

# 重要サンプリング手法による 動的非線形系の初期通過確率算定

丸山 収<sup>1</sup>・星谷 勝<sup>2</sup><sup>1</sup>正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部都市基盤工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

E-mail:omaruya@sc.musashi-tech.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部都市基盤工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

本研究はモンテカルロシミュレーションに分散低減法を併用して、動的非線形構造系の初期通過確率を算定することを目的としている。ここでは限界状態をもとに設定された閾値の初期通過問題を評価する際に、構造系の確率過程入力項に、重要サンプリング関数項を加法形に付加することで破壊領域に達するサンプル実現過程を高頻度で得る手法を示している。重要サンプリング関数を付加することで確率測度が変化する影響は、ギルサノフの定理により評価され、解析対象構造系の初期通過確率が求められる。また、重要サンプリング関数を与えるために動的非線形構造系の終端状態制御問題をオンラインで解くことを提案している。

**Key Words** :first excursion probability, nonlinear system reliability, importance sampling, Monte Carlo simulation, Girsanov transformation

## 1. はじめに

構造物の設計法が性能設計へと移行するなかで、耐震性能として fully operational, operational, life safe, near collapse などの多段階水準を設けて、これら要求水準を満足するような設計法の体系化が進められている。一方設計段階において構造物が要求性能を満足しているか否かを照査する性能評価手法の開発が急務である。

動的荷重を受ける構造物を対象として、上述した性能評価を行うためには、外乱が作用している全継続時間中に応答値が規定された閾値を超えない確率を定量的に評価する必要がある。これは、応答値が閾値を越えたら限界状態に達したとする基準で安全性を算定するものであり、動的荷重に対する構造物の安全性すなわち動的信頼性は、初期通過確率を算定することに集約できる。

初期通過確率算定に関して現在のところでは、弱非線形および低自由度システム等の限定された条件のもとでのみ理論解が得られている。それらの理論解を得る解析的手法に注目してみると、応答がマルコフ性を有すると仮定した手法、例えば Lin and Cai<sup>1)</sup>の Moment Equation, 線形近似法である Crandall<sup>2)</sup>の Perturbation Method, Roberts and Spanos<sup>3)</sup>の Equivalent Linearization Technique などがある。これらの手法は効率および

精度、そしてシステムのディメンションおよび非線形性の面で制限があり、限定された手法である。

解析的手法においては、任意の非線形性や多自由度系に適用可能な解析手法を構築することは困難である。そこで、モンテカルロシミュレーションによる解析手法が一般的に用いられる。この方法は、いかなる形式のシステムも容易に解析対象として取り込むことができ、またシステムのディメンションによらないので汎用性が高いが、その反面多大な計算時間を要するという欠点がある。この欠点を改良するために、発生させるサンプルサイズを大きくすることなく推定誤差を小さくする分散低減法に関する研究が行われている。分散低減法に関する研究の中で、重要サンプリング関数を導入し、本来非常に希に発生する現象を効率よくシミュレートする試みに注目すると Pradlwater and Schuëller<sup>4)</sup>の Weight Controlled Method, そして Bayer and Bucher<sup>5)</sup>, Hoshiya and Taniguchi ら<sup>6)</sup>の Spectral Representation Method に基づいた Importance Sampling Method などが提案されている。また、Koo and Der Kiureghian<sup>7)</sup>の Mirror Image Excitation, Der Kiureghian<sup>8)</sup>, Au and Beck<sup>9)</sup>の確率入力項を有限個の確率変数に分解する Geometric Representaion Method などがある。

一方 Tanaka<sup>10)</sup>は本来低頻度で限界状態に達する現象を、重要サンプリング関数により高頻度にシミュレートするために、支配方程式を確率過程入力項に重要

サンプリング関数項を加える形式に表現し、確率測度  
が変換された影響をギルサノフの定理により評価する手  
法を提案している。その際、使用する重要サンプリング  
関数は、FOSM により求められる安全性指標  $\beta(t)$  をもと  
に求めた動的非線形系の破壊点まわりでサンプリング  
出来るように作成したものである。この手法は、重要サン  
プリング関数が適切に与えられれば、動的な解析対象  
に対して非常に有効な手段となりうるものである。  
Tanaka の成果を受けて Naess and Skaug<sup>11)</sup>, Bucher<sup>12)</sup>  
は精度の改良を試みている。Macke and Harn-  
pornchai<sup>13)</sup>は、Lin and Cai<sup>1)</sup>の Cumulant-Neglect Clo-  
sure 法により解析対象を等価線形化し、オフラインの準  
最適制御法により重要サンプリング関数を与えることを  
行っている。しかしながら、与条件である非線形支配方  
程式のみの情報で等価線形化を行っているので、上述  
の研究と比較して精度は向上しているが、強い非線形  
性を有する履歴型の系に対する適用性に関して、改良  
点が残されている。

本研究は、Mackeらによるオフラインの準最適制御手  
法に対して、オンラインの準最適制御法により重要サン  
プリング密度関数を与えることを提案している。ここでは、  
数値シミュレーション時に得られるサンプル実現値を観  
測情報として、動的非線形系のサンプル実現値近傍で  
逐次等価線形化を行い、構造系の応答が終端時刻に  
おいて閾値に到達するオンライン型の終端状態制御問  
題に定式化して、重要サンプリング関数を求めている。  
本研究で用いている確率測度変換法とは異なるが  
Hoshiya らはモンテカルロシミュレーションのサンプル実  
現値を観測情報として応答の確率分布特性を推定する  
Pseudo Analytical Method (PAM)<sup>14), 15)</sup>により初期通過  
確率を求めている。ここでは観測情報を条件とした適応  
型等価線形化手法と動的システム制御理論の適用が、  
履歴を有する非線形系の初期通過確率の算定に関し  
て有効な手法であるということを確認した。

