土木学会論文集 No. 772／IV-65, 169-184, 2004. 10

経済的寿命を考慮した最適修繕政策

織田澤利守[1]・石原克治[2]・小林潔司[3]・近藤佳史[4]

[1]正会員　博（工）東北大学大学院助手　情報科学研究科人間社会情報科学専攻(〒 980-8579　仙台市青葉区荒巻字06)
E-mail:ota@plan.civil.tohoku.ac.jp
[2]正会員　Ph.D.（株）日建設計シビル　建設マネジメント室(〒 112-8565 文京区後楽2-2-23)
E-mail:ishihara@nikken.co.jp
[3]フェロー会員　工博　京都大学大学院教授　大学院工学研究科都市社会工学専攻(〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail:kkoba@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp
[4]工修　(株)日本総合研究所　研究事業本部　(〒542-0081　大阪市中央区南船場3-10-19　銀泉心斎橋ビル)
E-mail:kondo.yoshifumi@rcd.jri.ne.jp

本研究では経済的寿命に不確実性がある社会基盤施設の最適修繕政策を検討するための方法論を提案する．社会基盤施設の経済的・物理的劣化過程をマルコフ決定過程としてモデル化する．その上で，施設管理者が施設の経済便益とライフサイクル費用の双方を考慮しながら，施設の転用タイミングを決定する最適運営政策と施設の劣化状態を回復する最適修繕政策を同時に決定するための最適アセットマネジメントモデルを定式化する．さらに，提案した最適アセットマネジメントモデルを港湾施設のアセットマネジメント問題に具体的に適用し，モデルの有効性を実証的に検討する．

Key Words : *optimal repair policies, economic life expectancy, markov decision process, real options*

1．はじめに

社会基盤施設は耐用性を持つ資本であり，長期にわたってサービスを提供する．しかし，時間の進展に伴って，社会基盤施設には力学的強度の低下といった物理的劣化だけでなく，社会経済情勢の変遷や施設機能の陳腐化に伴う施設需要の低減といった経済的劣化も発生する．物理的劣化が進展した場合，修繕投資を実施することにより施設のサービス水準を回復することが可能であるが，経済的劣化に対しては，施設機能の向上や他用途への転用のために施設の更新が必要となる．

近年，社会基盤施設のアセットマネジメント政策に関する研究が進展してきた[1)-9)]．そこでは，対象とする施設が無限に供用されること，もしくは確定的に決められた有限期間にわたって供用されることが想定され，ライフサイクル費用の最小化を目的とする最適修繕政策が導出されている．しかし，施設の経済的寿命に不確実性が介在する場合，施設管理者は施設運営による期待経済価値を最大にするような施設の運営政策と修繕政策を同時に検討することが必要となる．ここで，施設の経済的寿命とは，物理的，経済的劣化の進展により施設の運営管理を継続することが経済的に非効率となり，施設の更新，あるいは別の用途への転用が実施されるまでの残余時間を意味する．この場合，施設のライフサイクル費用の最小化をめざした修繕政策は部分的最適化政策にとどまらざるを得ない．

アセットマネジメントの現場では，施設運営を実施する運営部門（以下，M部門と略す）と修繕管理を担当する修繕部門（以下，R部門と略す）が独立した組織的部門である場合が少なくない．R部門のアウトソーシングが進展すれば，両部門の独立性はさらに高くなる．しかし，施設の経済的寿命に不確実性が存在する場合，ライフサイクル費用を最小化する修繕政策が施設全体の運営管理にとって最適である保証はない．施設全体のアセットマネジメントの効率性に資する望ましいR部門の意思決定方式を設計する必要がある．

本研究では，社会基盤施設の物理的劣化と経済的劣化の双方を同時に考慮した最適アセットマネジメントモデルを提案する．さらに，最適マネジメント政策の特性について考察するとともに，経済的寿命を考慮した最適修繕政策がアセットマネジメントの効率性に及ぼす影響を分析する．以下，2．では，本研究の基本的な考え方を説明する．3．で最適アセットマネジメントモデルを定式化し，4．では，最適マネジメント政策の解法とその特性について考察する．5．では港湾施設のアセットマネジメント問題を対象とした実証分析を通じて，モデルの有効性を検討する．

2．本研究の基本的立場

（1）従来の研究概要

最適修繕問題に関しては，オペレーションズ・リサーチの分野において最適取り替え問題としてすでに確立し

た研究分野となっている[10]．破壊や故障がある定常的な確率過程に従って生起するようなシステムの最適修繕政策に関しては膨大な研究が蓄積されている[10),11]．そこでは，最適修繕問題を確率動的計画問題，あるいはマルコフ決定過程として定式化しており，最適保全・修繕政策は一連の状況依存的定常ルールとして定義される．一方，小林等[1)-3]は，施設に対する累積需要が施設の劣化水準に影響を及ぼすような土木施設の維持・補修問題をとりあげ，Scarfの(S,s)ルールの考え方[12),13]に基づいた土木施設の最適修繕政策を得る方法を提案している．その際，施設の累積需要が非定常確率過程に従うことより，Suelmによる非定常在庫投資理論[14]に着目し，施設需要や施設の劣化の程度という事後的な観測情報に基づいて修繕投資の実行の有無やその内容をそのつど決定する状況依存的定常ルールを求める方法を提案している．さらに，劣化過程が直接観測可能でないような施設の修繕問題をマルコフ決定過程を用いて分析する方法もいくつか提案されている[4)-9]．しかし，これら既存の研究の多くは施設が無限に供用されることを前提とした上で，定常的な最適修繕政策を導出することに主眼が置かれている．

一方，施設寿命が有限でかつ確定的な場合は，施設の最適修繕政策が定常政策として求まる保証はなく[15]，有限の施設寿命に対して定義されるライフサイクル費用を最小にするような最適修繕モデルを定式化するとともに，施設の余寿命に依存した最適修繕政策を求めることが必要となる．これに対して，本研究では施設の経済的寿命が不確実であり，施設管理者は当該施設の破棄と代替的なプロジェクトへの転用の可能性を考慮にいれながら，プロジェクトの期待純便益の現在価値（以下，期待プロジェクト価値と呼ぶ）を最大にするように施設の運営政策と修繕政策を同時に決定するような最適アセットマネジメント問題を取り上げる．本研究で提案する最適アセットマネジメントモデルは，無限的視野の下で施設運営の最適終了時点を内生的に決定する構造をしており，施設の最適運営政策と最適修繕政策が施設の経済状態と劣化状態という２つの状態変数に依存するような定常政策として求まる点に特徴がある．筆者等が知る限り，施設の経済的寿命リスクを考慮に入れたような最適修繕モデルは他に例を見ない．さらに，本研究では３．で定式化する最適アセットマネジメントモデルをベンチマークとして，R部門が意思決定の裁量権をもったような分権的意思決定方式がプロジェクト全体の効率化に及ぼす影響を分析する．

（２）施設の経済的寿命と最適修繕政策

本研究では経済的寿命が不確実な社会基盤施設の修繕問題を考える．経済的寿命に到達した社会基盤施設は，更新・転用のため廃棄される．一方，施設が経済的寿命に到達するまでは，利用者に対してサービスが提供される．施設の物理的劣化により，施設のサービス水準は時間とともに低下する．施設の修繕により劣化状態はある所与の水準にまで回復する．それに伴って，施設の資産価値は増加する．しかし，施設の運営が終了すれば，施設はそのままでは他の用途に利用できず資産価値はゼロになると考えよう．施設管理者は，施設を運営管理することにより獲得できる経済便益と，施設を転用もしくは機能更新することにより得られる潜在的経済便益を計測し，当該施設の運営を継続するか，運営を終了し施設を別の用途に転用するかを決定する．それと同時に，施設管理者は施設の劣化状態を定期的に観測し，必要な場合には施設を修繕する．簡単のために，施設の経済便益の測定と劣化状態の観測は，互いに同一の時点で実施されると考える．いま，施設が十分な経済便益を有しており，少なくとも近い将来に施設が破棄される可能性がない場合を考えよう．この場合，施設管理者は施設の維持補修に関わるライフサイクル費用を最小にするように施設の修繕政策を決定すればいい．しかし，施設の経済的劣化が進んでいれば，近い将来に施設が破棄される可能性が存在するため，大規模な修繕を実施することは望ましくない．むしろ，最小限の維持補修を確保しておけば十分であろう．場合によっては，施設の運営の終了を先送りすることが得策となる場合もあるだろう．このように施設の経済的寿命リスクが存在する場合，施設管理者は施設の経済的的劣化と物理的劣化の双方を同時に観察しながら，施設の運営を終了するタイミング（運営政策）と施設の修繕政策を同時に決定することが必要となる．

（３）マネジメント政策

時点$i=0$を起点とする時間軸上に等間隔に設定された離散的時点i $(i=0,1,2,\cdots)$を考えよう．施設管理者は各時点iにおいて，施設の経済便益と物理的劣化状態を観測する．経済便益は時点iから時点$i+1$までの期間中に当該施設がもたらす期待便益の総和を時点iの当該期価値で評価した結果を表す．当該期における施設の経済便益は閉区間$[0,\overline{B})$上で分布すると考える．$\overline{B}$はありうべき経済便益の上限値を表している．この閉区間をM個の区間$[B(m),B(m+1))$ $(m=1,\cdots,M)$に分割し，各区間の経済便益を$B(m)$で代表しよう．ただし，$B(1)=0$，$B(M+1)=\overline{B}$が成立する．そこで，$B(m)$を定義するM個の引数mを各時点における施設の経済便益の状態（以下，経済状態と呼ぶ）を表す状態変数として用いることとする．状態変数mが大きいほど，当該時点における施設の経済便益は大きくなる．

一方，物理的劣化状態（以下，劣化状態と呼ぶ）は

K個の離散的な状態変数j $(j=1,\cdots,K)$で表され，jの値が大きくなるほど劣化が進行していることを意味している．施設の経済状態，劣化状態（以下，経済状態と劣化状態を併せて施設状態と呼ぶ）の推移過程は不確実であり，将来の施設状態を確定的に予測できない．施設管理者は各時点iにおいて施設状態(m,j)を観測し,「施設の運営を継続するか否か」,「もし，継続するとしたらどのような修繕が必要であるか」を決定する．前者の意思決定問題を「運営問題」，後者の問題を「修繕問題」と呼ぼう．３．で定式化する最適アセットマネジメントモデルでは，１人の施設管理者が最終責任者として運営問題と修繕問題の双方に対して意思決定を行う．それぞれの問題に対して，意思決定が行わればその結果は直ちに行動に移される．

まず，ある時点iにおける運営問題に着目しよう．運営問題では「施設の運営を終了する」と「施設の運営を継続する」という２つの選択肢が存在する．運営問題に関する政策$d_1\in D_1$を，施設状態(m,j) $(m=1,\cdots,M;j=1,\cdots,K)$のそれぞれに対して施設管理者が採用するアクション（選択肢の選択結果）の組を用いて表現しよう．このような運営政策は有限個存在し，D_1は運営問題の政策集合を表す．運営政策$d_1\in D_1$を構成するアクション$\xi^{d_1}(m,j)\in\xi$を次式で定義する．

$$\xi^{d_1}(m,j)=\begin{cases}0 & \text{施設運営を終了する}\\ 1 & \text{施設運営を継続する}\end{cases} \tag{1}$$
$$(m=1,\cdots,M;j=1,\cdots,K)$$

ただし，$\xi=(0,1)$であり，運営アクション集合を表す．この時，運営政策$d_1\in D_1$を，施設状態(m,j)と対応して施設管理者が採用する運営アクション$\boldsymbol{\xi}^{d_1}$

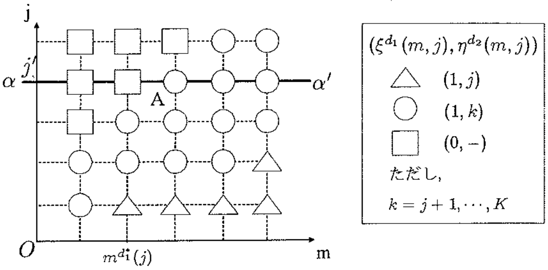
$$\boldsymbol{\xi}^{d_1}=\begin{pmatrix}\xi^{d_1}(1,1) & \cdots & \xi^{d_1}(1,K)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi^{d_1}(M,1) & \cdots & \xi^{d_1}(M,K)\end{pmatrix} \tag{2}$$

