

破壊現象の解析に適した有限要素法の提案

小国 健二¹・堀 宗朗²・阪口 秀³

¹正会員 Ph.D. 東京大学助手 地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

²正会員 Ph.D. 東京大学教授 地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

³正会員 Ph.D. 東京大学客員講師 地震研究所 (〒 113-0032 東京都文京区弥生 1-1-1)

破壊現象の簡便な数値解析手法, FEM- β を提案する. FEM- β は, いたるところ不連続かつ重なりのない形状関数と, 双対図形によるひずみ場・応力場の離散化を用いて, 連続体の数値モデルである境界値問題を数値的に解く手法であり, 特殊な変位場を用いた有限要素法 (FEM) と位置づけられる.

FEM- β は通常の FEM (一樣ひずみ三角形要素) と同等の精度・局所性 (疎行列) を保ちつつ, 破壊を簡便に表現する仕組みをもつパーティクル・フィジックス・モデルを与える. この意味で, FEM- β を FEM の観点から個別要素法 (DEM) を定式化しなおしたものとみなし, 連続体との等価性を保証する相互作用バネ定数を一意に決定する仕組みを持つ DEM と位置づけることもできる.

Key Words : FEM- β , failure phenomena, non-overlapping shape function, particle discretization, DEM

1. はじめに

有限要素法 (FEM) は, 連続体モデルに基づく境界値問題を数値的に解く手法であり, 固体の力学的挙動の代表的な数値解析手法である. 材料非線型・幾何非線型・動的問題など幅広い問題の解析が可能であり, 手法そのものとしての FEM は, ほぼ完成の域に達している¹⁾. しかし, 破壊現象の解析に関しては未だ決着がついておらず, 様々な改良手法が提案されている.

FEM では弱形式ないし汎関数を使って境界値問題を数値的に解く際に, 解析領域を空間的に分割し, 各々の分割に対応した局所基底を導入する. 各々の部分領域が「要素」であり, 局所基底が「形状関数」を構成する. FEM で通常用いられる形状関数は, 要素を構成する節点間を補間する簡単な多項式の重ね合わせにより表現され, i) 少数の要素においてのみ非零となるため, 導出される線型方程式の中に現れる行列が疎行列となる, ii) Dirichlet 型境界条件 (変位境界条件) が, 節点での値 (節点変位) で代表される, iii) 一樣ひずみ場を表現できる. 関数の離散化に際し, このような特徴をもつ形状関数を導入した点が, FEM に高い計算効率, 精度を与える最大要因である. しかし, このような「なめらか」かつ「互いに重なり合う」形状関数を要素の内部で「切る」ことは特別な仕組みなしには不可能であり, 破壊により生じる変位関数の不連続を FEM の枠組みの中で表現することは難しい.

破壊 (不連続場の発生) を表現するために FEM に加えられてきた改良は, i) 破壊面が要素を通過しないようにする, ii) 破壊に伴う不連続性を汎関数へのペナル

ティとして表現する, iii) 基底の取り方を変える, 3 つの方針に大別される. 代表的な手法として, i) では破壊面に沿って要素を作り変えるリメッシュ, ii) では強不連続解析^{2),3),4),5)}, iii) ではエレメント・フリー・ガラーキン法^{6),7),8)}などが挙げられる. しかし, いずれの手法も「なめらか」かつ「互いに重なり合う」という形状関数の性質を残しており, 結果として, 計算コスト (i, iii), 一般性 (ii), 局所性 (iii) の面で問題が残る. 特に, 近年盛んに研究されているエレメント・フリー・ガラーキン法を採り上げてこの点を詳しく見る. 移動最小自乗法を用いて変位場を離散化するこの手法では, 形状関数の中にブランチを入れて不連続面を表現することが出来る. しかし, 形状関数の評価, 剛性マトリクスの計算時の積分の計算コストが通常の FEM より高い. また, 移動平均をとる領域の選び方によっては局所性が失われ, 係数行列のバンド幅が広がる. さらに, Dirichlet 型境界条件は節点変位と対応していない. 結果的に, エレメント・フリー・ガラーキン法は形状関数に不連続性を組み込む簡単な仕組みをもちながら, 破壊現象解析のための決定打とはなりえていない.

一方, 連続体モデルから境界値問題という流れに沿わず, 粒子モデルの設定とその挙動の数値解析という流れに基づく「パーティクル・フィジックス」の手法も, 主に粉体や流体の力学的挙動の数値解析に適用されてきた^{9),10),11),12)}. この手法では前進解法が用いられるため, 大規模計算に適している. この手法を固体の破壊現象の解析に適用したものが個別要素法 (DEM) である^{13),14),15),16)}. DEM では, 材料は剛体ブロックとブロック間をつなぐバネの集合としてモデル化され,

破壊はバネの切断(軟化)で表現される。このような破壊の簡便な表現は、DEMのようなパーティクル・モデルでのみ実現可能である。これに比較すると、「互いに重なり合う」形状関数を用いるFEMでの破壊の表現には、形状関数を連続から不連続へ変化させることが必要となる。

DEMに基づく解析では実験で観察される破壊のパターンはうまく再現される。しかし、DEMは材料のマクロな物性から剛体ブロック間をつなぐバネのバネ定数を一意に与える理論的裏づけに乏しく、もとの物理現象との等価性が必ずしも明確ではない。

以上の議論は次の二点として整理される。i) DEMでは、変形する物体を剛体とバネの集合としてモデル化する。これは物体の連続体モデルとは異なっているが、破壊現象の解析には適している。ii) 一方、連続体モデルでは物体の材料特性が測定できる量としてきちんと定義されている。DEMのバネ定数もその材料特性から決定されることが望ましいが、決定の方法は確立されていない。破壊現象の数値解法を構築するためには、連続体モデルの解法という観点からDEMを見直し、その長所をFEMに取り込めばよい。DEMの見直しは実は容易であり、各ブロックで1、他のブロックで0の値を取る特性関数を用いて変位場を離散化していると見なせる。この結果、変位場は「いたるところ不連続」かつ「互いに重なり合わない」関数として表現され、破壊に伴う不連続の表現に適したものになっている。

以上の考察から、本論文では「特性関数を形状関数とするFEM」、FEM- β を開発・提案する。この手法はFEMと同等の局所性(疎行列)・精度(一様ひずみの表現能)・(Dirichlet型)境界条件の節点変位との対応をもち、破壊に伴う不連続性の表現に関してはDEMと同様の簡便さをもつ。FEM- β の開発に際しての具体的な課題は、いたるところ不連続かつ重なりのない形状関数で表される変位場に対するひずみ場・ひずみエネルギーの評価、連続体内部で発生する破壊の表現方法の発見である。

なお、土木分野におけるDEMは、土・亀裂性岩盤などの破壊現象の解析に適用されてきた。これらの適用対象では個々の土粒子の動き¹⁷⁾、節理で分割される岩体の挙動¹⁸⁾が現象の支配的要因であり、DEMの「パーティクル・フィジックス」的性質にうまくなじむ対象である。一方、コンクリート構造物の崩壊のような破壊現象の解析のために、DEMを連続体の力学挙動の解析に拡張する試みも見られる^{19),20)}。しかし、DEMの連続体への拡張に際し、材料のマクロな物性と剛体ブロック間のバネ定数とを結びつけることは困難な問題であり、現状では主に経験的・直観的に設定したバネ定数が用いられている。これを理論的に設定する試み²¹⁾では、

剛体ブロックの配置や材料定数に制限があることが示されている。後述するが(3章)、通常のDEMの枠組み(2つの剛体ブロックを結ぶバネによる相互作用の評価)をそのまま連続体解析へ移植してマクロな物性と等価なバネを設定することは、原理的に不可能である。

本論文では最初に簡単な棒の問題を例としてFEM- β の離散化の特徴を示した後、2次元問題の定式化を行い、より一般的なFEM- β の形を示す。次に既存手法との比較に基づき、FEM- β の重要な特徴を示す。最後にFEM- β の精度・収束性など、数値解析手法としての基本的な特徴を数値解析例を用いて説明する。なお、本論文の表記に関しては u 、 σ などの太斜体シンボルはベクトル量、テンソル量を表し、下添字つき表記 u_i 、 σ_{ij} などはそれぞれの成分を表す。また、特に断らない限り、総和規約を用いた。

2. FEM- β の定式化

FEM- β の最大の特徴は、変位場の離散化の方法にある。変位場はいたるところ不連続な関数を用いて離散化される。本章では最初に1次元問題(棒の変形の問題)を例として、FEM- β の変位場とそれに対応するひずみ場の離散化について、通常のFEMと比較しながらその相違点・類似点を明確にする。次に2次元問題を例に、より一般的な形の変位場・ひずみ場に関するFEM- β の定式化を行うとともに、破壊現象の解析の中でFEM- β の特殊な変位場がもつ意義に言及する。最後にひずみエネルギー・剛性マトリクス・境界条件に関する定式化を行う。

(1) 1次元問題の定式化

a) 問題設定

一端($x=0$)を固定され、均一な断面剛性 $AE=1$ (A : 断面積, E : ヤング率)をもつ長さ L の棒の引張の問題を考える。解くべき境界値問題は

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 & 0 < x < L \\ u = 0, \bar{u} & \text{at } x = 0, L \end{cases} \quad (1)$$

