

ハイラーキ無限要素の定式化

林 正¹・渡辺 力²・齋藤道生³

¹正会員 工博 長岡技術科学大学 名誉教授

²正会員 博士(工学) 函館工業高等専門学校助教授 環境都市工学科 (〒 042-8501 函館市戸倉町 14-1)

³正会員 川田テクノシステム株式会社 設計部 部長代理 (〒 116-0014 東京都荒川区東日暮里 5-51-11)

有限要素法による無限領域問題の解析では、多くの要素分割が必要になるので無限要素を用いることが多い。本研究では、少ない要素数で高精度の値が得られるハイラーキ無限要素を開発する。本要素では写像関数に半無限関数を用いたハイラーキ写像を使用するので、任意形状の曲線無限要素に適用できる。また、写像関数に特異性を導入することにより、無限領域における応力集中問題に対して収束性のよい特異無限要素を提案する。数値計算により、本解法の精度と有効性を検証する。

Key Words : hierarchical element, infinite element, singular mapping function, stress concentration

1. まえがき

有限要素法による無限領域問題に対する解法のなかで、 C^0 級の変位関数を用いた要素を無限遠に写像する手法が簡便で、この手法が最も効率的であるとされている¹⁾。

無限要素の定式化には、初期の論文に見られる“変位型”の手法²⁾⁻⁴⁾と要素の一端で無限大になる写像関数を用いる手法⁵⁾⁻⁸⁾がある。変位型の要素では、Lagrange 多項式に減衰項を乗じた形状関数で変位を仮定するので、半無限領域の積分には Gauss-Laguerre 求積法が用いられる。一方、無限写像を用いる要素では、簡便な Gauss-Legendre 求積法により親要素の自然座標系の変域内で積分すればよい。

写像関数には分数関数、指数関数、対数関数が提案されているが⁸⁾、数値計算の容易な分数関数を用いることが多い。中間写像点を有する無限要素では、アイソパラメトリック写像により容易に任意形状の曲線要素に変換することができる。文献 6), 8) には多数の中間写像点のある Serendipity タイプの写像関数が示されているが、無限遠に写像する節線上に中間写像点が配置されていないので、無限方向に曲線写像することはできない。 h 法 (要素細分割法) による無限領域の解析では多くの要素分割が必要になるが、要素分割数が少なく済む p 法 (変位関数の高次化法) による無限要素は開発されていないようである。また、任意方向に曲線写像された無限要素は見受けられない。そこで、級数展開した変位関数に無限写像の手法を用いて、ハイラーキ有限要素法の特質を活かした無限要素を開発する。

本研究では、先の論文⁹⁾で提案したハイラーキ写像の手法に半無限関数を使用して、多方向に無限遠写像

が可能な無限要素を定式化する。さらに、任意方向に曲線写像するために、すべての節線上に中間写像点を配置する。このとき、要素の Jacobian が非負になる条件から、中間写像点の位置に関する制約条件を求める。また、慣用の 1/4 点特異写像¹⁰⁾に対応する無限要素における 1/6 点特異写像の手法を示す。

応力集中問題では特異要素が有効であり、より一般的な定式化手法として特異写像関数を用いる手法を示した¹¹⁾。この手法では、特異写像のための中間写像点を必要としないことと、曲線要素にも適用できるので汎用性に優れている。本研究では、この手法を無限要素に拡張した特異無限関数を求める。

本解析法により、粗い要素分割で無限領域問題の解析を効率的に行うことができる。数値計算では、特に応力の精度に着目して解法の有用性を調べる。

2. 半無限写像

(1) 半無限関数

図-1 に示す◎印の節点 1 (または 0) で無限大になる半無限関数の級数は、有限側の節点 0 (または 1) と中間節点 2 ($\xi=0$) の間で級数展開して次式が得られる。

$$h_0 = \frac{-2\xi}{1-\xi}, \quad \bar{h}_m = \frac{1+\xi}{1-\xi} \xi^{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (1)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{2\xi}{1+\xi}, \quad \bar{h}_m = \frac{1-\xi}{1+\xi} (-\xi)^{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (2)$$

ここに $m (\geq 2)$ は級数項、 ξ は自然座標である。なお、◎印の節点は不要であるので^{†1)}、 h_1, \bar{h}_0 は用いない。

式 (1), (2) は $\xi=0$ に関して対称で、 $m \leq 2$ の関数は式

^{†1} 無限遠の一般化変位はゼロとする。

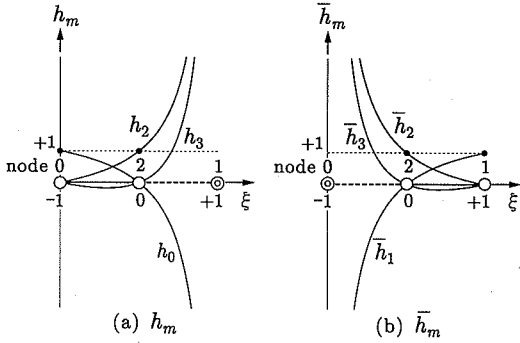


図-1 半無限関数

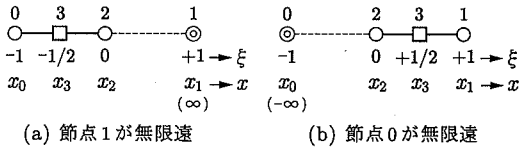


図-2 1次元無限写像

(4) の剛体変位の条件を満たす。

$$\bar{h}_1(\xi) = h_0(-\xi), \quad \bar{h}_m(\xi) = h_m(-\xi) \quad (3)$$

$$h_0 + h_2 = 1, \quad \bar{h}_1 + \bar{h}_2 = 1 \quad (4)$$

(2) 1次元写像

曲線要素に応用するために、図-2 に示す□印の中間写像点 3 を用いて節点 1 または節点 0 を無限遠点に写像する次の 1 次元写像を考える。

$$x = h_0 x_0 + h_2 x_2 + h_3 \hat{x}_3 \quad (5a)$$

$$x = \bar{h}_1 x_1 + \bar{h}_2 x_2 + \bar{h}_3 \hat{x}_3 \quad (5b)$$

ここに \hat{x}_3 はハイアラーキ座標値⁹⁾で、デカルト座標 x を写像関数で級数展開したときの係数である。直線要素では、式 (5) の右辺第 3 項は不要である。