を用いて表現できる．つぎに，修繕問題を考えよう．修繕政策$d_2\in D_2$は施設状態(m,j)が観測された場合にその時点で実施する修繕アクションを指定する．修繕政策は有限個存在し，D_2は修繕政策の集合である．修繕政策$d_2\in D_2$の下で実施される修繕アクション$\boldsymbol{\eta}^{d_2}$を，修繕アクション実施後の劣化水準$\eta^{d_2}(m,j)\in\eta(m,j)$を用いて次式で定義する．

$$\boldsymbol{\eta}^{d_2}=\begin{pmatrix}\eta^{d_2}(1,1) & \cdots & \eta^{d_2}(1,K)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta^{d_2}(M,1) & \cdots & \eta^{d_2}(M,K)\end{pmatrix} \tag{3}$$

ただし，$\eta(m,j)$は施設状態(m,j)に対して定義される修繕アクションの集合である．

マネジメント政策$d\in D$を施設の運営政策d_1と修繕政策d_2の組$d=(d_1,d_2)$ $(d_1\in D_1,d_2\in D_2)$により定義



マネジメント政策dは各格子点に対して定義されるアクション内容$(\xi^d(m,j),\eta^d(m,j))$の組を用いて記述される．図中の記号△は施設を継続しかつ修繕を実施しない施設状態(m,j)を表している．記号○は施設の修繕が実施される施設状態を，記号□は施設の運営が終了される施設状態を表す．施設の運営が終了する場合，施設の修繕アクションは定義されないため記号−が表記されている．また，４．(３) で考察するように，例えば施設の劣化水準j'が観察された場合（図中の線分$\alpha-\alpha'$），点Aが施設の運営を継続するか否かを判断する臨界水準を表し，経済便益が点A以下になった場合に施設の運営が終了する．

図－１　マネジメント政策$d=(d_1,d_2)$

しよう．ただし，Dはマネジメント政策の集合である．すなわち，マネジメント政策dは施設状態(m,j) $(m=1,\cdots,M;j=1,\cdots,K)$のそれぞれに対して運営アクション$\xi^{d_1}(m,j)\in\xi$と修繕アクション$\eta^{d_2}(m,j)\in\eta(m,j)$の組$s^d(m,j)=\{\xi^{d_1}(m,j),\eta^{d_2}(m,j)\}$を用いて表せる．ここで，以下での記述の便宜を図るために，施設状態(m,j)ごとにアクション集合$S(m,j)$を定義しよう．この時，マネジメント政策dのアクション内容はアクション集合$S(m,j)$ $(m=1,\cdots,M;j=1,\cdots,K)$上で定義されるアクション内容$s^d(m,j)\in S(m,j)$を用いて

$$\boldsymbol{s}^d=\begin{pmatrix}s^d(1,1) & \cdots & s^d(1,K)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ s^d(M,1) & \cdots & s^d(M,K)\end{pmatrix} \tag{4}$$

と定義できる．**図－１**はあるマネジメント政策$d\in D$のアクション内容を例示したものである．図の横軸は経済状態mを，縦軸は劣化状態jを表している．格子点は観測可能な施設状態(m,j)の組み合わせを表している．この時，マネジメント政策は各格子点においてアクション内容$s^d(m,j)=\{\xi^{d_1}(m,j),\eta^{d_2}(m,j)\}$を指定する．施設の運営が終了した場合，修繕政策を考える必要がないため，修繕政策は定義されない．

（４）アセットマネジメントの手順

施設管理者は社会基盤施設のアセットマネジメントを実施する責務を負っている．施設の運営環境には経済的劣化，物理的劣化リスクが存在する．施設管理者は各時点において施設状態を観測しながら，施設の運営政策と修繕政策を決定する．本研究では，経済的劣化過程

と物理的劣化過程は互いに独立であり，施設需要の多寡が物理的劣化に影響を及ぼさないような土木構造物をとりあげる．施設の修繕が実施されれば，劣化状態は所与の状態まで改善される．いま，施設管理者がマネジメント政策dの下で，対象とする社会基盤施設の運営・管理する場合を考えよう．この時，施設管理者による施設の運営・修繕過程は以下のアクション系列により表現される．いま，時点iに，施設管理者は施設状態(m,j)を観測し，観測値$(\hat{m},\hat{j})$を獲得する．このとき，アクション内容は$\{\xi^{d_1}(\hat{m},\hat{j}),\eta^{d_2}(\hat{m},\hat{j})\}$となる．まず，運営アクション$\xi^{d_1}(\hat{m},\hat{j})$が実施される．$\xi^{d_1}(\hat{m},\hat{j})=0$の場合，時点$i+1$までに施設運営は終了する．$\xi^{d_1}(\hat{m},\hat{j})=1$の場合，修繕アクション$\eta^{d_2}(\hat{m},\hat{j})$が実施される．その後，時点$i+1$まで施設が運営され，つぎの時点$i+1$において施設状態$(m,j)$が再び観測される．以下，上記のアクションが施設の運営が終了されるまで継続することになる．

3．最適アセットマネジメントモデル

（1）モデル化の前提条件

施設管理者はある土地を保有し，初期時点$i=0$から無限に続く離散的時点$i=0,1,\cdots$上で，施設からもたらされる期待便益の現在価値の総和から運営に必要な期待費用の現在価値の総和を差し引いた値として定義される期待プロジェクト価値を最大にするように土地を活用したプロジェクトを運営する．初期時点において，土地上に社会基盤施設がすでに整備されており，その施設を活用することにより便益を獲得する．しかし，施設は時間とともに物理的劣化が進展するため，施設管理者は施設のサービス水準を回復するために適切な時点で施設を修繕しなければならない．また，施設運営がもたらす経済便益も時間とともに変動する．施設のプロジェクト価値が低下し，施設の運営を継続することによる機会費用が大きくなれば運営を終了し，施設の機能向上（もしくは，施設の転用）を図ることにより，土地の有効利用を行うことが求められる．施設を転用した場合に獲得できるプロジェクト価値の最大値をΘと表し，時間を通じて一定と仮定する．Θの中には，既存施設のスクラップ費用も含まれている．施設の経済状態はM個の状態変数mで，劣化状態はK個の状態変数jで記述される．状態変数mのそれぞれに経済便益$B(m)$が対応し，

$$B(1)<\cdots<B(m)<\cdots<B(M) \tag{5}$$

が成立する．経済便益は，運営を継続するときのみ生じ，運営を終了するときには発生しない．したがって，運営政策$d_1\in D$が採用された時，当該時点で発生する経済便益は

$$B^{d_1}(m,j)=\begin{cases} B(m) & \xi^{d_1}(m,j)=1\text{の時} \\ 0 & \xi^{d_1}(m,j)=0\text{の時} \end{cases} \tag{6}$$

と定義される．一方，劣化状態を表す状態変数はjの値が大きくなるほど劣化が進展していることを表している．劣化状態がKに到達すれば（施設運営を継続する限り）直ちに修繕しなければならない．施設の経済状態，および劣化状態は互いに独立な定常マルコフ過程に従って推移すると仮定する．期待プロジェクト価値は，施設運営による経済便益と期待修繕費（負値をとる）の現在価値の和で定義される．なお，施設の期待修繕費の中に，施設の定常的な補修・運営費用も含まれる．施設管理者のアセットマネジメントの目的は，各時点において経済状態と劣化状態を観測し，最大の期待プロジェクト価値を獲得できるように施設の運営政策，修繕政策を決定することにある．施設管理者による意思決定の結果は直ちに実施される．施設管理者の行動は期待プロジェクト価値を最大にするような最適運営・修繕政策を求める最適アセットマネジメントモデルとして定式化できる．

（2）劣化過程のモデル化

$\mathbf{S}_j=\{1,2,\cdots,K\}$を離散的な$K(\geq 2)$個の状態で定義される状態空間とし，施設の劣化過程$\{h_i\}$は状態空間$\mathbf{S}_j$上で定義される斉次マルコフ過程に従うと仮定する．いま，時点iの劣化状態jから，時点$i+1$で劣化状態kに推移する確率を

$$Prob[k|j]=p_{jk} \tag{7}$$

と表そう．施設の劣化状態の推移確率行列は

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{KK} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と表せる．ここで，推移確率行列$\boldsymbol{P}$の構成要素であるp_{jk}は推移確率であり，非負の値をとる．ただし，施設の劣化過程は修繕がない限り常に劣化が進展する方向に推移するため$p_{jk}=0\ (j>k)$が成立する．また，推移確率の定義より$\sum_{k=1}^{K}p_{jk}=1$が成立する．状態Kは施設の破壊状態を表しており，修繕がない限りマルコフ過程における吸収状態となる．すなわち，$p_{KK}=1$が成立する．推移確率p_{jk}は条件

$$\sum_{k=h}^{K}p_{1k}\leq\cdots\leq\sum_{k=h}^{K}p_{jk}\leq\cdots\leq\sum_{k=h}^{K}p_{Kk} \tag{9}$$
$$(h=1,\cdots,K;1\leq j\leq K)$$

を満足すると仮定する．条件(9)は施設の劣化水準が進んだ場合の方が，施設の劣化がより進んだ状態に遷移

しやすいことを表している．

つぎに，対象施設の修繕政策$d_2 \in D_2$を実施した場合の劣化状態の推移行列を定義しよう．修繕政策d_2に基づくアクション内容は施設状態(m,j)に対して式(3)により記述される．いま，施設状態(m,j)の時に修繕政策d_2を適用した場合，施設の劣化状態の推移確率は

$$q_{jk}^{d_2}(m) = \begin{cases} 1 & \eta^{d_2}(m,j)=k\text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$
$$(j=1,\cdots,K; k=1,\cdots,j; m=1,\cdots,M) \quad (10)$$

と表される．すなわち，修繕が実施された後の劣化状態（修繕が実施されない場合は元の劣化状態）に確率1で推移する．以上の推移確率を推移確率行列$\boldsymbol{Q}^{d_2}(m)$ $(m=1,\cdots,M)$として整理することにより，

$$\boldsymbol{Q}^{d_2}(m) = \begin{pmatrix} q_{11}^{d_2}(m) & \cdots & q_{1K}^{d_2}(m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{K1}^{d_2}(m) & \cdots & q_{KK}^{d_2}(m) \end{pmatrix} \quad (11)$$

を得る．劣化状態がKである場合，施設運営が継続される限り直ちに修繕されるため常に$q_{KK}^{d_2}(m)=0$が成立する．いま，時点iに修繕工事が実施され，状態変数が推移確率行列$\boldsymbol{Q}^{d_2}(m)$により推移した後に，時点$i+1$までに劣化状態が推移行列$\boldsymbol{P}$に従って推移すると考えよう．この場合，修繕ルールd_2の下で，時点iに劣化状態が観測された時点から，修繕工事を経て次の時点$i+1$に劣化状態が推移する確率を表す推移確率行列$\boldsymbol{P}^{d_2}(m)$ $(m=1,\cdots,M)$は次式で定義される．

$$\boldsymbol{P}^{d_2}(m) = \boldsymbol{Q}^{d_2}(m)\boldsymbol{P} \quad (12)$$

（3）便益過程のモデル化

時点iの施設の経済状態は状態変数m $(m=1,\cdots,M)$で表せる．経済状態は時間とともに変動する．離散的な$M(\geq 2)$個の状態で定義される状態空間$\mathbf{S}_m=\{1,2,\cdots,M\}$上において，施設の経済状態の推移過程$\{l_i\}$が斉次マルコフ過程に従うと仮定しよう．経済状態の推移確率は次式で表される．

$$\boldsymbol{\pi} \doteq \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{M1} & \cdots & \pi_{MM} \end{pmatrix} \quad (13)$$