となる。ここで、 u は軸方向変位を表す。この境界値問題は $x=0, L$ で $u=0, \bar{u}$ をそれぞれ満たす u に対して、以下の汎関数を停留させる変分問題と等価である。

$$J(u) = \int_0^L e(\epsilon) dl \quad (2)$$

ここで、 e は軸ひずみ $\epsilon = u'$ に対応するひずみエネルギー密度で、

$$e(\epsilon) = \frac{1}{2}(u')^2 \quad (3)$$

である。

b) 変位場の離散化

棒の問題に対する汎関数, 式 (2) を数値的に評価するために, 通常の FEM (線型補間) では棒をいくつかの区間に分割して考える。このとき, 変位場 $u(x)$ は α 番目の節点 x^α に対する形状関数

$$\psi^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x - x^{\alpha-1}}{x^\alpha - x^{\alpha-1}} & \text{for } x^{\alpha-1} \leq x \leq x^\alpha \\ \frac{x^{\alpha+1} - x}{x^{\alpha+1} - x^\alpha} & \text{for } x^\alpha \leq x \leq x^{\alpha+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いて以下のように離散化される。

$$u(x) = \sum_{\alpha=1}^N u^\alpha \psi^\alpha(x) \quad (4)$$

ここで N は節点数を, u^α は α 番目の節点 x^α の変位を表す。

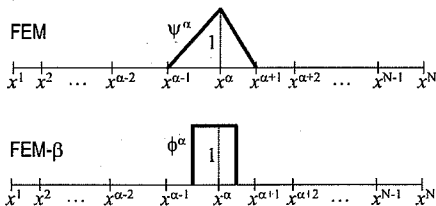
FEM- β でも, 通常の FEM と同じ区間分割を解析領域にほどこし, 式 (2) の汎関数を数値的に評価する。ただし, 変位場の離散化の方法が通常の FEM と異なる。FEM- β では変位場 $u(x)$ を, α 番目の節点 x^α を含む領域に立つ特性関数

$$\phi^\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \frac{x^{\alpha-1} + x^\alpha}{2} \leq x \leq \frac{x^\alpha + x^{\alpha+1}}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いて以下のように離散化する。

$$u(x) = \sum_{\alpha=1}^N u^\alpha \phi^\alpha(x) \quad (5)$$

Shape Function



Displacement Field

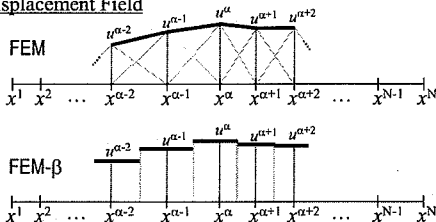


図-1 1次元問題での変位補間関数と変位場: FEM- β と FEM との比較

図-1に通常の FEM と FEM- β それぞれの変位補間関数と離散化された変位場を表す。通常の FEM では隣り合う節点に対応する変位補間関数 (形状関数) 同士が重なり合い, 節点変位で重み付けされた変位補間関数の重ね合わせが変位場となる。一方, FEM- β では変位補間関数 (特性関数) に重なりがない。また, 離散化された変位場は個々の特性関数を節点変位で重み付けしたものであり, 個々の節点に対応する特性関数の境界上で不連続となる。この, いたるところ不連続な変位場の導入が FEM- β と通常の FEM との最大の相違点である。破壊現象の解析において, この不連続変位場を持つ意義については次節以降で述べる。

c) ひずみ場の離散化

FEM- β において式 (5) で離散化された不連続な変位場に対応するひずみ場を直接計算すると, 各区間の境界に δ -関数が立ち上がる特異な場となる。FEM- β ではこのような空間微分によって定義されるひずみ場を直接用いることはせず, ある区間 h での平均ひずみ, $\bar{\epsilon}$ を評価する。

$$\bar{\epsilon} = \frac{u^+ - u^-}{h} \quad (6)$$

ここで u^+ , u^- はそれぞれ区間の正の面, 負の面の軸方向変位を表す。式 (6) の平均ひずみを用いて汎関数 $J(u)$ を数値的に評価する。

棒の問題に対する FEM- β では, ひずみの平均化の最小区間 h を, 隣接する 2 つの節点を両端とする区間とする。この最小区間は線型補間の形状関数を用いた通常の FEM の「要素」と一致する。さらにこのとき, FEM- β の平均ひずみ, $\bar{\epsilon}$ は線型補間の形状関数を用いた通常の FEM で計算される, 要素内で一様のひずみと一致する。

この結果は一見自明とも思えるが, ひずみの平均化の最小区間 h の選択は自明ではなく, 異なった h を用いて平均ひずみを計算すると, 得られる変位-ひずみ関係が異なることに注意が必要である。FEM- β において通常の FEM と等価な平均ひずみを与える h は, 変位場の離散化に用いられる特性関数に対して一意に決まる区間であり, その選択には必然性がある (付録 I 参照)。

(2) 2次元問題の定式化

a) 問題設定

2次元の連続体の最も簡単なモデルとして均一弾性体の板 Ω を考える。変位境界条件 \bar{u} が与えられたとき, 解くべき境界値問題は

$$\begin{cases} c_{ijkl} u_{k,l} = 0 & \text{in } \Omega \\ u_i = \bar{u}_i & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

となる。ここで, u_i は変位場を, c_{ijkl} は弾性係数を表す。この境界値問題は $\partial\Omega$ で $u_i = \bar{u}_i$ を満たす変位場

u に対して、以下の汎関数を停留させる変分問題と等価である。

$$J(u) = \int_{\Omega} e(\epsilon) d\Omega \quad (8)$$

ここで、 e はひずみ $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ に対応するひずみエネルギー密度で、

$$e(\epsilon) = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (9)$$

である。

b) 変位場の離散化

2次元問題に対する FEM- β では、Voronoi 分割 (付録 II 参照) による空間の離散化に基づき、変位場を離散化する。具体的には、解析領域 Ω 内に分散させた点群 $\{x^\alpha\}$ に Voronoi 分割を施し、各点 x^α に対応する Voronoi ブロック Ω^α がそれぞれ剛体変位 (並進および x^α を中心とした回転) するような変位場を考える。つまり、変位場は Ω^α 上に立つ特性関数

$$\phi^\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \Omega^\alpha \\ 0 & \text{for } x \notin \Omega^\alpha \end{cases}$$

を用いて以下のように離散化される。

$$u_i(x) = \sum_{\alpha=1}^N \{u_i^\alpha + \theta^\alpha \omega_{ij}(x_j - x_j^\alpha)\} \phi^\alpha(x). \quad (10)$$

ここで N は Voronoi ブロック (あるいは解析領域内に分散させた点) の数を、 u^α, θ^α はそれぞれ α 番目の Voronoi ブロックの中心 x^α の変位および回転を表す。また、 ω_{ij} は 2 行 2 列の反対称行列であり、その成分は $\omega_{11} = \omega_{22} = 0, \omega_{12} = -1, \omega_{21} = 1$ である。

式 (10) で離散化された FEM- β の変位場と通常の FEM の変位場との比較を、図-2 に示す。ただし、ここでは (FEM では考慮されていない) 回転の影響を FEM- β の変位場から除いたものと FEM の変位場を比較し、FEM- β の変位場の離散化に特性関数を導入した意義を明確にする。

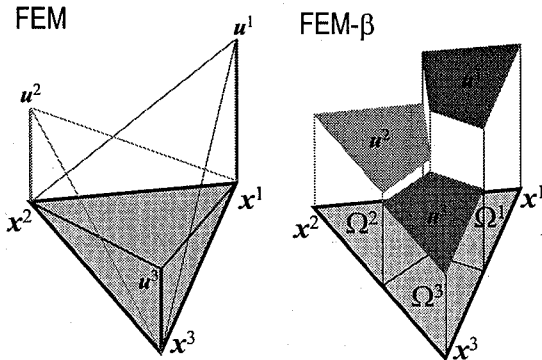


図-2 2次元問題での変位場の離散化: FEM- β と通常の FEM

通常の FEM では要素を構成する節点の変位を補間する関数 (形状関数) が要素内で互いに重なり合っている。この、i) 「互いに重なり合う」・「区間的に滑らかな」形状関数の集合を解空間として想定し、ii) 想定した解空間の中で汎関数を最小化、という手順は偏微分方程式の数値解法の標準の手順であり、FEM のみならず要素を定義しないエレメント・フリー・ガラーキン法にも見られる。これらの手法を用いて破壊を扱う場合、重なり合った形状関数を切断する仕組みが存在しないため、破壊面上に新たな節点を作り要素を作り直す (FEM におけるリメッシュ)、形状関数にブランチを導入して破壊面を表現する⁶⁾、不連続面を導入することによる矛盾を内部ペナルティ関数により解消する²⁾、といった特別な仕組みを導入する必要がある。

これに反して、FEM- β では形状関数に重なりがない。したがって、DEM と同様、ブロック間の相互作用の変化のみ (切断・軟化) で破壊を表現することが出来る。破壊前後で離散化・形状関数を変化させる必要がない。つまり、もともと不連続な変位場を解空間に想定しているため、破壊を「連続から不連続への形状関数の質的な変化」ではなく、「隣接するブロック間の相互作用の強さの量的な変化」で表現することが出来る。これが FEM- β で破壊現象を簡便に取り扱うための仕組みである。

なお、FEM- β の定式化の中での回転の自由度は、Voronoi ブロック内での変位場の特殊な形の線型補間に相当し、FEM- β での高次の変位補間の一例とみなされる。

c) ひずみ場の離散化

式 (10) のいたるところ不連続な関数による変位場の離散化により、FEM- β には破壊現象を簡便に取り扱う仕組みが導入されたが、式 (8) の汎関数の評価のためには、ひずみ場・応力場の離散化に特別な注意を払う必要がある。変位場の空間微分を直接用いると、棒の問題の場合と同様に Voronoi ブロックの境界に沿って δ -関数が立ち上がる特異なひずみ場が作られる。FEM- β ではこの特異なひずみ場を直接用いることはせず、ガウスの発散定理を適用し、ある領域 S 内での平均ひずみを評価する。

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2s} \int_{\partial S} (u_i n_j + u_j n_i) dl. \quad (11)$$

ここで n_i は領域 S の外向き単位法線ベクトルの i 方向成分を、 s は領域 S の面積を表す。式 (11) の平均ひずみを用いて汎関数 $J(u)$ の数値的評価を行う。