式 (5) の左辺に写像点 3 の座標値 x_3 を代入して、

$$\hat{x}_3 = 2(2x_0 + x_2 - 3x_3) \quad (6a)$$

$$\hat{x}_3 = 2(2x_1 + x_2 - 3x_3) \quad (6b)$$

となる。ここで $x_2 - x_0 = \ell$ 、または $x_1 - x_2 = \ell$ と置いて、 ξ の変域 $[-1, 1]$ 内で 1 次元の Jacobian (= $dx/d\xi$) が正になる条件を求めると次式が得られる。

$$\ell/6 < x_3 - x_0 < \ell/2 \quad (7a)$$

$$\ell/2 < x_3 - x_2 < 5\ell/6 \quad (7b)$$

(3) 写像関数

写像関数を次の条件を満たすように定める。

1) 形状関数の基本的条件を満たす。

2) 剛体変位の条件を満足し、要素の内部および周辺で連続である。

3) 要素内のあらゆる点で Jacobian は非負である。

写像には、座標をハイアラーキ多項式 f_m で級数展開した次のハイアラーキ写像⁹⁾を用いる。

$$x = \sum_{i=1}^I N_i \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^I N_i \hat{y}_i, \quad z = \sum_{i=1}^I N_i \hat{z}_i \quad (8)$$

ここに、

$$N_{mni}(\xi, \eta, \zeta) = f_m(\xi) \cdot f_n(\eta) \cdot f_i(\zeta) \quad (9)$$

$$f_m(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \xi_0) & (m=0, 1) \\ (1 - \xi^2)\xi^{m-2} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (10)$$

$m=0, 1$ は両端の節点、 $m \geq 2$ は節線項、 ξ, η, ζ は自然座標、 $\xi_0 (= \mp \xi)$ は変数で、 \hat{x}_i などの中間写像点のハイアラーキ座標値は曲線要素や特異要素に写像する場合に用いる。添字 i は写像点の番号、 I は写像点数で、二重または三重級数項を 1 次元の番号に並べた数である。2 次元要素の写像では z と $f_i(\zeta)$ を削除する。

半無限写像では、式 (9) において無限遠に写像する ξ, η または ζ 方向の多項式 f_m に式 (1), (2) の半無限関数を用いる。2 または 3 方向に無限遠写像する場合には、自然座標の原点 (面の中央点や要素の中心点) に写像点を設ける (図-3, 5 を参照)。なお、有限側の端節点と写像点 2 の座標値にはハイアラーキ座標値を用いない (式 (5) を参照)。

曲線要素に写像する場合には、上述の 2 節点間に設けた中間写像点に式 (1), (2) の $h_m, \bar{h}_m (m \geq 3)$ を使用し、この写像点のデカルト座標値を式 (6) によりハイアラーキ座標値に変換する。なお、両端とも有限な節線では、中間写像点に $f_m (m \geq 2)$ を用いた通常の曲線写像¹⁰⁾を行う。

3. 無限要素

(1) 四辺形要素

図-3 の四辺形要素では、二重線で示した節線上の点を無限遠に写像する。図 (a) の無限写像の式は次のようになる。 y も同様に表す。

$$x = N_{00} x_1 + N_{20} x_5 + N_{01} x_3 + N_{21} x_6 \quad (11)$$

ここに、

$$N_{mn} = h_m f_n \quad (12)$$

図-3(b) は 2 辺を無限写像する場合で次式が得られる。

$$x = N_{02} x_7 + N_{22} x_9 + N_{01} x_3 + N_{21} x_6 \quad (13)$$

ここに、

$$N_{mn} = h_m \bar{h}_n \quad (14)$$

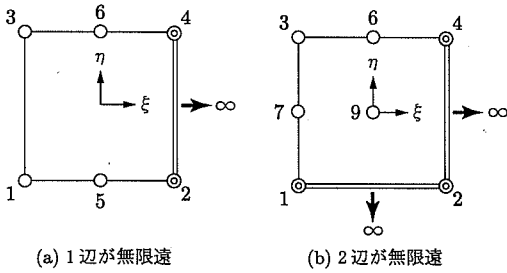


図-3 四角形無限要素

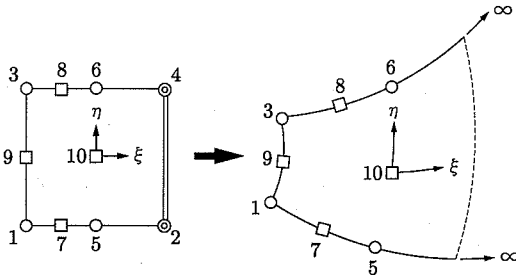


図-4 曲線四角形要素

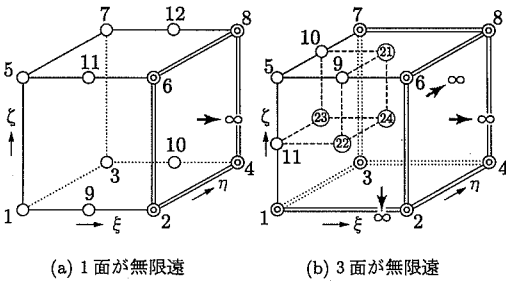


図-5 六面体無限要素

曲線要素に写像するときには、図-4に示す□印の中間写像点を用いる。

$$x = \text{Eq. (11) の右辺} + N_{30} \hat{x}_7 + N_{31} \hat{x}_8 + N_{02} \hat{x}_9 + N_{22} \hat{x}_{10} \quad (15)$$