物理的劣化過程の場合と異なり，経済状態が改善されることも起こり得る．ここで，推移確率π_{mn}は条件

$$\sum_{n=z}^{M}\pi_{1n} \leq \cdots \leq \sum_{n=z}^{M}\pi_{mn} \leq \cdots \leq \sum_{n=z}^{M}\pi_{Mn} \quad (14)$$
$$(z=1,\cdots,M; 1\leq m\leq M)$$

を満足すると仮定する．条件(14)は経済状態の良い場合の方が，経済状態が悪い状態に推移しにくいことを表している．

つぎに，運営政策$d_1 \in D_1$が実施された場合の経済状態の推移行列を定義しよう．運営政策d_1に基づくアクション内容は施設状態(m,j)に対して式(2)で定義される．いま，施設状態(m,j)の時に運営政策d_1を適用した場合，施設の経済状態の推移確率$\pi_{mn}^{d_1}(j)$は

$$\pi_{mn}^{d_1}(j) = \begin{cases} \pi_{mn} & \xi^{d_1}(m,j)=1\text{の時} \\ 0 & \xi^{d_1}(m,j)=0\text{の時} \end{cases} \quad (15)$$

と表せる．すなわち，施設の運営が継続された場合，経済状態は推移確率行列(13)に従って推移する．施設状態(m,j)において施設の運営が終了する場合，任意のnに対して$\pi_{mn}^{d_1}(j)=0$が成立する．ここで，施設の運営が終了した状態を表す状態変数$n=0$を新たに追加しよう．施設状態(m,j)の時に運営政策d_1を適用し施設の運営が終了する場合，経済状態の推移確率$\pi_{m0}^{d_1}(j)$を

$$\pi_{m0}^{d_1}(j) = \begin{cases} 0 & \xi^{d_1}(m,j)=1\text{の時} \\ 1 & \xi^{d_1}(m,j)=0\text{の時} \end{cases} \quad (16)$$

と定義しよう．この時，推移確率の定義より，任意の(m,j)に対して$\sum_{n=0}^{M}\pi_{mn}^{d_1}(j)=1$が成立する．以上に基づいて，マネジメント政策$d$の下において，施設状態$(m,j)$が観測された場合の経済状態の推移確率行列$\boldsymbol{\pi}^{d_1}(j)$ $(j=1,\cdots,K)$を次式で定義する．

$$\boldsymbol{\pi}^{d_1}(j) = \begin{pmatrix} \pi_{10}^{d_1}(j) & \pi_{11}^{d_1}(j) & \ldots & \pi_{1M}^{d_1}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{M0}^{d_1}(j) & \pi_{M1}^{d_1}(j) & \ldots & \pi_{MM}^{d_1}(j) \end{pmatrix} \quad (17)$$

（4）最適アセットマネジメントモデルの定式化

いま，時点iで施設状態(m,j)を観測したと考える．将来の経済状態と劣化状態に不確実性が介在するため，プロジェクト価値を確定的に知ることはできない．しかし，マネジメント政策$d=(d_1,d_2)$の下で，劣化過程がマルコフ過程(12)，経済便益がマルコフ過程(17)に従って推移する場合，期待プロジェクト価値を計算することができる．いま，ある時点iまでプロジェクトが継続され，時点iにおいて，1）プロジェクトを継続するか否か，2）プロジェクトを継続する場合，どのような修繕を実施すべきか，を決定する問題を考えよう．

いま，着目している時点iの1期先の時点$i+1$を考えよう．時点$i+1$において施設状態(n,k)が観測され，時点$i+1$以降において最適マネジメント政策d^*を実施した時に獲得できる期待プロジェクト価値の最大値を$\Psi(n,k)$と表そう．ただし，$\Psi(n,k)$は時点$i+1$の当該期価値で表現されている．この時，時点iにおいてマネジメント政策$d\in D$を採用し，かつ時点$i+1$以降最適マネジメント政策を適用する場合を想定しよう．この時，時点iで施設状態が(m,j)の時に獲得できる期待プロジェクト価値$\Omega^d(m,j)$は

$$\Omega^d(m,j) = B^{d_1}(m,j) - c^d(m,j)$$

$$+\delta E^d_{m,j}[\Psi(n,k)]+\pi^{d_1}_{m0}(j)\Theta \tag{18}$$

と表される．ただし，δ $(0<\delta<1)$ は割引因子である．$c^d(m,j)$ はマネジメント政策 d の下で施設状態 (m,j) に対してアクション $s^d(m,j)$ を採用した場合の修繕費用を表す．いま，運営アクション $\xi^{d_1}(m,j)=0$ が採用される場合，施設運営が終了するため修繕費用 $c^d(m,j)=0$ が成立する．一方，運営アクション $\xi^{d_1}(m,j)=1$ が採用され，施設運営が継続される場合を考えよう．さらに，修繕アクション $\eta^{d_2}(m,j)$ が採用され，劣化状態が j から $\eta^{d_2}(m,j)=k$ に改善される場合には修繕費用 $c^d(m,j)=c_{jk}$ が必要となる．修繕費用には定常的な施設の補修・運営費用も含まれる．施設の劣化水準を j から k $(1\leq k\leq j)$ へ修復するための修繕費用を c_{jk} と表せば，$\eta^{d_2}(m,j)=k$ の時，$c^{d_2}(m,j)=c_{jk}$ が成立する．修繕を実施しない場合（$\eta^{d_2}(m,j)=j$ が成立する場合）には $c^{d_2}(m,j)=c_{jj}=c$ となる．c は定常的な補修・運営費用である．ただし，修繕費用は条件

$$c_{kk}\leq\cdots\leq c_{jk}\leq\cdots\leq c_{Kk} \tag{19}$$
$$(k\leq j\leq K; k=1,\cdots,K-1)$$

を満足すると仮定する．条件 (19) は修繕前の劣化水準が悪い方が，同一の劣化水準に回復するための費用が大きくなることを意味する．式 (18) における $E^d_{m,j}[\Psi(n,k)]$ は時点 i に施設状態が (m,j) の場合に，マネジメント政策 d の下でアクション $s^d(m,j)$ を適用することにより，時点 $i+1$ 以降において獲得できる（時点 $i+1$ の当該期価値で評価した）期待プロジェクト価値であり，

$$E^d_{m,j}[\Psi(n,k)]=\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\pi^{d_1}_{mn}(j)p^{d_2}_{jk}(m)\Psi(n,k)$$

と表される．推移確率 $p^{d_2}_{jk}(m)$，$\pi^{d_1}_{mn}(j)$ はマネジメント政策 $d=(d_1,d_2)$ の下でアクション $s^d(m,j)$ に対応して定義される推移確率であり，それぞれ式 (12),(17) で定義される推移確率行列 $\boldsymbol{P}^{d_2}(m)$，$\boldsymbol{\pi}^{d_1}(j)$ の第 (j,k)，(m,n) 要素に該当する．時点 i において獲得できる期待プロジェクト価値の最大値を再帰的に定義すれば，

$$\Psi(m,j)=\max_{s^d(m,j)\in S(m,j)}\Big\{B^{d_1}(m,j)-c^d(m,j)$$
$$+\delta E^d_{m,j}[\Psi(n,k)]+\pi^{d_1}_{m0}(j)\Theta\Big\} \tag{20}$$
$$(m=1,\cdots,M;\ j=1,\cdots,K)$$

を得る．ただし，式 (20) は各施設状態 (m,j) に対して定義される最大化問題であり，各施設状態 (m,j) ごとに最適アクション $s^d(m,j)$ を求める問題になっている．最適マネジメント政策 d^* は MK 個の再帰方程式 (20) を満足する最適アクション $s^{d^*}(m,j)$ を (m,j) 要素とするアクション行列 (4) として定義できる．以下，最適アセットマネジメントモデル (20) を基本モデルと呼ぶことにしよう．なお，最適マネジメント政策 d^* の下で達成される期待修繕費用 $\psi(m,j)$ と期待便益 $\phi(m,j)$ は

$$\psi(m,j)=c^{d^*}(m,j)+\delta E^{d^*}_{m,j}[\psi(n,k)] \tag{21a}$$
$$\phi(m,j)=B^{d_1^*}(m,j)+\delta E^{d^*}_{m,j}[\phi(n,k)]+\pi^{d_1^*}_{m0}\Theta \tag{21b}$$
$$(m=1,\cdots,M;\ j=1,\cdots,K)$$

と表せる．当然のことながら，期待プロジェクト価値と期待修繕費用，期待便益の間には

$$\Psi(m,j)=\phi(m,j)-\psi(m,j) \tag{22}$$

の関係が成立する．

（5）独立型アセットマネジメントモデル

経済寿命の不確実性を考慮したマネジメント政策の有効性を検討するために，施設の運営管理部門（以下，M部門と呼ぶ）と修繕部門（以下，R部門と呼ぶ）がそれぞれ独立に意思決定を実施するような独立型アセットマネジメントモデル（以下，独立型モデルと呼ぶ）を定式化しよう．すなわち，R部門は劣化状態 j と推移確率 $\boldsymbol{P}$ に関する情報のみを有しており，維持修繕に関わる期待ライフサイクル費用の最小化のみを達成する．R部門は各時点の劣化状態 j と各劣化状態におけるアクション内容をM部門に通知する．一方，M部門は期待プロジェクト価値を最大にするように施設の運営政策を決定する．ただし，M部門はR部門に経済状態に関する情報を通知しない．このような分権化方式の事例としてR部門を完全にアウトソーシングした場合が相当する．R部門が時点 i で劣化状態 j を観測した場合を考える．R部門は経済状態 m に関する情報を持たないため，R部門が取り得る修繕政策 f は劣化状態 j のみに依存する．R部門は経済状態 m に関する情報を知り得ないため，修繕政策 f のアクション内容 $\boldsymbol{\eta}^f$ は m に依存せず，アクション実施後の劣化水準 $\eta^f(j)$ を用いて

$$\boldsymbol{\eta}^f=\begin{pmatrix}\eta^f(1)\\ \vdots\\ \eta^f(K)\end{pmatrix} \tag{23}$$

と表される．この時，修繕政策 f による劣化状態の推移は m に依存しないため，推移確率行列 $\boldsymbol{Q}^f$ を

$$\boldsymbol{Q}^f=\begin{pmatrix}q^f_{11}&\cdots&q^f_{1K}\\ \vdots&\cdots&\vdots\\ q^f_{K1}&\cdots&q^f_{KK}\end{pmatrix} \tag{24}$$

と定義できる．修繕政策 f の下での劣化状態の推移確率行列 $\boldsymbol{P}^f$ は次式で定義される．

$$\boldsymbol{P}^f=\boldsymbol{Q}^f\boldsymbol{P} \tag{25}$$

まず，R部門の最適アセットマネジメント問題をとりあげる．時点 $i+1$ で劣化状態が k となり，それ以降最適修繕政策 f^* の下で達成できる期待ライフサイクル費用の最小値を $\tilde{\psi}(k)$ と表そう．さらに，劣化状態 j に対

応するアクション集合を$F(j)$と表そう．この時，時点iにおいて達成可能な期待ライフサイクル費用の最小値$\tilde{\psi}(j)$は

$$\tilde{\psi}(j)=\min_{\eta^f(j)\in F(j)}\left\{c^f(j)+\delta E_j^f[\tilde{\psi}(k)]\right\} \quad (26)$$

と表される．ただし，$c^f(j)$は修繕アクション$\eta^f(j)$を採用した場合の修繕費用である．$E_j^f[\tilde{\psi}(k)]$は

$$E_j^f[\tilde{\psi}(k)]=\sum_{k=1}^{K}p_{jk}^f\tilde{\psi}(k) \quad (27)$$

である．p_{jk}^fは推移確率(25)の(j,k)成分である．R部門の最適修繕政策をf^*，最適修繕アクションを$\eta^{f^*}(j)$と表そう．

M部門は期待プロジェクト価値の最大化を試みる．運営政策eはM部門が採用するアクションベクトル

$$\boldsymbol{\xi}^e=\begin{pmatrix}\xi^e(1,1) & \cdots & \xi^e(1,K)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi^e(M,1) & \cdots & \xi^e(M,K)\end{pmatrix} \quad (28)$$