## 2. 問題の設定

構造物の振動方程式は、一般に2階微分方程式で与  
えられる。このモデルの状態量を状態空間表示すること  
により、入力  $w(t)$  をホワイトノイズとする1階のベクトル微  
分方程式に帰着させることができる。

$$\frac{dz(t)}{dt} = f[t, z(t)] + G(t)w(t) \quad (1)$$

ここで、 $z(t)$  はシステムの応答を要素とする状態ベクトル、  
 $f[t, z(t)]$  は非線形関数、 $w(t)$  は平均値 0、分散1  
のガウス性ホワイトノイズである。 $G(t)$  は入力の係数ベ  
クトルである。本研究では対象としていないが、 $G(t)$  は時

間関数であるので振幅特性が非定常な入力に対する  
解析も可能である。また  $w(t)$  がホワイトノイズ以外の場合  
には、入力項をARモデルなどにモデル化することによ  
り、適用可能となる。

ホワイトノイズ  $w(t)$  を非線形システムへの入力とし、非  
線形システムの出力  $z(t)$  の関数として設定される性能  
関数  $g(z(t))$  が  $0 \leq t \leq T$  において負となる確率を用いて  
初期通過確率  $P_f^{0,T}$  が算出される。

$$P_f^{0,T} = P(g(z(t)) \leq 0, 0 \leq t \leq T) \quad (2)$$

一般に性能関数  $g(z(t))$  は限界状態をもとに応答ベ  
クトル  $z(t)$  の関数として与えられるものであるが、本研究  
では、式(3)に示すように、 $0 \leq t \leq T$  において  $z(t)$  が閾  
値  $x_d$  を超過する場合を構造系の破壊と見なすこととす  
る。

$$g(z(t)) = x_d - |z(t)| \quad (3)$$

ここで、 $x_d$  は正定値ベクトルである。

また、定義関数  $I[\bullet]$  を式(4)とすると、初期通過確率  
 $P_f^{0,T}$  は、式(5)で与えられる。

$$I[g(z(t)), 0 \leq t \leq T] = \begin{cases} 1 & g(z(t)) \leq 0 \\ 0 & g(z(t)) > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$P_f^{0,T} = E[I[g(z(t)), 0 \leq t \leq T]] \quad (5)$$

通常のモンテカルロ法は、式(1)からサンプル実現過  
程  $z(t)^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  を算出し、継続時間  $0 \leq t \leq T$   
において、式(5)を近似的に評価するものである。

$$\hat{P}_f^{0,T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(z(t)^{(i)}), 0 \leq t \leq T] \quad (6)$$

また、 $\hat{P}_f^{0,T}$  の分散値は式(7)の  $\text{Var}[\hat{P}_f^{0,T}]$  で与えられ  
るが、分散値が小さければ効率良く  $\hat{P}_f^{0,T}$  を求めること  
が出来る。

$$\text{Var}[\hat{P}_f^{0,T}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (I[g(z(t)^{(i)}), 0 \leq t \leq T] - P_f^{0,T})^2 \quad (7)$$

式(6)を効率よく評価するために、各種の分散低減法  
に関する研究が行われている。本研究では、以下に示  
すように式(1)における入力  $w(t)$  に重要サンプリング関  
数項を付加して、高頻度に破壊領域に達するように応  
答のサンプル過程をオンライン制御するものである。

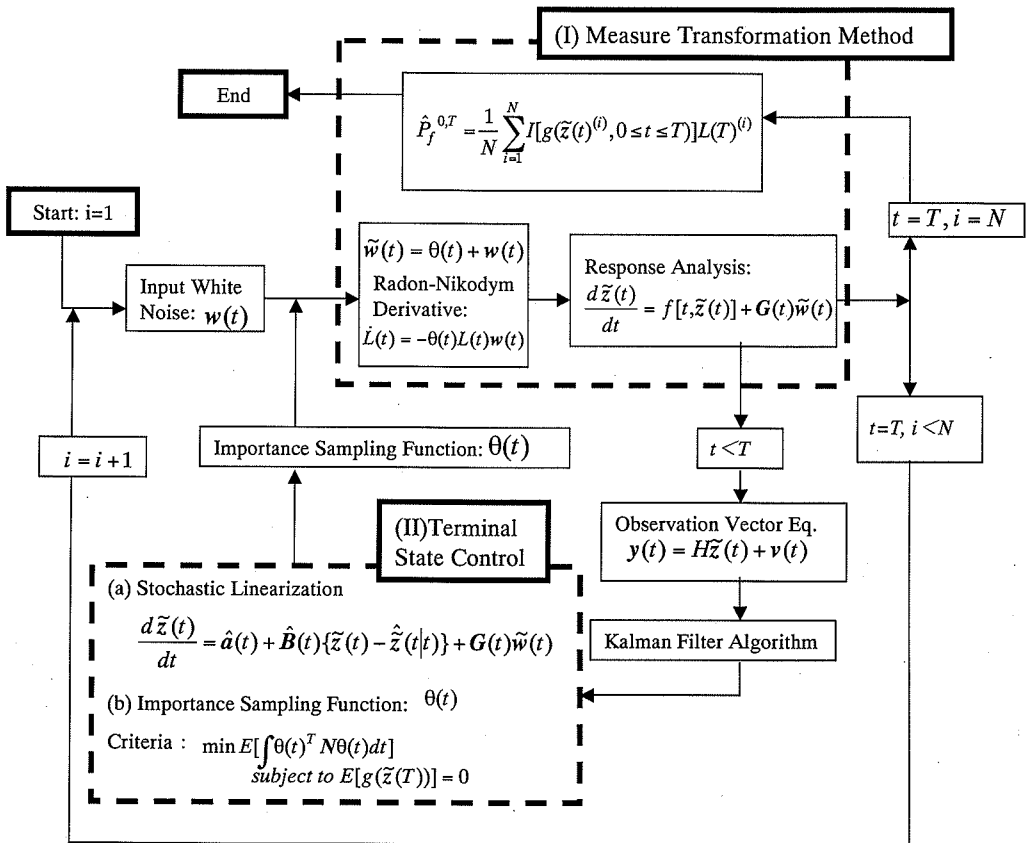


Fig.1 Analytical Flow

### 3. 解析手順

本研究における初期通過確率  $P_f^{0,T}$  算出までの計算の流れをFig. 1に示す。モンテカルロシミュレーションを基本とした解析手順であるが、はじめに図中の破線で囲まれた(I)確率測度変換および(II)終端状態制御による重要サンプリング関数の算出方法について述べ、次に具体的な定式化を示す。

