1j} + \chi_{i+1j+1}) \\
 &= \frac{1}{t_0} \sum_{ij} (\bar{\chi}_{ij} + \bar{\chi}_{ij+1} + \bar{\chi}_{i+1j} + \bar{\chi}_{i+1j+1}) \quad \dots \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで}, T_Y = \bar{\lambda}^2 t_0 \omega_Y G a_0^2 / 2 \quad \dots \quad (21)$$

式 (21) の  $t_0$  および  $\omega_Y$  は、それぞれ次のようにして求められる。

まず  $t_0$  は、式 (18) および式 (20) に  $\bar{T}=1$ ,  $\alpha(k)=1$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) および  $\bar{\omega}=1$  を代入することによって求められ、断面形状によって定まる定数となる。

次に降伏ねじり率  $\omega_Y$  は、同じく  $\alpha(k)=1$ ,  $\bar{\omega}=1$  において弾性限界時の  $\bar{x}$  値を用いて次のようにして決定される。

すなわち、このときの合せん断応力の最大値を  $\tau_{\max}$  とすれば、式 (6) から

$$\tau_{\max} = \max \left\{ \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}^{1/2} G a_0 \omega_Y = \tau_Y \quad \dots \quad (22)$$

一般に、 $\tau_{\max}$  は、断面の周辺上に生じることに留意して、上式を差分表示すれば、図-3 を参照して

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{x}_b = \bar{x}_a - \bar{x}_b \\ \Delta \bar{x}_a = 0 - \bar{x}_a \\ \Delta \Delta \bar{x}_b = \Delta \bar{x}_a - \Delta \bar{x}_b \end{array} \right\} \quad \dots \quad (23)$$

よって周辺での  $\bar{x}$  の変化  $\Delta \bar{x}_0$  は

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{x}_0 &= \Delta \bar{x}_a + \Delta \bar{x}_b = \Delta \bar{x}_a \\
 &+ \Delta \bar{x}_b \quad \dots \quad (24)
 \end{aligned}$$

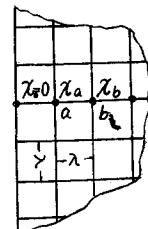


図-3

式 (24) に式 (23) を代入して

$$\Delta \bar{x}_0 = \bar{x}_b - 3\bar{x}_a \quad \dots \quad (25)$$

ところで周辺に沿って  $\bar{x}=\text{const}=0$  であることを考慮すれば、

$$\left\{ \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\} = \left( \frac{\Delta \bar{x}_0 + \Delta \bar{x}_a}{2\bar{\lambda}} \right)^2$$

上式に式 (24), (25) を代入して整理すれば、結局次式がえられる。

$$\left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{y}} \right)^2 = \left( \frac{4\bar{x}_a - \bar{x}_b}{2\bar{\lambda}} \right)^2 \quad \dots \quad (26)$$

よって  $\omega_Y$  は、次の式で与えられる。

$$\omega_Y = \frac{\tau_Y}{G a_0 s_0}, \quad s_0 = \frac{1}{2\bar{\lambda}} \max |4\bar{x}_a - \bar{x}_b| \quad \dots \quad (27)$$

さて、式 (20) を行列表示すれば、

$$\bar{T} = (\mathbf{D})(\bar{x}) \quad \dots \quad (28)$$

ここに、 $(\mathbf{D})$  は、断面形状と分割数によって定まる raw matrix で、たとえば 図-5 の正方形断面では対称性を考慮すれば、28 次の raw matrix となる。

$$(\mathbf{D}) = \frac{1}{t_0} (488888448888448884484484448),$$

$$t_0 = 2.212$$

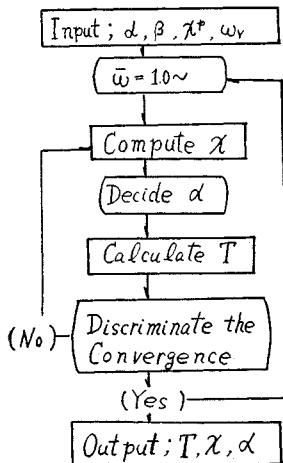


図-4

式(28)に式(18)を代入して

$$\bar{T} = 2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}(\mathbf{D})(\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B}) + (\mathbf{D})(\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{C}) \dots (29)$$