を用いて定義される．ただし，アクション内容を表す関数$\xi^e(m,j)$は経済状態mが観測された時に施設の運営を継続する場合には$\xi^e(m,j)=1$，運営を終了する場合には$\xi^e(m,j)=0$という値をとる．この時，運営政策eを適用した場合，経済便益$B^e(m,j)$と，修繕費用$c^e(j)$と経済状態の推移確率$\pi_{mn}^e(j)$はそれぞれ

$$B^e(m,j)=\begin{cases}B(m) & \xi^e(m,j)=1\text{の時}\\ 0 & \xi^e(m,j)=0\text{の時}\end{cases} \quad (29)$$

$$c^e(m,j)=\begin{cases}c^{f^*}(j) & \xi^e(m,j)=1\text{の時}\\ 0 & \xi^e(m,j)=0\text{の時}\end{cases} \quad (30)$$

$$\pi_{mn}^e(j)=\begin{cases}\pi_{mn} & \xi^e(m,j)=1\text{の時}\\ 0 & \xi^e(m,j)=0\text{の時}\end{cases} \quad (31)$$

と表せる．３．(３) と同様に，施設の運営が終了した状態を表す状態変数$n=0$を新たに追加しよう．さらに，経済状態の推移確率$\pi_{m0}^e(j)$を

$$\pi_{m0}^e(j)=\begin{cases}0 & \xi^e(m,j)=1\text{の時}\\ 1 & \xi^e(m,j)=0\text{の時}\end{cases} \quad (32)$$

と定義しよう．この時，M部門の行動は時点iにおいて観測した施設状態(m,j)の下で獲得できる期待プロジェクト価値の最大化問題として，

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(m,j)=\max_{\xi^e(m,j)\in H}&\Big\{B^e(m,j)-c^e(m,j)\\ &+\delta E_{m,j}^e[\hat{\Psi}(n,k)]+\pi_{m0}^e(j)\Theta\Big\} \quad (33)\\ &(m=1,\cdots,M;j=1,\cdots,K)\end{aligned}$$

と表すことができる．ただし，HはM部門が採用できる運営政策の集合を表す．ここで，

$$E_{m,j}^e[\hat{\Psi}(n,k)]=\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\pi_{mn}^e(j)p_{jk}^{f^*}\hat{\Psi}(n,k)$$

である．式(33)は各施設状態(m,j)に対して定義される最大化問題であり，各施設状態(m,j)ごとに最適アクション$\xi^e(m,j)$を求める問題になっている．なお，施設状態(m,j)が観測された時に，最適マネジメント政策e^*,f^*の下で達成される期待修繕費用$\hat{\psi}(m,j)$と経済便益$\hat{\phi}(m,j)$は次式で表される．

$$\hat{\psi}(m,j)=c^{e^*}(m,j)+\delta E_{m,j}^{e^*}[\hat{\psi}(n,k)] \quad (34a)$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(m,j)=&B^{e^*}(m,j)+\delta E_{m,j}^{e^*}[\hat{\phi}(n,k)]\\ &+\pi_{m0}^{e^*}\Theta \quad (34b)\\ &(m=1,\cdots,M;\ j=1,\cdots,K)\end{aligned}$$

ここに，期待プロジェクト価値$\hat{\Psi}(m,j)$と期待修繕費用$\hat{\phi}(m,j)$，期待便益$\hat{\psi}(m,j)$の間には

$$\hat{\Psi}(m,j)=\hat{\phi}(m,j)-\hat{\psi}(m,j) \quad (35)$$

の関係が成立する．なお，式(26)で定義した期待ライフサイクル費用$\tilde{\psi}(j)$は施設運営が永久に持続するという前提の下に定義されたものである．それに対して，式(34a)で定義される期待修繕費用$\hat{\psi}(m,j)$は施設の転用リスクを考慮して定義された期待ライフサイクル費用を表している．

4．最適マネジメント政策

（１）最適マネジメント政策の構造

最適マネジメント政策の構造を分析するために，再帰方程式(20)を行列表記しよう．再帰方程式(20)はMK個の状態変数に対する最適値関数を定義している．MK個の最適値関数を状態変数$(1,1)\cdots,(1,K)$, $(2,1),\cdots,(2,K),\cdots,(m,j),\cdots,(M,K)$の順に列ベクトル表記する．この時，式(20)は次式で表せる．

$$\boldsymbol{\Psi}=\max_{d\in D}\left\{\boldsymbol{B}^{d_1}-\boldsymbol{c}^d+\delta\boldsymbol{\Pi}^d\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\pi}_0^{d_1}\Theta\right\} \quad (36)$$

ただし，記号$\max_{d\in D}$は，式(20)に示したように，各施設状態(m,j)に対応した最適アクション$s^{d^*}(m,j)$を選択する問題であることを意味している．また，$\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{c}^d$, $\boldsymbol{B}^{d_1}$, $\boldsymbol{\pi}_0^{d_1}$は列ベクトルであり

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{pmatrix}\Psi(1,1)\\ \vdots\\ \Psi(1,K)\\ \Psi(2,1)\\ \vdots\\ \Psi(M,K)\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{c}^d=\begin{pmatrix}c^d(1,1)\\ \vdots\\ c^d(1,K)\\ c^d(2,1)\\ \vdots\\ c^d(M,K)\end{pmatrix}$$

$$
\boldsymbol{B}^{d_1} = \begin{pmatrix} B^{d_1}(1,1) \\ \vdots \\ B^{d_1}(1,K) \\ B^{d_1}(2,1) \\ \vdots \\ B^{d_1}(M,K) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\pi}_0^{d_1} = \begin{pmatrix} \pi_{10}^{d_1}(1) \\ \vdots \\ \pi_{10}^{d_1}(K) \\ \pi_{20}^{d_1}(1) \\ \vdots \\ \pi_{M0}^{d_1}(K) \end{pmatrix}
$$

と定義される．さらに，推移行列$\boldsymbol{\Pi}^d$は

$$
\boldsymbol{\Pi}^d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Pi}_{11}^d & \cdots & \boldsymbol{\Pi}_{1M}^d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Pi}_{M1}^d & \cdots & \boldsymbol{\Pi}_{MM}^d \end{pmatrix}
$$

と表される．その(m,n)部分行列は

$$
\boldsymbol{\Pi}_{mn}^d = \begin{pmatrix} \Pi_{11}^d(m,n) & \cdots & \Pi_{1K}^d(m,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{K1}^d(m,n) & \cdots & \Pi_{KK}^d(m,n) \end{pmatrix}
$$

と定義できる．ただし，第(j,k)要素$\Pi_{jk}^d(m,n)$は

$$
\Pi_{jk}^d(m,n) = \pi_{mn}^{d_1}(j) p_{jk}^{d_2}(m)
$$

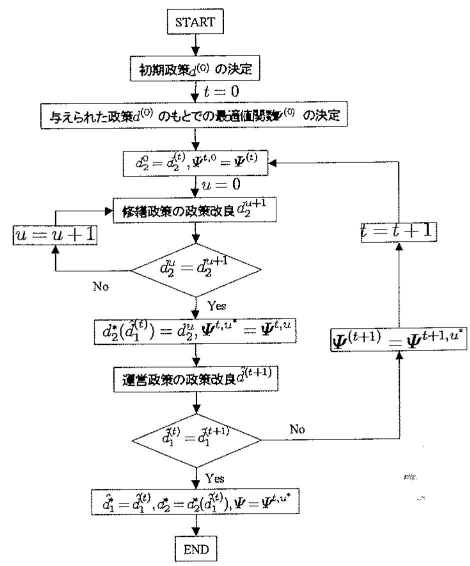
と表される．式(36)は吸収状態を持つ無限的視野のマルコフ決定モデルとなっている．さらに，マネジメント政策$d \in D$は有限であり，吸収状態を持つ無限的視野のマルコフ決定モデル(36)に最適定常政策が存在することが保証される．最適定常政策の存在に関しては，標準的なマルコフ決定モデルの場合と同様に証明できるため，その詳細は参考文献[15]に譲ることとする．本研究で提案した基本モデルは，施設状態が経済状態と劣化状態という２つの異なる状態変数の組み合わせで定義されている．さらに，運営政策により，施設の経済的寿命が内生的に決定される構造をしている．さらに，本研究では，経済的劣化過程と物理的劣化過程がそれぞれ独立なマルコフ過程に従う場合を想定している．

いま，政策d_1をある$\hat{d}_1$に固定しよう．その上で，条件付き最適修繕政策$d_2^*(\hat{d}_1) \in D_2$を求める問題

$$
\boldsymbol{\Psi}^{\hat{d}_1} = \max_{d_2 \in D_2} \Big\{ \boldsymbol{B}^{\hat{d}_1} - \boldsymbol{c}^{(\hat{d}_1,d_2)} + \delta \boldsymbol{\Pi}^{(\hat{d}_1,d_2)} \boldsymbol{\Psi}^{\hat{d}_1} + \boldsymbol{\pi}_0^{\hat{d}_1} \Theta \Big\} \tag{37}
$$

を考える．すなわち，問題(37)は運営政策$\hat{d}_1$を与件として，期待プロジェクト価値を最大にするような条件付き最適修繕政策を求める問題を表している．最適値関数値$\boldsymbol{\Psi}^{\hat{d}_1}$は運営政策$\hat{d}_1$の下で達成可能な期待プロジェクト価値の最大値（以下，条件付き最適値関数と呼ぶ）を表している．さらに，式(37)を最大にするような条件付き最適修繕政策$d_2^*(\hat{d}_1)$を用いて，期待プロジェクト価値を最大にする最適運営政策$\hat{d}_1 \in D_1$を求める問題

$$
\boldsymbol{\Psi} = \max_{\hat{d}_1 \in D_1} \Big\{ \boldsymbol{B}^{\hat{d}_1} - \boldsymbol{c}^{(\hat{d}_1,d_2^*(\hat{d}_1))} + \delta \boldsymbol{\Pi}^{(\hat{d}_1,d_2^*(\hat{d}_1))} \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\pi}_0^{\hat{d}_1} \Theta \Big\} \tag{38}
$$



図－２　最適マネジメント政策の計算手順

を定式化しよう．問題(38)の最適解を$\hat{d}_1^*$と表そう．この時，以下の**性質１**が成立する（証明は**付録**参照）．

性質１　問題(20)の最適解(d_1^*, d_2^*)と問題(38)の最適解$(\hat{d}_1^*, d_2^*(\hat{d}_1^*))$が一致する．

性質１は最適アセットマネジメント問題を運営政策$\hat{d}_1 \in D_1$を与件とした条件付き最適修繕政策$d_2^*(\hat{d}_1)$を求める問題(37)と最適運営政策を求める問題(38)という階層的問題として再構成できることを意味している．

（２）最適マネジメント政策の解法

基本モデル(20)は，標準的なマルコフ決定モデルであり，種々の解法（例えば，Howardの政策改良法）を適用することが可能である．また，状態変数が有限個であり，時刻に依存する変数が存在しないことから，最適政策は時間に関して定常的な政策になる[15]．しかし，本研究で提案した基本モデルは，施設状態が経済状態と劣化状態という２つの異なる状態変数の組み合わせで定義されており，それぞれの状態変数の数が増加するに従ってマネジメント政策の数が膨大になるという問題点がある．本研究では**性質１**を利用した最適マネジメント政策の解法を提案する．最適マネジメント政策の計算手順を**図－２**に示している．具体的な計算手順は以下のステップで構成される．