ここに、 N_{mn} は式 (12) と同じで、 \hat{x}_7, \hat{x}_8 は式 (6a) より求められる。

$$\hat{x}_7 = 2(2x_1 + x_5 - 3x_7), \quad \hat{x}_8 = 2(2x_3 + x_6 - 3x_8) \quad (16)$$

\hat{x}_9, \hat{x}_{10} には通常のハイアラーキ座標値¹⁰⁾を用いる。

$$\hat{x}_9 = x_9 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3), \quad \hat{x}_{10} = x_{10} - \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \quad (17)$$

(2) 六面体要素

図-5(a)に示す六面体要素の $\xi=1$ の面を無限遠に写像する式は次のようになる。

$$x = N_{000} x_1 + N_{200} x_9 + N_{010} x_3 + N_{210} x_{10} + N_{001} x_5 + N_{201} x_{11} + N_{011} x_7 + N_{211} x_{12} \quad (18)$$

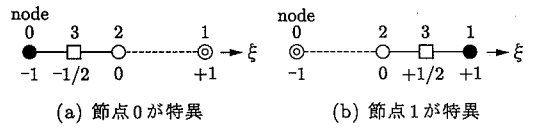


図-6 特異無限遠写像

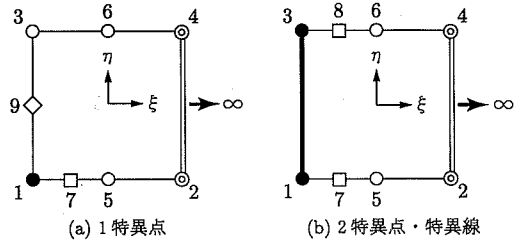


図-7 四角形特異無限要素 (1/6点特異写像)

ここに、

$$N_{mnl} = h_m f_n f_l \quad (19)$$

図-5(b)は $\xi=\eta=-\zeta=1$ の面を無限遠に写像する場合で、②③は節面の中央点、④は要素の中心点 ($\xi=\eta=\zeta=0$) に設けた写像点である。この要素の写像式は、

$$x = N_{002} x_{11} + N_{202} x_{22} + N_{022} x_{23} + N_{222} x_{24} + N_{001} x_5 + N_{201} x_9 + N_{021} x_{10} + N_{221} x_{21} \quad (20)$$

ここに、

$$N_{mnl} = h_m h_n \bar{h}_l \quad (21)$$

4. 特異要素

(1) 特異写像

図-6において $x_3-x_0=l/6$ (または $x_3-x_2=5l/6$) とすると、●印の節点0 (または1) で Jacobian はゼロになる。ここに、 $l=x_2-x_0$ (または $l=x_1-x_2$) である。

したがって、節点0 (または1) が特異になる写像点3のデカルト座標値は次式で与えられる¹²⁾。

$$x_3 = \frac{1}{6}(5x_0 + x_2) \quad (22a)$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(5x_1 + x_2) \quad (22b)$$

また、ハイアラーキ座標値は x_3 を式 (6) に代入して次のようになる。

$$\hat{x}_3 = x_2 - x_0 \quad (23a)$$

$$\hat{x}_3 = x_2 - x_1 \quad (23b)$$

図-7(a)の特異写像では式 (15) から写像点8~10の項を削除し、ハイアラーキ座標値

$$\hat{x}_7 = x_5 - x_1 \quad (24)$$

¹²⁾ 有限な要素の1/4点特異写像に対して1/6点特異写像と呼ぶことにする。

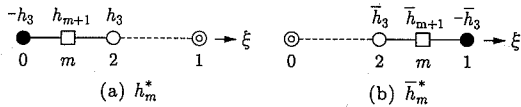


図-8 無限関数の特異項

を代入して次式が得られる。

$$x = \text{Eq.(11)の右辺} + N_{30}(x_5 - x_1) \quad (25)$$

なお、通常の1/4点特異写像¹⁰⁾のように、図中の節点9を1/4写像点に用いた場合には無限遠でJacobianが負になる領域が生じる。一般的に、前述の正則条件3)を満たすために、特異写像では次のことに注意しなければならない。

- ① 1/6写像点は、一方向無限要素において無限遠写像する節線上のみに配置する¹³⁾。
- ② 多方向に無限遠写像する要素には、特異写像は使用できない。

図-7(b)は節点1,3を特異点にした場合で、式(12)の N_{mn} を用いて次のようになる。

$$x = \text{Eq.(11)の右辺} + N_{30}(x_5 - x_1) + N_{31}(x_6 - x_3) \quad (26)$$

なお、節点1,3間の節線は特異線である。

(2) 特異無限関数

特異写像に代わり、特異無限関数を用いた特異要素を求める。この要素では1/6写像点が不要なことで、特異曲線要素にも適用できる長所がある¹¹⁾。

図-6の節点1または0で無限大、他端で導関数がゼロになる特異無限関数は式(1), (2)を用いて次式で与えられる。

$$h_0^* = \frac{1}{2}(3 + \xi)h_0, \quad h_m^* = (1 + \xi)h_m \quad (m \geq 2) \quad (27)$$

$$\bar{h}_1^* = \frac{1}{2}(3 - \xi)\bar{h}_1, \quad \bar{h}_m^* = (1 - \xi)\bar{h}_m \quad (m \geq 2) \quad (28)$$