よって式(29), (18)から、漸増ねじり率  $\bar{\omega}$  に対する漸増ねじりモーメント  $\bar{T}$  が算定可能となり、その Flow-Chart を示せば、図-4 のようになる。すなわち、演算は、塑性域の広がりを逐次追跡決定してゆく、くり返し収束計算となる。

また漸増ねじりモーメント  $\bar{T}$  が既知数である場合は、式(29)の代りに、これを変形した式(31)を用いればよい。

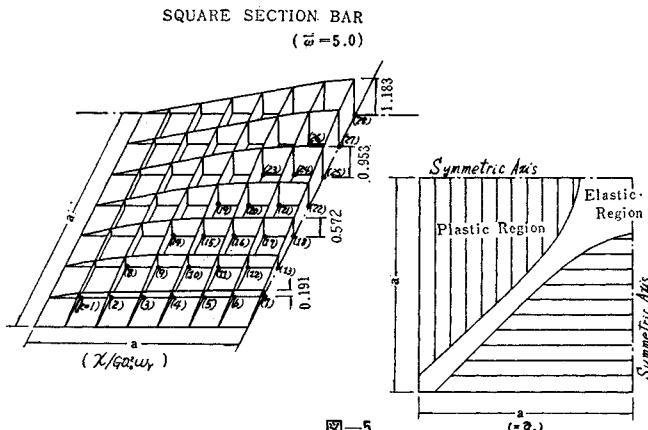


図-5

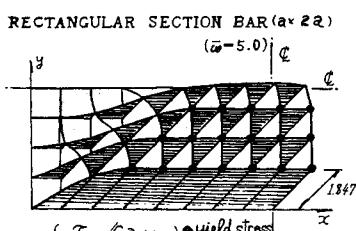


図-6

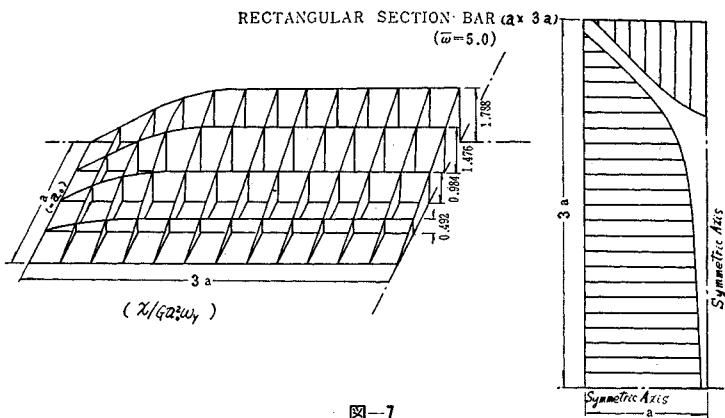


図-7

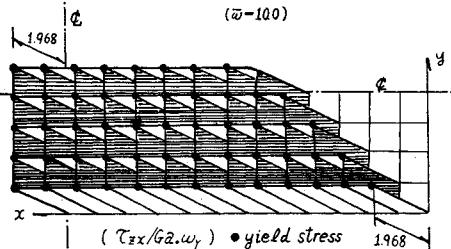
RECTANGULAR SECTION BAR ( $a \times 3a$ ) ( $\bar{\omega}=100$ )

図-8

すなわち、漸増ねじり率  $\bar{\omega}$  を、漸増弾性ねじり率  $\bar{\omega}^e$  と塑性ねじり率  $\bar{\omega}^p$  とに分ければ、

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}^e + \bar{\omega}^p \dots \dots \dots (30)$$

$\bar{\omega}^e = \bar{T}$  であるから、式(29)を用いて次のように上式を変形することができる。

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{T} + \bar{\omega}^p \\ \bar{\omega}^p &= \{(1-\phi)\bar{T} - \psi\}/\phi \end{aligned} \dots \dots \dots (31)$$

ただし、 $\phi = 2\bar{\lambda}^2(\mathbf{D})(\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{B})$ ,

$$\psi = (\mathbf{D})(\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{C})$$