ステップ１）　$t = 0$とする．初期政策$d^{(0)} = (d_1^{(0)}, d_2^{(0)})$を与える．与えられた政策$d^{(0)}$のもとで最適値関数に関する連立方程式

$$
\boldsymbol{\Psi}^{(0)} = \boldsymbol{B}^{d_1^{(0)}} - \boldsymbol{c}^{d^{(0)}} + \delta \boldsymbol{\Pi}^{d^{(0)}} \boldsymbol{\Psi}^{(0)}
$$

$$+\boldsymbol{\pi}_0^{d_1^{(0)}}\Theta \tag{39}$$

を解き，その解を$\boldsymbol{\Psi}^{(0)}$とする．$t=0$と置く．

ステップ2） 運営政策$\hat{d}_1^{(t)}$を与件として，問題(37)の条件付き最適修繕政策$d_2^*(\hat{d}_1^{(t)})$をHowardの政策改良法を用いて求める．本ステップは以下のサブステップにより構成される．

a）初期修繕政策$d_2^0 = d_2^{(t)}$と初期最適値関数$\boldsymbol{\Psi}^{t,0}=\boldsymbol{\Psi}^{(t)}$を設定する．$u=0$とする．

b）各状態(m,j)に対して，

$$\boldsymbol{\Psi}^{t,u+1} = \max_{d_2^{u+1}\in D_2}\Big\{\boldsymbol{B}^{\hat{d}_1^{(t)}} - c^{(\hat{d}_1^{(t)},d_2^{u+1})} + \delta\boldsymbol{\Pi}^{(\hat{d}_1^{(t)},d_2^{u+1})}\boldsymbol{\Psi}^{t,u} + \boldsymbol{\pi}_0^{\hat{d}_1^{(t)}}\Theta\Big\} \tag{40}$$

が成立するような政策d_2^{u+1}を求める．

c）サブステップb）で求めた新しい政策d_2^{u+1}が政策d_2^uに一致する場合$d_2^*(\hat{d}_1^{(t)}) = d_2^u$, $\boldsymbol{\Psi}^{t,u^*}=\boldsymbol{\Psi}^{t,u}$として**ステップ3）**へ進む．そうでない時は$u=u+1$としてサブステップb）へ戻る．

ステップ3） $\hat{d}_1^{(t)}$，及び$d_2^*(\hat{d}_1^{(t)})$, $\boldsymbol{\Psi}^{t,u^*}$を与件として

$$\boldsymbol{\Psi}^{t+1,u^*} = \max_{\hat{d}_1\in D_1}\Big\{\boldsymbol{B}^{\hat{d}_1} - c^{(\hat{d}_1,d_2^*(\hat{d}_1^{(t)}))} + \delta\boldsymbol{\Pi}^{(\hat{d}_1,d_2^*(\hat{d}_1^{(t)}))}\boldsymbol{\Psi}^{t,u^*} + \boldsymbol{\pi}_0^{\hat{d}_1}\Theta\Big\} \tag{41}$$

が成立するような政策$\hat{d}_1^{(t+1)}$を求める

ステップ4） **ステップ3）**で求めた新しい政策$\hat{d}_1^{(t+1)}$が，政策$\hat{d}_1^{(t)}$と一致するとき$\hat{d}_1^* = \hat{d}_1^{(t)}$として計算を終了する．$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Psi}^{t,u^*}$とする．**ステップ3）**で求めた新しい政策$\hat{d}_1^{(t+1)}$が政策$\hat{d}_1^{(t)}$と一致しないときは，$\boldsymbol{\Psi}^{(t+1)}=\boldsymbol{\Psi}^{t,u^*}$, $d_2^{(t+1)}=d_2^*(\hat{d}_1^{(t)})$と設定する．$t=t+1$と更新し，**ステップ2）**に戻る．

以上の計算手順の中で，まずステップ3）の条件付き最適修繕政策を求める解法に着目しよう．ここで，ステップ3）の手順は条件付き最適修繕問題(37)に対してHawardの政策改良法により条件付き最適修繕政策を求める手順に他ならない．ここで，運営政策$\hat{d}_1^{(t)}$を与件とすれば，問題(37)は吸収状態を持つ標準的な定常マルコフ決定問題であり，Howardの政策改良法により最適政策を求めることができる．Howardの政策改良法の収束性に関する証明はすでに多くの文献で報告されており，その詳細は参考文献[15]に譲る．一方，問題(38)も，$c^{(\hat{d}_1^{(t)},d_2^*(\hat{d}_1^{(t)}))}$，$\boldsymbol{\Pi}^{(\hat{d}_1^{(t)},d_2^*(\hat{d}_1^{(t)}))}$を運営政策$\hat{d}_1^{(t)}$に依存するパラメーター行列と考えれば，標準的な吸収状態を持つ定常マルコフ決定問題であり，Howardの政策改良法により最適マネジメント政策$(\hat{d}_1^*, d_2^*(\hat{d}_1^*))$を求めることができる．**性質1**より，上記の解法により求めた最適政策$(\hat{d}_1^*, d_2^*(\hat{d}_1^*))$は最適アセットマネジメント問題(20)の最適政策$(d_1^*, d_2^*)$と一致することが保証される．

（3）最適マネジメント政策の特性

最適アセットマネジメント問題の定数パラメータが条件(5),(9),(14),(19)を満足する場合を考えよう．ここで，問題(38)の運営政策$d_1\in\tilde{D}_1$に対して以下に示す単調性条件を定義しよう．

（単調性条件） 運営政策$d_1\in\tilde{D}_1$に対して，

$$\left.\begin{array}{ll} \xi^{d_1}(m,j)=1 & m>m^{d_1}(j)\text{の場合} \\ \xi^{d_1}(m,j)=0 & m\le m^{d_1}(j)\text{の場合}\end{array}\right\} \tag{42}$$
$$(m=1,\cdots,M; j=1,\cdots,K)$$

が成立する．ただし，$\tilde{D}_1$は単調性条件(42)を満足する運営政策$d_1\in D_1$の集合である．

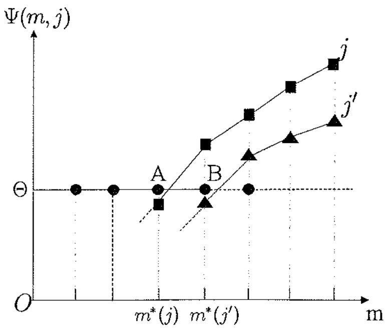
条件(5),(9),(14),(19)は最適政策$d_1^*\in D_1$が単調性条件を満足するための十分条件である（証明は**付録**参照）．すなわち，以下の**命題1**が成立する．

命題1 最適アセットマネジメント問題において条件(5),(9),(14),(19)が成立する時，最適マネジメント政策d^*において，任意のjに対して臨界的水準$m^{d_1^*}(j)$ $(j=1,\cdots,K)$が存在し，$\forall\ m > m^{d_1^*}(j)$に対して$\xi^{d^*}(m,j)=1$が，$\forall\ m\le m^{d_1^*}(j)$に対して$\xi^{d^*}(m,j)=0$が成立する．

命題1の意味を具体的に示すために，**2.（3）**で示した**図－1**を再び参照しよう．劣化状態j'が観測された場合（線分$\alpha-\alpha'$）を考えよう．**命題1**は，経済状態mが臨界水準$m^{d_1^*}(j')$（点A）より，左側（$m\le m^{d_1^*}(j')$）に位置する場合には施設運営は終了することが最適アクションとなるという単調性条件を満足することを意味している．なお，臨界水準$m^{d_1^*}(j')$は劣化状態j'に依存して変化する．さらに，問題(38)の最適値関数$\boldsymbol{\Psi}$は**性質2**に示すような単調性を持つことが保証される（証明は**付録**参照）．

性質2 問題(38)の最適値関数$\Psi(m,j)$は任意の(m,j)に対して$\Psi(m,j)\ge\Theta$が成立し，かつjに対して非増加，mに 対して非減少である．

性質2の意味を**図－3**に示そう．図はある$j,j'(j<j')$に着目し，異なるmに対して最適値関数$\Psi(m,j)$を表示した結果である．mが臨界的水準$m^{d_1^*}(j)$より大きくなれば，最適値関数はmの増加により単調に増加する．逆に，mが臨界的水準以下になれば，最適値関数はΘに一致する．また，劣化状態が進展するほど（jの値が大きくなるほど），最適値関数Ψの値が小さくなり，施設の運営が終了する経済便益を表す臨界的水準は大きくなる．ここで，最適値関数$\Psi(m,j)$は期待プロジェクト



図中の点A，Bはそれぞれ劣化状態がj，j'の時の臨界的水準を表す．記号●は$\Psi(m,j)=\Theta$が成立する点を表す．記号■，▲の点ではそれぞれ$\Psi(m,j)=B(m)-c^{d^*}(m,j)+\delta\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\Pi_{jk}^{d^*}(m,n)\Psi(n,k)$，$\Psi(m,j')=B(m)-c^{d^*}(m,j')+\delta\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\Pi_{j'k}^{d^*}(m,n)\Psi(n,k)$が成立する．

図－3　最適値関数の単調性

価値を表していることに留意しよう．さらに，独立型モデルにおける最適値関数$\hat{\Psi}(m,j)$（式(36)参照）は，修繕政策としてf^*を採用することを前提として導出される．一方，基本モデルは運営政策と修繕政策の双方を同時に制御することが可能となる．したがって，任意の施設状態(m,j)に対して，$\Psi(m,j)\geq\hat{\Psi}(m,j)$が成立する．ここに，**命題2**が成立する．

命題2　基本モデルの下で獲得できる期待プロジェクト価値が，独立型モデルで獲得できる期待プロジェクト価値より小さくなることはない．

マネジメント政策において運営政策と修繕政策を同時に考慮することにより獲得できる経済価値$V(m,j)$を

$$V(m,j)=\Psi(m,j)-\hat{\Psi}(m,j) \tag{43}$$

と定義しよう．**命題2**より，$V(m,j)\geq 0$が成立することが保証される．なお，最適マネジメント政策は期待プロジェクト価値を最大にするように求めており，その結果として実現する期待修繕費用(21a)と(34a)，期待便益(21b)と(34b)の間の大小関係を一意的に決定することはできない．

各jに対して単調性条件(42)が成立することに留意すれば，最適値関数$\Psi(m,j)$は

$$\Psi(m,j)=\max\Big\{B(m)-c^{d^*}(m,j)+\delta\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\pi_{mn}(j)p_{jk}^{d_2^*}(m)\Psi(n,k),\ \Theta\Big\} \tag{44}$$

と表せる．ここで，$\Psi(m,j)\geq\Theta>0$であることに着目しよう．したがって，施設の経済便益の臨界的水準$m^{d_1^*}(j)$ $(j=1,\cdots,K)$に対して

$$\begin{aligned}&B(m^{d_1^*}(j))-c^{d^*}(m^{d_1^*}(j),j)-\Theta\\&\leq-\delta\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\pi_{m^{d_1^*}(j)n}(j)p_{jk}^{d_2^*}(m^{d_1^*}(j))\Psi(n,k)\\&<0\end{aligned} \tag{45}$$

が成立する．式(45)の第2行目は施設運営を終了することにより将来損失する期待逸失便益の最大値を表す．すなわち，プロジェクトの運営を終了する最適タイミングはプロジェクトを継続することによる当該期に生じる機会損失が施設運営を終了することにより生じる期待逸失便益の最大値を上回る時点であることが理解できる．同様の議論が独立型モデルにおいても成立する．ここに，以下の**命題3**を得る．

命題3　プロジェクトを継続することによる当該期に生じる機会損失が施設運営を終了することにより生じる将来の期待逸失便益の**最大値**をはじめて上回る時点がプロジェクトの最適終了タイミングである．

最適マネジメント政策$d^*\in D$において施設転用が実施される施設状態の集合を$\Lambda^{d_1^*}=\{(m,j)|\xi^{d_1^*}(m,j)=0\}$，独立型マネジメント政策における施設転用集合を$\hat{\Lambda}^{e^*}=\{(m,j)|\xi^{e^*}(m,j)=0\}$と定義しよう．この時，**命題2**と**命題3**より直ちに**性質3**が成立する．

