

多々羅大橋にみる長大斜張橋のケーブル振動 連成とその減衰性能への影響

山口宏樹¹・藤原亨²・山口和範³・松本泰尚⁴・堤和彦⁵

¹正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設工学科 (〒338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)
E-mail: hiroki@post.saitama-u.ac.jp

²工修 本州四国連絡橋公団長大橋技術センター技術開発課長 (〒651-0088 神戸市中央区小野柄通 4-1-22)

³正会員 工修 本州四国連絡橋公団東京分室 (〒105-0001 東京都港区虎ノ門 5-1-5)

⁴正会員 Ph.D 埼玉大学助教授 工学部建設工学科 (〒338-8570 さいたま市桜区下大久保 255)

⁵工修 埼玉大学大学院理工学研究科建設工学専攻 (研究当時)

本論文は、世界最長斜張橋である多々羅大橋のケーブル振動連成特性とその減衰性能への影響について、部分構造合成法に基づく理論モード解析、および実橋振動実験データの ERA 解析に基づく実験モード解析から多角的に検討したものである。多々羅大橋クラスの長大斜張橋では主要振動モードに多数のケーブルが大きく連成し得ること、ケーブル振動連成を伴う振動モードの減衰はかなり小さくなり得ること、その理由は連成するケーブルの局所振動モード減衰が極めて小さいためであること、ケーブル振動の連成度を解析によって予測することはかなり難しいこと等、今後の長大斜張橋建設に有用な知見を得た。

Key Words: cable-stayed bridge, coupled cable vibration, modal damping, ERA, sub-structural synthesis, damping analysis, FEM updating

1. まえがき

斜張橋は、その構造的合理性から広範囲のスパン長に対して適用される構造形式である反面、剛性や減衰性が比較的低いことから、風などによる振動問題を有し、これまでに斜張橋の振動特性に関する研究が精力的になされてきた。その多くは耐風設計に関連して固有振動数、振動モードおよびモード減衰等の固有振動特性に関するもので、有限要素法等に基づく解析的研究や縮尺模型による実験的研究だけでなく、実橋の振動実験による研究も進められ、多くの貴重な実測データも蓄積されている。特に、ケーブルが部分構造として独立に振動し得るといふ斜張橋の構造特有の動的問題として、橋の全体振動とケーブルの局部振動との内部共振問題、つまり桁振動とケーブル振動の連成問題が注目されて種々検討が加えられてきた^{1),2)}。例えば、線形共振、パラメトリック共振、非線形共振等の内部共振の条件と特性を論じたもの³⁾⁻⁶⁾、斜張橋のいわゆるシステムダンピングの可能性を検討したもの^{7),8)}、ケーブル振動連成のもとらす減衰効果を斜張橋の減衰の定量的評価との関連で論じたもの^{9),10)}等である。これらの現象については、櫃石島橋¹¹⁾、生口橋¹²⁾、横浜ベイブリッジ¹³⁾、鶴見つばさ橋¹⁴⁾等の 400~500m スパン規模の斜張橋において振動実験も行われ、実橋で

の現象の確認と定性的な考察がなされている。

1999 年 5 月に開通した多々羅大橋は、全長 1480m、中央スパン長 890m で、これら従来規模の斜張橋をはるかに凌ぐ世界最長の斜張橋である。高さ 220m の逆 Y 形主塔を有し、側径間部に PC 桁を配置した鋼・PC の複合構造であって、84 段を 2 面に配した 168 本に及ぶケーブルにより支持されている (図-1)。斜張橋は一般にその長大化に伴い、構造的によりフレキシブルになって主要振動モードの固有振動数が低下する。また、長スパン化に伴うケーブルの長尺化により、従来規模の斜張橋ケーブルの最低固有振動数が 0.5Hz 程度であるのに対し、多々羅大橋のそれは 0.25Hz と低下している。このことから、斜張橋の主要振動モードにおいて連成するケーブルの本数も増加し、全体に占めるケーブル重量の割合が大きいことと相俟って、連成ケーブル振動が斜張橋全体に与える影響も大きくなると考えられる。

以上のことを背景として、多々羅大橋ではその供用以前に実橋振動実験が行われた¹⁵⁾。その結果、数多くの固有振動モードにおいて多数のケーブル振動が連成することが確認されると同時に、ケーブルの連成する振動モードの減衰が極めて小さくなる傾向が認められた。これは、部分構造であるケーブルの減衰が小さく、その部分構造の連成振動によって全体構造システムの減衰が引き

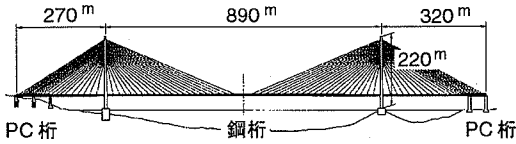


図-1 多々羅大橋の全体図

下げられたためと考えられ、本研究ではこれを部分構造合成法の考え方にに基づき減衰解析を行って、理論的かつ定量的に解明することを試みる。具体的には、まず、理論モード解析をできるだけ精緻に行ってケーブル振動連成特性を解析により考察すると同時に、実橋振動実験データを高精度モード同定法によって再解析し、実験モード解析からの考察の信頼性を高めた。この結果、ケーブル振動連成の定量的な考察にはケーブル導入張力の正確な評価が必要であることが判明したため、次に、実橋振動実験において同時に計測されたケーブル振動データを用い、ケーブル張力の同定を行った。この実験同定張力を用いて再度、理論モード解析を行い、ケーブル張力評価が固有振動特性に及ぼす影響を考察した上で、モード減衰に及ぼすケーブル振動連成の影響解析を行っている。

なお、中国で計画されている蘇通大橋（中央スパン長 1088m）やストーンカッターズ橋（同 1018m）に代表されるように、斜張橋はそのスパンをさらに伸ばしつつある。この点からも、ケーブル振動連成と減衰性能に着目して多々羅大橋の動的特性を詳細に検討することの意義は極めて大きいと言える。

2. 理論モード解析による多々羅大橋のケーブル振動連成特性

(1) 多々羅大橋の固有値解析

多々羅大橋を立体骨組としてモデル化し、斜張橋振動解析プログラム¹⁶⁾を適用して固有振動解析を行った。本解析では、桁および塔については軸力を受けるはり要素を用いた有限要素法で離散化し、ケーブルについては両端固定ケーブルの固有振動モードを利用したモード解析法（区分モード合成法¹⁷⁾）で離散化して自由度の低減を図っている。以下に解析法の概略を示す。

斜張橋の部分構造としてのケーブルについて、ケーブル要素を用いた有限要素法で離散化し、その自由振動方程式を以下のように記述する。

$$M_c \ddot{u}_c + K_c u_c = 0 \quad (1)$$

ここで、 u_c 、 \ddot{u}_c はケーブルの節点変位ベクトル、節点加速度ベクトル、また M_c 、 K_c はケーブルの質量、剛

性マトリクスであって、次式のように表わす。

$$M_c = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{1i} & 0 \\ m_{i1} & m_{ii} & m_{in} \\ 0 & m_{ni} & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{1i} & 0 \\ k_{i1} & k_{ii} & k_{in} \\ 0 & k_{ni} & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

つまり、ケーブルの質量マトリクスおよび剛性マトリクスを、桁、塔との接続点である節点 1、節点 n と内部節点 i に分けて考える。

まず、ケーブル端点に変位 u_1 、 u_n （それぞれ、空間 3 方向の並進変位成分から成る変位ベクトル）が生じたときのケーブル内部の静的変位 u_i （サイズ $3(n-2) \times 1$ のベクトル）を求める。式(1)で慣性力を無視した静的つり合い式：

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{1i} & 0 \\ k_{i1} & k_{ii} & k_{in} \\ 0 & k_{ni} & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_i \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

の第 2 式を u_i について解けば、次式が得られる。

$$u_i = -k_{ii}^{-1} k_{i1} u_1 - k_{ii}^{-1} k_{in} u_n \quad (4)$$

次に、ケーブル内部の動的変位 u_i をモード解析法に基づき、モード座標で表す。このため、式(1)で接続点（節点 1、 n ）を固定した固有値解析を行って固有振動モード（拘束モード）を求め、得られた振動モードの低次 m 個を解析に用いることとして、動的内部変位 u_i を以下のようにモード展開する。

$$u_i = \Phi q_c \quad (5)$$

ここで、 Φ は固定端を除いた $3(n-2) \times m$ の拘束モードマトリクス、 q_c は採用した拘束モードベクトルに対応する局所モード変位ベクトルである。

式(4)、(5)を重ね合わせることで、ケーブルの両端に変位を許容した場合のケーブルの動的変位ベクトルが、両端の変位ベクトルおよび局所モード変位ベクトルで以下のように記述できる。

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_i \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -k_{ii}^{-1} k_{i1} & -k_{ii}^{-1} k_{in} & \Phi \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \\ q_c \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \\ q_c \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 T は座標変換マトリクスであり、 I は 3×3 の単位マトリクスである。これによってケーブルの振動自由度は $3n$ から $6+m$ に低減される。

式(6)を用いてケーブルの運動方程式(1)を変換すれば、拘束モードによって合理的に自由度の低減された運動方程式が以下のように導かれる。

$$\tilde{\mathbf{M}}_c \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \ddot{\mathbf{q}}_c \end{Bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}_c \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_n \\ \mathbf{q}_c \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (7)$$