(I). 確率測度変換法: 構造系に対する確率過程入力項に重要サンプリング関数項を加法的に与える。重要サンプリング関数は、終端時刻において破壊状態に達するサンプル実現過程を得るように構造系の応答をオンライン制御するものであり、(II)において計算される。ギルサノフの定理<sup>10)</sup>により、尤度比プロセス(Radon-Nikodym Derivative)を計算する。尤度比プロセスは、重要サンプリング関数を付加したことによる確率測度の変換の影響を評価するためのものである。

(II). 終端状態制御による重要サンプリング関数の算

出: (a)動的な非線形系の支配方程式を、確率的等価線形化法により、逐次得られる応答のサンプル実現値近傍で線形化することにより等価な線形式に変換する。等価線形式における $\hat{a}(t)$ 、 $\hat{B}(t)$ および $\hat{z}(t|t)$ などの未知量は、応答のサンプル実現値を観測データとしてカルマンフィルタにより求められる。

(b)等価線形式をもとにして、継続時間 $0 \leq t \leq T$ における初期通過確率を評価するために、終端時間における拘束条件  $E[g(\tilde{z}(T))] = 0$  および  $\min E[\int \theta(t)^T N \theta(t) dt]$  を満足する重要サンプリング関数  $\theta(t)$  をオンラインで求める。等価線形式から求められた制御入力である重要サンプリング関数項と入力外乱は、 $\tilde{w}(t) = \theta(t) + w(t)$  として解析対象の非線形構造系に入力される。時間方向に  $\tilde{w}(t)$  を入力とする応答計算を逐次行い、終端時刻における尤度比プロセスの値  $L(T)^{(i)}$ ,  $i=1, 2, N$  を式(4)に乗ずる。

#### (1) 確率測度変換法<sup>10)</sup>

式(1)の  $w(t)$  に式(8)に示すように応答を制御するため

の重要サンプリング関数を付加して入力とする。したがって、式(1)に対応する式(9)の応答を $\tilde{z}(t)$ とする。

$$\tilde{w}(t) = \theta(t) + w(t) \quad (8)$$

$$\frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = f[t, \tilde{z}(t)] + G\tilde{w}(t) \quad (9)$$

式(8)によると入力の確率測度に変換される。この影響は、尤度比プロセスにより評価される。ギルサノフの定理から尤度比プロセス $L(t)$ は、次式で与えられる。

$$L(t) = \exp \left[ \int_0^t \theta(s) d\tilde{w}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds \right] \quad (10)$$

また、式(10)の $L(t)$ は初期条件 $L(0) = 1$ であり、次式を満たすマーチンゲールである。

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\theta(t)L(t)w(t) \quad (11)$$

上記の関係を用いれば、式(5)に示した継続時間 $0 \leq t \leq T$ における初期通過確率 $P_f^{0,T}$ は、尤度比プロセスを用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} P_f^{0,T} &= E[I[g(z(t)), 0 \leq t \leq T]] \\ &= E[I[g(\tilde{z}(t)), 0 \leq t \leq T]L(T)] \end{aligned} \quad (12)$$

適切な重要サンプリング関数が求められ、式(9)にもとづいてサンプル実現過程をシミュレートし、式(6)よりも式(13)により得られる $\hat{P}_f^{0,T}$ の分散が小さければ、効率的な分散低減法となる。

$$\hat{P}_f^{0,T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\tilde{z}(t)^{(i)}, 0 \leq t \leq T)]L(T)^{(i)} \quad (13)$$

ここで、 $L(T)^{(i)}$ は終端時刻における尤度比プロセスの値である。

仮に式(13)において1回のシミュレーションで $\hat{P}_f^{0,T}$ の推定誤差分散が0となるサンプル実現過程 $\theta(t)$ を求めることが可能ならば、理想的な分散低減法となる。このような $\theta(t)$ は、理論的に次式で与えられる<sup>(17), (18)</sup>。

$$\theta(t) = -\frac{1}{P_f^{t,T}} \cdot \frac{\partial P_f^{t,T}}{\partial \tilde{z}(t)} \cdot G(t) \quad (14)$$

ここで、 $P_f^{t,T}$ は時刻 $t$ から $T$ における初期通過確率の理論解である。

式(14)から $\theta(t)$ を求めるためには、時刻 $t$ から $T$ にお

ける理論解 $P_f^{t,T}$ が既知であることが必要となる。しかしながら、初期通過確率の算定は、未知の $P_f^{0,T}$ を求めることを目的としており、実際に式(14)を計算することは困難である。したがって式(13)を効率よく評価するためには $\theta(t)$ の与え方が重要であり、前述したような研究が行われている。

本研究は、履歴型の非線形性にも追従できるように、逐次得られるサンプル実現値近傍で線形化を行い、終端時刻に構造系の挙動が性能関数で規定された限界状態となるようにオンライン型の終端状態制御問題を解くことにより、重要サンプリング関数を求めることを行う。すなわち式(8)に示したように重要サンプリング関数を加法形に与えていることにより、以下に述べるようなシステム制御理論の適用が可能となる。

## (2)重要サンプリング関数の計算

### a) 確率論的等価線形化<sup>(19)</sup>

具体的に重要サンプリング関数を式(9)で与えられる非線形システムから直接求めることは困難である。本研究は等価線形システムにオンラインで近似して重要サンプリング関数を算出するものである。非線形システムの等価線形化法の選択に制約条件はないが、ここではBootton<sup>(19)</sup>が提案している確率論的等価線形化法を用いることとする。