性質3　最適マネジメント政策と独立型マネジメント政策において$\Lambda^{d_1^*}\subset\hat{\Lambda}^{e^*}$が成立する．

性質3はある施設状態(m,j)において最適マネジメント政策における運営アクション$\xi^{d_1^*}(m,j)$が転用政策となる時には，独立型マネジメント政策における運営アクション$\xi^{e^*}(m,j)$も必ず転用政策となることを意味する．逆は必ずしも成立しない．すなわち，独立型マネジメント政策を採用した時の方が，施設が転用される施設状態(m,j)の範囲が大きい．しかし，のちに**5**．で明らかにするように，最適マネジメント政策を採用した場合，近い将来に施設が転用される可能性が大きい施設状態において，施設の修繕を留保したり軽微なものに留めるような政策が採用される．したがって，最適マネジメント政策を採用した場合において施設運営が継続される期間が，独立マネジメント政策を採用した場合よりも必ずしも長くなるわけではない．それぞれの政策を採用した場合における施設運営の期間長に関して一般的な結論を導くことはできない．

（4）リアルオプション価値[16)]

基本モデル，独立型モデルは，いずれも施設転用のタイミングを内生的に決定している．すなわち，**命題2**に示すように，施設の最適転用時点として，プロジェクトを継続することによる機会損失が施設運営を終了

することにより生じる将来の期待逸失便益の**最大値**をはじめて上回る時点が選択される．期待プロジェクト価値$\Psi(m,j)$には，施設転用というオプションを考慮しながら，対象とする施設のアセットマネジメントを実施することの経済価値（以下，施設転用オプション価値と呼ぶ）が含まれる．いま，仮に運営主体が，施設の転用を行うことができない場合を考えよう．このとき，施設の運営により獲得できる期待純価値は，

$$\Psi'(m,j) = \Big\{B(m) - c^{f^*}(j) + \delta\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\pi_{mn}p_{jk}^{f^*}\Psi'(n,k)\Big\} = \phi'(m) - \tilde{\psi}(j) \quad (46)$$

を満足する$\Psi'(m,j)$として定義できる．ただし，

$$\phi'(m) = B(m) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{M}(\delta)^i\pi_{mn}^{(i)}B(n) \quad (47)$$

$$\pi_{mn}^{(i)} = \sum_{k=1}^{M}\pi_{mk}^{(i-1)}\pi_{kn} \quad (i = 2,3,\cdots)$$

である．ここに，$\phi'(m)$は，現時点の経済状態mのもとで，永久に施設を運営することによって獲得できる総便益の現在価値を表す．一方，$\tilde{\psi}(j)$は，独立型モデルにおける期待ライフサイクル費用である．

独立型モデルで求めた最適運営政策$\xi^{e^*}(m,j)$に基づいて，運営継続集合$\mathcal{C}^{e^*} = \{(m,j)|\xi^{e^*}(m,j)=1\}$，ならびに転用集合$\mathcal{D}^{e^*} = \{(m,j)|\xi^{e^*}(m,j)=0\}$を定義する．時点$i$において，独立型モデルによる最適マネジメント政策$e^*, f^*$の下で，運営継続集合内の施設状態$(m,j) \in \mathcal{C}^{e^*}$から出発した2次元のマルコフ連鎖$\{l,h\}$が時点$i+(s-1)$まで運営継続集合内の状態を推移した後，時点$i+s$において施設状態$(n,k)$を訪れる確率を$\lambda_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s)$で定義する．このとき，$\lambda_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s)$は，

$$\lambda_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s) = \mathrm{Prob}\Big[(l_{i+s},h_{i+s}) = (n,k), (l_{i+t},h_{i+t}) \in \mathcal{C}^e, 0<t<s|(l_i,h_i) = (m,j)\Big] \quad (48)$$

と表される．さらに，

$$\tilde{\lambda}_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s) = \begin{cases} 0 & (n,k) \in \mathcal{C}^{e^*}\text{の時} \\ \lambda_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s) & (n,k) \in \mathcal{D}^{e^*}\text{の時} \end{cases} \quad (49)$$

と表わせば，式(34a),(34b)を，それぞれ次のように書き換えることができる．

$$\hat{\psi}(m,j) = \tilde{\psi}(j) - \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\delta^s\tilde{\psi}(k)\tilde{\lambda}_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s) \quad (50a)$$

$$\hat{\phi}(m,j) = \phi'(m) + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\delta^s\{\Theta - \phi'(m)\}\tilde{\lambda}_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s) \quad (50b)$$

ここで，独立型モデルにおいて将来時点の施設転用オプションを考慮することによる経済価値は，

$$\hat{\Delta}(m,j) = \hat{\Psi}(m,j) - \Psi'(m,j) = \Big\{\hat{\phi}(m,j) - \phi'(m)\Big\} - \Big\{\hat{\psi}(m,j) - \tilde{\psi}(j)\Big\} = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{M}\sum_{k=1}^{K}\delta^s\Big\{\Theta + \tilde{\psi}(k) - \phi'(m)\Big\}\tilde{\lambda}_{mj,nk}^{e^*,f^*}(s) \quad (51)$$

と表され，施設転用オプションを行使することによって獲得される転用便益と運営を中止することによる期待ライフサイクル費用の軽減分から転用による生じる当該時点以降の期待逸失便益を差し引いた値の現在価値である．また，基本モデルにおいて将来時点の施設転用オプションを考慮することによる経済価値は，式(43),(51)より次式で表せる．

$$\Delta(m,j) = \Psi(m,j) - \Psi'(m,j) = \hat{\Delta}(m,j) + V(m,j) \quad (52)$$

表－1　物理的劣化状態jの内容

物理的劣化状態	状態の定義
1	健全に機能しているもの
2	劣化の兆候が見られるもの
3	劣化は認められるが，早々の破損への進行はないもの
4	劣化が著しく，近い将来に破損への進行が予測されるもの
5	破損しており，施設の機能上重大な支障となる．早急に修繕する必要があるもの．

5．適用事例

（1）適用事例の概要

本研究で提案した基本モデルを港湾施設を対象としたアセットマネジメントに適用しよう．適用事例としてA港をとりあげる．A港の運営主体は現在4つの船社と賃貸契約を結び，賃料収入によりコンテナバースを運営している．ここで，簡単のために各船社からの賃料収入は同一であると仮定し，港湾施設の経済状態m $(m = 1,\cdots,5)$を(賃貸契約を締結している船社数+1)で表そう．一般に，港湾施設では，土木施設，建築物，クレーンなどの機械施設，電気関連の施設がアセットマネジメントの対象となるが，本事例では，特に修繕補修費が大きい土木施設(舗装)のみを対象とする．港湾土木施設の物理的劣化を施設の状態に応じて，**表－1**に示すような5つの劣化状態$j = 1,\cdots,5$で表現する．1つの船社によるコンテナバースの平均年間使用料を6億円とし，M部門の経済便益（単位：億円）を

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} B(1) \\ B(2) \\ B(3) \\ B(4) \\ B(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

と表す．既往実績に基づいて修繕費用（単位：億円）を

$$c = [c_{jk}] = \begin{pmatrix} 3 & - & - & - \\ 18 & 3 & - & - \\ 27 & 18 & 3 & - \\ 36 & 27 & 18 & 3 \\ 45 & 36 & 27 & 18 \end{pmatrix}$$

と想定する．残念ながら，当該港湾におけるコンテナバースの便益過程，土木施設の劣化過程に関するデータの整備状態は十分ではなく，推移確率行列$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{\pi}$は，それぞれ式(9),(14)を満足することを条件に，以下のように仮想的に決定した．

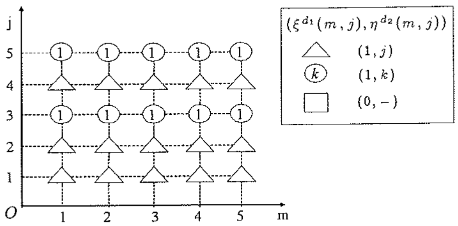
$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.05 & 0.03 & 0.02 \\ 0.0 & 0.7 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

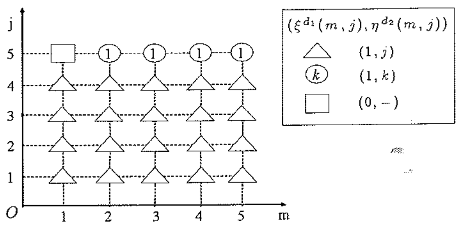
ただし，$\boldsymbol{P}$に関しては，港湾施設の維持修繕担当者に対するヒアリングの結果(舗装の耐用年数8〜10年)を反映している．コンテナ船の大型化，船運業界の再編，そして国内外の港湾間の競合といった社会環境の変化によって，当該コンテナバースにおいても，将来の船主との賃貸契約数の減少するリスクが想定される．経済状態の推移確率行列$\boldsymbol{\pi}$は経済状態が長期的に減少するトレンドを有している．劣化状態の推移確率行列$\boldsymbol{P}$は劣化状態が進展するほど劣化速度が増加するように設定されている．割引因子は$\delta = 0.96$とする．現在のところ，港湾用地の再開発計画が確定しておらず，転用便益Θを一意的に決定することは不可能である．したがって，本事例では，転用便益Θを外生的パラメータと位置づけ，転用便益の値と最適マネジメント政策の関係を分析することとした．

（2）分析結果

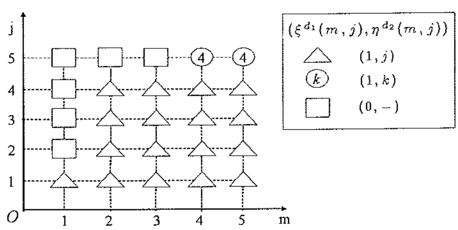
転用便益を$\Theta = 0$, $\Theta = 60$, $\Theta = 120$（億円）に設定した3ケースを想定し，基本モデルを用いて港湾施設の最適マネジメント政策を求めた．その結果を図－4〜6に示す．図中の記号□は施設運営の終了を表す．記号○は修繕を実施する政策を，記号△は修繕を実施しない政策を表している．記号○の中の数字は，修繕の実施によって回復した後の劣化状態を示している．また，図中の縦軸jは施設の劣化状態を，横軸mは経済状態を示している．以上の3つのケースを比較すれば，転用



図－4　最適マネジメント政策d^* ($\Theta = 0$)



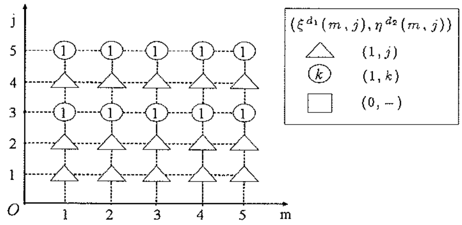
図－5　最適マネジメント政策d^* ($\Theta = 60$)



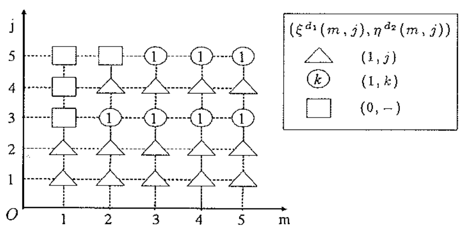
図－6　最適マネジメント政策d^* ($\Theta = 120$)

便益Θの値が大きくなるにつれ，記号□がついている施設状態(m, j)の範囲が大きくなり，施設転用の可能性が増加することが理解できる．$\Theta = 0$のケース（図－4）では，劣化がそれほど進行していない状態$j = 3$において予防的な修繕を実施するとともに，劣化が進行した状態$j = 5$において事後的な修繕を実施するような修繕政策が求まっている．一方，$\Theta = 60$（図－5）および$\Theta = 120$（図－6）の場合では，施設運営を終了する施設状態（記号□で表される）や修繕を実施しない施設状態（記号△で表される）の範囲が増加している．図－5においては，予防的な修繕を実施せず，劣化状態が進展した場合にのみ事後的な修繕を実施するというマネジメント政策が選択される．また，転用便益が大きい場合（図－6），積極的な修繕は実施せず，施設の経済状態が悪化した段階で施設を転用するという政策が選ばれる．

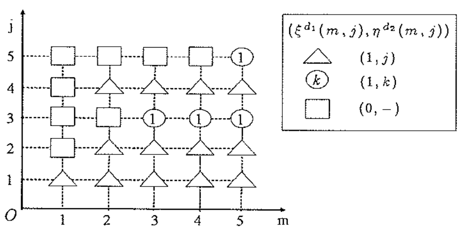
独立型モデルを用いて求めた政策を図－7〜9に示している．図－7に示すように，転用の便益が小さい場合（$\Theta = 0$の場合），基本モデルによる最適政策（図－