ただし、 $\tilde{\mathbf{M}}_c = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_c \mathbf{T}$ 、 $\tilde{\mathbf{K}}_c = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_c \mathbf{T}$ であり、 $\tilde{\mathbf{M}}_c$ 、 $\tilde{\mathbf{K}}_c$ がケーブルの局所的な拘束モード変位 \mathbf{q}_c 、およびケーブル端点、つまり桁および塔との接合点での物理変位 \mathbf{u}_1 、 \mathbf{u}_n で表したケーブルの質量マトリクス、剛性マトリクスとなつて、斜張橋の質量マトリクス、剛性マトリクスの対応する部分に直接組み込むことが可能となる。

以上のように、モード合成法を基とした定式化を多々羅大橋に適用して固有振動解析を行った。解析に用いたモデルは図-2に示したとおりであるが、図に併記したとおり、ケーブルの拘束モードを求める固有振動解析にはケーブルを30要素に分割した有限要素法モデルを用い、斜張橋全体の固有振動解析には各ケーブルの面内、面外各3次までの計6つの拘束モードを採用している。結果として、全体解析の全自由度数は5676となった。

(2) 固有振動数から見たケーブル振動連成の可能性

図-3は、2面吊り斜張橋である多々羅大橋の片面に配置された全ケーブル84本について、固有振動解析により求められた拘束モードの中、1Hz以下の固有振動数をケーブル番号に対してプロットしたものである。全体構造システムとしての多々羅大橋の固有振動数についても、1Hz以下のそれを振動モードごとに水平線(ケーブル番号とは無関係)で示し、斜張橋全体モードとケーブル局所モードの固有振動数の関係を与えている。

図よりわかるように、ケーブルの固有振動数の最小値は0.257(Hz)であり、斜張橋システムの水平対称1次振動モードと鉛直対称1次振動モードの固有振動数はそれより低い振動数であつて、ケーブルの連成の可能性がない。これに対し、斜張橋システムの水平逆対称1次、お

全要素数 : 831
全節点数 : 655
全自由度数 : 5676

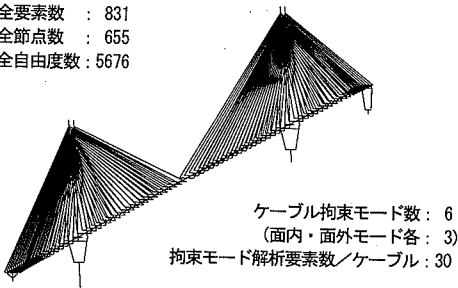


図-2 解析モデルと解析自由度

よび鉛直逆対称1次の各固有振動数は、中央径間中央部の最長No.42付近ケーブルの面外1次モード振動数とほぼ等しくなり、鉛直対称2次、水平対称2次、ねじれ対称1次と、システムの固有振動数が大きくなるにしたがつて、中央径間主塔寄りのケーブルのみならず、側径間ケーブルの面内外1次モード振動数が近接してくる。さらに、システムの固有振動数が大きくなってねじれ逆対称1次モードになると、面内外1次モード振動数に近接するケーブルは存在せず、No.5、No.32、No.74ケーブルで面内外2次モード振動数がシステム固有振動数にほぼ等しくなってくる。したがって、斜張橋のこれらの全体振動モードでは、複数のケーブルが種々の局所モードで線形共振する可能性がある。

(3) 全体モードにおけるケーブル振動連成

多々羅大橋の実橋振動実験で測定対象とされた、固有振動数が1Hz以下の8つの固有振動について、前述の固有振動解析から得られた斜張橋システムの全体振動モードを図-4(b)に示した。振動モードベクトルは全て最大値が1になるように正規化している。図-4(a)には、ケーブルについて、式(5)の拘束モードを考えず、横振動を無視してトラス要素でモデル化した際の固有振動解析結果を比較して示している。

(2)で考察した通り、ケーブルの固有振動数と全体システムの固有振動数が近接していない鉛直対称1次振動や水平対称1次振動では、大きなケーブル連成振動は認められない。したがって、固有振動数もケーブル振動を無視した場合の固有振動数にほぼ等しくなっている。ただし、ケーブル振動を無視したモードとは明らかに異なり、ケーブル振動のわずかな連成が認められる。

一方、この2つの固有振動以外の振動モードでは大きく連成するケーブルが出現し、高次振動になる程、ケーブル振動の連成性も低次に比べ複雑になっている。その

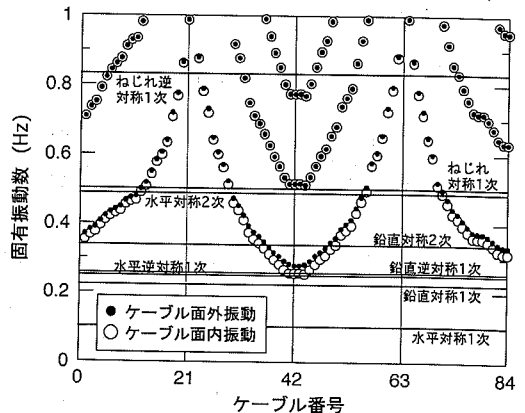


図-3 全ケーブルの固有振動数と斜張橋の固有振動数

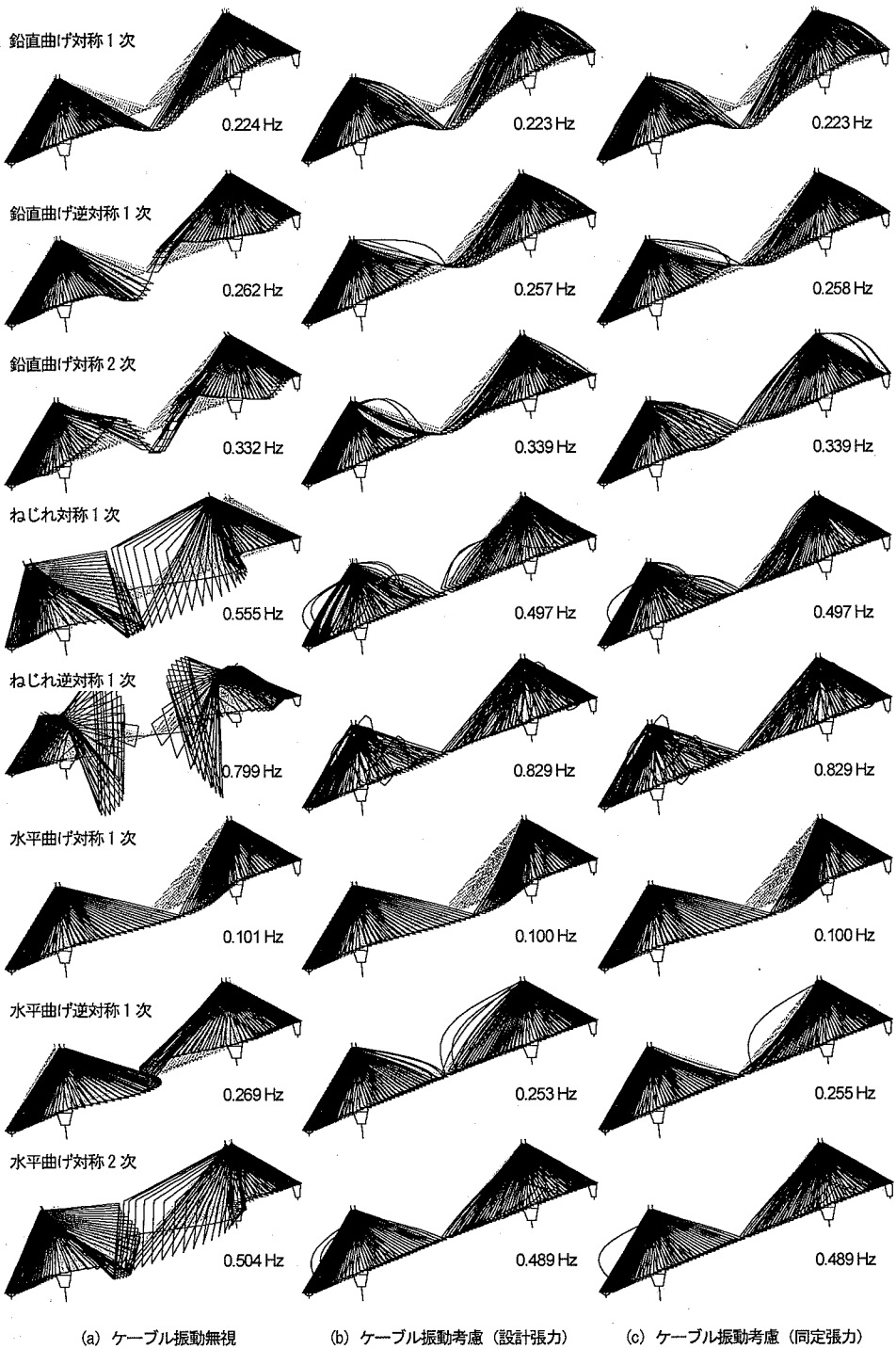


図4 多々羅大橋の振動モードと固有振動数の解析結果：(a) ケーブル振動連成無視，(b) ケーブル振動連成考慮（設計ケーブル張力），(c) ケーブル振動連成考慮（同定ケーブル張力）

結果、固有振動数についてもケーブル振動を無視した場合の固有振動数との差が大きくなる傾向が認められる。連成しているケーブル番号は(2)での固有振動数からの考察で連成の可能性が高いとされたケーブル番号に対応しているが、鉛直振動ではケーブルも鉛直面内方向に連成して振動するものが多く、水平振動では水平方向に振動しているものが多く見られる。なお、図示していないが、実橋振動実験において共振曲線が複雑になったとされる鉛直逆対称1次や鉛直対称2次、ねじれ振動などの固有振動数近傍において、連成ケーブル局所モードの卓越したモードが多く求められたことを付記する。