FEM- β では、ひずみの平均化の最小領域 S として 3 つの隣接 Voronoi ブロック $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ それぞれの中心 x^1, x^2, x^3 を直線で結んだ線分に囲まれる三角形領域をとる。この三角形 (Delaunay 三角形) による領

域分割は、変位場の離散化の際に導入した Voronoi 分割と 1 対 1 に対応する共役な平面分割である (図-3 参照)。なお、1 次元問題の場合の変位場の区間分割は直線の Voronoi 分割に、ひずみの平均化の区間は Voronoi 分割と共役な区間分割という意味で Delaunay 分割に対応する。

領域 S の頂点のひとつ x^1 の変位 u^1 , 回転 θ^1 の平均ひずみへの寄与を式 (11) の定義に従って計算すると以下ようになる。

$$\bar{\epsilon} = \mathbf{B}^1 \mathbf{U}^1 \quad (12)$$

ここで、平均ひずみベクトル $\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}, 2\bar{\epsilon}_{12}]^T$, 変位ベクトル $\mathbf{U}^1 = [u_1^1, u_2^1, \theta^1]^T$ であり、両者を結ぶ 3 行 3 列の行列、 \mathbf{B}^1 は次のように与えられる。

$$\mathbf{B}^1 = \frac{1}{2s} \begin{bmatrix} x_2^2 - x_2^3 & 0 & \frac{1}{4} \left\{ (r_2^2)^2 - (r_2^1)^2 \right\} \\ 0 & x_1^3 - x_1^2 & \frac{1}{4} \left\{ (r_1^2)^2 - (r_1^1)^2 \right\} \\ x_1^3 - x_1^2 & x_2^2 - x_2^3 & \frac{1}{2} (r_1^1 r_2^1 - r_1^2 r_2^2) \end{bmatrix}$$

ここで、 $r_1^1 = x_1^2 - x_1^1$, $r_2^1 = x_2^2 - x_2^1$, $r_1^2 = x_1^3 - x_1^1$, $r_2^2 = x_2^3 - x_2^1$ である。領域 S の平均ひずみに対する各頂点の寄与を式 (12) の添字を適切に換えることにより評価すると、

$$\bar{\epsilon} = [\mathbf{B}^1 \mathbf{B}^2 \mathbf{B}^3] \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \\ \mathbf{U}^3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

の形で、領域 S を構成する Voronoi ブロックの中心の変位ベクトル $\mathbf{U} = [u_1^1, u_2^1, \theta^1, \dots, u_2^3, \theta^3]^T$ と領域 S 内の平均ひずみベクトルの関係を表す 3 行 9 列の行列 $\mathbf{B} = [\mathbf{B}^1 \mathbf{B}^2 \mathbf{B}^3]$ を定義できる。

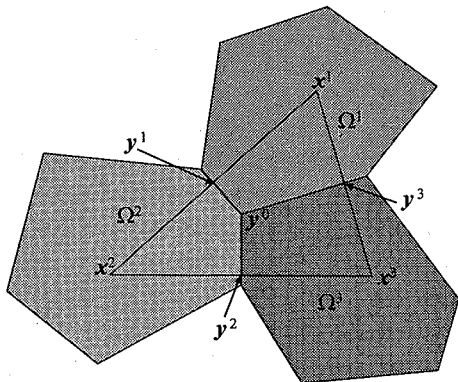


図-3 ひずみの平均化領域 S

この行列 \mathbf{B} から回転の自由度に対応する第 3, 6, 9 列を除いて作られる 3 行 6 列の行列は、三角形要素 (線型補間形状関数) を用いた FEM の \mathbf{B} -マトリクスと一致する。したがって、棒の問題と同様、2 次元問題においても FEM- β の変位-ひずみ関係は、一様ひずみ要素の FEM のそれと一致する (3 章に詳述)。ただし、通常の FEM と等価な平均ひずみを与える平均化領域 S は、変位場の離散化に用いられる特性関数に対して一意に決まる領域であり、この選択にも棒の問題の場合と同様の必然性がある。

なお、式 (13) には Voronoi ブロック境界と領域 S の境界の交点 y^1, y^2, y^3 は陽には表れていないが、それぞれが領域 S の対応する境界の midpoint に一致しない場合、平均ひずみと節点変位の関係は式 (13) の形にはならず、FEM との等価性も損なわれる。ただし、Voronoi ブロックの三重接合点 y^0 の座標は、領域 S での平均ひずみに影響を与えない。したがって、ブロック境界が y^1, y^2, y^3 を通過する限り、 y^0 の位置は任意にとることが出来る。更に、 y^0 と y^1, y^2, y^3 を結ぶ線は直線である必要もない。つまり、図-4 に示すすべての場合について、平均ひずみと節点変位の関係は通常の FEM のそれと等価である。これは、FEM- β における破壊面の選択には自由度があることを示している。ただし、本稿では簡単のため、 y^0 の位置は通常の Voronoi 分割による三重接合点とし、破壊は y^0 と y^1, y^2, y^3 をそれぞれ結ぶ直線上で起こりうるものとする。

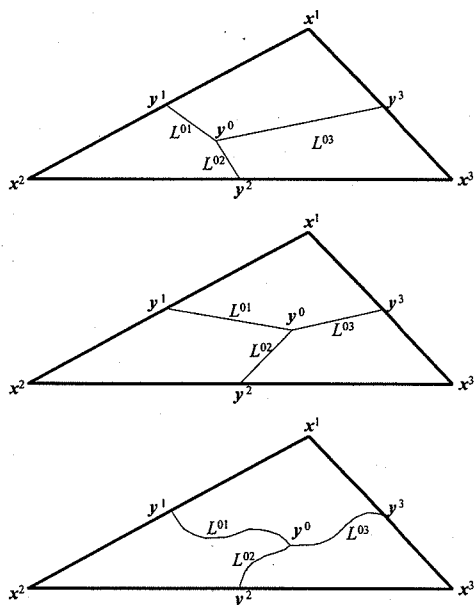


図-4 三重接合点 y^0 の位置とブロック境界の形状の任意性

(3) ひずみエネルギー・剛性マトリクス

1次元問題の場合、平均ひずみ $\bar{\epsilon}$ と、断面剛性 AE とを用いて、区間 h 内での平均ひずみエネルギー密度 \bar{e} を

$$\bar{e} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{b}^T AE \mathbf{b}) \mathbf{u} \quad (14)$$

で定義する。ここで、 $\mathbf{b} = [1/h, -1/h]$ は変位ベクトル $\mathbf{u} = [u^+, u^-]^T$ と平均ひずみ $\bar{\epsilon}$ との関係を表すベクトルであり、式 (6) から得られる。

2次元問題の場合、式 (13) で計算される平均ひずみ $\bar{\epsilon}$ と、弾性係数 c_{ijkl} から決められる 3 行 3 列の行列 \mathbf{C} とを用いて、領域 S 内での平均ひずみエネルギー密度 \bar{e} を

$$\bar{e} = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}) \mathbf{U} \quad (15)$$

で定義する。

汎関数 J は、それぞれの平均ひずみエネルギー密度を各々の平均化領域で積分したものの和を解析領域全体について取ることににより数値的に評価される。式 (14) 中の $\mathbf{b}^T AE \mathbf{b}$ は、区間 h の端点を節点、区間 h を線要素とみなして定式化した通常の FEM における 1 次元線要素の要素剛性マトリクス (ただしこの場合はスカラー量) に対応・一致する。2次元問題の場合、式 (15) から回転の自由度を除いて、すなわち、行列 \mathbf{B} から第 3, 6, 9 列を、 \mathbf{U} から第 3, 6, 9 成分をそれぞれ除いて平均ひずみエネルギーを評価すると、 $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ は通常の FEM において $\{x^1, x^2, x^3\}$ を節点、領域 S を要素とみなして定式化した一様ひずみ三角形要素の要素剛性マトリクスに対応・一致する。全体剛性マトリクスは 1 次元・2次元どちらの問題に対しても通常の FEM と同様の手順で要素剛性マトリクスを合成することにより構成される。したがって、FEM- β の剛性マトリクスは通常の FEM の剛性マトリクスと同じ局所性を保つ。つまり、通常の FEM と同等 (同一) の疎行列を生成することになる。

以上、FEM- β における平均ひずみエネルギーの評価方法に関する定式化を行い、要素剛性マトリクス・全体剛性マトリクスに関して、FEM- β と通常の FEM との対応・等価性を検証した。しかし、ここまでの議論ではまだ式 (14) あるいは式 (15) による平均ひずみエネルギーの評価の妥当性は明確ではない。これらの平均ひずみエネルギーの定義は i) 領域 S 内 (区間 h 内以下、この段落中の括弧内の表現は 1 次元問題の場合を指す) での平均応力 $\bar{\sigma} = [\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}]^T$ ($\bar{\sigma}$ は $\bar{\sigma} = \mathbf{C}\bar{\epsilon}$ ($\bar{\sigma} = AE\bar{\epsilon}$) で表され、ii) 平均ひずみエネルギーは $\bar{e} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}^T \bar{\epsilon}$ ($\bar{e} = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \bar{\epsilon}$) で表される、という直観になじむ仮定に基づくものであり、数学的に厳密に定式化されたものではない。付録 III に FEM- β の厳密な定式化として、双対図形による離散化に基づく式 (14)、式 (15) の導出の過程を示した。

(4) 境界の取り扱い

FEM- β では、解析対象の境界上にある Voronoi ブロックは、その中心を境界上に持ち、境界の外側の領域を切り落としたものとなる。

この境界上の Voronoi ブロックに対して、変位境界条件は通常の FEM と同様に境界上の各ブロック中心の変位として与えることで離散化される。すなわち、変位境界上の α 番目のブロック中心に対して、1次元問題の場合、 $u(x^\alpha) = u^\alpha$ 、2次元問題の場合、 $\mathbf{u}(x^\alpha) = \mathbf{u}^\alpha$ により境界条件が離散化される。

