

波形鋼板ウェブを有する PC 箱桁の断面変形理論

加藤久人¹・佐藤知明²・牧浦信一³・西村宣男⁴

¹正会員 工学修士 JFE エンジニアリング (株) 橋梁設計部 (〒230-8611 横浜市鶴見区末広町 2-1)

²正会員 工学修士 JIP テクノサイエンス (株) 構造技術部 (〒532-0011 大阪市淀川区西中島 2-12-11)

³正会員 工学修士 日本道路公団関西支社 建設第一部長 (〒530-0003 大阪市北区堂島 1-6-20)

⁴フェロー 工学博士 大阪大学大学院工学研究科土木工学専攻教授 (〒565-0879 吹田市山田丘 2-1)

従来、深い渓谷を渡る手段として施工性、経済性に優れた PC 箱桁橋が採用されてきた。この改良型として、工費節減、省力化、工期短縮への要求に答えるべく、波形鋼板ウェブ PC 箱桁橋の建設が盛んになってきた。波形鋼板ウェブ PC 桁の面内曲げ問題において著者らは連続桁の中間支点の上下床版に床版に単独に作用するモーメントによって無視できない直応力が付加されることを指摘した。波形鋼板ウェブ PC 箱桁のねじり問題についても、ずれ荷重によるそり応力の分布が面内問題の直応力の分布と相似となる。本論文では、ずれ荷重作用時に隔壁位置の上下床版に床版単独に作用するモーメントによって通常のそり応力とは別の直応力が付加されることを指摘し、マトリックス変位法によりこれら応力を解析し、実設計において考慮されるべき留意点を明らかにする。

Key Words: composite structure, corrugated steel web, cross sectional distortion, diaphragm, bi-moment, warping

1. まえがき

公共投資の削減要求、また社会的要求に答え、さらなる性能改善をめざすべく、PC 箱桁橋の改良型として波形鋼板ウェブ PC 箱桁橋の建設が盛んになってきた^{1)~4)}。より長径間の橋梁として本形式のエクストラードロード橋への採用、さらには斜張橋への進化が始まっている⁵⁾。

本形式の長所は、PC 橋のウェブに鋼板を用いることにより自重が軽減され、下部工の小規模化、耐震性が向上すること、ウェブのコンクリート施工省略のため工期短縮、省力化できること、ウェブのアコーディオン効果によりプレストレス力導入が効率的に行えることである。

波形鋼板ウェブ橋はこのような長所を有する一方で、その力学性状の全てが解明されているわけではない。著者らは文献⁶⁾において、鉛直荷重を受ける波形ウェブを有する単純梁の面内問題についてその挙動を解明する簡便な構造解析手法を「拡張はり理論」として紹介した。(以下、このような性状を有するはりを CWB(Comugated Web Beam)と呼ぶ。)
「初等はり理論」ではせん断変形を無視し、はり全断面の曲げを考慮するのに対して、「拡張はり理論」ではウェブのアコーディオン効果と、それに伴う上下床版単独の曲げをはり全断面の曲げと区別して扱う。

さらに文献⁷⁾ではそれを発展させ、2重3連モーメント公式、あるいは CWB マトリックス変位法を定式化し、CWB 要素からなる連続はりに適用可能とすることによって、波形鋼板ウェブを有する、連続桁橋、斜張橋等に対する面内解析法を示した。

一方、波形ウェブを有する箱桁(以下、CWBB(Comugated

Web Box Beam)と呼ぶ。)の立体挙動の問題についてもさまざまな知見が得られている。上平ら⁸⁾は CWBB の片持はり供試体にねじり荷重を加え、その挙動が3次元 FEM 解析の結果と整合あることを確認し、さらに FEM によるパラメトリック解析の結果からその挙動が断面の幅と高さに影響されるのみならず、床版の厚さと高さの比にも影響されることを見出している。依田ら^{10,11,12)}は Vlasov 理論¹¹⁾に基づき、鉛直偏心荷重を曲げ荷重、純ねじり荷重、ずれ荷重に分解し、断面変形問題を弾性支承上の連続はりの問題(以下、BEF(Beam on Elastic Foundation)アナロジー^{14,15)}と呼ぶ。)として扱い、断面変形に伴うフランジやウェブのせん断変形および板の面外曲げ(以下、ラーメン変形と呼ぶ。)を無視して、CWBB においても断面変形に伴うそり応力が無視できないことを指摘している。野田・大槌ら¹²⁾はフランジ、ウェブをそれぞれ独立の折板と考え、それぞれの板内における曲げ変形をもとに CWBB の断面変形問題に対する簡易計算式を提案している。木村・星埜ら¹³⁾も Vlasov 理論に基づき、ラーメン変形を考慮したマトリックス解析を行い、そり定数の算出にウェブを無視した結果が FEM 解析結果と一致することを見出している。これら既往の研究では CWBB についてその挙動が従来の鋼箱桁あるいは PC 箱桁と類似であるとの仮定から版の板厚中心のそり応力に関して検討が進められている。