式(27), (28)の関数には式(3)と同様な対称性があり、剛体変位の条件を満たす。これらの関数を式(1), (2)の非特異の半無限関数の和で表すことができる。

$$h_0^* = h_0 - h_3, \quad h_m^* = h_m + h_{m+1} \quad (m \geq 2) \quad (29)$$

$$\bar{h}_1^* = \bar{h}_1 - \bar{h}_3, \quad \bar{h}_m^* = \bar{h}_m + \bar{h}_{m+1} \quad (m \geq 2) \quad (30)$$

図-8に、特異性を与える式(29), (30)の右辺第2項を示す。特異関数を用いるときには□印の中間写像点は曲線写像の場合に用いて、直線要素では使用しない。

(3) 特異無限要素

図-9に、特異無限関数を用いた場合の特異項を示す。まず、図(a)の節点1が特異点の場合の写像の式は

¹³⁾ このために、特異点でヤコビ行列は特異ではあるが、ゼロ行列にはならない。

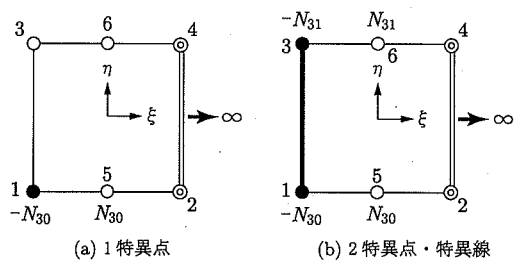


図-9 四角形無限要素の特異項

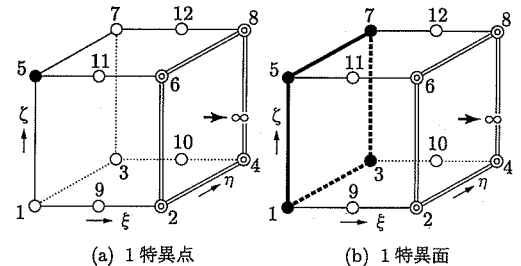


図-10 六面体特異無限要素(特異関数)

次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= h_0^* f_0 x_1 + h_2^* f_0 x_5 + h_0 f_1 x_3 + h_2 f_1 x_6 \\ &= \text{Eq.(11)の右辺} + h_3 f_0 (x_5 - x_1) \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)は式(25)と完全に一致する。右辺第2項は図中の特異項である。図-9(b)の場合は、式(26)と同一の写像式が直ちに得られる。

図-10(a)の六面体要素において節点5が特異点の場合には、式(19)の N_{mnl} を用いて次式が得られる。

$$x = \text{Eq.(18)の右辺} + N_{301}(x_{11} - x_5) \quad (32)$$

図-10(b)の節点1,3,5,7が特異点の場合も同様にして次式が得られる。

$$\begin{aligned} x &= \text{Eq.(18)の右辺} + N_{300}(x_9 - x_1) + N_{310}(x_{10} - x_3) \\ &\quad + N_{301}(x_{11} - x_5) + N_{311}(x_{12} - x_7) \end{aligned} \quad (33)$$

この要素では、節点1,3,5,7を隅角点とする節面は特異面になる。

5. 数値計算例

変位関数に式(9)の形状関数を用いて解の収束性と精度を調べる。

(1) 微分方程式

文献12)に示された微分方程式

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x^3} \quad (34)$$

表-1 微分方程式の解 u (誤差 %)

x (ξ)	$M=2$	$M=4$	$M=6$	u_{exact}
2 (-1.0)	0.5 (0.0%)	0.5 (0.0%)	0.5 (0.0%)	0.5
3 (0.0)	0.32154 (-3.5)	0.33338 (0.01)	0.33333 (-0.00)	0.333
5 (0.5)	0.17866 (-10.7)	0.19947 (-0.26)	0.20000 (0.00)	0.2
10 (0.777)	0.08382 (-16.2)	0.09893 (-1.07)	0.09996 (-0.04)	0.1
50 (0.959)	0.01593 (-20.4)	0.01958 (-2.09)	0.01997 (-0.14)	0.02
∞ (1.0)	(-21.4)	(-2.39)	(-0.18)	0.0

表-2 導関数の精度 u' (誤差 %)

x	$M=2$	$M=4$	$M=6$	u'_{exact}
2	-0.21383 (-14.5)	-0.24815 (-0.74)	-0.24992 (-0.03)	-0.25
3	-0.12500 (12.5)	-0.11099 (-0.11)	-0.11111 (0.01)	-0.1111
5	-0.04019 (0.5)	-0.04032 (0.80)	-0.04000 (0.01)	-0.04
10	-0.00892 (-10.8)	-0.01000 (0.01)	-0.01000 (0.05)	-0.01
50	-0.00032 (-19.4)	-0.00039 (-1.80)	-0.00040 (-0.10)	-0.0004
∞	(-21.4)	(-2.39)	(-0.18)	0.0