トラクション境界条件の離散化に関して、2次元問題を例に説明する。境界条件は $t = t^\circ$ ($t_i = n_j \sigma_{ij}$) で表される。平均応力が図-3 に示す平均化領域での平均ひずみによって計算される ($\bar{\sigma} = \mathbf{C}\bar{\epsilon}$) 場合、通常の FEM と同様の手順にしたがい、トラクション境界条件を境界上の節点に働く節点力として離散化することが出来る。

つまり、変位・トラクションいずれの境界条件に関しても FEM- β では通常の FEM と全く同じ取り扱いをすることになる。

3. FEM- β の特徴 (FEM・DEM との比較)

本章では FEM- β の破壊解析における利点と適用上の問題点を明確にするため、FEM- β の重要な特徴をいくつか探り上げ、2次元問題を材料にして既存の手法 (FEM・DEM) と比較しながら説明する。

(1) FEM との等価性・局所的乱れ

通常の FEM の枠組みでは、図-3 に示す隣接 3 ブロックの中心 $\{x^1, x^2, x^3\}$ を節点とみなした三角形要素を定義することが出来る。この三角形要素は、図-2 左に示す線型補間による変位の離散化に対して、一様ひずみ要素となる。節点のひとつ x^1 の変位 u^1 の要素内の一様ひずみに対する寄与は

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2s} \begin{bmatrix} x_2^2 - x_3^2 & 0 \\ 0 & x_1^3 - x_1^2 \\ x_1^3 - x_1^2 & x_2^2 - x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

となり、式 (12) から回転 θ^1 に関する成分を除いたものに一致する。つまり、FEM- β の平均ひずみは一様ひずみ三角形要素を用いた通常の FEM のひずみ場と一致する。したがって、FEM- β と通常の FEM において、要素剛性マトリクス、その合成である全体剛性マトリクスはそれぞれ一致する。また、前述のように境界条件の扱いも通常の FEM と同様である。よって、FEM- β の離散化に基づいて、数値的に評価した汎関数の停留条件から得られる節点変位 (離散化された変分問題の解) は、一様ひずみ三角形要素の FEM のそれと一致する。つまり、FEM- β は、式 (10) の不連続な変位場の

うち、(FEMの解に最も近いという意味で)線型弾性体の変形の問題の正解に最も近い変位場を与える。なお、FEM- β ではVoronoiブロック内で一定となる変位場を想定している。したがって通常のFEMと同じ節点変位を得られるとは言え、FEM- β の計算精度を厳密に(解析領域全体における変位の誤差ノルムなどで)評価すると、1次以上の関数で変位を補間する通常のFEMには劣る。

FEM- β と通常のFEMとの要素剛性マトリクスの一致はFEM- β においてVoronoi分割による解析領域の分割と変位場の離散化を施し、その共役図形であるDelaunay三角形上で平均ひずみ・平均応力を評価した場合にのみ成り立つ。

例として、図-3のDelaunay三角形の代わりにひずみの平均化の最小領域 S として、3つの隣接Voronoiブロック $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$ それぞれの中心 x^1, x^2, x^3 とVoronoiブロックの辺の中点を結んだ線分で囲まれる領域をとる場合を考える。この領域は一般に六角形となる(図-5参照)。領域 S の頂点のひとつ x^1 の変位 u^1 (回転の自由度を除く)の平均ひずみへの寄与は、

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ 2\bar{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} y_2^1 - y_2^3 & 0 \\ 0 & y_1^3 - y_1^1 \\ y_1^3 - y_1^1 & y_2^1 - y_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

となる。ここで、 s はひずみの平均化の最小領域 S の面積として用いられている。一般に、式(17)は式(16)と一致しない。唯一、 y^1, y^2, y^3 がそれぞれ x^1 と x^2, x^2 と x^3, x^3 と x^1 を結ぶ線分の中点と一致するとき、すなわち図-5の平均化領域 S が正三角形となる場合のみ両者は一致する。

式(12)から回転の自由度を除いて計算される平均ひずみ、すなわち式(16)で表される通常のFEMでの平均ひずみと式(17)に基づき計算される平均ひずみとの

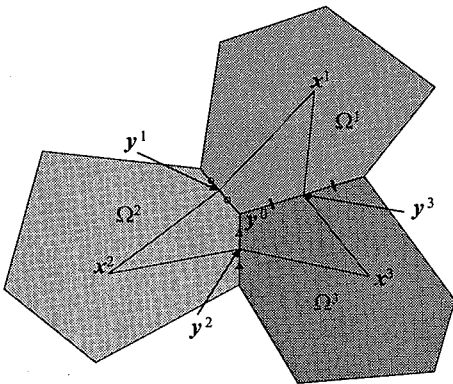


図-5 局所的乱れを含むひずみの平均化領域 S

差は、離散化に際して分散させる点群 $\{x^\alpha\}$ の配置によってのみ規定される。すなわち、図-5に示す領域での平均ひずみは、領域分割に用いる点群の配置によって、その大きさ・空間分布をコントロール可能な「局所的乱れ」を含む平均ひずみとみなされる。FEM- β を境界値問題の近似解を得る手法と捉え、「局所的乱れ」の存在は解の精度の低下を招く「欠点」とみなされる。しかし、i) 一様ひずみ場で発生する破壊現象における「破壊の核」となる、ii) 亀裂進展問題における分岐解(例:ブランチング)を見つけやすくする、という意味で、FEM- β の本来の位置づけ、つまり物理現象(破壊現象)の数値モデルとしての境界値問題の簡便な数値解析手法としての観点からは、「局所的乱れ」の存在はむしろ望ましい特徴である。

(2) 剛体・バネモデル

FEM- β の剛体的な変位場に着目し、FEM- β における要素剛性マトリクスをVoronoiブロック同士をつなぐバネの集合とみなし、各ブロック間のバネ定数と要素剛性マトリクスの成分との関係を示す。このような扱いは、互いに重なりあう、滑らかな形状関数を用いた通常のFEMにおいては不可能である。図-6に示す平均化領域 S においてVoronoiブロック、 Ω^1 と Ω^2 をつなぐバネのバネ定数を考える。領域 S 内部のブロック境界、 L^{01}, L^{02}, L^{03} において、変位のギャップ、 $\Delta^1 = u^1 - u^2, \Delta^2 = u^2 - u^3, \Delta^3 = u^3 - u^1$ がそれぞれ生じる。ギャップ Δ^1 の平均ひずみエネルギーへの寄与はブロック境界、 L^{01} 上での線積分で評価され、 Δ^1 の二次形式で表される。したがって、平均ひずみエネルギーの表現の中での Δ^1 の二次形式の係数が Ω^1 と Ω^2 をつなぐバネのバネ定数に対する L^{01} の寄与を表す。 Ω^1 と Ω^2 との変位のギャップが要素剛性マトリクスの成分に及ぼす影響を直接表すという意味で、 Δ^1 の二次形式で表される L^{01} の寄与を「直接相互作用」と呼ぶ。さらに、 L^{02} 上のギャップ Δ^2 および

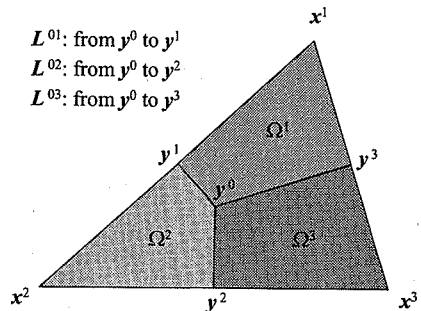


図-6 平均化領域 S とブロック境界 L^{01}, L^{02}, L^{03}

L^{03} 上のギャップ Δ^3 も平均ひずみに寄与し、 $\Delta^1 \Delta^2$ 、 $\Delta^1 \Delta^3$ のような他のブロック境界に沿った変位のギャップとの積の形で Δ^1 は平均ひずみエネルギーに寄与する。それぞれは、 Ω^1 と Ω^2 とをつなぐバネのバネ定数に対する L^{02} 、 L^{03} の寄与を表し、 Ω^3 を介した Ω^1 と Ω^2 との「間接相互作用」と解釈することが出来る(図-7参照)。 Ω^2 と Ω^3 、 Ω^3 と Ω^1 についても同様に要素剛性マトリクスの成分を、直接・間接相互作用の寄与に分割して表現できる。

Ω^1 と Ω^2 との相対変位にかかわる全体剛性マトリクスは図-6の領域 S の内部と、 x^1 、 x^2 を領域 S と共有する隣接領域内部とでそれぞれ定義される直接 1 本、間接 2 本、合計 6 本バネの寄与の足し合わせで表現される。つまり、FEM の枠組みからは、(通常の FEM では分解不可能な) 要素剛性マトリクスの成分を剛体ブロック間のバネ定数へ翻訳・分解する仕組みを持つ FEM が FEM- β である、とみなすことが出来る。

一方、DEM の観点からは、3 つの剛体ブロックの相対変位の評価の必要性和、それに起因する間接相互作用の存在は直観に反し、理解が難しいものと思われる。実際、連続体の変形・破壊の問題を対象とした DEM では、2 つの剛体ブロック間の相対変位に対応する力を与えるバネのバネ定数を決める試みがなされてきた。しかし、この試みは原理的に不可能である。2 つの剛体ブロックの相対変位を考慮しただけでは、連続体の変形を正しく記述するために必要な自由度を確保できておらず、ひずみの「退化」が生じる。その結果、DEM はポアソン効果など、連続体(均質等弾性体)の変形に特有な現象を自然な形で再現することが出来ない。以下に、DEM におけるひずみの「退化」について述べる。