式(9)における $f[t, \tilde{z}(t)]$ が次式の様に展開されるものと仮定する。

$$f[t, \tilde{z}(t)] = a(t) + B(t)\{\tilde{z}(t) - \hat{\tilde{z}}(t)\} + e(t) \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\tilde{z}}(t)$ は $\hat{\tilde{z}}(t) = E[\tilde{z}(t)|Y(t)]$ の推定ベクトルであり、 $Y(t)$ は $Y(t) = \{y(s), s \in [0, t]\}$ で与えられる観測開始時刻0から現在時刻 $t$ までの観測データの蓄積を意味しており、各時刻において観測方程式は次式で与えられる。

$$y(t) = H\tilde{z}(t) + v(t) \quad (16)$$

ここで、 $v(t)$ は平均値が0、共分散行列が $R(t)$ として与えられるガウス性ホワイトノイズであり、 $H$ は定数行列である。

式(15)における $e(t)$ は、展開を第2項までで打切ったすべての誤差を集めたものである。また、 $a(t)$ および $B(t)$ は、線形化による誤差項 $e(t)$ に関して、条件付確率密度関数 $P[\tilde{z}(t)|Y(t)]$ に対する自乗期待値が最小となるように決定される。

$$E[e(t)^T e(t)|Y(t)] = \int e(t)^T e(t)P[\tilde{z}(t)|Y(t)]d\tilde{z} \rightarrow \min. \quad (17)$$

実際に式(17)を計算するためには、条件付確率密度関数  $P[\tilde{z}(t)|Y(t)]$  が必要となる。しかしながら、式(9)よりシステムの入出力関係が非線形式となっていることから、 $\tilde{z}(t)$  は非ガウス性となり、 $P[\tilde{z}(t)|Y(t)]$  の分布形を規定することは困難である。

ここでは、未知の条件付平均値  $\hat{z}(t|t)$  および共分散行列  $P(t|t)$  を有するガウス性確率密度関数として  $P(\tilde{z}(t)|Y(t))$  を与えることとする。すなわち条件付平均値近傍においてガウス性を仮定していることになり、これらの値は、カルマンフィルタによりオンラインで逐次推定される。

$$P(\tilde{z}(t)|Y(t)) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |P(t|t)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\tilde{z}(t) - \hat{z}(t|t))^T P(t|t)^{-1} (\tilde{z}(t) - \hat{z}(t|t)) \right] \quad (18)$$

式(18)の仮定の下で、式(17)の計算を行う。

$$\frac{\partial E[e^T(t)e(t)|Y(t)]}{\partial a(t)} = \int [-2f[t, \tilde{z}(t)] + 2a(t) + 2B(t)(\tilde{z}(t) - \hat{z}(t|t))] P[\tilde{z}(t)|Y(t)] d\tilde{z} \quad (19)$$

ここで、 $\partial E[e^T(t)e(t)|Y(t)] / \partial a(t) = 0$  を満足する  $a(t)$  を  $\hat{a}(t)$  とおくと、次式を得る。

$$\hat{a}(t) = \int f[t, \tilde{z}(t)] P[\tilde{z}(t)|Y(t)] dz = \hat{f}[t, \tilde{z}(t)] \quad (20)$$

同様に、 $\partial E[e^T(t)e(t)|Y(t)] / \partial B(t) = 0$  となる  $B(t)$  を  $\hat{B}(t)$  とおくと、次式を得る。

$$\hat{B}(t) = [ (f[t, \tilde{z}(t)] \tilde{z}(t)^T)^{\wedge} - \hat{f}[t, \tilde{z}(t)] \hat{z}(t|t)^T ] P(t|t)^{-1} \quad (21)$$

ここで、 $(f[t, \tilde{z}(t)] \tilde{z}(t)^T)^{\wedge} = E[f[t, \tilde{z}(t)] \tilde{z}(t)^T | Y(t)]$ 、 $P(t|t) = E\{[\tilde{z}(t) - \hat{z}(t|t)] [\tilde{z}(t) - \hat{z}(t|t)]^T | Y(t)\}$  である。

したがって、式(9)におけるシステム非線形関数  $f[t, \tilde{z}(t)]$  は、式(22)のように等価な線形システムへと変換することが出来る。

$$\frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = \hat{a}(t) + \hat{B}(t) \{ \tilde{z}(t) - \hat{z}(t|t) \} + G(t) \tilde{w}(t) \quad (22)$$

式(22)を評価するためには、未知の  $\hat{z}(t|t)$  および  $P(t|t)$  が必要である。これらの値は、サンプル実現値を

式(16)の観測方程式に  $y(t)$  として与え、式(22)を状態方程式としてカルマンフィルタにより推定される。

### b) 重要サンプリング関数の算出

本研究では、性能関数を式(3)で与え、解析対象は確率過程でモデル化された入力を受ける確定構造系とする。ここでは、継続時間  $0 \leq t \leq T$  の範囲内で応答  $\tilde{z}(t)$  に関して、終端時刻における性能関数の期待値が次式で与えられる終端状態制御問題を考える。

$$\min E \left[ \int_0^T \theta(t)^T N \theta(t) dt \right] \quad \text{subject to} \quad E[g(\tilde{z}(T))] \quad (23)$$

ここで、 $N$  は、重み係数である。

式(23)は、継続時間において  $\theta(t)^T N \theta(t)$  の積分値の期待値が最小となり、終端時刻において応答が限界状態に達するような制御入力を、重要サンプリング関数とすることを目的としている。

$\theta(t)$  が応答  $\tilde{z}(t)$  の関数として、次式で与えられるものとする。式(24)は、応答ベクトルの推定値  $\hat{z}(t)$  の関数であり、状態量フィードバック型制御入力を仮定している。

$$\theta(t) = \varphi[t, \hat{z}(t)] \quad (24)$$

本研究では、式(23)で与えられる条件を、2次形式の評価関数として次式で与えた。以下では、次式を満足する制御入力  $\varphi[t, \hat{z}(t)]$  を求めることを考える。

$$V(t, \kappa) = \min_{\hat{\varphi}} E[(x_d - \hat{z}(T))^T F (x_d - \hat{z}(T)) + \lambda \int_t^T \varphi^T[s, \hat{z}(s)] N(s) \varphi[s, \hat{z}(s)] ds | \hat{z}(t|t) = \kappa] \quad (25)$$

ここで、 $\lambda$  は重み係数、 $F$  は重み係数行列である。

式(25)に Bellman の最適性原理を適用すると、次式の Bellman-Hamilton-Jacob 方程式を得る<sup>20)</sup>。

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min \left[ \lambda \hat{\varphi}^T(t, \kappa) N(t) \hat{\varphi}(t, \kappa) + \left( a(t) + G \hat{\varphi}(t, \kappa) \frac{\partial V}{\partial \tilde{z}} \right) + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \hat{\Sigma}(t)^T \frac{\partial V}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{z}} \hat{\Sigma}(t) \right] \right] \quad (26)$$