以上、(2)で考察したケーブル振動の線形連成の発生が、理論モード解析によって確認された。

3. 実験モード解析による多々羅大橋のモード減衰性能とケーブル振動連成特性

多々羅大橋の実橋振動実験は、橋の供用開始直前の1998年末に行われた。長大橋など長周期構造物の実機加振装置として開発された大型起振機(Active Mass Driver型)¹⁵⁾を初めて採用し、桁を鉛直方向および水平方向に加振して振動を計測、得られた振動データを基に固有振動数、振動モード、およびモード減衰を同定している。つまり、固有振動数を、桁の振動が最も大きくなる計測代表点での共振曲線ピークから同定し、その振動数での橋体各計測点での共振振幅の分布を振動モードとして決定するとともに、モード減衰については、共振状態で起振機を停止した後の桁計測代表点の自由振動波形から対数減衰率を算出している¹⁶⁾。これらによって多々羅大橋の固有振動特性が明らかになると言える。

しかし、そこでは、振動モードの同定において連成ケーブル振動の大きさは定量的には論じられていない。また、ケーブルとの連成が生じた固有振動では、共振曲線が多数のピークを有したり自由振動波形にうなりを生じたりと、応答が複雑になったため、上記のような計測代表点のデータを主として参照したとされているが、このことが固有振動特性、特にモード減衰特性の同定精度に及ぼす影響については、必ずしも検討されたわけではない。

そこで、ケーブル振動連成と減衰性能を主題とした本研究では、実橋振動実験での多点計測データをできるだけ多く参照した高精度モード同定法を採用して、再度、実験モード解析を行い、固有振動特性の考察の信頼性を高めることとした。再同定に用いた手法は、自由振動の多点計測波形から、その自由振動に含まれる有意な固有振動成分を多数、同時に抽出して、固有振動数、振動モード、およびモード減衰比を同時に精度良く同定するこ

とが可能なERA(Eigensystem Realization Algorithm)¹⁸⁾である。当然のことながら、ERAはうなりを伴う自由振動データに対しても有効である¹⁹⁾。

(1) 実橋振動実験の計測データ

実験では、鉛直曲げ振動(対称1次、逆対称1次、対称2次)、ねじれ振動(対称1次、逆対称1次)、水平振動(対称1次、逆対称1次、対称2次)の計8つの振動モードについて計測が行われた。図5に示したとおり、計測点は桁6点、塔4点、ケーブル10点(10本)である。また、モード特性の再同定に用いた計測データは、これらの計測点での、大型起振機による加振を急停止した後の、変位および加速度の自由振動時系列データである。それぞれの時系列データのサンプリング周期は0.05sec、計測時間は300secであり、計測データ数は6000個(固有振動数の大きいねじれ逆対称1次振動については計測時間180sec、計測データ数3600個)である。

(2) ERAによるモード同定法

ERAによるモード同定理論の概略、およびその同定手順は以下のとおりである¹⁸⁾。

まず、多々羅大橋を線形時不変系動的システムとして、その自由振動を離散化時間に対する状態方程式および出力方程式によって次のように記述する。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \quad (8a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (8b)$$

ここで、 k は離散化時間、 \mathbf{x} は動的システムの状態ベクトル($n \times 1$)、 \mathbf{y} は出力ベクトル($p \times 1$)であって p 個の計測点での計測データに対応する。また、 \mathbf{A} は動的システムの状態マトリクス($n \times n$)、 \mathbf{C} は出力マトリクス($p \times n$)である。なお、 n は動的システムの次数である。

このときの自由振動応答の出力ベクトル $\mathbf{y}(k)$ は、状態方程式(8a)を、初期状態ベクトルを $\mathbf{x}(0)$ として $\mathbf{x}(k)$ について解き、それを出力方程式(8b)に代入することにより、次式で表される。

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) \quad (9)$$

この動的システムのモード同定問題を、まず、伝達関

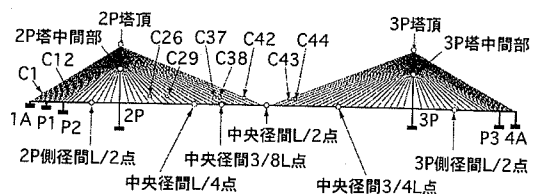


図5 多々羅大橋の振動実験における計測点

数としての自由振動応答出力ベクトル $\mathbf{y}(k)$ が与えられた場合に、それと同じ伝達関数を有する最小次元の状態方程式と出力方程式を求める問題、つまり最小次元状態マトリクス \mathbf{A} と出力マトリクス \mathbf{C} を求める最小実現 (minimal realization) 問題^{20), 21)}として設定する。ERA では、このシステムの最小実現のために、自由振動計測データである出力ベクトル $\mathbf{y}(k)$ を、時刻 k から s 個を第 1 行に並べ、時間をずらして s 個ずつ r 行並べた一般化ハンケルマトリクス $\mathbf{H}_{rs}(k)$ の作成から始める。

$$\mathbf{H}_{rs}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+t_1) & \cdots & \mathbf{y}(k+t_{s-1}) \\ \mathbf{y}(k+j_1) & \mathbf{y}(k+t_1+j_1) & \cdots & \mathbf{y}(k+t_{s-1}+j_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(k+j_{r-1}) & \mathbf{y}(k+t_1+j_{r-1}) & \cdots & \mathbf{y}(k+t_{s-1}+j_{r-1}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 t_i ($i=1, \dots, s-1$), j_i ($i=1, \dots, r-1$) はともに離散化時間であって、任意の整数である。

この一般化ハンケルマトリクス ($rp \times s$) の各成分を、式(9)により書き下して整理すれば、

$$\mathbf{H}_{rs}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}^{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{j_{r-1}} \end{bmatrix} \mathbf{A}^k [\mathbf{x}(0) \quad \mathbf{A}^{t_1} \mathbf{x}(0) \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{t_{s-1}} \mathbf{x}(0)] \quad (11)$$

$$= \mathbf{V}_r \mathbf{A}^k \mathbf{W}_s$$

ただし、 \mathbf{V}_r , \mathbf{W}_s はそれぞれ可観測マトリクス ($rp \times n$)、可制御マトリクス ($n \times s$) であり、時刻 0 での一般化ハンケルマトリクス $\mathbf{H}_{rs}(0)$ を考えて特異値分解²¹⁾すれば、以下のような関係が得られる。

$$\mathbf{H}_{rs}(0) = \mathbf{V}_r \mathbf{W}_s = \mathbf{PDQ}^T \quad (12)$$

ここで、 \mathbf{D} ($n \times n$) はその対角要素に特異値 d_1, d_2, \dots, d_n (>0) を大きい順に有する対角マトリクスであり、 \mathbf{P} ($rp \times n$)、 \mathbf{Q} ($s \times n$) はユニタリマトリクスであっていずれもその列ベクトルが互いに正規直交する。

式(11)と式(12)を用いて $\mathbf{y}(k)$ を書き下していき、式(9)と対応させることによって、最小実現されたシステムの状態マトリクス $\bar{\mathbf{A}}$ 、出力マトリクス $\bar{\mathbf{C}}$ 、および初期状態ベクトル $\bar{\mathbf{x}}(0)$ が、最終的に以下のように導かれる¹⁸⁾。

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{D}^{-1/2} \mathbf{P}^T \mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{QD}^{-1/2} \quad (13a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_p^T \mathbf{PD}^{1/2} \quad (13b)$$

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_1 \quad (13c)$$

ここで、 \mathbf{E}_p ($rp \times p$)、 \mathbf{E}_1 ($s \times 1$) は一般化ハンケルマトリクス $\mathbf{H}_{rs}(k)$ ($rp \times s$) から自由振動の出力ベクトル $\mathbf{y}(k)$ ($p \times 1$) を抽出するために導入したマトリクスであって、次式で定義する。

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{E}_p^T \mathbf{H}_{rs}(k) \mathbf{E}_1 \quad (14a)$$

$$\mathbf{E}_p^T = [\mathbf{I}_p \quad \mathbf{0}_p \quad \cdots \quad \mathbf{0}_p] \quad (14b)$$

$$\mathbf{E}_1^T = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (14c)$$

ただし、 \mathbf{I}_p , $\mathbf{0}_p$ は $p \times p$ の単位マトリクス、零マトリクスである。

最小実現された状態マトリクス $\bar{\mathbf{A}}$ の次元 n^* は、与えられた測定データを再現するために必要な最小次元であって、自由振動データに含まれる有意な固有振動の数 ($n^*/2$) に対応し、したがって一般化ハンケルマトリクスのランクに等しくなる。この一般化ハンケルマトリクスのランクは、その零でない特異値の数で決まるが、計測データには避けられないノイズや構造的非線形挙動が含まれるため、ランクの値はこれらによって影響され、不必要に大きくなる。そこで、ERA では、特異値マトリクス \mathbf{D} において特異値が十分に小さいものを 0 と見なしてランクを決定し、特異値マトリクス等 (\mathbf{D} , \mathbf{P} , \mathbf{Q}) を縮小して、式(13a)により状態マトリクス $\bar{\mathbf{A}}$ を n^* 次元に低次元化、最小実現している。