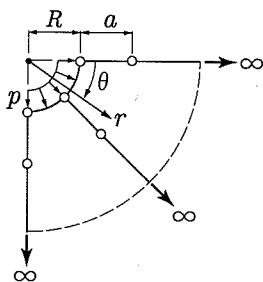


図-11 無限円孔板の要素分割

の解を、級数

$$u = \sum_{m=0}^M f_m(\xi) u_m \quad (35)$$

を用いて求める。

境界条件を

$$u_0 = \frac{1}{2} (\xi = -1), \quad u_1 = 0 (\xi = 1) \quad (36)$$

として、 $\xi = -1$ で $x_0 = 2$, $\xi = 0$ で $x_2 = 3$, $\xi = 1$ で $x_1 = \infty$ とする¹²⁾。これより、1次元写像の式は次のようになる。

$$x = h_0 x_0 + h_2 x_2 = \frac{3 - \xi}{1 - \xi} \quad (37)$$

f_m を重み関数とする Galerkin の重み付き残差の条件

$$\int_2^\infty \frac{df_m}{dx} \frac{du}{dx} dx + 2 \int_2^\infty \frac{f_m}{x^3} dx = 0 \quad (m = 2, 3, \dots, M) \quad (38)$$

に式 (37) と $M=2 \sim 6$ 次式を用いた式 (35) を代入し、 $(M+1)$ 点の Gauss-Legendre 求積法により求めた値とその相対誤差を表-1 に示す。

表-3 円周上の変位と応力の誤差 (%)

$M = N$	u_r	σ_r	σ_θ
2	3.7×10^{-1}	1.3×10^0	1.6×10^0
4	1.2×10^{-2}	6.0×10^{-2}	-1.1×10^{-1}
6	5.7×10^{-5}	4.8×10^{-4}	2.2×10^{-3}
解析解	1.3	-1.0	1.0

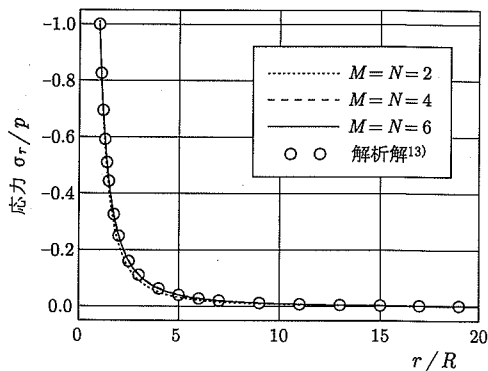


図-12 半径方向の応力 σ_r

表より、 x が大きくなるにつれて誤差は大きくなるが、級数項を多くとれば無限遠でも 1 要素で十分な精度が得られる。なお、 $x = \infty$ の誤差 E_∞ は次式で求められる。

$$E_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{u}{u_{\text{exact}}} \right) = u_0 + 4 \sum_{m=2}^M u_m \quad (39)$$

$M=2$ 次式でも x が小さい $-1 \leq \xi \leq 0$ の範囲では u の精度はよいが、有限要素解析では応力を求めるために導関数 du/dx の精度が重要である。そこで、表-2 に導関数の精度を示す。表の値から、次数が低い場合

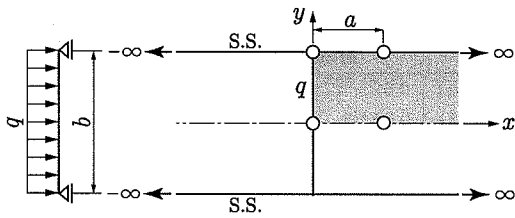


図-13 線荷重を受ける無限帯板

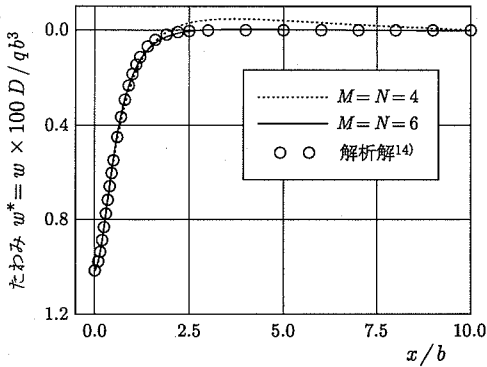


図-14 x 軸上のたわみ w

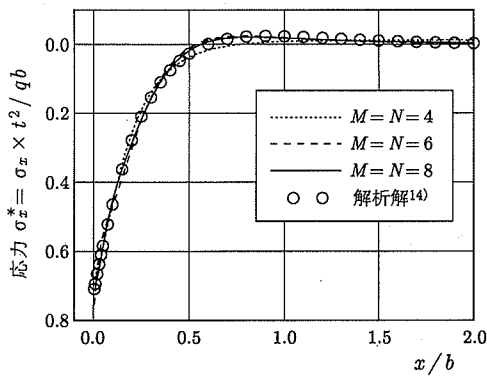


図-15 x 軸上の応力 σ_x

にはかなり精度は悪いが、6 次式では u と同精度の値が得られる。ここで、負の誤差は近似値の絶対値が正解より小さいことを表す。

(2) 内圧を受ける円孔板

内圧 p を受ける無限円孔板の平面応力問題を計算する。図-11 に示すように、無限板の $1/4$ 領域を 2 要素でモデル化して円弧は 4 次曲線で近似する。なお、円弧上の中間写像点のハイラーキ座標値には 5 点補間による値¹⁰⁾を使用する。

変位関数には次式を用いる。

$$u = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N N_{mn} u_{mn}, \quad N_{mn} = f_m \cdot f_n \quad (40)$$