先述のとおり、著者らはアコーディオン効果により CWB には従来のはりと異なり 2 種類の曲げが作用することを指摘し、連続桁の中間支点の上下床版に単独に作用するモーメントによって無視できない直応力が付加されることを紹介した。今回、断面変形についても同様の状況が生じるこ

とを報告する。ずれ荷重による断面変形の問題はBEFアナロジーとして扱われ、桁は隔壁で支持された連続桁として解釈される。CWBBでは、ずれ荷重によるそり応力の分布が面内問題の直応力の分布と相似となり、さらに隔壁位置の上下床版に単独に作用するモーメントによって通常のそり応力とは別の直応力(以下、版そり応力と呼ぶ。)が付加される。

本論文ではまず、一般的な箱断面を構成するフランジ、ウェブのそれぞれを板を曲げとせん断が作用するはりとして解釈し、板面内の直ひずみを直線分布と仮定し、フランジとウェブの交点でのひずみの適合条件をもとに、ずれ荷重作用時の断面の変形角に関する微分方程式を誘導し、その結果がVlasovの一般化座標法による微分方程式に一致することを確認する。誘導過程において板内の曲げ、せん断およびラーメン変形が考慮される。次に、同様の考察をCWBBに拡張する。箱側面における直ひずみの直線分布形状を上下床版部分とウェブ部分で別々の直線と仮定する。作用する内力として、床版面内の曲げと床版のそりによる縦方向バイモーメント(以下、そりモーメントと呼ぶ。)および床版面内とウェブ内に作用するせん断力による横方向バイモーメント(以下、ずれモーメントと呼ぶ。)を考慮する。最後に得られた微分方程式をマトリックス変位法に展開し、ずれ荷重による挙動を解析し、FEMとの整合性を確認することによって方程式の妥当性を検証し、隔壁の配置によって変化するそりによる直応力、並びに版そり応力の発生状況を明らかにする。

得られた知見は、CWBBにおいては、ずれ荷重によるそり応力が隔壁間隔によって大きく変化し、隔壁位置において版そり応力が顕著に付加することである。さらに、CWBBによるPC斜張橋のようにケーブル定着点ごとに比較的密に隔壁が配置される場合にも上記の挙動が予想され、実設計において注意されるべきことを指摘する。

2. ずれ荷重による構面の変形とラーメン変形

図-1に示すように、長方形薄肉箱断面を有するはりのウェブに偏心鉛直荷重が作用する場合について考察する。文献^{10), 11), 12)}に紹介されるとおり、この偏心鉛直荷重は対称鉛直荷重と逆対称鉛直荷重へ分解され、対称鉛直荷重によっては鉛直方向へたわむ。一方、逆対称鉛直荷重は純ねじり荷重とずれ荷重へ分解される。著者らは鉛直荷重によるCWBの挙動を文献^{7), 8)}にて紹介した。また、純ねじり荷重の作用下では断面は単純にねじられるのみであり、断面が正方形に近い場合にはCWBBにおいても断面内にはBredt¹⁰⁾のせん断応力が生じるのみであり、その挙動は閉断面の単純ねじりの問題として従来のはりと同じく容易に追跡できる。従って本論文では以後の考察において、残らず