以上のように最小実現された状態マトリクス $\bar{\mathbf{A}}$ ($n^* \times n^*$) を複素固有値解析し、共役複素固有値 z_j 、および共役複素固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_j$ を求めれば、測定データに含まれる有意な固有振動に対応した固有振動数、モード減衰比、および複素振動モード (振幅および位相) が同定できる。ただし、 $\bar{\mathbf{A}}$ の共役複素固有値 z_j は離散時間に対するものであるため、次式の関係を用いて、連続時間に対する共役複素固有値 s_j に変換する必要がある。

$$z_j = \exp(s_j \Delta t), \quad j=1, \dots, n^*/2 \quad (15)$$

ここで、 Δt はサンプリング周期である。固有振動数 ω_j 、モード減衰比 ξ_j は連続時間の固有値 s_j から以下の関係より同定することができる。

$$s_j = -\xi_j \omega_j \pm i \sqrt{1 - \xi_j^2} \omega_j, \quad j=1, \dots, n^*/2 \quad (16)$$

一方、得られた固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_j$ ($n^* \times 1$) は最小実現された数学モデルとしての状態ベクトルに対応するため、実際の物理的振動モードは、計測点での変位から成る共役複素モードベクトル $\boldsymbol{\phi}_j$ ($p \times 1$) として、共役複素固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_j$ に出力マトリクス $\bar{\mathbf{C}}$ ($p \times n^*$) を乗じて、次のように同定する。

$$\boldsymbol{\phi}_j = \bar{\mathbf{C}} \boldsymbol{\psi}_j = \mathbf{E}_p^T \mathbf{PD}^{1/2} \boldsymbol{\psi}_j, \quad j=1, \dots, n^*/2 \quad (17)$$

なお、測定データに含まれる各減衰自由振動成分の初期モード変位 $q_j(0)$ は、次式によって求められる。

$$q_j(0) = \boldsymbol{\psi}_j^{-1} \bar{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\psi}_j^{-1} \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_m, \quad j=1, \dots, n^*/2 \quad (18)$$

以上の理論展開に基づく ERA の具体的な解析手順は以下のようである。

- 1) r, s, t ($i = 1, \dots, s-1$), j_i ($i = 1, \dots, r-1$) を与えて, p 個の計測点での計測データから, ハンケルマトリクス $\mathbf{H}_s(0)$ ($rp \times ps$) を作成する。
- 2) ハンケルマトリクス $\mathbf{H}_s(0)$ を特異値分解して, 特異値マトリクス \mathbf{D} , および \mathbf{P}, \mathbf{Q} を求める。
- 3) ハンケルマトリクスの特異値の中で十分に小さいものを 0 と見なし, システムの最小次元 n^* を決定する。
- 4) \mathbf{D} , および \mathbf{P}, \mathbf{Q} を次元 n^* に低次元化する。
- 5) 低次元化された \mathbf{D} , および \mathbf{P}, \mathbf{Q} を用い, 式(13a)によって最小実現された状態マトリクス $\bar{\mathbf{A}}$ を求める。
- 6) 状態マトリクス $\bar{\mathbf{A}}$ を複素固有値解析し, 式(15)~(18)により, 固有振動数 ω_j , モード減衰比 ξ_j , 振動モード ϕ_j , 初期モード変位 $q_j(0)$ を同定する。

(3) 桁・塔 10 計測点データを用いたモード同定

多々羅大橋で実験対象とした各振動モードについて, 桁の 6 計測点, 塔の 4 計測点で計測された同一方向 (鉛直曲げ振動とねじれ振動の場合は桁の鉛直方向と塔の橋軸方向, 水平曲げ振動の場合は桁, 塔ともに橋軸直角方向) の加速度時系列データを用い, ERA に基づく多点参照のモード同定を行った。本解析でのハンケルマトリクスは, 40 秒間の計測データを 1 行 (800 列に対応) とし, 1 行毎に 0.05 秒 (1 ステップ) 時間を遅らせたものを, 4000 行並べたものとしている。

表-1 固有振動数 (Hz) の解析値と実験値

振動モード	解析値			実験値	
	連成無視	設計張力	同定張力	共振曲線 ¹⁵⁾	ERA
鉛直 S1	0.224	0.223	0.223	0.226	0.225
鉛直 AS1	0.262	0.257	0.258	0.263	0.263
鉛直 S2	0.332	0.339	0.339	0.348	0.348
ねじれ S1	0.555	0.497	0.497	0.497	0.496
ねじれ AS1	0.799	0.829	0.829	0.831	0.830
水平 S1	0.101	0.100	0.100	0.097	0.096
水平 AS1	0.269	0.253	0.255	0.248	0.247
水平 S2	0.504	0.489	0.489	0.470	0.471

S1: 対称 1 次振動, AS1: 逆対称 1 次振動, S2: 対称 2 次振動

表-2 モード減衰 (対数減衰率) の実験値

振動モード	波形読み取り ¹⁵⁾	同定法		
		ERA		
		10 点参照 平均	10 点参照・振幅依存性 大振幅	10 点参照・振幅依存性 小振幅
鉛直 S1	0.024	0.023	0.020	0.026
鉛直 AS1	0.018	0.018	0.019	0.016
鉛直 S2	0.007	0.017	0.016	0.008
ねじれ S1	0.017	0.013	0.013	0.008
ねじれ AS1	0.051	0.028	0.037	0.012
水平 S1	0.132	0.128	0.119	0.132
水平 AS1	0.213	0.104	0.117	0.047
水平 S2	0.173	0.033	0.044	0.020

S1: 対称 1 次振動, AS1: 逆対称 1 次振動, S2: 対称 2 次振動

表-1 に ERA により同定した固有振動数を, 計測代表点の共振曲線での共振ピークから同定した実験値¹⁵⁾, および前述の理論モード解析から求めた解析値 (ケーブル振動連成を無視した場合と, 設計張力を与えてケーブル振動連成を考慮した場合) と比較して示した。実験値だけの比較から明らかなように, 固有振動数に関しては同定手法の違いに無関係にほぼ同じ値が得られており, 実験同定精度の高さが伺える。この実験値とケーブル振動連成を考慮した解析値 (表-1 の「設計張力」と) を比較すれば, 解析の誤差は $\pm 4\%$ の範囲内であって, 理論モード解析も十分な精度を有していると言える。

一方, モード減衰については, 10 点参照の ERA によって同定したモード減衰比を対数減衰率に変換し, モード振幅の最大を与える計測代表点 1 点での自由振動波形から振幅を読み取って直接, 対数減衰率を求めたもの¹⁵⁾ と比較して, 表-2 に示した。波形読み取りによる同定では, モード減衰に振幅依存性があったため, 最大振幅からその 70% まで減衰する間の振幅範囲の平均対数減衰率で整理しているのに対し, ERA では全計測時間 300sec (ねじれ逆対称 1 次振動の場合は 180sec) のデータを用いて同定している (表-2 の「10 点参照・平均」)。この意味では, 両者の直接的な比較は難しいものの, ほぼ等しい同定値を与える場合とかなり異なった結果となる場合とが混在することに注意すべきである。

(4) 多々羅大橋のモード減衰性能

a) 再同定されたモード減衰特性

表-1, 表-2 の, 実橋振動実験データから同定された固有振動数と対数減衰率について, 両者の関係を図示したものが図-6 である。まず, 同定精度がより高いと思われる ERA 同定の結果のみに着目すれば, 全体としては固有振動数と対数減衰率の間に際だった関係はなく, 既存の斜張橋にも見られるように, 減衰の大きさは振動モードに依存していると言える。つまり, 鉛直振動およ

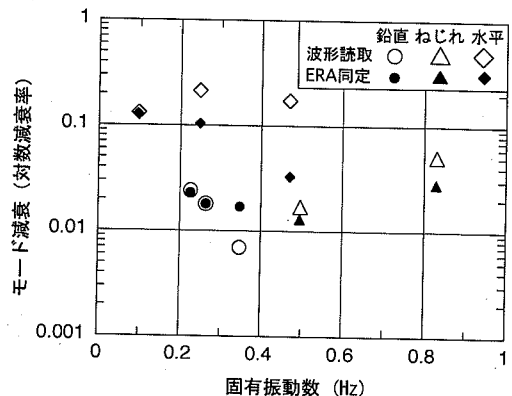


図-6 モード減衰と固有振動数の関係 (実験値)

び水平振動では固有振動数の増加と共に対数減衰率の低下が見られるのに対し、ねじれ振動では固有振動数の増加と共に対数減衰率は増加している。ただし、共通して、対数減衰率が 0.01 程度と小さくなっている振動モードでは、ケーブル振動の連成が顕著であり (図-4)、このことが減衰低下の原因として考えられる。なお、水平振動については、非常に大きな対数減衰率を示しているが、これは桁にボルト接合されたフェアリングの摩擦によるものと推定されている¹⁵⁾。