図－７　独立型マネジメント政策 (e^*, f^*) $(\Theta = 0)$



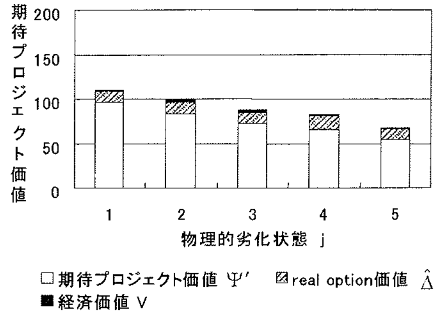
図－８　独立型マネジメント政策 (e^*, f^*) $(\Theta = 60)$



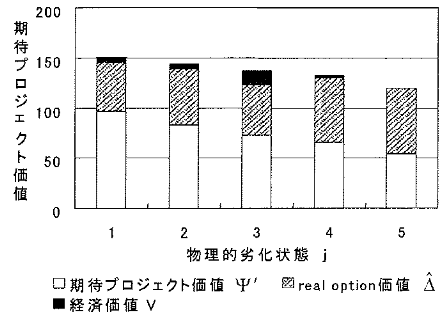
図－９　独立型マネジメント政策 (e^*, f^*) $(\Theta = 120)$

４）と独立型モデルによる政策が一致する．転用便益が大きい場合（図－８，図－９）には，基本モデルの場合よりも，施設が転用される施設状態の範囲が大きくなる．すなわち，独立型モデルでは，Ｒ部門による施設修繕が転用便益や経済状態とは無関係に実施されるため，常に積極的に修繕が実施される結果，期待修繕費用が大きくなる．そのため，港湾施設の収益性がより低下し，基本モデルを適用した場合よりも施設転用が実施される施設状態の範囲が大きくなる．以上より，独立型モデルの方が施設転用がより早い時点で実施されることが予想される．しかし，基本モデルを用いた場合，施設状態によっては施設修繕の先送りのため劣化が進展し，結果的に施設の転用時期が独立型モデルの場合よりも早くなる場合が生じうる．

図－１０と図－１１は，転用便益が$\Theta = 60$と$\Theta = 120$のケースにおいて経済状態を$m = 3$に固定し，施設の劣化状態と期待プロジェクト価値の関係を示したものである．同図の白色の棒グラフは，施設の転用を永久に維持する場合における期待プロジェクト価値$\Psi'(m,j)$

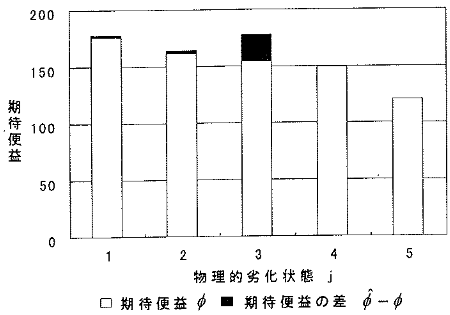


図－１０ 期待プロジェクト価値 $(\Theta = 60, m = 3)$

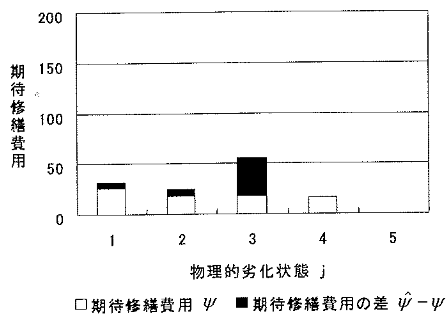


図－１１ 期待プロジェクト価値 $(\Theta = 120, m = 3)$

を表している．基本モデルで求めた期待プロジェクト価値は，施設の転用を運営政策の１つに考慮に入れているため，期待プロジェクト価値$\Psi'(m,j)$に施設転用に伴う施設転用オプション価値が付加されることになる．同図における，斜線部分は独立型モデルで求めた施設転用オプション価値$\hat{\Delta}$を表している．さらに，黒色の部分は経済価値$V(m,j)$を表している．独立型モデルによる期待プロジェクト価値$\hat{\Psi}(m,j)$は白色と斜線が施されている棒グラフで表される．また，基本モデルの期待プロジェクト価値は棒グラフ全体で表される．これらの図より，劣化状態jが進展すれば期待プロジェクト価値は減少することが理解できる．また，転用便益Θが大きくなるほど，経済価値$V(m,j)$が大きくなる．図－１２は転用便益$\Theta = 120$，経済状態$m = 3$の場合の劣化状態と期待便益の関係を示している．同図の白い棒グラフは基本モデルにおける期待便益$\phi(m,j)$を，白色と黒色の部分の総和が独立型モデルにおける期待便益$\hat{\phi}(m,j)$を表す．図－１３は同じケースを対象として劣化水準と期待修繕費用$\hat{\psi}(m,j)$の関係を示している．同図の白い棒グラフは基本モデルの期待修繕費用$\psi(m,j)$を，白色と黒色の部分の総和が独立型モデルによる期待修繕費用$\hat{\psi}(m,j)$を表す．いま，劣化状態$j = 3$の時に注目しよう．基本モデルによる最適政策は，図－５より$(\xi^{d^*}(3,3), \eta^{d^*}(3,3)) = (1,3)$である．独立型モデルでは図－７より$(\xi^{e^*}(3,3), \eta^{f^*}(3,3)) = (1,1)$となり，



図－１２　期待便益 $(\Theta = 120, m = 3)$



図－１３　期待修繕費用 $(\Theta = 120, m = 3)$

積極的な修繕が実施される．その結果，施設状態 $(3,3)$ の場合，基本モデルを適用した場合の方が，港湾施設の期待転用時期が早くなり，独立型モデルを用いた場合の方が期待便益は大きくなる．しかし，同時に期待修繕費用も大きくなるため，結果的に基本モデルの方が期待プロジェクト価値が大きくなる．

（３）実用化への示唆

以上の適用事例を通じて，施設の転用便益が大きい場合には，基本モデルで求めた最適マネジメント政策と独立型モデルにより求めたマネジメント政策の乖離が大きくなることが明らかとなった．施設の転用リスクが存在せず半永久的に施設が利用される場合や，施設の転用便益が低く（あるいは，現施設の便益が非常に大きく）転用リスクが小さいと判断される場合には，施設修繕に要する期待ライフサイクル費用のみに着目した修繕政策が有効である．この場合，施設の予防的修繕が望ましい結果を与えることになる．しかし，対象とする施設の社会的なニーズが低下し施設が陳腐化するリスクが高い時や，近い将来に施設の拡張・増設等の機能的更新が行われる可能性がある場合には，期待ライフサイクル費用のみに基づいたアセットマネジメントでは非効率な資源配分が生じる危険性がある．この場合には，施設修繕を先送りし，経済状態の変化を見極める方が得策な場合が起こりうる．その結果，物理的劣化により施設使用が不可能となり，施設転用が余儀なくされることも，最適マネジメン政策として起こりうる．なお，港湾施設に限らず，施設の経済状態と劣化状態の双方を同時に考慮したようなアセットマネジメントが必要な施設は数多く存在する．その場合にも，本研究で提案した基本モデルを適用することが可能である．しかし，施設によっては，施設の転用が経済状態に依存するのではなく，規定計画に従って実施される場合もあろう．本研究で提案した基本モデルは無限的視野を持つマルコフ決定過程を用いている．施設の終了期間があらかじめ決定されているようなアセットマネジメント問題に対しては，有限期間を対象としたマルコフ決定過程を用いた最適アセットマネジメントモデルを作成することが必要となる．

６．おわりに

本研究では社会基盤施設の経済的劣化と物理的劣化の双方を同時に考慮した最適アセットマネジメントモデルを定式化した．本研究で提案したモデルにより，最適マネジメント政策が施設の経済便益と劣化状態の双方に依存して，施設運営の継続の有無，あるいは修繕の内容を決定する状態依存的ルールとして決定できる．さらに，施設の最適運営政策が単調性条件を満足することを示すとともに，施設運営の機会費用の最大値が，施設を終了することにより発生する逸失便益の最大値をはじめて上回る時点が最適終了タイミングとなることを理論的に明らかにした．さらに，本研究で提案したモデルを港湾施設のアセットマネジメント問題に適用し，モデルの有効性を実証的に検証した．また，R部門をアウトソーシングしたような独立型モデルを定式化し，施設の運営政策と修繕政策を同時に考慮することの経済効果を分析した．その結果，施設の転用リスクが大きい場合には，M部門とR分門の分離は効率性に著しい影響を及ぼすことが判明した．

本研究で提案した最適アセットマネジメントモデルの実務的な利用にあたっては，今後に残されたいくつかの課題が存在する．第１に，推移確率行列の推定方法の確立である．施設の劣化過程の推定には，ヒストリカル・データを用いた統計分析に関する既存の研究蓄積[17)]を利用可能である．一方，経済状態の推移過程の推定では，GDPなどのマクロ経済データとの相関関係を考慮したようなモデルを構築する必要がある．その上で，モデル内の各パラメータについて感度分析を実施することは極めて有効であろう．また，本研究では，施設の劣化状態と経済状態が互いに独立な推移過程に従うと仮定した．施設需要の多寡が劣化過程に影響を及ぼす場合，施設需要と劣化水準の組を用いてモ

デルの状態変数を定義することにより対応可能である．しかし，推移確率行列の次元が極めて大きくなるため，効率的な解法を開発することが必要となる．第2に，本研究では土地の転用便益Θを時間を通じて一定と仮定していた．しかし，現実には，施設の転用便益にも不確実性が存在する．拡張モデルの定式化は容易であるが，状態変数の次元が極めて大きくなるため，やはり効率的な解法を開発することが必要となる．ただし，施設の転用便益を計測する問題は，施設のアセットマネジメントのレベルで検討すべき問題ではなく，より上位の計画問題の中で議論すべき課題である．第3に，港湾施設のような複合施設のアセットマネジメントでは，単独施設のマネジメント政策だけでなく，施設全体を考慮した運営・修繕政策を検討することが重要となる．この問題に対処するためには，施設間の相互性を考慮した最適アセットマネジメントモデルを開発することが必要となる．

付録　性質・命題の証明

(性質1の証明)　問題(20)の最適マネジメント政策を $d^* = (d_1^*, d_2^*)$ と表そう．一方，問題(38)の最適解を $(\hat{d}_1^*, d_2^*(\hat{d}_1^*))$ と表そう．問題(38)の運営政策 $\hat{d}_1$ を問題(20)の最適解 d_1^* に固定し，問題(37)を解いた最適解を $d_2^*(d_1^*)$ と表そう．d_2^* と $d_2^*(d_1^*)$ はともに有限集合 D_2 の要素である．いま，問題(37)の条件付き最適解 $d_2^*(d_1^*)$ に対して $d_2^*(d_1^*) \neq d_2^*$ が成立すると仮定しよう．この場合，(d_1^*, d_2^*) が最適マネジメント政策であることに矛盾する．したがって，$(d_1^*, d_2^*) = (\hat{d}_1^*, d_2^*(\hat{d}_1^*))$ が成立する．