2 つの剛体ブロック、 Ω^1 と Ω^2 との相対変位に基づいてひずみを評価する場合、平均化領域の自然な選択は図-8に示す $\{x^1, y^0, x^2, y^0\}$ で囲まれる四角形領域、 Γ^{12} となる。 y^0 は Ω^1 、 Ω^2 、 Ω^4 の隣接 3 ブロックの接

合点である。 $L^{00'}$ 上での変位のギャップ、 $\Delta^1 = u^1 - u^2$ が Γ^{12} 上に作る平均ひずみは

$$\frac{L^{00'}}{2\Gamma^{12}}((u_i^1 - u_i^2)n_j^{21} + (u_j^1 - u_j^2)n_i^{21})$$

となる。ここで、 Γ^{12} は平均化領域の面積を、 $L^{00'}$ は $L^{00'}$ の長さを、 n^{21} は $L^{00'}$ 上での法線ベクトルを指し、その向きは Ω^2 から Ω^1 を指す方向である。平均ひずみは $L^{00'}$ の接線・法線方向をそれぞれ t, n とすると

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_{tt} \\ \bar{\epsilon}_{nn} \\ 2\bar{\epsilon}_{tn} \end{bmatrix} = \frac{L^{00'}}{2\Gamma^{12}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 - u_i^2 \\ u_n^1 - u_n^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

と表され、 t 方向すなわちブロック境界接線方向の直ひずみ成分 $\bar{\epsilon}_{tt}$ は常に 0 となる。つまり、DEM における隣接 2 ブロックの剛体変位の評価に基づく変形の記述ではひずみが退化している。

これに反し、FEM- β では式(12)に示すようにひずみの定義は退化しておらず、通常の FEM と等価なひずみ場を与える。したがって、FEM- β における 3 つの隣接ブロックの境界を含む平均化領域の選択は連続体との等価性を保つ上で本質的な事柄であり、そこから得られる剛体・バネモデルの中での間接相互作用を表すバネは連続体の相互作用を評価する上での重要な要素である。

剛体とバネの集合として変形する物体をモデル化する DEM において、2 つのブロックの相互作用を考えることは極めて自然である。なぜなら、「2 つのブロックの相対変位にバネ定数をかけると 2 つのブロックの相互作用が計算される」ことになるからである。しかし、連続体モデルの枠組みでは、ひずみエネルギーがひずみで決定されることから理解できるように、相互作用は変位ではなくひずみで決定される。退化しないひずみを計算するためには 3 つの以上のブロックの相対変位が必要であるため、2 つのブロックの相互作用を考える DEM では、バネ定数を連続体モデルの材料特

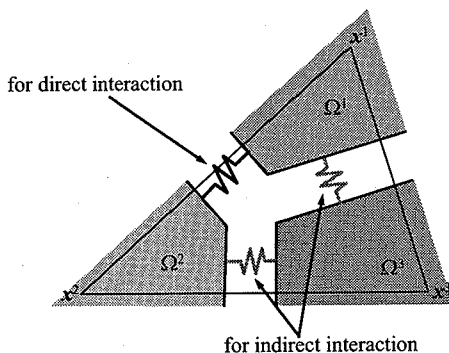


図-7 Ω^1 と Ω^2 とをつなぐバネ

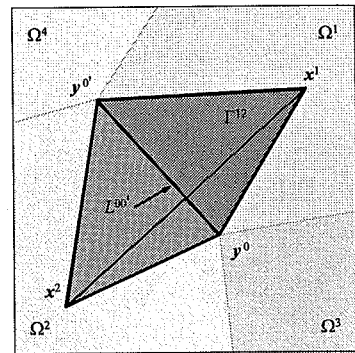


図-8 ひずみの退化を引き起こす平均化領域

性から決定することには根本的な限界があることになる。阿部による連続体の DEM のバネ定数設定のための理論解析²¹⁾では、i) 要素の配置によりポアソン比が 0 となる、ii) ポアソン比が 1/4 以上になるとバネ定数が負になる、といった制限が生じたが、この結果もひずみが退化する DEM の定式化をそのまま連続体に適用することの限界を示している。なお、退化したひずみ成分の効果が現れない(特殊な)状態を考えると、バネ定数を材料特性から決定することが可能となることは注意すべきである。前述の例では、 t 方向に進む n 方向に一樣な P 波や S 波を考えると、この状態は n 方向の 1 次元状態に対応し、 ϵ_{nn} と ϵ_{tn} のひずみのみ現れる。この結果、P 波と S 波の弾性速度から正しく 2 つのブロックの間のバネ定数を決定することができる。これが拡張個別要素法で主に用いられるバネ定数の決定手法である¹⁹⁾。しかし、このバネ定数は、他の状態、例えば、 t 方向に進む P 波速度を正しく与えることはできない。

(3) 破壊の取り扱い

重なりのない形状関数を用いた変位場の離散化と、対図形によるひずみ場・応力場の離散化(付録 III 参照)により、FEM- β は連続体に対して厳密な剛体・バネモデルを提供する。このモデルでは剛体間をつなぐバネに作用する力がバネの強度に達した状態を破壊とみなし、破壊を「ブロック間をつなぐバネの切断(軟化)」として表現することが出来る。これは DEM と同程度に簡便な破壊の取り扱いである。しかし、間接相互作用を規定するバネの存在が DEM と FEM- β での破壊の取り扱いに違いを生じさせる。

DEM では、破壊を隣接ブロック間の相互作用の完全な消失とみなす。具体的には、図-8 の $L^{00'}$ が破壊の条件を満たしたとき、 Ω^1 と Ω^2 の変位に対応する全体剛性マトリクスを 0 にすることで、破壊は表現される。これは、 Ω^1 と Ω^2 の間の直接相互作用のみならず、 Ω^3 あるいは Ω^4 を介した間接相互作用も含めた、直接 2 本、間接 4 本、合計 6 本全てのバネを $L^{00'}$ をまたぐ 1 本のバネに代表させることに対応する。

一方、FEM- β では、個々のブロック境界に対応するバネの切断で破壊を表現する。例えば、図-6 の L^{01} が破壊の条件を満たした場合、対応する変位のギャップ、 Δ^1 のひずみエネルギーへの寄与をなくす。つまり、領域 S 中での (i) Ω^1 と Ω^2 との直接相互作用、(ii) Ω^2 と Ω^3 との間接相互作用への L^{01} の寄与、(iii) Ω^1 と Ω^3 との間接相互作用への L^{01} の寄与、の 3 つの相互作用が遮断されることになる。実際の計算の手順としては、領域 S の要素剛性マトリクスからの Δ^1 の寄与の削除によって L^{01} の破壊が表現される。

4. 数値解析(精度・収束性・破壊問題の解析)

ここでは、平面ひずみ状態にある均一な等方線型弾性体(ヤング係数 $E = 1.0$ 、ポアソン比 $\nu = 0.25$)の板(一辺の長さ 2 の正方形)の水平方向への一軸引張(変位量 0.1、軸ひずみ 0.05)問題(図-9 参照)を例題として採り上げ、FEM- β で計算される変位場・ひずみ場の収束挙動を検証し、FEM- β の数値解析手法としての特徴を示す。また、同じ問題に対して単純な破壊基準を仮定し、FEM- β による「一樣ひずみ場からの破壊進展問題」の解析例を示す。

(1) 局所的乱れを含まない FEM- β

図-3 に示す領域をひずみの平均化領域にとった場合、すなわち式(13)に示す、局所的乱れを含まない(ブロックの剛体回転の自由度は含まれている)平均ひずみを用いた場合、FEM- β は一樣ひずみ三角形要素を用いた通常の FEM と同じ節点変位を与える(ブロックの剛体回転は解析領域全体で 0)。通常の FEM は一樣ひずみ場を正解にもつ例題に対して厳密解を与えるので、局所的乱れを含まない FEM- β の与える節点変位は厳密解と一致することになる。したがって、適当な後処理(計算された節点変位の線型補間)を施すことにより、FEM- β は一樣ひずみ三角形要素を用いた通常の FEM と同じ精度・収束挙動を持つことになる。つまり、FEM- β はいたるところ不連続かつ重なりのない形状関数を用いながら、一定ひずみ状態を正確に表わし得る数値解析手法となっている。

(2) 局所的乱れを含む FEM- β (変位場)

図-5 に示す領域をひずみの平均化領域にとった場合、すなわち式(17)に示す、局所的乱れを含む平均ひずみを用いた場合の FEM- β の解の精度・収束挙動を調べ

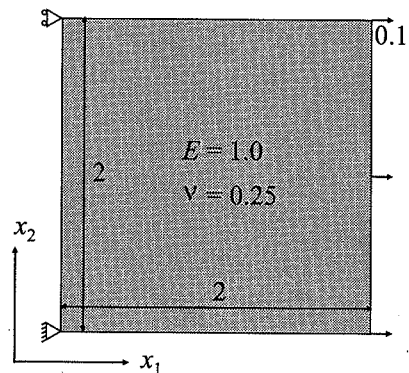


図-9 例題：均一な等方線型弾性体の一軸引張

る。なお、この解析例でもブロックの剛体回転の自由度は含まれている。このとき、誤差の支配要因として、「メッシュの幾何形状の乱れ」と、「離散化の度合い」が挙げられる。ひずみの平均化領域の頂点、 $\{x^1, x^2, x^3\}$ が正三角形配置される場合のみ式(17)と式(16)とが一致するため、「メッシュの幾何形状の乱れ」の指標として、各平均化領域のアスペクト比(三角形の内接円と外接円の半径の比)の面積での重み付け平均、 $\bar{\xi}$ を用いる。

$$\bar{\xi} = \sum_{\beta=1}^M \xi^{\beta} \frac{s^{\beta}}{s}$$

ここで、 ξ^{β} , s^{β} はそれぞれ β 番目の平均化領域の頂点を結んで作られる三角形のアスペクト比とその面積を、 M , s は要素数と解析領域全体の面積を表わす。したがって、 $\bar{\xi}$ はアスペクト比の面積での重み付け平均となる。解析領域全体が正三角形で覆われる場合、 $\bar{\xi} = 2$ となる。