次に、図-6 で同定法の違いによる差に着目すると、鉛直、ねじれ、水平のいずれの振動においても、高次モードでの差が大きいことがわかる。これは、以下に示すように、振動実験における高次モードでの振動振幅が比較的小さくならざるを得ないこともあって、減衰の振幅依存性が顕著であったためである。

b) モード減衰の振幅依存性

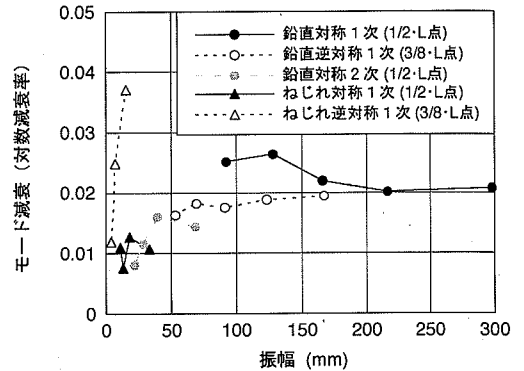
ERA 解析を自由振動実測波形の時間区分毎に行うことでモード減衰の振幅依存性を検討した。具体的には、桁・塔 10 計測点の自由振動加速度データを 60sec 毎の区分データとして、この間の自由振動に含まれる固有振動成分を ERA により同定、その初期振幅を減衰評価振幅としてモード減衰比を同定したものである。図-7 にその結果を示した。縦軸はモード減衰 (対数減衰率) 同定値、横軸は加速度振幅同定値を固有振動数同定値によって変位換算した振幅であり、モード振幅が最大となる計測点での振幅を与えた。ただし、ねじれ振動の振幅については、ねじれ角に桁幅の 1/2 の長さを乗じ、桁断面端部の鉛直変位として表している。なお、各モードの振幅評価点での自由振動実測加速度波形を図-8 に示した。

図-7 より明らかなように、鉛直対称 1 次、逆対称 1 次、ねじれ対称 1 次、水平対称 1 次といった低次振動モードに対する減衰は振幅依存性がほとんど無いのに対し、高次になるにしたがって振幅依存性が非常に大きくなる傾向にある。このことは、図-8 の自由振動波形が単純な減衰波形とはならず、非線形性の強いものとなっていることに対応しているが、図-7 はあくまで自由振動波形に含まれる固有振動成分のみの減衰の振幅依存性を示しており、ERA 解析によってそれが定量的に同定できたと言える。なお、表-2 の ERA・振幅依存性の欄に示した数値はこの方法により同定されたもので、図-7 に対応する。

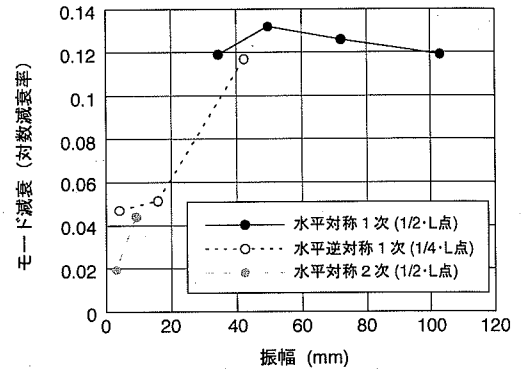
c) 他の斜張橋との減衰性能比較

以上のように、ERA 解析に基づく実験モード解析によって精度良く再同定された多々羅大橋の減衰性能を、既存の斜張橋 31 橋の減衰実測値⁹⁾と比較した。図-9 にモード減衰と固有振動数の関係を、図-10 には、橋ごとに鉛直、ねじれ、水平振動の各モード減衰平均値を取り、支間長に対してプロットしたものを示す。斜張橋により

減衰同定法は異なり、減衰実測データの精度に差があり得ること、また減衰が測定されているモード数も斜張橋により異なり、平均減衰の意味合いがそれぞれに異なることから、定量的な結論を導くには注意を要するが、これらの図から長大斜張橋の減衰性能が考察される。まず、図-9 より明らかなように、多々羅大橋においてもモード減衰と固有振動数との相関は悪いものの、水平振動を除き、固有振動数、モード減衰ともに既存の斜張橋での下限を与える傾向にあり、支間長が現時点で最大である斜張橋の特徴を与えていると言える。この減衰性能については、平均減衰と最大支間長との関係を示した図-10 に、より明確に表れている。つまり、桁の減衰が大きいと考えられるトラス斜張橋を除けば、平均モード減衰が支間長の増大と共に小さくなり、対数減衰率で 0.02 程度に漸減する傾向にあることが、多々羅大橋の減衰データの追加により、明確である。例外として、鶴見つばさ橋の平均モード減衰が大きくなっているが、これはケーブルのレインパイブレーション対策として取り付けられたダンパーがケーブルの減衰を大きくし、それによってケーブル連成を有する全体モードの減衰が大きくなったためとされている⁹⁾。



(a) 鉛直曲げ振動とねじれ振動



(b) 水平曲げ振動

図-7 モード減衰の振幅依存性 (ERA 解析結果)

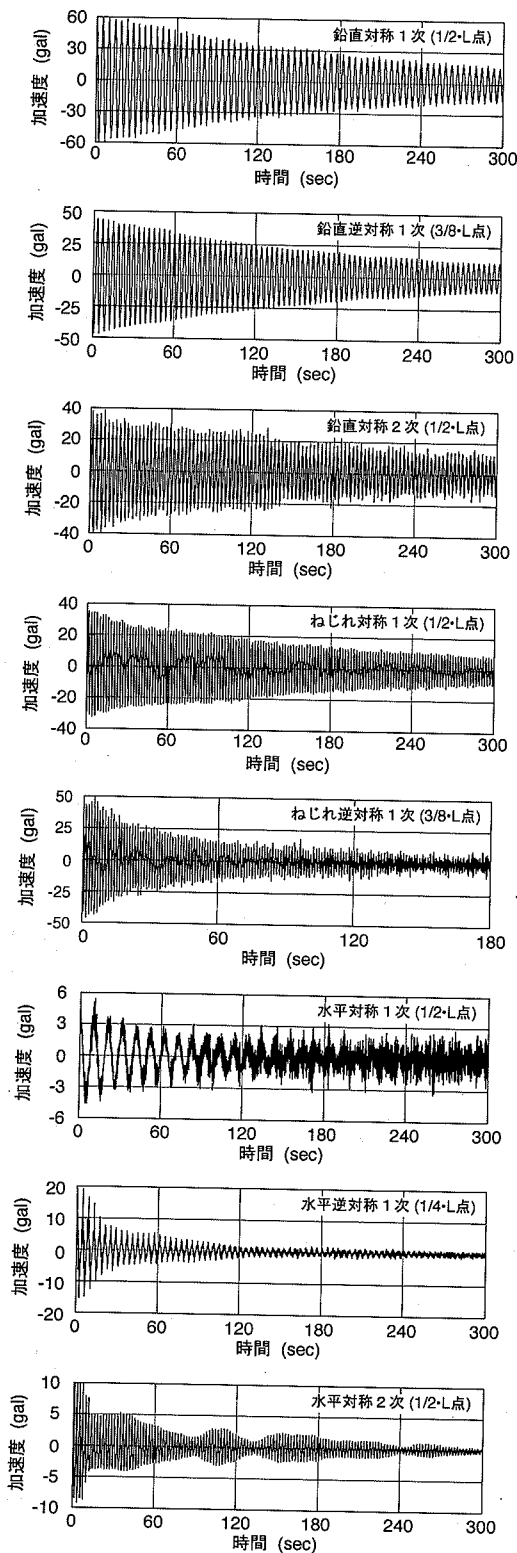


図-8 各固有振動の自由振動実測加速度波形

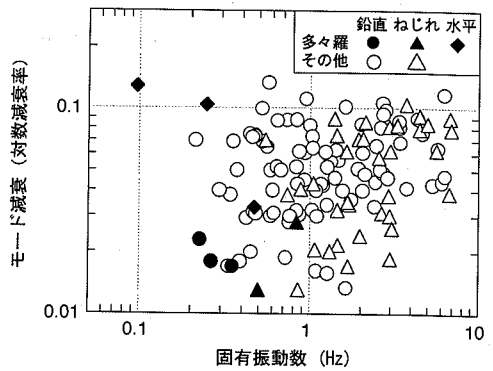


図-9 斜張橋のモード減衰と固有振動数の関係

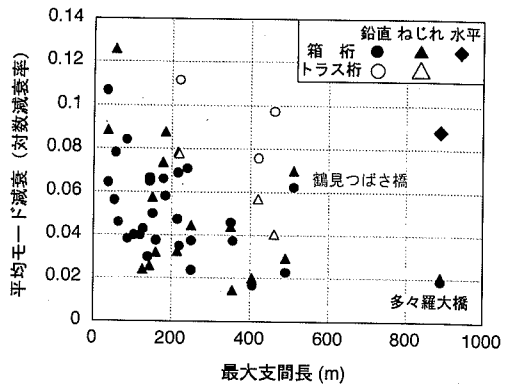
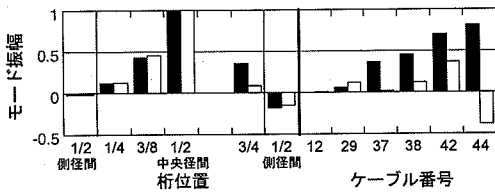


図-10 斜張橋の平均モード減衰と最大支間長の関係

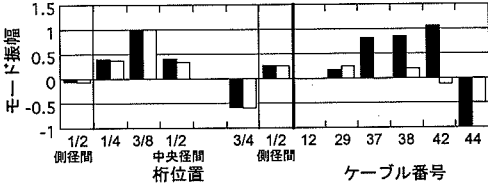
(5) 多々羅大橋の振動モードとケーブル振動連成

ケーブル振動の連成が斜張橋のモード減衰能を小さくしている可能性を指摘したが、各振動モードでのケーブル振動連成がどの程度であるかについて、斜張橋の振動モードと共に、実験モード解析によりその同定を試みた。同定手法は同じく ERA 解析であるが、解析に用いた実測データは、前述の桁・塔 10 計測点データのみならず、加速度が同時計測されている 6 本のケーブルの振動データも加えて、16 計測点参照のモード同定を行っている。