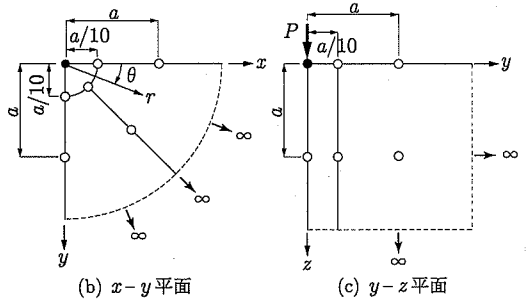
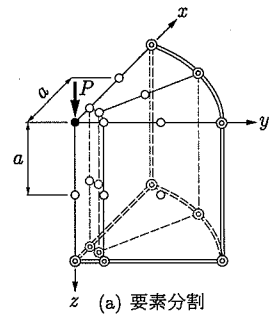


図-16 解析モデル

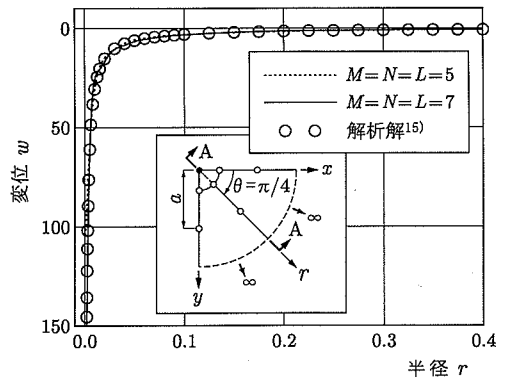


図-17 A 線上的変位 (特異要素)

ここに、 u_{mn} は一般化変位である。 v も同様に表す。

円孔の半径 R 、板厚 t 、内圧 p 、ヤング係数 E 、ポアソン比 ν を

$$R = a = t = 1, \quad p = 1, \quad E = 1, \quad \nu = 0.3$$

とし、 $M=N=2\sim 6$ 次式を用いて求めた円周上の変位 u_r と応力の誤差 (%) を表-3 に、半径方向の応力 σ_r を図-12 に示す。図中の○印は解析解¹³⁾である。これらの値は要素の結合点 ($r=R, \theta=\pi/4$) と結合線上の値で、両要素の計算値は完全に一致している。

表-3 から、変位、応力ともに収束性は良好で、6 次式を用いれば解析解と 5~7 桁一致した値が得られている。また、4 次式を用いれば、円孔近傍から無限縁までの全ての位置で解析解と良く一致した値が得られる。

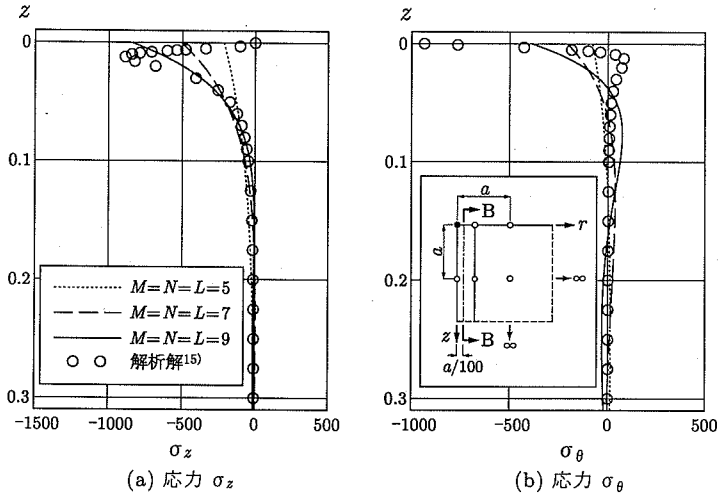


図-18 B線上の応力 (非特異要素)

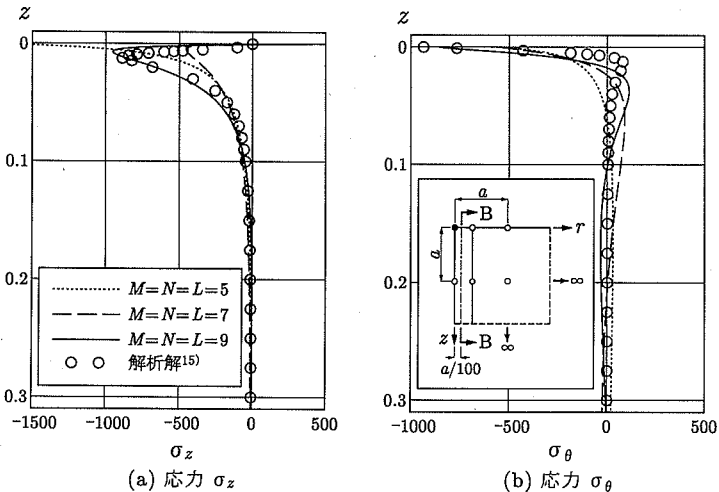


図-19 B線上の応力 (特異要素)

(3) 無限帯板の曲げ

図-13に示す線荷重 q が全幅に作用する単純支持無限帯板の曲げ問題を考える。たわみ w と回転角 θ_x, θ_y の変位関数には式(40)と同一の式を用いて、無限帯板の1/4領域を1要素で計算する。