ここで、 $\hat{\Sigma}(t) = P(t|t) H^T [R(t) R(t)^T]^{-\frac{1}{2}}$  であり、

$\kappa = \hat{z}(t|t)$  としている。

式(26)の最小化を行うことで次式により最適制御則が与えられる。

$$\hat{\varphi}(t, \kappa) = -\frac{1}{2\lambda} N(t)^{-1} G^T \frac{\partial V(t, \kappa)}{\partial \tilde{z}} \quad (27)$$

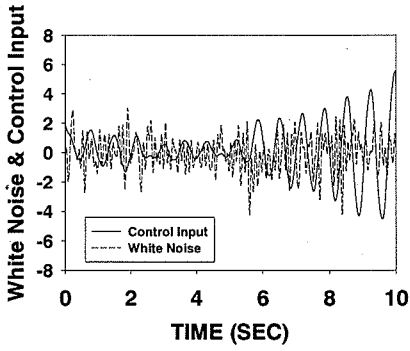


Fig.2 White Noise and Control Inputs

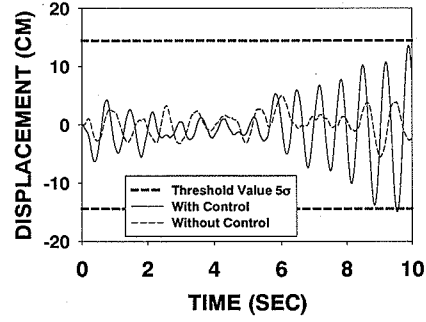


Fig.3 Displacement Responses

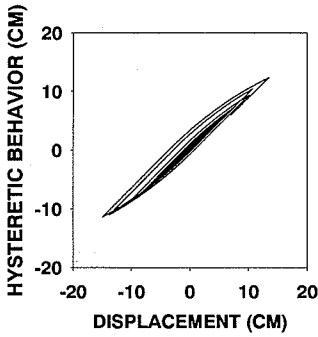


Fig.4 Hysteretic Behavior

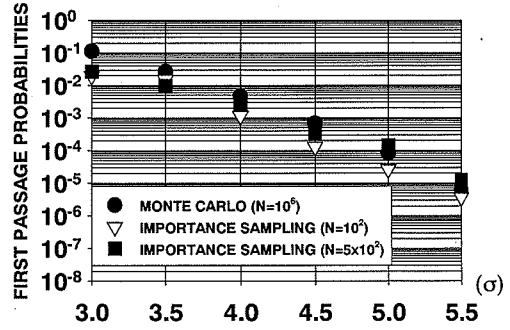


Fig.5 First Passage Probabilities

ここで、式(25)が2次形式であることから、 $V(t, \kappa)$ の解として次式を仮定する。

$$V(t, \kappa) = \kappa^T \pi(t) \kappa + 2\kappa^T \alpha(t) + \beta(t) \quad (28)$$

さらに式(28)を式(26)に代入し、係数比較を行うと式(27)を求めるために必要な $\pi(t)$ 、 $\alpha(t)$ に関して次式を得る。

$$\frac{d\pi(t)}{dt} - \frac{1}{\lambda} \pi(t) G N(t)^{-1} G^T \pi(t) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} - \frac{1}{\lambda} \pi(t) G N(t)^{-1} G^T \alpha(t) + \pi(t) a(t) = 0$$

式(29)の連立微分方程式を計算ステップごとに解き、式(27)に代入すると、最適制御則 $\hat{\phi}(t, \kappa)$ は次式で与えられる。

$$\hat{\phi}(t, \kappa) = -\frac{1}{\lambda} N(t)^{-1} G^T \pi(t) \hat{z}(t|t) - \frac{1}{\lambda} N(t)^{-1} \alpha(t) \quad (30)$$

また、終端時刻 $t = T$ において、式(25)は次式となる。

$$\begin{aligned} v(T, \kappa_T) &= E[(x_d - \tilde{z}(T))^T F (x_d - \tilde{z}(T)) | \hat{z}(T|T) = \kappa_T] \\ &= \kappa_T^T F \kappa_T - \kappa_T^T F x_d + \text{trace}[P(T|T)F] \end{aligned}$$

(31)

式(31)を展開して、終端時刻 $t = T$ において式(28)と係数比較を行うことで、 $\pi(T) = F$ 、 $\alpha(T) = -F x_d$ の終端条件が得られる。式(29)の具体的な解法は、システム制御理論の文献(例えば 20)に委ねるが、終端時刻 $T$ から現時刻 $t$ まで逆時間方向に解けば、 $\pi(t)$ 、 $\alpha(t)$ を求めることができるので、 $\hat{\phi}(t, \kappa)$ をオンラインで求めることができる。

#### 4. 数値計算例

本研究では、以下に示す非線形1自由度系を対象として解析例を示す。

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 \phi(\dot{x}(t), x(t)) = -w(t) \quad (32)$$

ここで、 $w(t)$ はガウス性ホワイトノイズである。

非線形履歴特性として式(33)に示す Bouc and Wen モデル<sup>21)</sup>を採用して、具体的に $\hat{a}(t)$ および $\hat{B}(t)$ を求める。