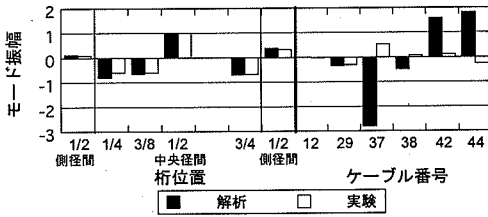
ERA 解析を行うことにより、この 16 計測点での、同定固有振動数に対応した同時刻加速度振幅が位相差と共に同定され、実験で対象とした振動モードが 16 計測点の変位量で表されることになる。図-11~13 に、鉛直曲げ、ねじれ、水平曲げの各振動モードに対して、このようにして同定された振動モードとケーブル振動連成量を棒グラフで示すとともに、理論モード解析から得られた振動モードとケーブル振動連成量を同様に表し、比較して示した。いずれのグラフも、左半分が桁計測点でのモード振幅分布を、右半分が加速度計測されたケーブル(番号)の計測位置(橋面から 0.98m~1.20m 高さの位置)



(a) 対称1次モード

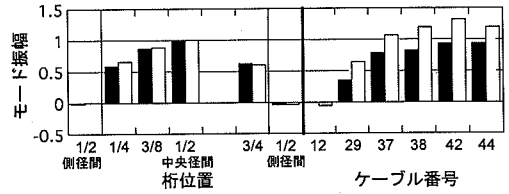


(b) 逆対称1次モード

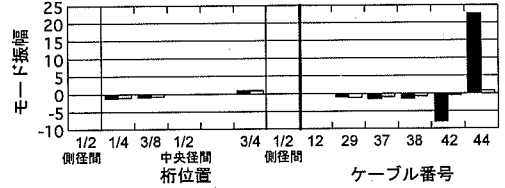


(c) 対称2次モード

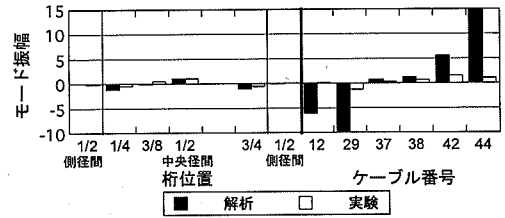
図-11 鉛直振動モードとケーブル連成：解析と実験



(a) 対称1次モード

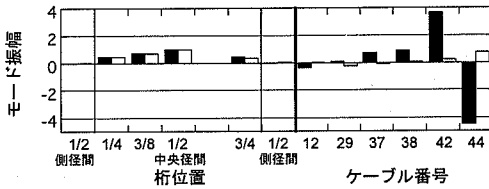


(b) 逆対称1次モード

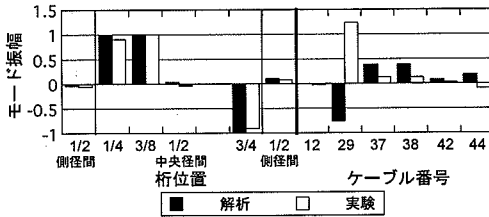


(c) 対称2次モード

図-13 水平曲げ振動モードとケーブル連成：解析と実験



(a) 対称1次モード



(b) 逆対称1次モード

図-12 ねじれ振動モードとケーブル連成：解析と実験

での連成振動の大きさを表している。なお、縦軸のモード振幅は、桁の最大モード振幅を1として正規化した値を示している。

図より明らかなように、桁の振動モード形状は解析値と実験値が非常に良く整合して、精度良く求められているのに対し、ケーブル振動の連成量については、水平曲げ対称1次振動を除いて、解析値と実験値の差が極めて

大きくなっているものが多い。つまり、ほとんどの場合、理論モード解析によるケーブル振動連成量が実験値より大きく見積もられ、位相が90度ずれている場合も少なくない。この理由としては、振動方向の特定など、加速度計によるケーブル振動変位計測の難しさに起因した計測誤差が当然考えられるものの、もう一つにはケーブルに導入された張力の不確実性があり得る。2.(2)で考察したように、ケーブル振動連成は斜張橋全体モードの固有振動数とケーブル局所モードの固有振動数が近づくことによる内部共振現象と考えられるが、連成の度合いは固有振動数の近接度に依存し、この固有振動数の関係に十分な精度が得られない場合には、共振点近傍の現象であるために、連成度が大きくずれることになる。図の解析結果は、ケーブル張力として設計時のそれを用いたものであるが、実橋のケーブル張力が必ずしも設計張力とはならないことから、ケーブルの固有振動数推定に誤差を含み得る。ここに設計時でのケーブル振動の連成度評価の難しさがあると言える。

4. 振動計測データからのケーブル張力同定と解析モデルの修正

多くの主要振動モードでケーブルが連成し、そのよう

な振動モードの減衰が極めて小さくなる傾向が確認されたが、この連成ケーブル振動がモード減衰に及ぼす影響を定量的に解明するには、ケーブル振動の連成度をいかに精度良く評価するかが問題として残る。そこで、実橋振動実験時のケーブルの振動データに対して実験モード解析法を適用することにより、実験時のケーブル張力を同定し、解析モデルの修正を行って、理論モード解析により多々羅大橋の振動特性の再同定を行った。張力同定されたケーブルは振動計測対象の10本に限られるが、これらは主要な全体振動モードと連成の可能性が高いケーブルであって、影響は大きい。なお、多々羅大橋の供用開始直前には、全ケーブルの張力について精密点検初期値計測が行われているが、本研究では設計時と実験時との比較で解析モデルの修正を考えることとした。

(1) ケーブル振動計測データからの張力同定

多々羅大橋では、鉛直曲げ、ねじれ、水平曲げの計8種の振動モードに対して起振機による振動実験が行われ、それぞれに10本のケーブルの振動が加速度計または変位計により同時計測されている。これらのケーブル振動データにERA解析を適用し、各ケーブルの高次モードの固有振動数を同定することで、実橋でのケーブル実張力を同定した。解析結果の一例として、C37N(No.37北側)ケーブルの変位計測データに対してERA解析により同定された全ての固有振動数を、ERAでの採用次数に対してプロットしたものを図-14に示す。ケーブルの高次振動数の間隔が理論通り、ほぼ一定となっていることから、その振動数間隔 $\Delta\omega$ が0.64Hzとして同定され、ケーブル理論での高次振動数間隔($\Delta\omega = \pi/l \cdot \sqrt{T/m}$, l : ケーブル長さ, T : ケーブル張力, m : 単位長さ当たりケーブル質量)と対応させることでケーブル張力を4.66MNと同定することができる。

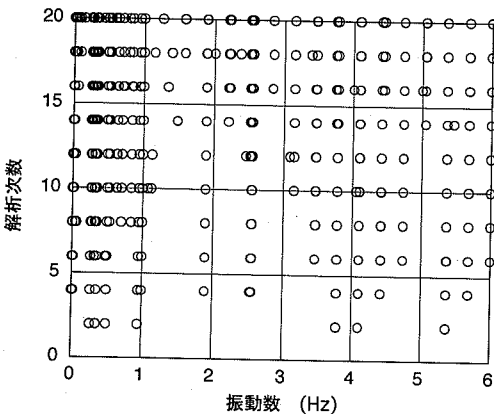


図-14 C37N ケーブルの同定振動数と解析次数の関係

(2) 修正された解析モデルに基づく理論モード解析

実験において振動計測された10本のケーブル全てにつき張力を同定し、表-3に示すように固有振動解析モデルの修正を行った。ただし、表に示したように、張力の修正量は最大でも-5.4%である。この修正張力を用いて多々羅大橋の固有振動解析を再度行い、固有振動数と振動モードを再評価した。前出の表-1および図-4にその結果を「同定張力」として、「設計張力」と比較して示している。これより、最大5%程度のケーブル張力調整によって生ずる固有振動数の変化は極めて小さいものの、振動モードにおけるケーブル振動の連成性は大きく異なる場合があって、ケーブル張力評価の重要性、およびケーブル振動連成特性を定量的に把握することの難しさが伺える。

5. モード減衰に及ぼすケーブル振動連成の影響解析

多々羅大橋では、上述のように、ケーブル振動が連成する主要振動モードのモード減衰が小さい。このケーブル振動連成が斜張橋システムのモード減衰に与える影響を理論的に考察するために、各部分構造の減衰性状を直接取り込んだ減衰解析を行った。

(1) 部分構造合成法に基づく減衰解析の定式化

斜張橋システムの任意の n 次モードの振動 U_n について、ケーブル振動が減衰に与える影響を解析するために、図-15に示すように、桁・塔から成る部分構造の振動に対応するモード座標と、ケーブルの部分構造振動に対応するモード座標を導入する。

$$U_n = \begin{Bmatrix} \phi_n^g \\ 0 \end{Bmatrix} q_n^g + \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_n^c \end{Bmatrix} q_n^c = \begin{bmatrix} \phi_n^g & 0 \\ 0 & \phi_n^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_n^g \\ q_n^c \end{Bmatrix} \quad (19)$$

(N × 1) (N × 2) (2 × 1)

ここで、 ϕ_n^g は桁・塔(全体からケーブルを除いた成分)に対応する振動モードベクトル成分、 ϕ_n^c はケーブルに対応する振動モードベクトル成分、 q_n^g 、 q_n^c は対応するモード座標である。通常モード解析法では $U_n = \phi_n q_n$ としてモード座標一つを対応させるが、各部分構造で異なる減衰性状を有することを解析に持ち込むため、式