#### 4. 応用数値計算

以上の考察に基づいて構造用材として多用される正方形、矩形、I 形および T 形の各断面棒の弾塑性ねじり応力解析を行なった。

紙面の都合上解析の基礎をなす  $\bar{x}$  値とせん断応力  $\tau_{zx}$  ならびに  $\bar{T}-\bar{\omega}$  曲線のみを抜いてして図-5～図-16に示した。これらの図から正方形、矩形断面では、一般に長辺の中央点に最大せん断応力を生じ、塑性域はこの点より双曲線状に次第に広がって図-5 および図-7 のようになり、塑性域のせん断応力分布は一定値に収束する(図-6 および図-8 参照)。また  $\bar{\omega}$  が 10 以上の極限状態に近づくと、 $\bar{x}$  はいわゆる Sand heap<sup>4), 5)</sup>を形成し、図-9 のようになる。

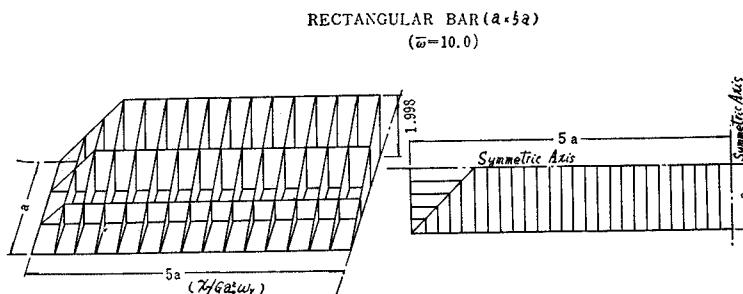


図-9

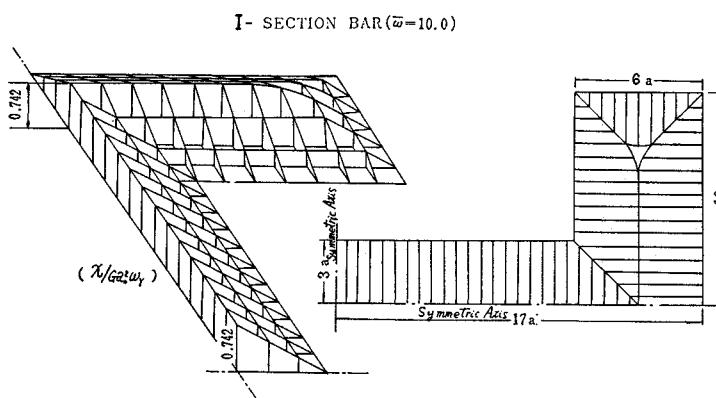


図-10

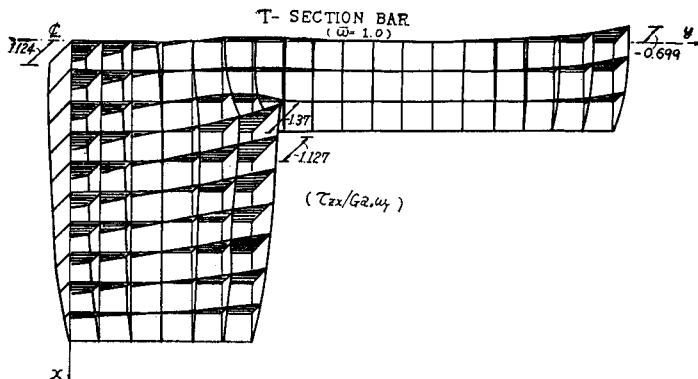


図-11

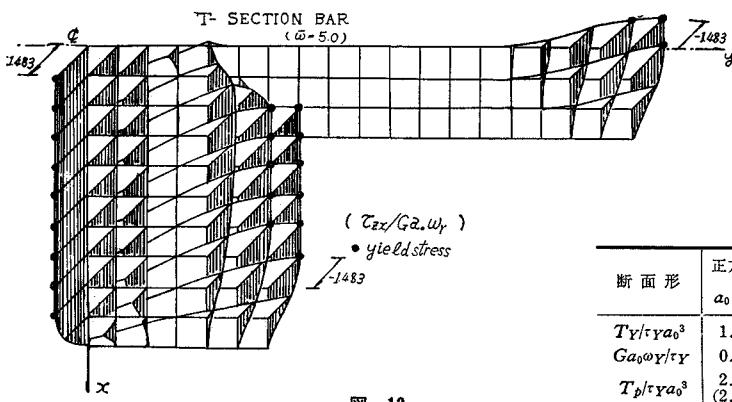


図-12

一方、I形およびT形断面では FlangeとWebの結合部に最大せん断応力を生じ(図-11参照), 塑性域は図-10のように複雑に増大推移し, したがってせん断応力分布も図-11から図-12のように移行する(ただし凹角部では, Sand heap部は, 厳密には曲面となるが, ここではその効果を無視する)。