図-14,15に、 $M=N=4\sim 8$ 次式を用いて求めた x 軸上のたわみと応力 σ_x を○印の解析解¹⁴⁾とともに示す。図中の D は板の曲げ剛性で、計算では次の値を用いている。なお、せん断変形を無視した薄板の解を得るためにペナルティ係数¹⁰⁾を使用する。

$$a/b = 1/2, \quad t/b = 1/100, \quad \nu = 0.3$$

図から、変位、応力ともに6次式を用いれば解析解と良く一致しており、載荷位置近傍で急激に変化する変位と応力に対して1要素で十分な精度の値が得られ

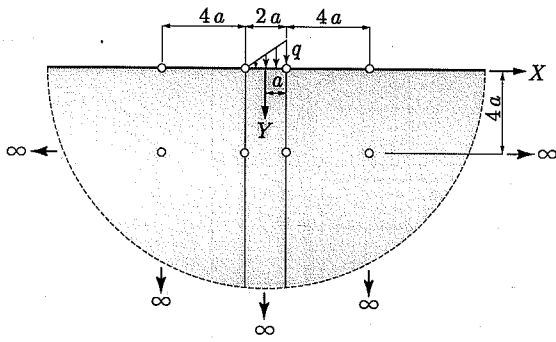
ていることが分かる。

(4) Boussinesqの問題

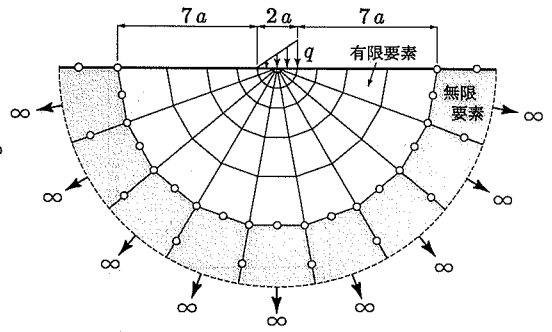
半無限体に集中荷重 P が作用する Boussinesq の問題¹⁵⁾を計算する。図-16に示すように半無限体の1/4領域を3要素に分割し、集中荷重 P が作用する節点で Jacobian が正の特異要素と、式(32)の写像式を用いてこの節点を特異点にした特異要素を比較する。

u, v, w の変位関数を5~9次式のハイアラーキ多項式の三重積で仮定して求めたA線 ($\theta = \pi/4, z = 0$) 上の鉛直変位 w を図-17に、円柱座標系に変換したB線 ($\theta = \pi/4, r = a/100$) 上の応力を図-18,19に示す。○印は解析解で、数値計算では次の値を用いている。

$$a = 1, \quad E = 1, \quad \nu = 0.2, \quad P = 1$$

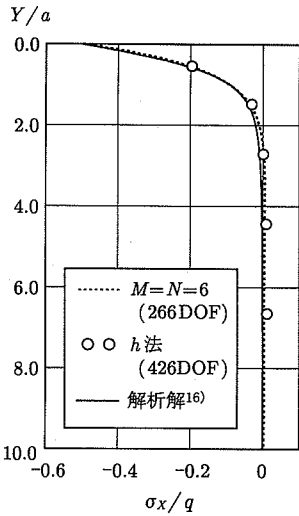


(a) 計算モデル (ハイラーキ要素の分割)

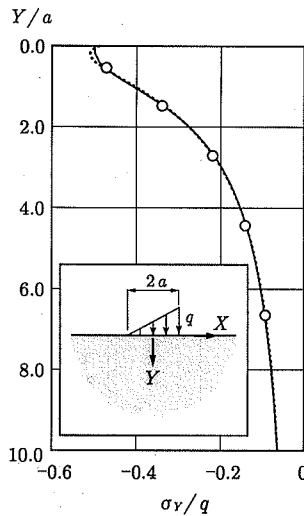


(b) h法の要素分割

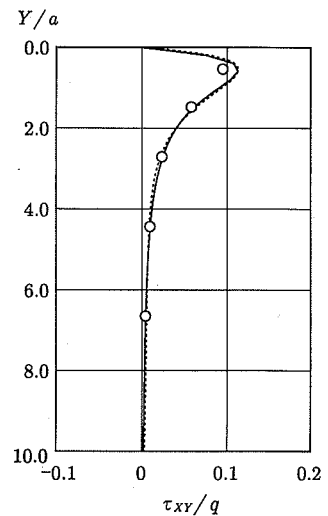
図-20 三角形荷重を受ける半無限地盤



(a) 直応力 σ_x/q



(b) 直応力 σ_y/q



(c) せん断応力 τ_{xy}/q

図-21 無限地盤の応力 (Y軸上)

図-17の鉛直変位 w は特異要素による結果で、荷重点付近の値も解析解と良く一致している。また、荷重点近傍で複雑に変化する応力分布に対して、図-18の非特異要素では最大応力に誤差が生じているが、図-19の特異要素ではかなり改善されている。

(5) 三角形分布荷重を受ける半無限地盤

地盤上の幅 $2a$ の区間に三角形分布荷重が作用する等方質弾性地盤¹⁶⁾の平面ひずみ問題を計算する。なお、解析解と比較するためにポアソン比は $\nu=0$ とする。

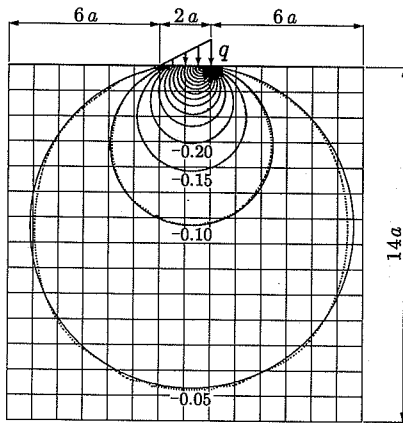
図-20(a)に示すように、半無限地盤を1方向と2方向の無限要素により3要素に分割し、比較のために図(b)のh法による解も計算する。h法では地盤上の荷重幅の中心位置 ($X=Y=0$) を原点として同心円状に分割し、半径 $8a$ までの区間は8節点有限要素により54要素で、その周辺は式(1)の $m \leq 2$ の写像関数を用い