誤差の指標として、変位の誤差の L_2 ノルムを正規化したもの、 η_d を採り上げ、FEM- β で得られる変位場の精度・収束挙動を調べる。 η_d は以下のように定義される。

$$\eta_d = \frac{\left(\int_{\Omega} (u - \hat{u})^T (u - \hat{u}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\Omega} u^T u d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}$$

ここで、 u は厳密解を、 \hat{u} は、式(17)に基づく局所的乱れを含んだ FEM- β により計算される節点変位を線型補間した変位場を表わす。 Ω は解析領域全体を表わす。

図-10 に、自由度を固定 (NDF=8850) し $\bar{\xi}$ を変化させた場合の η_d の挙動を示す。 η_d は $\bar{\xi}$ が 2 に近づく (メッシュの質が向上する) につれて減少するが、0 には収束しない。これは、正方形の領域を正三角形のパッチで覆い尽くすことはできず、例題に対する領域分割の $\bar{\xi}$ が 2 にはなりえないことに起因すると考えられる。与えられた自由度では、 $\bar{\xi} = 2.01$ がほぼ最適な領域分割となっており、この意味で $\eta_d = 9.5 \times 10^{-4}$ が局所的乱れを含む FEM- β が与えられた自由度の中で例題に与える最適解ということになる。

領域分割の質を固定 ($\bar{\xi} = 2.09$) し、自由度 (NDF) を変化させた場合の η_d の挙動を図-11 に示す。 η_d は自由度が増すにつれて減少する。また、自由度の増加に伴い、領域分割の質の改善の余地は増大するため、 $\bar{\xi} = 2.09$ に固定する代わりに、単純な形状に対してはほぼ最適な ($\bar{\xi}$ がほぼ最小となる) 領域分割を与える Advancing Front アルゴリズムによって領域分割した場合の η_d の挙動を図-11 に“Best Performance”として示した。この場合も自由度の増加に伴い η_d は減少している。これらを考え合わせると、自由度の増加はそれ単独、および、領域分割の質の向上の余地の増大という 2 つの意味で、局所的乱れを含む FEM- β で得られる解を正解に近づける効果を持つ。

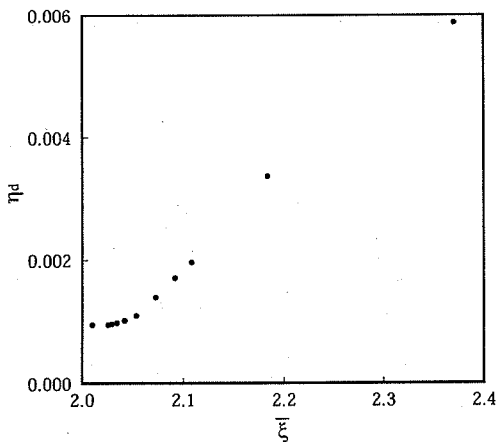


図-10 メッシュの幾何形状の乱れに対する変位誤差ノルムの挙動 (NDF=8850)

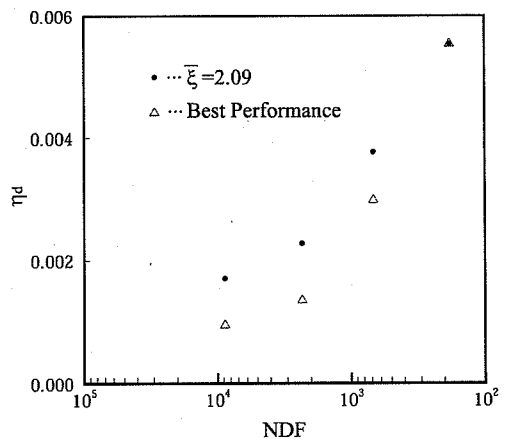


図-11 自由度に対する変位誤差ノルムの挙動

(3) 局所的乱れを含む FEM- β (ひずみ場)

誤差の指標としてエネルギーノルムの誤差を正規化したもの、 η_e を使い、FEM- β で得られるひずみ場の精度・収束挙動を調べる。 η_e は以下のように定義される。

$$\eta_e = \frac{\left(\int_{\Omega} (\epsilon - \hat{\epsilon})^T c (\epsilon - \hat{\epsilon}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_{\Omega} \epsilon^T c \epsilon d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}}$$

ここで、 ϵ は厳密解を、 $\hat{\epsilon}$ は、式 (17) に基づく局所的乱れを含んだ FEM- β により計算されるひずみ場を表す。また、 c は弾性係数を表す。

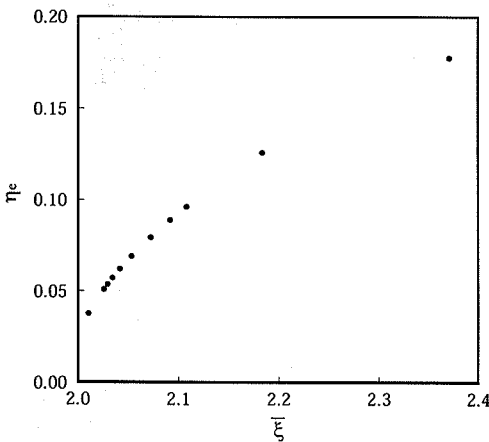


図-12 メッシュの幾何形状の乱れに対するエネルギー誤差ノルムの挙動 (NDF=8850)

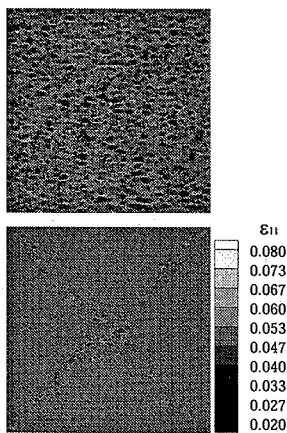


図-13 メッシュの幾何形状の乱れに対するひずみ分布の変化 (上: $\xi = 2.37$, 下: $\xi = 2.01$)

図-12 に、自由度を固定し (NDF=8850)、 ξ を変化させた場合の η_e の挙動を示す。 ξ の減少に伴う η_e の収束が見てとれる。

図-13 に幾何形状の乱れが大きい場合 ($\xi = 2.37$) と、小さい場合 ($\xi = 2.01$)、それぞれの水平方向の直ひずみ分布を示す。 $\xi = 2.01$ の場合、乱れは解析対象の対角線上にわずかに存在するのみで、局所的乱れを含んだ FEM- β が一様ひずみに近い解を与えていることがわかる。なお、このとき、乱れが対角線上に集中するのはメッシュ作成の際に用いた Advancing Front アルゴリズム (解析対象の周囲から順に正三角形メッシュを作成していく) の影響によるものである。このアルゴリズムは、最適に近いメッシュを得ることを目的として、誤差解析のためにのみ限定的に用いた。後述する破壊解析では Laplacian Smoothing により、解析領域全体に局所的乱れを分散させたメッシュを用いている。

領域分割の質を固定 ($\xi = 2.09$) し、自由度 (NDF) を変化させた場合の η_e の挙動を図-14 に示す。自由度を増やしても η_e はほとんど変化しない。つまり、変位場の場合と異なり、自由度の増加自体は局所的乱れを含んだ FEM- β のひずみ場の計算精度向上にはほとんど寄与しない。ただし、ここで計算されるひずみ場には、節点変位の誤差とともに、得られた節点変位からひずみを計算する後処理の段階で式 (17) の局所的乱れを含むひずみの定義をそのまま用いたことによる誤差も含まれている。したがって、ほぼ自明ではあるが、後処理の段階で式 (16) に基づいてひずみ場を計算することにより、 η_e の自由度に対する収束挙動の改善が予想される。

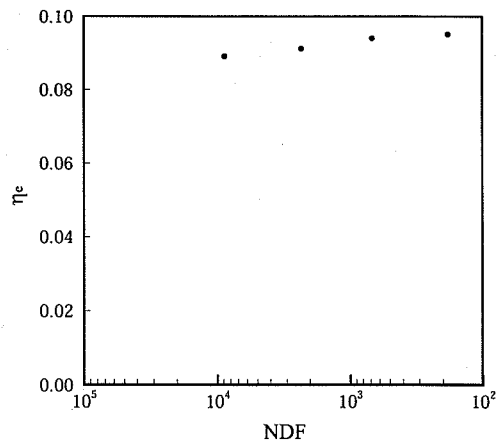


図-14 自由度に対するエネルギー誤差ノルムの挙動 ($\xi = 2.09$)