図-13は, 正方形断面に対するHodge<sup>3)</sup>の解と, 本法のそれとを比較した図であり, 両者は定性的にも定量的にもよく合致することが看取される。

ここに各種断面に対する弹性限界時の  $T_Y$ ,  $\omega_Y$  および完全塑性時の  $T_p$  を列挙すれば次のとおりである。ただし, かっこ中の値は厳密解である(表-1参照)。

表-1の結果から, I形断面(誤差 7.4%)を除けば, 誤差は高々 4% であるから, 分割数はこの程度で十分であるといえる。

以上により, 非硬化材料の棒の弾塑性ねじり挙動特性の一端を知ることができたが, 太肉断面と薄肉断面の限界があいまいであり, 棒の真のねじり挙動は, 軸対称断面を除けば, 一般に曲げねじり変形が併起されるため, その効果を考慮したより厳密な3次元応力解析理論により論じられなければならない。

次に, 以上の数値解析の結果を用いて,  $\bar{T}$ - $\bar{\omega}$  曲線の実用式を導けば次のようになる。

すなわち  $\bar{T}$ - $\bar{\omega}$  曲線は,  $\bar{\omega}=1$  のとき  $\bar{T}=1$ ,  $\bar{\omega}=\infty$  のとき  $\bar{T}=\bar{T}_p$  となるゆえ(図-13~図-16 参照), これらの両境界条件を近似

表-1

断面形	正方形 $a_0=a$	矩形 (1×2) $a_0=a$	矩形 (1×3) $a=a_0$	矩形 (1×5) $a_0=a$	I形 $a_0=6a$	T形 $a_0=6a$
$T_Y/\tau_Y a_0^3$	1.657	3.849	6.276	11.25	2.129	1.098
$Ga_0\omega_Y/\tau_Y$	0.7492	0.5414	0.5083	0.5004	0.6733	0.6742
$T_p/\tau_Y a_0^3$	2.655 (2.667)	6.625 (6.667)	10.62 (10.67)	18.60 (18.67)	4.630 (5.000)	2.491 (2.500)

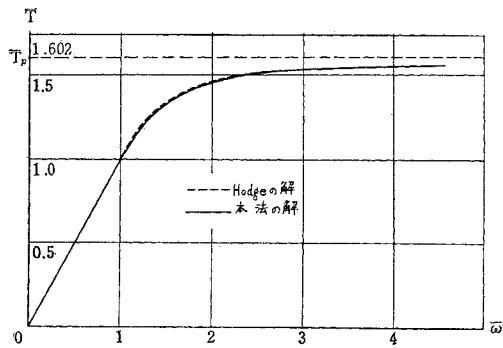


図-13

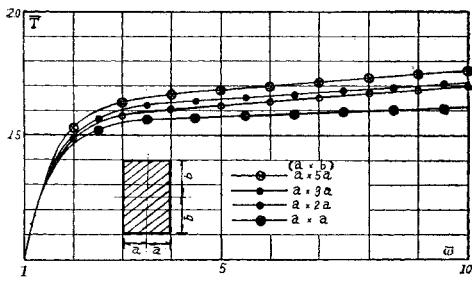


図-14

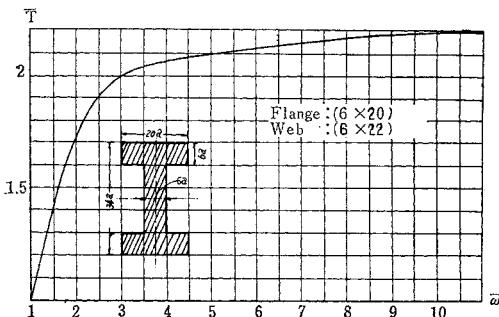


図-15

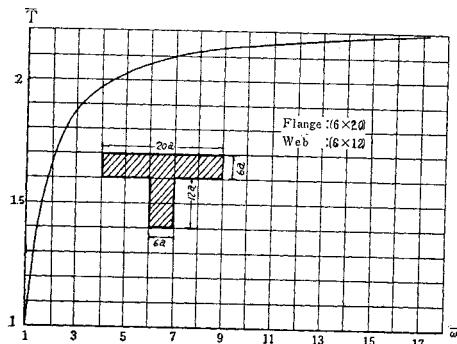


図-16

的に満足する実用式として次式を導入する。

$$\bar{T} = a' + b' \frac{1}{\bar{\omega}} + c' \frac{1}{\bar{\omega}^2} + d' \frac{1}{\bar{\omega}^3} \quad \dots \dots \dots (32)$$