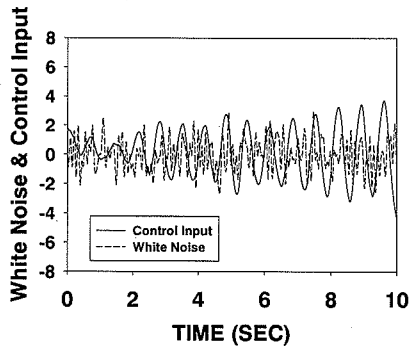


Fig.6 White Noise and Control Inputs

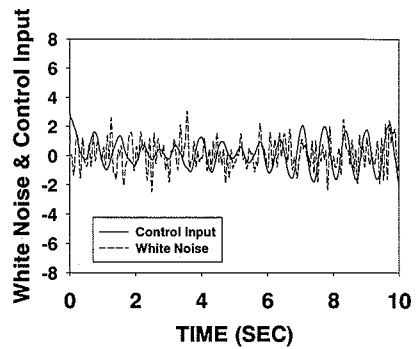


Fig.10 White Noise and Control Inputs

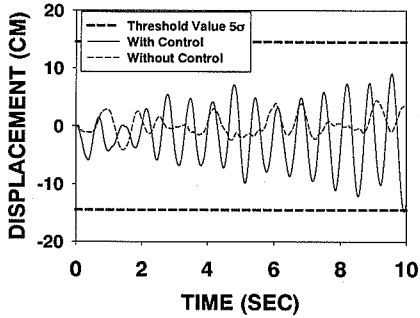


Fig.7 Displacement Responses

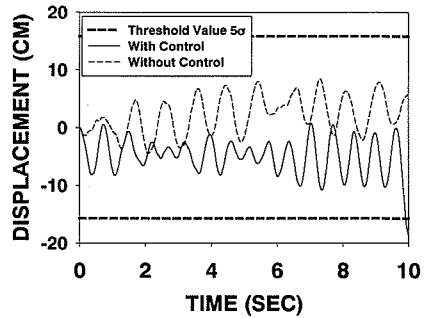


Fig.11 Displacement Responses

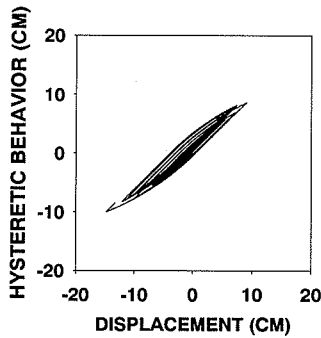


Fig.8 Hysteretic Behavior

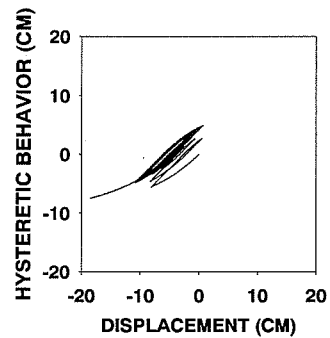


Fig.12 Hysteretic Behavior

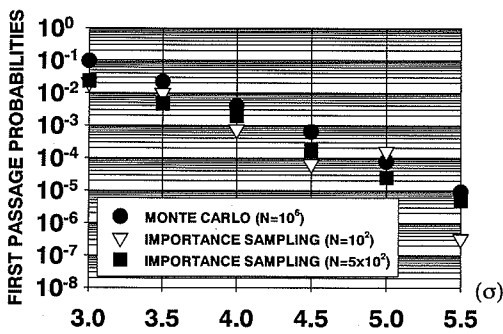


Fig.9 First Passage Probabilities

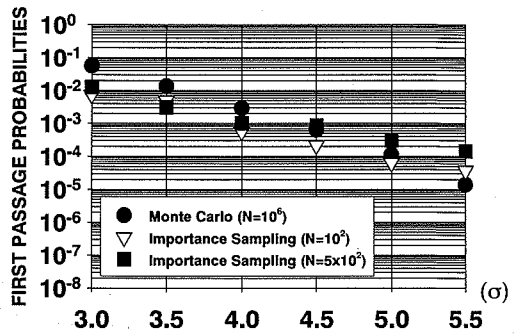


Fig.13 First Passage Probabilities

$$\dot{\phi}(\dot{x}(t), x(t)) = A\dot{x} - \beta|\dot{x}|\phi(\dot{x}, x)|^{\beta-1}\phi(\dot{x}, x) - \gamma\dot{x}|\phi(\dot{x}, x)|^{\gamma} \quad (33)$$

ここで、 $A$ 、 $\beta$  および  $\gamma$  は履歴特性をコントロールするパラメータである。また、式(33)において  $n=1$  として定式化する。

$z(t) = [x(t) \dot{x}(t) \phi(\dot{x}(t), x(t))]^T = [\tilde{z}_1(t) \tilde{z}_2(t) \tilde{z}_3(t)]^T$  と状態空間表示し、式(32)の入力項に重要サンプリング関数項を付加すると、式(9)に対応した次式を得る。

$$f[t, \tilde{z}(t)] = \begin{bmatrix} \tilde{z}_2(t) \\ -2h\omega\tilde{z}_2(t) - \omega^2\tilde{z}_3(t) \\ A\tilde{z}_2(t) - \beta|\tilde{z}_2(t)|\tilde{z}_3(t) - \gamma\tilde{z}_2(t)|\tilde{z}_3(t)| \end{bmatrix} \quad (34)$$

式(34)から式(20)および式(21)を用いて、以下に示すように  $\hat{a}(t)$  および  $\hat{B}(t)$  を求める。なお式(35)、式(36)において  $\hat{z}$  は最適推定値であり、 $P_{ij}$  は共分散行列  $P(t)$  の  $i$  行  $j$  列成分を表す。

$$\hat{a}(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}_2(t) \\ -2h\omega\hat{z}_2(t) - \omega^2\hat{z}_3(t) \\ A\hat{z}_2(t) - \beta|\hat{z}_2(t)|\hat{z}_3(t) - \gamma\hat{z}_2(t)|\hat{z}_3(t)| \\ + 0.5\text{trace} \left[ P(t) \frac{\partial^2 f_3[t, \tilde{z}(t)]}{\partial \tilde{z}(t)^2} \right] \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\text{ここで、} \frac{\partial^2 f_3[t, \tilde{z}(t)]}{\partial \tilde{z}(t)^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{2,3} \\ 0 & F_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \text{ であり各要素は}$$

$$F_{2,3} = F_{3,2} = -\beta \frac{|\hat{z}_2(t)|}{\hat{z}_2(t)} \hat{z}_3(t) - \gamma \frac{|\hat{z}_3(t)|}{\hat{z}_3(t)}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} P(t)^{-1} \quad (36)$$