表-3 ケーブル張力(MN)の設計値と同定値の比較

No.	1N	12N	26N	29S	37N	38N	42N	43N	44N	44S
設計	6.27	3.87	2.64	3.48	4.68	4.68	6.79	6.81	5.48	5.47
同定	5.85	3.86	2.46	3.23	4.66	4.71	6.48	6.75	5.33	5.22
差%	-4.8	+1.8	-5.0	-5.4	+1.6	+2.7	-2.5	+1.2	-0.7	-2.7

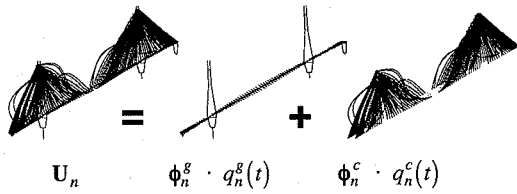


図-15 桁・塔とケーブルの各部分構造モードへの分解

$$c_n^{gg} = 2m_n^{gg} \xi_n^g \omega_n \quad (24a)$$

$$c_n^{cc} = 2m_n^{cc} \xi_n^c \omega_n \quad (24b)$$

式(23)の n 次モード減衰自由振動方程式に対して複素固有値解析を行うことにより、各部分構造の減衰性状が反映された、斜張橋システムのモード減衰を求めることが可能となる。

(19)のように、一つのモード振動を分解している。

簡単のため、桁・塔（全体からケーブル要素を除いた要素に対応する成分）を添字 1 で、ケーブルに対応する成分を添字 2 で表すものとすれば、斜張橋システムの自由振動方程式は以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_1 \\ \ddot{\mathbf{U}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

通常のモード解析法の手順と同様に、運動方程式(20)にモード座標で表した振動解(19)を代入し、左から拡張したモードマトリクス ($N \times 2$) の転置マトリクスを乗ずれば、以下のような n 次モードに対する 2 自由度系モード方程式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} m_n^{gg} & m_n^{gc} \\ m_n^{cg} & m_n^{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_n^g \\ \ddot{q}_n^c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_n^{gg} & k_n^{gc} \\ k_n^{cg} & k_n^{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_n^g \\ q_n^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ここで、各係数マトリクス (2×2) は次式となる。

$$\begin{bmatrix} m_n^{gg} & m_n^{gc} \\ m_n^{cg} & m_n^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n^{gT} \mathbf{M}_{11} \phi_n^g & \phi_n^{gT} \mathbf{M}_{12} \phi_n^c \\ \phi_n^{cT} \mathbf{M}_{21} \phi_n^g & \phi_n^{cT} \mathbf{M}_{22} \phi_n^c \end{bmatrix} \quad (22a)$$

$$\begin{bmatrix} k_n^{gg} & k_n^{gc} \\ k_n^{cg} & k_n^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_n^{gT} \mathbf{K}_{11} \phi_n^g & \phi_n^{gT} \mathbf{K}_{12} \phi_n^c \\ \phi_n^{cT} \mathbf{K}_{21} \phi_n^g & \phi_n^{cT} \mathbf{K}_{22} \phi_n^c \end{bmatrix} \quad (22b)$$

n 次モード方程式(21)に、各部分構造に対してモード減衰係数を定義して導入すれば、 n 次モードに対する減衰自由振動方程式が以下のように導かれる。

$$\begin{bmatrix} m_n^{gg} & m_n^{gc} \\ m_n^{cg} & m_n^{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_n^g \\ \ddot{q}_n^c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_n^{gg} & 0 \\ 0 & c_n^{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_n^g \\ \dot{q}_n^c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_n^{gg} & k_n^{gc} \\ k_n^{cg} & k_n^{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_n^g \\ q_n^c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式(23)における n 次モード減衰マトリクスにおいて、桁・塔およびケーブルに対応する対角成分のみを考え、減衰におけるそれらの連成である非対角項は無視できるものと仮定している。また、各部分構造のモード減衰係数 c_n^{gg} 、 c_n^{cc} については、各部分構造のモード減衰比 ξ_n^g 、 ξ_n^c が実橋振動実験結果から与えられるものとして、次式で評価することとする。

(2) 多々羅大橋でのケーブル連成振動の減衰効果

多々羅大橋の固有振動解析結果を用いて式(23)の n 次モード減衰自由振動方程式を評価し、複素固有値解析を行った。モード減衰マトリクスは式(24a, b)により評価したが、ケーブルの部分構造モード減衰比については、多々羅大橋のケーブル単体について行われた振動実験結果²²⁾である対数減衰率 0.001~0.005 を参照し、その下限を用いて $\delta_c = 0.001$ と仮定した。

桁・塔の部分構造モード減衰比については、その単体としての振動実験が不可能なことから、仮定することが難しい。本研究では、鉛直曲げ振動と水平曲げ振動については、ケーブル連成のほとんどない対称 1 次モードの減衰実測値を用い、その減衰要因が桁・塔部分構造のモード減衰であるとして、部分構造モード減衰比を同定した。一方、ねじれ振動については、どのモードにもケーブル振動が連成するため、対称 1 次モードの減衰実測値に近い値（対数減衰率で 0.01 と設定した）とすべく、前述のケーブル部分構造モード減衰 $\delta_c = 0.001$ の仮定の下に、桁・塔部分構造モード減衰 $\delta_g (= 2\pi\xi_g)$ を同定して与えた。つまり、桁・塔部分構造のモード減衰比は、鉛直曲げ、ねじれ、水平曲げの各振動に対して個別に与え、対数減衰率で $\delta_g^v = 0.025$ 、 $\delta_g^t = 0.040$ 、 $\delta_g^l = 0.125$ を仮定した。なお、水平曲げ振動に対する大きな桁・塔部分構造モード減衰値は、前述したフェアリング部での摩擦を反映しているものと考えられる。

a) 鉛直曲げ振動モード

図-16 は鉛直曲げ振動モードについて、解析結果を、固有振動数とモード減衰（対数減衰率）の関係として、実験値と比較して示したものである。解析結果には、ケーブル張力として前述の実験同定張力を用いて求めた理論モードによる減衰解析結果だけでなく、設計張力による同様の結果も比較して示してある。図より明らかなように、解析値にはケーブル張力設定による差はほとんどなく、全てのモード減衰について実験値にほぼ整合して、部分構造合成法に基づく減衰解析の有用性が示されたと言える。

図には、ケーブル部分構造のモード減衰 δ_c を、桁・塔のそれ δ_g^v と同じ値に設定した場合の結果（図中の×）も示すとともに、全てのケーブルの局所モード固有振動数とモード減衰の範囲も示した。ケーブルの減衰が桁や

塔と同じであるとした場合の減衰解析値は、振動モードに依存せず、桁・塔の部分構造モード δ_0^* にほぼ等しく一定値となっており、ケーブル連成の生ずるモードの減衰実験値（あるいは他の解析値）よりはるかに大きくなる。このことと、鉛直振動高次モードでケーブル振動の連成が顕著になることから、斜張橋システム減衰の低下は減衰の極めて小さなケーブルの連成振動によると結論され、本解析によってその特性を定量的に示すことができたと言える。

b) ねじれ振動モード

図-17 はねじれ振動モードについての同様の図で、固有振動数とモード減衰（対数減衰率）の関係を示している。実験値に認められる対称1次、逆対称1次モードの対数減衰率の増加傾向を、いずれの解析でも示すことができている。これは、ねじれ逆対称1次振動のケーブル振動連成が対称1次振動に比べて顕著ではない（図-4）ことに起因するが、ケーブル張力として実験同定値を用いた解析では、このケーブル連成振動がより精度良く求められていると考えられ、解析値が実験値により近づいている。以上のことから、ねじれ振動についても、ケーブル連成振動による斜張橋システム減衰の低下を定量的に示すことができたと言える。

c) 水平曲げ振動モード

図-18 は水平振動モードについての同様のグラフである。対称1次モードについてはケーブル連成がほとんどなく、この実験値を基に桁・塔部分構造モード減衰比を同定したことから、解析値と実験値との差はほとんどない。また、対称2次モードについてはケーブル振動連成が顕著であって、ケーブル連成振動を比較的正しく評価していると思われる解析値（同定張力）は実験値をうまく説明し、小さなモード減衰を与えている。これに対し、逆対称1次モードでは解析値と実験値の差が極めて大きい。これは、前述したように、水平振動モードではフェアリングのボルト接合部などの摩擦減衰が大きく影響しており、その摩擦減衰の大きさは振動モードや振幅に大きく依存するため、ケーブル振動の影響のみを考慮する本解析では接合部の摩擦減衰を評価できないことによると考えられる。

6. 結論

世界最長の斜張橋である多々羅大橋の実橋振動実験において、数多くの固有振動モードに多数のケーブル振動が連成することが確認されると同時に、ケーブルの連成する振動モードの減衰が極めて小さくなる傾向が認められた。これは、部分構造であるケーブルの減衰が小さく、その部分構造の連成振動によって全体構造システムの減