式(32)の係数を最小自乗法を適用して求めれば次のとおりである。

$$\begin{bmatrix} \sum_i 1 & \sum_i \eta_i & \sum_i \eta_i^2 & \sum_i \eta_i^3 \\ \sum_i \eta_i & \sum_i \eta_i^2 & \sum_i \eta_i^3 & \sum_i \eta_i^4 \\ \sum_i \eta_i^2 & \sum_i \eta_i^3 & \sum_i \eta_i^4 & \sum_i \eta_i^5 \\ \sum_i \eta_i^3 & \sum_i \eta_i^4 & \sum_i \eta_i^5 & \sum_i \eta_i^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \bar{T}_i \\ \sum_i \bar{T}_i \eta_i \\ \sum_i \bar{T}_i \eta_i^2 \\ \sum_i \bar{T}_i \eta_i^3 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (33)$$

ただし、 $\eta_i = 1/\bar{\omega}_i$  ( $i=1, 2, \dots$ )

式(32),(33)に本法の数値計算の結果を代入すれば、所要の  $\bar{T}-\bar{\omega}$  曲線の実用式がえられる。なお、前述の例に対しては、式(32)は次の内容となる。

- 1) 正方形断面 :

$$\bar{T} = 1.602 + 0.091 \frac{1}{\bar{\omega}} - 0.701 \frac{1}{\bar{\omega}^2} + 0.007 \frac{1}{\bar{\omega}^3}$$

- 2) 矩形断面 ( $1 \times 2$ ) :

$$\bar{T} = 1.761 - 0.108 \frac{1}{\bar{\omega}} - 0.648 \frac{1}{\bar{\omega}^2} - 0.005 \frac{1}{\bar{\omega}^3}$$

- 3) 矩形断面 ( $1 \times 3$ ) :

$$\bar{T} = 1.732 - 0.144 \frac{1}{\bar{\omega}} - 0.570 \frac{1}{\bar{\omega}^2} - 0.018 \frac{1}{\bar{\omega}^3}$$

- 4) 矩形断面 ( $1 \times 5$ ) :

$$\bar{T} = 1.725 - 0.447 \frac{1}{\bar{\omega}} + 0.103 \frac{1}{\bar{\omega}^2} - 0.382 \frac{1}{\bar{\omega}^3}$$

- 5) I 形断面 :

$$\bar{T} = 2.175 - 0.292 \frac{1}{\bar{\omega}} - 3.242 \frac{1}{\bar{\omega}^2} + 1.793 \frac{1}{\bar{\omega}^3}$$

- 6) T 形断面 :

$$\bar{T} = 2.294 - 0.075 \frac{1}{\bar{\omega}} - 2.983 \frac{1}{\bar{\omega}^2} + 1.764 \frac{1}{\bar{\omega}^3}$$

..... (34)

## 5. 弹塑性ねじり角式

一様な断面棒  $AB$  の両端  $A, B$  にねじりモーメント  $T_{AB}, T_{BA} (= -T_{AB})$  が作用するものとすれば、弾塑性ねじり補正エネルギー  $U^*$  は、次式で与えられる。

$$U^* = \iint \omega dT dz \quad \dots \dots \dots (35)$$

材端  $A, B$  の  $z$  軸まわりの回転角を  $\theta_A, \theta_B$  とすれば、補正エネルギー最小の原理から、棒の相対ねじり角  $\theta_A - \theta_B$  は

$$\theta_A - \theta_B = \frac{\partial U^*}{\partial T_{AB}} = \int \omega \frac{\partial T}{\partial T_{AB}} dz = \int \omega dz$$

棒は一様にねじられているゆえ、上式は次のように簡単になる。

$$\theta_A - \theta_B = \omega l = \omega_Y l \bar{\omega} \dots \dots \dots (36)$$