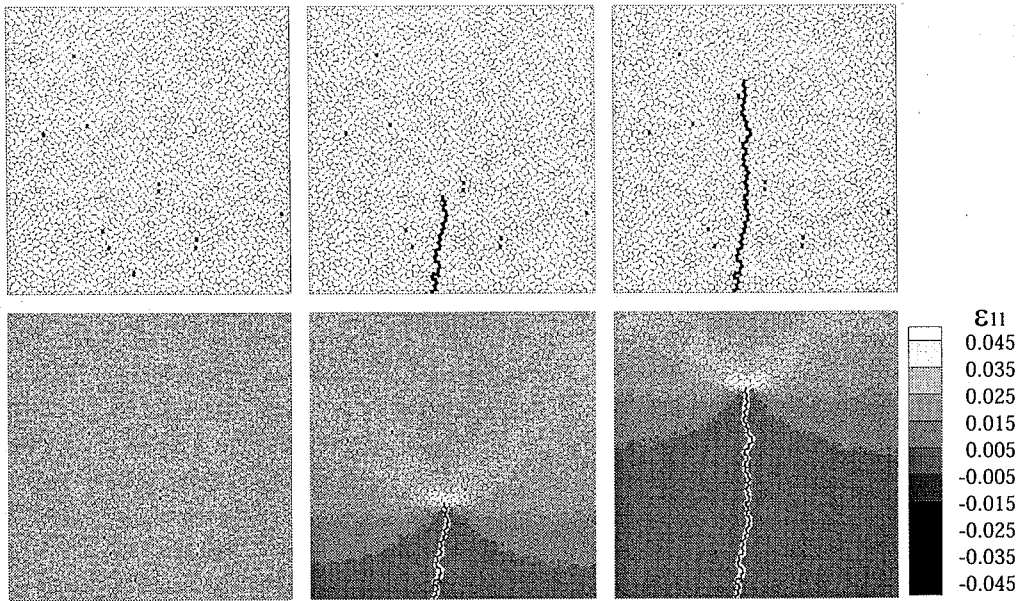


図-15 一様ひずみ場からの破壊進展における破壊パターンとひずみ場

(4) 破壊問題の解析

破壊解析の例として、図-9の例題に単純な破壊基準を仮定した場合の破壊進展パターン、ひずみ分布などを局所的な乱れを含んだ FEM- β を用いて解析する。

最も単純な破壊基準として、解析対象の領域分割に用いた Voronoi ブロックの境界上に働くトラクション・ベクトル、 t のノルム ($|t|$)、すなわちブロック境界の単位長さあたりに作用する力の大きさに着目し、 $|t|$ が閾値を超えたときにブロック境界が破壊したとみなす。破壊は、このブロック境界に対応するバネのバネ定数(要素剛性マトリクスの成分)を 0 にすることで表現される。この破壊基準は DEM による破壊解析で多く用いられ、 $|t|$ の閾値が「材料強度」に対応する。ただし、破壊の表現は DEM と異なり、FEM- β の特徴のひとつである直接・間接相互作用の段階的喪失による表現となっている。具体的な破壊基準として、閾値を $|t| = 0.03$ に設定する。

破壊進展解析における境界条件として、解析対象の右端の辺上に各ステップ 0.01 ずつの一樣変位境界条件を 10 ステップで荷した(最終的に 5% の一樣伸展)。各ステップでブロック境界上に働く $|t|$ の最大値を求め、これが $|t| \geq 0.03$ を満たすとき、このブロック境界に対応するバネのバネ定数を 0 にする。その後、境界条件を一定に保ったまま応力・トラクション分布を再計算する。この過程を繰り返す、閾値を超えるブロック

境界がなくなった時点で次の荷重ステップに移行する。この一連の過程を繰り返すことで破壊進展を追いかける。厳密に荷重変位曲線などの詳細な情報を得るためには、各ステップごとに 1 つのブロック境界が破壊するように荷重ステップをコントロールする必要があるが、線型弾性体の引張破壊の場合、上記の手順による解析結果と詳細な解析結果で得られる破壊パターンに違いは生じない(たとえ 1 ステップで荷重しても違いはない)。したがって、FEM- β による一様ひずみ場からの破壊進展解析の例を示すという目的のためには上記の簡単なアルゴリズムで十分である。

図-15 に局所的な乱れ(および剛体回転の自由度)を含む FEM- β で計算された破壊パターン(上段)と水平方向の直ひずみ分布(下段)を示す。ほぼ一様な場からひとつの主亀裂が進展していく様子が見られる。主亀裂の進展に先立ち、多数の微小亀裂の発生が見られる。これは、FEM- β による局所的な乱れの効果である。対応するひずみ分布では解析領域内にはほぼ一様に局所的な乱れが分散されていることがわかる。これは、Laplacian Smoothing を用いた領域分割の結果、メッシュの形の乱れが領域全体にはほぼ均等にばら撒かれた結果である。初期段階で発生した微小亀裂が核となり、一様な場からの破壊面の成長が起こる。このとき、初期段階の微小亀裂のうち、主亀裂の核となったもの以外は成長が抑制されている。通常の FEM でも人為的に FEM- β

と同様の局所的乱れを導入することは可能であるが、微小亀裂の発生から主亀裂の選択的成長に至る過程を追跡するためには、リメッシュなどの技巧が必要となる。これに対し、FEM- β では局所的乱れは領域分割の幾何形状により自動的に導入され、成長すべき亀裂の選択・亀裂の成長過程の追跡も特別な技巧なしに行われる。FEM- β は通常の FEM と同程度 (局所的乱れを含む程度) の精度を保つ「剛体・バネモデル」を与えつつ、局所的乱れの導入・重ならない形状関数という特徴により、DEM と同程度の簡便な破壊解析の仕組みをもつ、破壊解析に適した手法である。

5. 結論

破壊現象の簡便な解析を目的とし、連続体のパーティクル・フィジックス・モデルを与える数値解析手法、FEM- β を開発した。FEM- β は、通常の FEM と同等の精度 (一樣ひずみ三角形要素と同等) ・局所性 (疎行列) を保ちつつ、破壊を簡便に表現する仕組みをもつ解析ツールである。これらの特徴は、いたるところ不連続かつ重ならない形状関数による離散体的な変位場の導入と、双対図形を用いたひずみ場・応力場の離散化による境界値問題との等価性の確保に起因する。

また、FEM- β は領域分割の幾何形状により自動的に局所的乱れを導入する仕組みを持つ。この局所的乱れは、通常の FEM が不得手とする均一場からの破壊進展といった分岐問題で分岐解をうまく見つけるための「核」の役割を果たしている。

付録 I 平均化区間の選択

式 (1) に対する近似解を FEM- β で求める場合のひずみの平均化の最小区間 h の選択の必然性を示す。式 (2) の汎関数を図-1 に示す N 個の節点で離散化して評価する場合、 β 番目の平均化区間の長さを h^β とすると、その区間での平均ひずみ、 $\bar{\varepsilon}^\beta$ は式 (6) より、

$$\bar{\varepsilon}^\beta = \frac{u^{\beta+1} - u^\beta}{h^\beta} \quad \text{for } \beta = 1, 2, \dots, N-1$$

となる。解くべき問題は、制約条件

$$\sum_{\beta=1}^{N-1} h^\beta = L \quad (\text{I.1})$$

のもとでの式 (2) の汎関数の停留問題であり、以下の離散化された汎関数の停留問題に帰着する。

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{N-1} \frac{(u^{\beta+1} - u^\beta)^2}{h^\beta} + \lambda \left(\sum_{\beta=1}^{N-1} h^\beta - L \right) \quad (\text{I.2})$$

ここで、 λ は Lagrange の未定係数である。

いま、正解の変位場を与えたと仮定すると、停留条件は区間 h^β に関するものとなり、 $\partial \hat{I} / \partial h^\beta = 0$ より、

$h^\beta = (u^{\beta+1} - u^\beta) / \sqrt{2\lambda}$ が得られる。これを式 (I.1) に代入し、 $\bar{u} = u^N - u^1$ に注意すると、 $\sqrt{2\lambda} = \bar{u} / L$ が得られ、

$$h^\beta = L \frac{(u^{\beta+1} - u^\beta)}{\bar{u}}$$

となる。式 (1) の厳密解、 $u(x) = (\bar{u} / L)x$ に対応する節点変位は、 $u^\beta = (\bar{u} / L)x^\beta$ であるため、

$$h^\beta = x^{\beta+1} - x^\beta$$

が平均区間の最適値となる。

付録 II Voronoi 分割と Delaunay 分割²²⁾

実二次元空間 (\mathbb{R}^2) 上の有限個の点の集合 $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ と、2 点 x, y 間の Euclid 距離の定義 $d(x, y)$ に関して、

$$V(x^i) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^2, d(x, x^i) < d(x, x^j), j \neq i\} \quad (\text{II.1})$$

を定義する。 $V(x^i)$ は凸多角形となり、集合 $\{V(x^1), V(x^2), \dots, V(x^n)\}$ は \mathbb{R}^2 の空間分割を与える。この空間分割を集合 X に対する Voronoi 分割とよび、 $V(X)$ で表す。集合 X に属する点を $V(X)$ の母点とよび、 $V(x^i)$ を母点 x^i の Voronoi 領域とよぶ (図-16 参照)。2 次元問題の FEM- β におけるブロック中心 x^i に対応する剛体ブロックは $V(x^i)$ である。

一方、 $V(x^i)$ と $V(x^j)$ が Voronoi 辺 (Voronoi 多角形の辺) を共有するとき、 x^i と x^j を辺で結ぶことにより、Voronoi 分割と共役な領域分割、Delaunay 分割が得られる (図-16 参照)。Delaunay 分割において領域を分割する多角形 (Delaunay 多角形) の頂点と外接円の中心はそれぞれ、Voronoi 分割の母点と Voronoi 多角形の頂点に対応する。

なお、式 (II.1) の対象空間を \mathbb{R}^3 に、Euclid 距離の定義を三次元のものにそれぞれ拡張することにより、実三次元空間 (\mathbb{R}^3) 上の有限個の点の集合に対する Voronoi 分割が定義される。このとき、 $V(x^i)$ は凸多面体に、Voronoi 分割と共役な Delaunay 分割は一般に四面体となる。三次元問題に対する FEM- β はこの空間分割に基づいて定式化される。

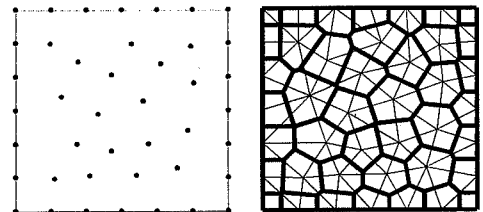


図-16 左: 母点, 右: Voronoi (太線)・Delaunay (細線)