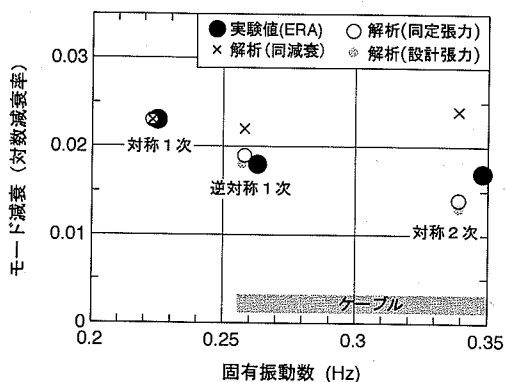


図-16 減衰解析による鉛直曲げモード減衰の比較

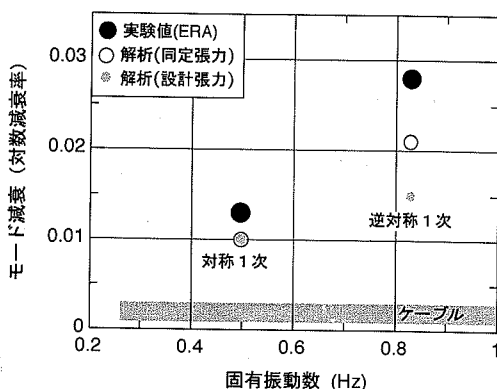


図-17 減衰解析によるねじれモード減衰の比較

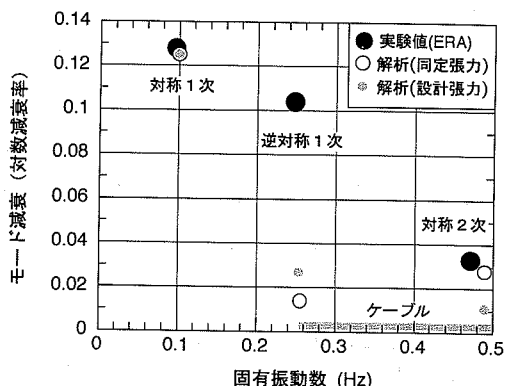


図-18 減衰解析による水平曲げモード減衰の比較

衰が引き下げられたためと考えられ、本研究ではこれを部分構造合成法の考え方にに基づき減衰解析を行って、理論的かつ定量的に解明することを試みた。その際、理論モード解析を行ってケーブル振動連成特性を考察すると同時に、実橋振動実験データを高精度モード同定法である ERA によって再解析し、実験モード解析からの考察

の信頼性を高めている。また、ケーブル振動連成の定量的な考察のため、同時計測されたケーブル振動データを用いてケーブル張力の同定を行い、この実験同定張力を用いて再度、理論モード解析を行って、ケーブル張力評価が固有振動特性に及ぼす影響を考察している。本研究の成果を整理して示すと以下のようである。

- (1) 理論モード解析の結果、長大斜張橋では主要な振動モードにおいて、内部共振に基づくケーブル振動連成が顕著になること、およびその連成の可能性はケーブル局所振動の固有振動数と斜張橋全体振動の固有振動の関係から考察可能であることが確認された。
- (2) 実橋振動実験での多点計測データに、ERA に基づく実験モード解析を適用した結果、高精度で信頼性の高いモード特性を再同定することができた。
- (3) 実験モード解析の結果、主要モードでのケーブル振動連成が顕著であること、対応するモード減衰が小さくなることが確認できた。このため、既存の斜張橋の減衰特性と比較すると、多々羅大橋は鉛直曲げ振動、ねじれ振動ともに下限のモード減衰性能を与える。
- (4) ERA 解析を区分データ毎に行った結果、モード減衰には振幅依存性があり、特に高次振動モードにおいてそれが顕著であることが明らかとなった。
- (5) ケーブル振動の連成度を設計時に定量的に把握することは、それが減衰の非常に小さな振動系の内部共振現象であること、およびその固有振動数を支配するケーブル張力が設計値に対して誤差を持つことから、簡単ではない。
- (6) 多々羅大橋の場合、実際の導入張力と設計張力の差は高々5%程度であり、この差による斜張橋全体モードの固有振動数の解析誤差はほとんど生じない。しかし、ケーブル振動連成特性に及ぼす影響は大きい。
- (7) 部分構造合成法に基づく減衰解析により、ケーブル振動連成がモード減衰を小さくすることを、定量的かつ理論的に示すことができた。

謝辞：斜張橋の固有振動解析には、長岡技術科学大学・長井正嗣教授グループの開発したプログラムを使わせて頂いた。ここに記して深謝の意を表する。

参考文献

- 1) ロングスパン・スペース構造研究小委員会編：ケーブル・スペース構造の基礎と応用，土木学会，pp.82-84, 1999年。
- 2) Yamaguchi, H. and Fujino, Y.: Stayed cable dynamics and its vibration control, *Bridge Aerodynamics*, Larsen, A. & Esdahl, S. (eds), Balkema, Rotterdam, pp.235-253, 1998.

- 3) 藤野陽三, Warnitchai, P., Pacheco, B.M.: ケーブル・はりモデルを用いた斜張橋の内部共振に関する実験と解析, 土木学会論文集, No.432/I-16, pp.109-118, 1991年7月。
- 4) Fujino, Y. and Kimura, K.: Cables and cable vibration in cable-supported bridges, *Proceedings of Int. Seminar on Cable Dynamics*, Tokyo, 13 Oct. 1997, pp.1-11, 1997.
- 5) Pinto da Costa, A., Mrtins, J., Branco, F. and Lilien J.L.: Oscillations of bridge stay-cables induced by periodic motions of deck and/or towers, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.122, No.7, pp.613-622, 1996.
- 6) Wu, Qingxiang, Takahashi, K., Okabayashi, T. and Nakamura, S.: Response characteristics on local vibrations of stay cables in an existing cable-stayed bridge, *Proceedings of 4th Int. Symposium on Cable Dynamics*, Montreal, 28-30 May 2001, pp.101-108, 2001.
- 7) 前田幸雄, 前田研一, 越後滋: 斜張橋のシステムダンピングに関する2, 3の考察, 土木学会論文報告集, No.333, pp.35-45, 1983年5月。
- 8) 前田研一, 米田昌弘: マルチケーブル形式斜張橋の構造減衰特性に及ぼすケーブルダンパーの効果, 土木学会論文集, ノート, No.404/I-11, pp.451-454, 1989年4月。
- 9) 山口宏樹, 高野晴夫, 小笠原政文, 下里哲浩, 加藤真志, 加藤久人: 斜張橋振動減衰のエネルギーの評価法と鶴見つばさ橋への適用, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.217-227, 1996年7月。
- 10) Yamaguchi, H. and Ito, M.: Mode-dependence of structural damping in cable-stayed bridges, *Journal of Wind Eng. And Industrial Aerodynamics*, Vol.72, pp.289-300, 1997.
- 11) 岡内功, 宮田利雄, 辰巳正明, 佐々木伸幸: 大振幅加振による長大斜張橋の実橋振動実験, 土木学会論文集, No.455/I-21, pp.75-84, 1992年10月。
- 12) 藤原亨, 玉越隆史, 植田利夫, 南條正洋, 小林義和: マルチケーブル複合構造形式斜張橋の固有振動特性, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.39A, pp.831-839, 1993年3月。
- 13) 和田克哉, 高野晴夫, 林寛之, 小山次郎, 津村直宜: 横浜ベイブリッジの振動実験, 橋梁と基礎, Vol.26, pp.15-18, 1992年2月。
- 14) 山口宏樹, 高野晴夫, 小笠原政文, 下里哲浩, 加藤真志, 岡田淳: 鶴見つばさ橋の振動実験による動的特性の同定, 土木学会論文集, No.543/I-36, pp.247-258, 1996年7月。
- 15) 真辺保仁, 佐々木伸幸, 山口和範: 多々羅大橋の実橋振動実験, 橋梁と基礎, Vol.33, pp.27-30, 1999年5月。
- 16) 川端治: ケーブルにモード座標を用いた斜張橋の応答解析, 長岡技術科学大学修士論文, 1992年3月。
- 17) 長松昭男: モード解析, 培風館, pp.218-222, 1985年。
- 18) Juang, J.-N. and Pappa, R.S.: An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol.8, No.5, pp.620-627, 1985.
- 19) 安田大樹, 山口宏樹: ERA を用いた構造物のモード特性同定とその部分構造同定への適用, 土木学会第57回年次学術講演会講演概要集, I-570, pp.1139-1140, 2002年9月。
- 20) 吉川恒夫, 井村順一: 現代制御論, 昭晃堂, pp.69-86, 1994年。
- 21) 野波健蔵, 西村秀和: MTLAB による制御理論の基礎, 東京電機大学出版局, pp.143-174, 1998年。
- 22) 藤原亨, 真辺保仁, 山口和範: 多々羅大橋ケーブル制振対策, 橋梁と基礎, Vol.33, pp.16-19, 1999年5月。

(2003.12.8 受付)

COUPLING OF CABLE VIBRATION AND ITS DAMPING EFFECT IN LONG-SPAN CABLE-STAYED BRIDGE: THE TATARA BRIDGE

Hiroki YAMAGUCHI, Toru FUJIWARA, Kazunori YAMAGUCHI,
Yasunao MATSUMOTO and Kazuhiko TSUTSUMI

The present paper discusses characteristics of coupled cable vibration and its effects on damping of the Tataru Bridge, the world-longest cable-stayed bridge at the moment, by the theoretical modal analysis based on the substructural synthesis and also by the experimental modal analysis based on the Eigensystem Realization Algorithm.

It is found through this study that many numbers of cables' local modes can be coupled with the principle global-modes of long-span cable-stayed bridges, which can reduce the damping ratios of the global modes of bridge due to low damping characteristics of the stay cables.