さらに  $\omega_Y = T_Y/GJ$ ,  $\bar{\omega}^e = \bar{T} = \bar{T}_{AB}$  および式 (30) を式 (36) に代入して整理すれば、結局次式をえる。

$$\left. \begin{array}{l} T_{AB} = \frac{GJ}{l} (\theta_A - \theta_B) - \bar{\omega}_{AB}^p T_Y \\ \text{同様にして} \\ T_{BA} = \frac{GJ}{l} (\theta_B - \theta_A) + \bar{\omega}_{AB}^p T_Y \end{array} \right\} \dots \dots \dots (37)$$

ただし、 $GJ$ ：ねじり剛性、

$$l : \text{棒の長さ}, \bar{T}_{AB} = T_{AB}/T_Y.$$

式 (37) の  $\bar{\omega}_{AB}^p$  は

$$\bar{\omega}_{AB}^p = \bar{\omega}_{AB} - \bar{T}_{AB} \dots \dots \dots (38)$$

で与えられ、 $\bar{\omega}_{AB}$  は式 (32) を用いてくり返し試算によって決定される。

上記誘導の弾塑性ねじり角式と、先に著者が提案した弾塑性たわみ角式<sup>6)</sup>とを併用すれば、純曲げと純ねじりを受ける部材で構成される立体骨組構造物の弾塑性応力解析が可能となる。この点についての詳細は文献 7) を参照されたい。

## 6. 結 び

本論文の結論を要約すれば次のとおりである。

(1) 本研究によって正方形、矩形および太肉の I 形、T 形断面などの棒の塑性挙動や塑性域の遷移状況が明らかにされた。もちろん他の L 形、【形断面に対する解も本法を応用すれば、機械的に求めることが可能である。

(2) 式 (34) の  $T-\bar{\omega}$  曲線式は、最小自乗法に基づく近似式 (I 形断面を除けば  $T$  の誤差は高々 4% である) であるが、それ自体、構造解析に有用であり、かつ必要に応じて分割数を増せば、精度を適宜高めることができるゆえ、その実用的価値は少なくないといえる。

(3) 本法で無視した曲げねじりの効果は、4. で説明したように厳密な 3 次元解析によって算定できるが

(太肉断面の範囲を規定する上から必要)、今後解決されるべき重要な課題の一つである。

なお本論文では、非硬化材料の棒を対象としたが、硬化材料の棒に対しては、薄膜屋根類似の理論は成り立たなくなる。この場合は、ロイスの応力-ひずみ方程式とひずみ硬化を考慮しうる一般化された降伏条件とを併用してひずみ増分理論による応力解析を行なえばよい (この点については一応の指針がえられたので後日報告するつもりである)。

また式 (37) と弾塑性たわみ角式とによって、変形法による純曲げと純ねじりを受ける部材で構成される立体骨組構造物の応力解析が可能となる。

本研究にあたっては、山本善之東京大学教授ならびに吉村虎藏熊本大学教授に教えられるところ大であり、さらに文部省科学研究費の補助を受けた。ここに記して感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) Sokolovsky, V.V. : On a Problem of Elastic-Plastic Torsion, Russian with English Summary, Prikladnaya Matematika i Mekhanika, Vol. 6, 1942
- 2) 石川・半沢：弾塑性ねじり問題の一理論解法、日本機械学会論文集 (第1部), 35巻 276号, 昭和 44 年 8 月
- 3) Hodge, P.G. : Elastic-Plastic Torsion as a Problem in Nonlinear Programming, International Jour. of Solids and Structures, Vol. 13, 1967
- 4) 山本：弹性塑性、朝倉書店、昭和 43 年 4 月  
山田：塑性力学、日刊工業新聞社、昭和 41 年 12 月
- 5) Nadai, A. : Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw-Hill, 1950
- 6) Ohta, T. and T. Yamasaki : Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures Considering the Effects of Residual Stress and Finite Deformation, Proc. of JSCE, No. 194, Oct., 1971
- 7) 山崎・太田・速水：純曲げおよび純ねじりをうける部材より構成される立体ラーメンの弾塑性解析、九州大学工学集報, 第 40 卷第 1 号, 昭和 42 年 3 月

(1971.10.4・受付)