た5節点無限要素⁸⁾により9要素でモデル化する(全63要素)。

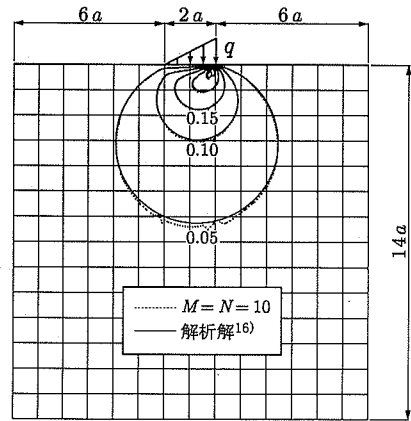
図-21に、 $M=N=6$ 次式を用いて求めたY軸上の直応力 σ_x, σ_y とせん断応力 τ_{xy} を点線で示す。実線は解析解¹⁶⁾で、○印は図-20(b)のh法有限要素の図心点応力を示している。ハイラーキ無限要素の値は6次式でも解析解と良く一致しているが、総自由度数が約1.6倍のh法による解(○印)はせん断応力の最大値の誤差が大きく、これを解析解と一致させるためには更に要素分割が必要となる。

図-22に、 $M=N=10$ 次式を用いて求めた地盤内の主応力と最大せん断応力を示す。要素の全域に渡って解析解と良く一致しており、応力の平滑化手法を用いずとも要素間ではほぼ連続した値が得られている。

なお、図-21,22の応力の符号は、圧縮を負として表している。



(a) 最小主応力 (σ_2/q)



(b) 最大せん断応力 (τ_{max}/q)

図-22 主応力の分布

6. 結 論

本研究で定式化したハイラーキ無限要素について以下の知見が得られた。

- (1) 本無限要素は、標準的なハイラーキ有限要素法において写像関数のみを修正する手法を用いているので簡便で汎用性がある。
- (2) 任意形状に変換するためのハイラーキ写像を示し、中間写像点に対する制約条件を求めた。また、1/6点特異写像と特異関数を用いた特異無限要素を提案した。
- (3) ハイラーキ無限要素による要素分割は h 法と異なり、有限域側から無限領域までを分割せずにより結果が得られる。
- (4) 数値計算結果から、無限要素においても粗い要素分割で高精度の応力が得られる p 法の長所が確かめられた。

謝辞： 本研究の遂行にあたり第2著者が文部科学省科学研究費補助金（課題番号 15560415）の補助を受けた。ここに、記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. : *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, pp.183-189, 1987.
- 2) Bettess, P. : Infinite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.11, pp.53-64, 1977.
- 3) Bettess, P. : More on infinite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.15, pp.1613-1626, 1980.

- 4) Medina, F. : An axisymmetric infinite element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.17, pp.1177-1185, 1981.
- 5) Zienkiewicz, O.C., Emson, C. and Bettess, P. : A novel boundary infinite element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.393-404, 1983.
- 6) Viladkar, M.N., Godbole, P.N. and Noorzaei, J. : Some new three-dimensional infinite elements, *Computers & Structures*, Vol.34, No.3, pp.455-467, 1990.
- 7) El-Esnawy, N.A., Akl, A.Y. and Bazarara, A.S. : A new parametric infinite domain element, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.19, pp.103-114, 1995.
- 8) Abdel-Fattah, T.T., Hodhod, H.A. and Akl, A.Y. : A novel formulation of infinite elements for static analysis, *Computers & Structures*, Vol.77, pp.371-379, 2000.
- 9) 林 正, 山中素直, 加瀬部弘, 佐藤敏亮 : ハイラーキ要素による有限要素解析の効率化, 土木学会論文集, No.591/I-43, pp.71-84, 1998.
- 10) 林 正, 渡辺 力, 齋藤道生 : ハイラーキ要素による薄肉構造の局所応力解析, 土木学会論文集, No.654/I-52, pp.105-119, 2000.
- 11) 林 正, 渡辺 力, 齋藤道生 : 応力集中問題に対する特異写像関数, 土木学会論文集, No.738/I-64, pp.113-123, 2003.
- 12) Zienkiewicz, O.C. and Morgan, K. : *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons (伊理正夫, 伊理由美訳 : 有限要素と近似, ワイリー・ジャパン, pp.224-233, 1984).
- 13) 国尾 武 : 固体力学の基礎, 培風館, pp.183-188, 1977.
- 14) 土木学会 : 構造力学公式集, p.332, 1986.
- 15) Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. : *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, pp.398-402, 1982.
- 16) 最上武雄監修 : 土質力学, 技報堂, pp.250-264, 1969.

(2003. 7. 30 受付)

A FORMULATION OF HIERARCHICAL INFINITE ELEMENTS

Masa HAYASHI, Chikara WATANABE and Michio SAITOH

When the infinite domain is treated in finite element analysis, infinite elements are frequently used to decrease the number of elements. In this study, the hierarchical infinite elements that can obtain highly accurate solutions by few elements are developed. These elements can be applied to curved infinite elements with arbitrary shape by using the hierarchical mapping technique with semi-infinite functions. Furthermore, the singular infinite elements where singularity is introduced into those mapping functions are proposed for the stress concentration in the vicinity of singular points of the infinite domain. By using numerical examples, the accuracy and availability of these elements are demonstrated.