付録 III FEM- β の厳密な定式化 — 双対図形による離散化 —

式 (9) のひずみエネルギー密度の表現に、式 (10) の変位場を空間微分した (ブロック境界に δ -関数が立ち上がる) ひずみ場を直接代入すると、 δ -関数の二乗という可積分でない関数になり、式 (8) の汎関数を評価できない。しかし、式 (8) のかわりに $\partial\Omega$ で変位境界条件 $u_i = \bar{u}_i$ を満たす変位場 \mathbf{u} と、応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ に関する以下の汎関数を停留させる変分問題を考えることで FEM- β の厳密な定式化が可能となる。

$$I(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \, d\Omega \quad (\text{III.1})$$

ここで、 c_{ijkl}^{-1} はコンプライアンスを指す。I の第一変分は

$$\delta I = \int_{\Omega} -\delta u_j \sigma_{ij,i} + \delta \sigma_{ij} (\epsilon_{ij} - c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}) \, d\Omega$$

となり、 $\delta I = 0$ の停留条件から、 $\sigma_{ij,i} = 0$ (つりあい式) と $\epsilon_{ij} - c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} = 0$ (応力ひずみ関係) が得られる。したがって、式 (III.1) を停留させる変位場 \mathbf{u} と、応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ は式 (7) の解となる。

式 (III.1) の評価に際し、変位場と応力場をそれぞれ、Voronoi 分割と Delaunay 分割に基づいて離散化する。つまり、変位場は式 (10) で離散化され、応力場は β 番目の Delaunay 三角形 (2 章におけるひずみの平均化領域) S^β 上に立つ特性関数

$$\chi^\beta(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \mathbf{x} \in S^\beta \\ 0 & \text{for } \mathbf{x} \notin S^\beta \end{cases}$$

を用いて以下のように各 Delaunay 三角形内で一定として離散化される。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{\beta=1}^M \sigma_{ij}^\beta \chi^\beta(\mathbf{x}) \quad (\text{III.2})$$

ここで、 M は解析領域内の Delaunay 三角形の総数である。離散化に際して与えられた点群 $\{\mathbf{x}^\alpha\}$ から作られる双対図形 (共役図形) を変位場・応力場それぞれに割り当てた離散化を施しているため、この離散化の方法を共役離散化 (Conjugate Discretization) と名づける。

式 (10) と式 (III.2) を式 (III.1) に代入し、任意の関数 $f(\mathbf{x})$ について

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \chi^\beta(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{S^\beta} f(\mathbf{x}) \, d\Omega$$

に注意しながら第 1 項、第 2 項を計算すると、それぞれ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^\beta \chi^\beta(\mathbf{x}) (u_i^\alpha \phi_{j,i}^\alpha(\mathbf{x}) + u_j^\alpha \phi_{i,i}^\alpha(\mathbf{x})) \, d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta} \sigma_{ij}^\beta \sum_{\alpha} \int_{S^\beta} (u_i^\alpha \phi_{j,i}^\alpha(\mathbf{x}) + u_j^\alpha \phi_{i,i}^\alpha(\mathbf{x})) \, d\Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\beta \chi^\beta(\mathbf{x}) c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^\beta \chi^\beta(\mathbf{x}) \, d\Omega \\ &= s^\beta \sum_{\beta} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\beta c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^\beta \end{aligned}$$

となる。ここで、 s^β は領域 S^β の面積を指す。 S^β 上の平均ひずみを $\bar{\epsilon}_{ij}^\beta$ とすると、定義より

$$\bar{\epsilon}_{ij}^\beta = \frac{1}{2s^\beta} \sum_{\alpha} \int_{S^\beta} (u_i^\alpha \phi_{j,i}^\alpha(\mathbf{x}) + u_j^\alpha \phi_{i,i}^\alpha(\mathbf{x})) \, d\Omega.$$

よって、式 (III.1) を離散化した汎関数は

$$\hat{I}(\{\mathbf{u}^\alpha\}, \{\boldsymbol{\sigma}^\beta\}) = \sum_{\beta} s^\beta \left(\sigma_{ij}^\beta \bar{\epsilon}_{ij}^\beta - \frac{1}{2} \sigma_{ij}^\beta c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^\beta \right)$$

となる。

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial \sigma_{ij}^\beta} = \sum_{\beta} s^\beta \left(\bar{\epsilon}_{ij}^\beta - c_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^\beta \right)$$

と停留条件、 $\partial \hat{I} / \partial \sigma_{ij}^\beta = 0$ より、 $\beta = 1, 2, \dots, M$ について、応力ひずみ関係 $\sigma_{ij}^\beta = c_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^\beta$ を満たす σ_{ij}^β が $\{\boldsymbol{\sigma}^\beta\}$ の最適の組となる。これらの $\{\boldsymbol{\sigma}^\beta\}$ を \hat{I} に代入すると、

$$\hat{I}(\{\mathbf{u}^\alpha\}) = \sum_{\beta} s^\beta \left(\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{ij}^\beta c_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^\beta \right) \quad (\text{III.3})$$

となる。

$$\bar{e}^\beta = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{ij}^\beta c_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^\beta \quad (\text{III.4})$$

とすると、汎関数 \hat{I} は \bar{e}^β を s^β で重み付けして足し合わせた物となり、 \bar{e}^β は領域 S^β での平均ひずみエネルギー密度とみなされる。領域 S^β として 図-3 の S をとると、式 (III.4) は式 (15) と一致する。1 次元問題 (棒の問題) に対する式 (14) も、同様の議論に基づいて (テンソル量をスカラー量に落として考えることにより) 導かれるので、棒の問題は割愛する。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method, 5th ed., Vol 1,2,3*, Butterworth Heinemann, 2000.
- 2) Arnold, D.N.: An interior penalty finite element method with discontinuous elements, *SIAM, J. Numer. Anal.*, Vol.19, pp.742-760, 1982.
- 3) Duarte, A.V.C., Dutra do Carmo, E.G. and Rochinha, F.A.: Consistent discontinuous finite elements in elastodynamics, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, Vol.190, pp.193-223, 2000.
- 4) Engel, G., Garikipati, K., Hughes, T.J.R., Larson, M.G., Mazzei, L. and Taylor, R.L.: Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, Vol.191, pp.3669-3750, 2002.
- 5) Oliver, J.: On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.37, pp.7207-7229, 2000.

- 6) Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L.: Element-free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.37, pp.229-256, 1994.
- 7) Belytschko, T., Gu, L. and Lu, Y.Y.: Fracture and crack-growth by element-free Galerkin methods, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, Vol.2, pp.519-534, 1994.
- 8) Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B. and Belytschko, T.: Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.40, pp.1483-1504, 1997.
- 9) Chorin, A.J.: Numerical study of slightly viscous flow *J. Fluid Mech.*, Vol.57, pp.785-796, 1973.
- 10) Gingold, R.A. and Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, Vol.181, pp.375-389, 1977.
- 11) Lucy, L.B.: Numerical approach to testing of fission hypothesis, *Astron. J.*, Vol.82, pp.1013-1024, 1977.
- 12) Bardenhagen, S.G., Brackbill, J.U. and Sulsky, D.: The material-point method for granular materials, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engng.*, Vol.187, pp.529-541, 2000.
- 13) Cundall, P.: A computer model for simulating progressive, large scale movements in blocky rock systems, *Proc. International Symposium on Rock Fractures, Nancy, France*, 1971.
- 14) Potyondy, D.O., Cundall, P.A. and Lee, C.: Modeling Rock Using Bonded Assemblies of Circular Particles, *Rock Mechanics Tool and Techniques-Proc. Second North American Rock Mechanics Symposium - NARMS'96*, Aubertin, M., Hassani, F. and Mitri, H. eds. Balkema, Rotterdam, pp.1937-1944, 1996.
- 15) Sakaguchi, H. and Mühlhaus, H.S.: Mesh Free Modelling of Failure and Localization in Brittle Rock, *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Asaoka, Adachi and Oka eds. Pergamon, pp.15-21, 1997.
- 16) Place, D. and Mora, P.: Numerical simulation of localisation phenomena in a fault zone, *Pure. Appl. Geophys.*, Vol.157, pp.1821-1845, 2000.
- 17) 中瀬仁, 安中正, 片平冬樹, 興野俊也: 平面ひずみ圧縮試験に対する個別要素法の適用, 土木学会論文集, No. 454/III-20, pp.55-64, 1992.
- 18) 大西有三, 河野正雄: ボロノイ分割法を適用した岩盤の個別要素解析について, 土木学会論文集, No. 376/III-6, pp.231-239, 1986.
- 19) 伯野元彦: 破壊のシミュレーション-拡張個別要素法で破壊を追う-, 森北出版, 1997.
- 20) Meguro, K. and Tagel-Din, H.: Applied Element Method for Structural Analysis: Theory and Application for Linear Materials, 土木学会論文集, No. 647/I-51, pp.31-45, 2000.
- 21) 阿部和久: 個別要素法による連続体解析におけるバネ定数の設定, 土木学会論文集, No. 543/I-36, pp.83-90, 1996.
- 22) 杉原厚吉: 計算幾何工学, 培風館, 1994.

(2003. 9. 12 受付)

PROPOSAL OF NEW FEM FOR ANALYSIS OF FAILURE PHENOMENA

Kenji OGUNI, Muneo HORI and Hide SAKAGUCHI

A new numerical simulation method for analysis of failure phenomena, namely, FEM- β , is proposed. This method can be regarded as FEM (finite element method) with special displacement field (discretized by discontinuous, non-overlapping shape functions).

Particle physics model for continuum body formulated by FEM- β can easily deal with failure phenomena and keeps equivalence to FEM in its accuracy and sparsity of the stiffness matrix. In this sense, FEM- β can also be regarded as reformulation of DEM (distinct element method) in the framework of FEM which gives rigorous inter-block spring constants to DEM.