ここで、 $B_{1j} = P_{j2}$ 、 $B_{2j} = -2h\omega P_{j2} - \omega^2 P_{j3}$

$$B_{3,j} = P_{j,2} \left( A - \beta \frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2} \hat{z}_3 - \gamma \frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3} \right) + P_{j,3} \left( -\beta \frac{|\hat{z}_2|}{\hat{z}_2} - \gamma \frac{|\hat{z}_3|}{\hat{z}_3} \right)$$

式(35)および式(36)により、式(22)に対応した連続型等価線形式が得られる。次に、連続型状態方程式を離散型に変換し、カルマンフィルタアルゴリズムを適用する。

その際、観測方程式は、 $t = k\Delta t$  と離散化して次式により与えた。

$$y(k) = H \tilde{z}(k) + v(k) \quad (37)$$

ここで、 $H$  は  $(3 \times 3)$  の単位行列であり、解析では事前に行った試算をもとに  $v(k)$  の分散行列の対角成分をすべて  $10^{-2}$  にして、その他の成分は 0 とした。

また、式(25)における重み係数  $N=1.0$ 、 $F$  を式(38)のように共通に与え、 $\lambda$  の値は以下に示す CASE1 および CASE2 において  $\lambda=0.5$ 、CASE3 において  $\lambda=0.3$  とした。

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

構造系の動特性は  $h=0.05$ 、 $\omega_0=7.07(\text{rad/sec})$ 、 $A=1.0$  は共通に用い、CASE1 から CASE3 において  $\beta$  および  $\gamma$  のパラメータの与え方により弱い非線形性から強い非線形挙動を示す系の解析を行った。また、入力波形は周波数帯域が 0.0 Hz から 10.0 Hz であり、平均値 0、標準偏差 1 (gal) のガウス性ホワイトノイズとした。さらに入力の係数行列を式(39)として、時間刻み  $\Delta t=0.01(\text{sec})$ 、継続時間  $T=10.0(\text{sec})$  の初期通過確率を評価することとした。

$$G(t)^T = [0 \quad -122.5 \quad 0]^T \quad (39)$$

性能関数は式(3)を用いて、解析例題では変位応答のみを対象として閾値  $x_d$  を次式のように設定した。

$$x_d = m\sigma_{z(t)}, \quad m=1,2,3 \quad (40)$$

ここで、 $\sigma_{z(t)}$  は変位応答波形の標準偏差 (cm) である。

変位応答波形の標準偏差は、各 CASE の非線形系ごとに別々に設定した。ここでは、予め式(1)にモデルの諸元を与え、継続時間  $T=25.0(\text{sec})$  の応答計算を 1 回を行い、得られた波形から算出されたものを用いることとした。また、事前にモンテカルロシミュレーションを  $10^6$  回を行い、得られた初期通過確率を対象とする構造系の初期通過確率の基準値 (正解値) とすることとした。



Fig. 2は、 $\beta = 0.02$  および  $\gamma = 0.02$  として与えた場合(CASE1)に、応答波形の標準偏差の  $5\sigma$  を閾値と設定した場合の制御入力1サンプル実現過程、すなわち重要サンプル関数とオリジナルシステムへの確率過程入力を示している。Fig. 3には、Fig. 2に示した制御入力の有無による変位応答波形を示している。ここで、式(25)は終端時刻における性能関数の期待値が  $E[g(\tilde{z}(t))] = 0$  となるように制御するものであり、Fig. 3に示した1サンプル実現過程のように終端時刻において閾値に達するサンプルのみシミュレートされるものではない。また、確率過程入力をシミュレートする際に発生させる乱数の初期値によっては、シミュレーション回数が多くなっても正解から離れる場合がある。Fig. 4は、制御入力を付加した場合の履歴特性であり、終端時刻において  $5\sigma$  の閾値に達することを目的とした場合であるが、履歴性状は弱非線形挙動を示していることがわかる。このことに対応して、制御入力は単に終端時刻に近づくにつれて振幅を増大するような入力が計算されており、変位応答も終端時刻付近において閾値である  $5\sigma$  に漸近している。Fig. 4は、制御された系の履歴特性であり、オリジナルの構造系において非常に希に閾値超過となる場合には、より複雑な挙動となるものと思われる。Fig. 5には、初期通過確率の評価結果を示している。ここでは、提案手法に関して100回および500回の計算結果とモンテカルロシミュレーション  $10^6$  回で得られた基準値と比較しているが、提案手法は基準値と良好な対応を示していることがわかる。

次に  $\beta = 0.03$  および  $\gamma = 0.03$  として与えた場合(CASE2)について、応答波形の標準偏差の  $5\sigma$  を閾値と設定した場合に、それぞれFig. 6に制御入力、Fig. 7に応答変位波形のサンプル実現値、さらに履歴特性をFig. 8に示している。Fig. 6に示した制御入力は、Fig. 2と比較して単純に振幅を増大するようにはならず、非線形履歴性状に対応して逐次型の制御を行っていることがわかる。Fig. 9に初期通過確率の評価結果を示した。

同様にFig. 10からFig. 13は、 $\beta = 0.05$  および  $\gamma = 0.05$  として与えた場合(CASE3)の計算結果である。Fig. 12に示したように閾値超過を実現するような履歴特性は基準軸のずれ(ドリフト)が生じ、非線形性の強いものとなっている。非線形性の増加に伴い初期通過確率の評価結果は若干の精度の低下が見られる。ここでは、式(25)に示した制御系のパラメータは、異なる閾値レベルおよび非線形性に対して共通の値を用いているためと考えられ、特に完全弾塑性に近く応答に大きなドリフトを含むような系に対しては、制御系のパラメータの与え方に関する検討が必要であると考えている。計算時間の効率化に関しては、時間刻み  $\Delta t = 0.01(\text{sec})$ 、継

続時間  $T = 10.0(\text{sec})$  のモンテカルロシミュレーションを  $10^6$  回計算する時間を1(68時間)とすると、本研究で提案した手法を500回計算するために要した時間は、0.0074(0.5時間)であった。なお計算は、Dell社製パーソナルコンピュータ Dimension-4100を用いた。以上より、逐次サンプル実現値を観測情報としてオンラインで重要サンプリング関数を与える手法の履歴型非線形系への適用性が確認された。