(命題1の証明)　4．(2) で示した解法に即して証明する．初期政策は任意であるため，一般性を損なうことなく初期運営政策 $d_1^{(0)}$ として $\xi^{d_1^{(0)}}(m,j) = 1$，初期修繕政策 $d_2^{(0)}$ として $\eta^{d_2^{(0)}}(m,j) = j\ (j = 1,\cdots,K-1)$，$\eta^{d_2^{(0)}}(m,K) = K-1$ を仮定しよう．さらに，$b^{d_1^{(t)}}(m,j) = B^{d_1^{(t)}}(m,j) + \pi_{m0}^{d_1^{(t)}}(j)\Theta$ を定義しよう．運営政策 $d_1^{(0)}$ に対して $b^{d_1^{(0)}}(m,j) = B(m)$ となる．(39)より初期最適値関数は $\boldsymbol{\Psi}^{(0)} = (\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{\Pi}^{d^{(0)}})^{-1}(\boldsymbol{b}^{d_1^{(0)}} - \boldsymbol{c}^{d^{(0)}}) = \sum_{t=0}^{\infty}(\delta\boldsymbol{\Pi}^{d^{(0)}})^t(\boldsymbol{b}^{d_1^{(0)}} - \boldsymbol{c}^{d^{(0)}})$ と表すことができる．ただし，$\boldsymbol{b}^{\hat{d}_1^{(0)}}, \boldsymbol{c}^{d^{(0)}}$ はそれぞれ $b^{d_1^{(t)}}(m,j), c^{d^{(0)}}(m,j)$ を列ベクトル表示したものである．この時，$b^{d_1^{(t)}}(m,j) - c^{d^{(0)}}(m,j) = B(m) - c_{jj}(m = 1,2,\cdots,M, j = 1,2,\cdots,K-1)$, $b^{d_1^{(t)}}(m,K) - c^{d^{(0)}}(m,K) = B(m) - c_{KK-1}(m = 1,2,\cdots,M)$ であり，m を一定に固定したとき(19)より，j に関して非増加である，また，逆に j を一定に固定したとき m に関して(5)より非減少であることがいえる．また(9)，(14)より $\boldsymbol{\Pi}^{d^{(0)}}$ も m に関して非減少，j に関して非増加である．したがって，$\Psi^{(0)}(m,j)$ は m に関して非減少，j に関して非増加となる．ここで，問題(40)に着目しよう．運営政策を初期運営政策 $\hat{d}_1^{(0)}$ に固定しよう．初期運営政策 $\hat{d}_1^{(0)}$ の下での問題(40)は

$$\boldsymbol{\Psi}^{0,1} = \max_{d_2 \in D_2}\{\boldsymbol{b}^{\hat{d}_1^{(0)}} - \boldsymbol{c}^{(\hat{d}_1^{(0)}, d_2)} + \delta\boldsymbol{\Pi}^{(\hat{d}_1^{(0)}, d_2)}\boldsymbol{\Psi}^{0,0}\}$$

と表せる．問題 (m,j) を具体的に記述すれば，

$$\Psi^{0,1}(m,j) = \max\left\{\begin{array}{c} b^{\hat{d}_1^{(0)}}(m,j) + \delta E_{m,1}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{j1}, \\ \vdots \\ b^{\hat{d}_1^{(0)}}(m,j) + \delta E_{m,j}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{jj} \end{array}\right\} \quad (53)$$

$$E_{m,r}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] = \sum_{n=1}^{M}\sum_{k=r}^{K}\pi_{mn}^{d_1^{(0)}}(j)p_{rk}(m)\Psi^{0,0}(n,k)$$

である．ただし，$\pi_{mn}^{d_1^{(0)}}(j)$ は運営政策 $d_1^{(0)}$ に対して定義される推移行列 $\boldsymbol{\pi}^{d_1^{(0)}}(j)$ の第 (m,n) 要素である．条件(9)と $\Psi^{0,0}(n,k)$ が k に関して非増加であることより，$E_{m,r}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}]$ も r に関して単調非増加である．問題 $(m, j+1)$ も同様に記述できる．条件(19)より，

$$\delta E_{m,1}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{j1} \geq \delta E_{m,1}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{j+11}$$

$$\vdots$$

$$\delta E_{m,j}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{jj} \geq \delta E_{m,j}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{j+1j}$$

$$\delta E_{m,j}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{jj} \geq \delta E_{m,j+1}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] - c_{j+1j+1}$$

が成立する．すなわち，$\Psi^{0,1}(m,j)$ を定義する最大化問題(53)を構成する各要素は $\Psi^{0,1}(m,j+1)$ の最大化問題の各要素より必ず同等，それ以上の値を示している．よって，$\Psi^{0,1}(m,j) \geq \Psi^{0,1}(m,j+1)$ が成立する．すなわち，$\Psi^{0,1}(m,j)$ は j に関して非増加．つぎに，j を固定し，$\Psi^{0,1}(m,j)$ と $\Psi^{0,1}(m+1,j)$ を定義する問題(53)を比較しよう．条件(5),(14)が成立するとき

$$b^{\hat{d}_1^{(0)}}(m,j) + \delta E_{m,1}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] \leq b^{\hat{d}_1^{(0)}}(m+1,j) + \delta E_{m+1,1}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}]$$

$$\vdots$$

$$b^{\hat{d}_1^{(0)}}(m,j) + \delta E_{m,j}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}] \leq b^{\hat{d}_1^{(0)}}(m+1,j) + \delta E_{m+1,j}^{d_1^{(0)}}[\boldsymbol{\Psi}^{0,0}]$$

が成立する．すなわち，$\Psi^{0,1}(m,j)$ を定義する最大化問題(53)を構成する各要素は $\Psi^{0,1}(m,j+1)$ の最大化問題の各要素より必ず同等，それ以下の値をとる．したがって，$\Psi^{0,1}(m,j) \leq \Psi^{0,1}(m+1,j)$ が成立し，$\Psi^{0,1}(m,j)$ は m に関して非減少．記述の独立型化のため，d^2 に関する最大化操作を Γ_2 で表し，$\boldsymbol{\Psi}^{0,1} = \Gamma_2(\boldsymbol{\Psi}^{0,0})$ と行列表記しよう．最適操作 Γ_2 を n 回反復適用した後の $\boldsymbol{\Psi}^{0,n} = \Gamma_2^n(\boldsymbol{\Psi}^{0,0})$ に関しても，これまでと同様の議論が成立し，$\boldsymbol{\Psi}^{0,n}$ も m に関して非減少，j に関して非増加となる．$\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\Psi}^{0,n}$ も m に関して非減少，j に

関して非増加．つぎに，問題(41)を考えよう．初期政策$\hat{d}_1^{(0)}$で定義される問題(41)は

$$\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = \max_{d_1 \in D_1} \Big\{ \boldsymbol{B}^{d_1} - c^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))} + \delta \boldsymbol{\Pi}^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))} \boldsymbol{\Psi}^{(0)} + \boldsymbol{\pi}_0^{d_1} \Theta \Big\} \quad (54)$$

と表せる．問題(54)を具体的に記述すれば，

$$\Psi^{(1)}(m,j) = \max \Big\{ B(m) - c^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))}(m,j) + \delta \tilde{E}_{m,j}^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))}[\boldsymbol{\Psi}^{(0)}],\ \Theta \Big\} \quad (55)$$

と等価である．ただし，

$$\tilde{E}_{m,j}^{d_2^*(\hat{d}_1^{(0)})}[\boldsymbol{\Psi}^{(0)}] = \sum_{n=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \pi_{mn}(j) p_{jk}^{d_2^*(\hat{d}_1^{(0)})}(m) \Psi^{(0)}(n,k)$$

である．$m = 1, \cdots, M$に対して上式を列挙すれば，

$$\max \Big\{ B(1) - c^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))}(1,j) + \delta \tilde{E}_{1,j}^{d_2^*(\hat{d}_1^{(0)})}[\boldsymbol{\Psi}^{(0)}], \Theta \Big\}$$

$$\vdots$$

$$\max \Big\{ B(M) - c^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))}(M,j) + \delta \tilde{E}_{M,j}^{d_2^*(\hat{d}_1^{(0)})}[\boldsymbol{\Psi}^{(0)}], \Theta \Big\}$$

である．条件(5)と$\Psi^{(0)}(m,j)$がmに関して非減少であることより，最大化問題(55)の各要素はmに関して非減少．したがって，$m > m^{d_1^{(0)}}(j)$の場合に$\Psi^{(1)}(m,j) = B(m) - c^{(d_1, d_2^*(\hat{d}_1^{(0)}))}(m,j) + \delta \tilde{E}_{m,j}^{d_2^*(\hat{d}_1^{(0)})}[\boldsymbol{\Psi}^{(0)}]$が，$m \leq m^{d_1^{(0)}}(j)$の場合に$\Psi^{(1)}(m,j) = \Theta$が成立するような臨界的水準$m^{d_1^{(0)}}(j)$ $(j = 1, \cdots, K)$が存在する．最大化操作(55)を記号Γ_1を用いて，$\boldsymbol{\Psi}^{(1)} = \Gamma_1(\boldsymbol{\Psi}^{(0)})$と表そう．以上の議論を反復すれば，最大化問題$\boldsymbol{\Psi}^{(n)} = {\Gamma_1}^n(\boldsymbol{\Psi}^{(0)})$においても臨界的水準$m^{d_1^{(n)}}(j)$が存在する．したがって，$\boldsymbol{\Psi} = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{\Psi}^{(n)}$に関しても臨界的水準$m^{d_1^*}(j)$が存在する．**性質1**より問題(36)の最適解は問題(20)の最適解に一致するため**命題1**が成立する．(**性質2**の証明) **命題1**の証明過程より明らか．

参考文献

1) 栗野盛光，小林潔司，渡辺晴彦：不確実性下における最適補修投資ルール，土木学会論文集，No.667/IV-50, pp.1-14, 2001.
2) 田村謙介，小林潔司：不確実性下における道路舗装の修繕ルールに関する研究，土木計画学研究・論文集，No. 18(1), pp. 97-107, 2001.
3) 田村謙介，慈道充，小林潔司：予算制約を考慮した道路舗装の修繕ルール，土木計画学研究・論文集，Vol.19(1), pp.71-82, 2002.
4) 例えば，Eckles, J.E.: Optimal maintenance with incomplete information, *Operations Research*, Vol.16, pp.1058-1067, 1968.
5) Madanat, S.: Incorporating inspection decisions in pavement management, *Transportation Research*, Part B, Vol.27B, pp.425-438, 1993.
6) Madanat, S. and Ben-Akiva, M.: Optimal inspection and repair policies for infrastructure facilities, *Transportation Science*, Vol.28, pp.55-62, 1994.
7) Durango, P. and Madanat, S.: Optimal maintenance and repair policies for infrastructure facilities under uncertain deterioration rates: An adaptive control approach, *Transportation Research*, Part A, Vol. 36, pp.763-778, 2002.
8) 小林潔司，上田孝行：インフラストラクチャのマネジメント：研究展望，土木学会論文集，No.744/IV-61, pp.15-27, 2003.
9) 慈道充，小林潔司：不確実性下における最適点検補修ルール，土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.39-50, 2003.
10) 例えば，Heyman, D.P. and Sobel, M.J. (eds.): Stochastic Models, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 2, North-Holland, 1990.
11) 例えば，三根久，河合一：信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.
12) Scarf, H.: The optimality of (S,s) policies in the dynamic inventory problem, In: Arrow, K. J., Karlin, S., and Suppes, P. (eds.): *Mathematical Methods in the Social Sciences,* pp. 196-202, Stanford University Press, 1960.
13) Constantinides, G. and Richard, S.: Existence of optimal simple policies for discounted-cost inventory and cash management in continuous time, *Operations Research*, Vol. 26, pp. 620-636, 1978.
14) Suelm, A.: A solvable one-dimensional model of a diffusion inventory system, *Mathematical Operations Research*, Vol. 11, pp. 125-133, 1986.
15) White, D.J.: *Markov Decision Process*, Wiley, 1992.
16) 例えば，Dixit, A.K. and Pindyck, R.S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
17) 例えば，Lee, T. C.,Judge, G. G. and Zellner,A.: *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland,1970.

(2003. 10. 7 受付)

OPTIMAL REPAIR STRATEGIES WITH REFERENCE TO ECONOMIC LIFE EXPECTANCY

Toshimori OTAZAWA, Katsuji ISHIHARA, Kiyoshi KOBAYASHI and Yoshihumi KONDO

In this paper, an asset management methodology is presented to investigate the optimal repair policies of the public facilities under uncertainty of economic lives. The economic and physical deterioration of a facility are assumed to be subject to Markovian processes. The Markov decision model is formulated to find out the optimal policies for scrapping and repair of the facility by considering simultaneously economic values as well as life cycle costs for repair of the facility. The model presented in the paper is applied to the asset management of the port facilities.