## 5. まとめ

本研究は、動的非線形構造系の初期通過確率を算出するために、重要サンプリング関数を導入し、限界状態に達するサンプル過程を効率よくシミュレートする手法を提案し、確率測度が変換された影響をギルサノフの定理により評価している。

ここでは、履歴型の非線形性にも追従できるように、逐次得られるサンプル実現値を観測情報として、動的非線形系のサンプル実現値近傍で線形化を行い、構造系の応答が終端時刻において閾値に到達するようにオンライン型の終端状態制御問題を解くことにより、重要サンプリング関数を求めている。その結果、観測情報を条件とした等価線形化手法と動的システム制御理論の適用が、非線形システムの初期通過確率算定問題に対して有効な手段であることが確認された。

今後は、完全弾塑性系への適用および推定結果の精度向上のために制御系の挙動を支配するパラメータの設定に関する検討が必要である。また、解析対象を有限要素などで表現される一般的な構造系に拡張することは、確率有限要素法で用いられているように影響係数法により Jacobian 行列を求め、等価線形化することにより可能であると考えている。また、本研究で示した入力に重要サンプリング関数を付加する手法は、著者らが提案している応答の情報を効率よく活用する Pseudo Analytical Method (PAM)<sup>14), 15)</sup> に適用可能である。

## 参考文献

- 1) Lin, Y.K. and Cai, G.Q.: Probabilistic Structural Dynamics, *Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- 2) Crandall, S.H.: Perturbation Techniques for Random vibration of Non-linear Oscillators, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol.35, pp.1700-1705, 1963.
- 3) Roberts, J.B. and Spanos, P.D.: *Random Vibration and Statistical Linearization*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- 4) Pradlwatter, H.J. and Schuëller, G.I.: Assessment of Low Probabilistic Events of Dynamical Systems by Controlled Monte Carlo Simulation, *Prob. Engineering Mechanics*, Vol.14, pp.213-227, 1999.
- 5) Bayer, V. and Bucher, C.: A Simulation Procedure for First Passage Problem of Nonlinear Structures, *Proc., ASCE*

- Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability*, D. M. Frangopol & M.D. Grigoriu (Eds.), Worcester, Massachusetts, August 7-9, pp.816-819, 1996.
- 6) Hoshiya, M., Taniguchi, O. and Sutoh, A.: Adaptive Importance Sampling for Stochastic Nonlinear Systems, *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Stochastic Structural Dynamic -SSD'98*, pp.193-196, Notre Dame, August 1998.
  - 7) Koo, H. and Der Kiureghian, A.: "Design Point" Excitation for Stationary Random Vibrations, *8<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability*, Newport Beach, CA, USA, 2001.
  - 8) Der Kiureghian, A.: The Geometry of Random Vibrations and Solutions by FORM and SORM, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol.15, pp.81-90, 2000.
  - 9) Au, S.K. and Beck, J.L.: First Excursion Probabilities of Linear Systems by Efficient Importance Sampling, *8<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability*, Newport Beach, CA, USA, 2001.
  - 10) Tanaka, H.: Application of Importance Sampling Method to Time-Dependent System Reliability Analyses The Girsanov Transformation, *7<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability*, pp.411-418, Kyoto, JAPAN, 1997.
  - 11) Naess, A. and Skaug, C.: Importance Sampling for Dynamical Systems, *Applications of Statistics and Probability*, pp.749-755, 2000.
  - 12) Bucher, C.: An Importance Sampling Technique for Randomly Excited Systems Descretized by Finite Elements, *Proc. Int. Conf. on Advances in Structural Dynamics*, Hong Kong, December 13-15, Elsevier, 2000.
  - 13) Macke, M. and Harnpornchai, N.: Importance Sampling of dynamic Systems-A Comparative Study, *8<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability*, Newport Beach, CA, USA, 2001.
  - 14) Hoshiya, M. and Maruyama, O.: Pseudo Analytical Method for Nonlinear Structural Reliability, *Int. Conf. on Monte Carlo Simulation*, pp.295-300, Monte Carlo, June 2000.
  - 15) 星谷勝, 丸山收: 準解析手法による動的非線形系の初期通過確率算定, *土木学会論文集*, No.717 / 1-61, pp.65-75, 2002年10月.
  - 16) Girsanov, I. V.: On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution Measures, *Theory Prob. & Its Appl.*, pp.285-301, 1960.
  - 17) Milstein, G.N.: *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Dordrecht, Kluwer, 1995.
  - 18) Andersen, L.: *Efficient Techniques for Simulation of Interest Rate Models Involving Non-Linear Stochastic Differential Equations*, General Re Financial Products, New York, 1995.
  - 19) Booton, R.C.: The Analysis of Nonlinear Control System with Random Inputs. *Proc. MRI Symposium on Nonlinear Circuits*, Polytechnic Inst. of Brooklyn, pp.341-344, 1953.
  - 20) Sunahara, Y. and Ohsumi, A.: Stochastic Linearization Technique and Its Application to Optimal Control. *Mem. Kyoto Inst. of Tech*19, pp.11-27, 1970.
  - 21) Wen, Y.K.: Method for Random Vibration of Hysteretic Systems. *Jour. of E.M. Div. ASCE*, Vol.102, pp. 249-263, 1976.

(2003.8.27 受付)

## ESTIMATION OF FIRST EXCURSION PROBABILITIES OF DYNAMIC SYSTEMS BY IMPORTANCE SAMPLING METHOD

Osamu MARUYAMA and Masaru HOSHIYA

Engineering structures are often subjected to dynamic loads, such as earthquakes, winds or sea waves, which are most appropriately characterized as random processes. In the past much effort has been paid to evaluate the first excursion probability of randomly excited nonlinear dynamical systems. However, analytical solutions are available for a restricted class of systems only, whereas Monte Carlo simulation technique offers a feasible alternative for solution of first excursion probabilities except prohibitive computational costs. This paper investigates the variance reduction technique, which is the importance sampling technique utilizing the measure transformation method for the non-linear dynamic system. To attain the purpose, the importance sampling function is obtained by using the stochastic terminal state control theory. The efficiency of the proposed method is demonstrated by numerical examples of non-linear restoring force systems under the external white noise excitation.