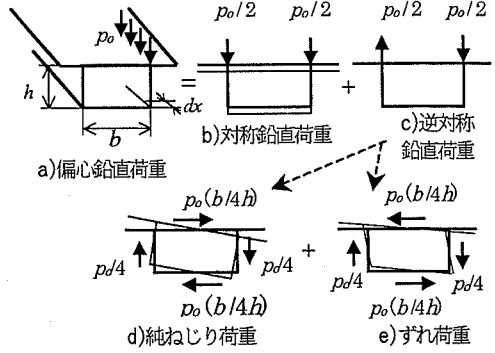


図-1 偏心鉛直荷重の分解と変位概念

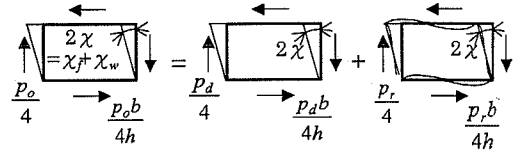


図-2 ずれ荷重の分解と変形概念

れ荷重のみを対象とし、その作用下でのCWBBの挙動を紹介することを最終目的とする。

文献¹¹⁾に紹介されるとおり、ずれ荷重によって断面は変形し、図-2a)に示す変形角 2χ を生じる。この時、フランジ、ウェブにはそれぞれ面内のはり軸方向の変位が生じるとともにフランジとウェブで構成されるラーメン構造にも変形が生じる。以後、前者を構面の変形、後者をラーメン変形と呼ぶ。長方形箱断面のずれ荷重は、図-2に示すように構面の変形を生じる外力とラーメン変形を生じる外力に分解される。断面変形を生じさせる外力として、はり軸単位長さ当たりのずれモーメント(横方向バイモーメント) m_x を定義する。これらの関係は以下の式で表せられる。

$$m_x = \frac{P_0}{4} b + \frac{P_0 b}{4h} h = \frac{P_0}{2} b \quad (2.1)$$

$$m_{x_d} = \frac{P_d}{4} b + \frac{P_d b}{4h} h = \frac{P_d}{2} b \quad (2.2)$$

$$m_{x_r} = \frac{P_r}{4} b + \frac{P_r b}{4h} h = \frac{P_r}{2} b = C\chi \quad (2.3)$$

ここに、

m_x : 断面変形を生じさせるずれモーメント

m_{x_d} : 構面の変形を生じさせるずれモーメント

m_{x_r} : ラーメン変形を生じさせるずれモーメント

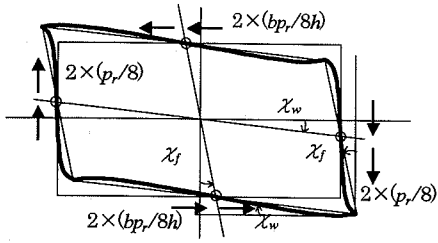
P_0 : m_x を生じさせる分布荷重

P_d : m_{x_d} を生じさせる分布荷重

P_r : m_{x_r} を生じさせる分布荷重

C : ラーメン変形ばね定数。(断面が断面変形角 2χ を生じる時、はり軸の単位長さ当たりのラーメン構造が $C\chi$ なる内力ずれモーメントを生じる。)

C の算出に当たっては図-3に示すラーメン構造を想定し、フランジ、ウェブをそれぞれ、それらの交点を固定点とす



a) 等価構造
b) 頂点での適合条件

図-3 ラーメン変形

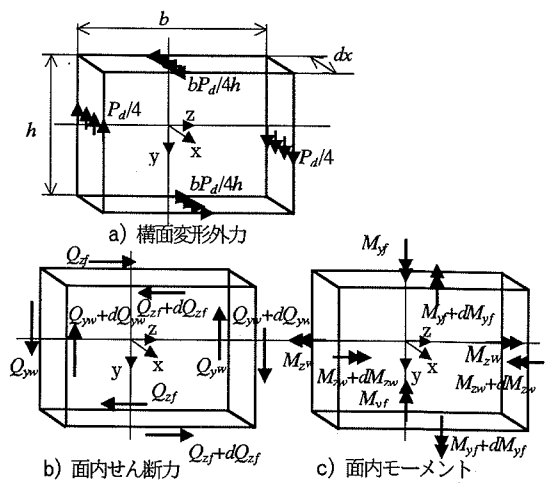


図-4 構面の変形

る片持りと考え、交点の近傍に作用するはり(x)軸回りの単位幅当りのモーメントの適合性より、

$$\text{フランジ側のモーメント } M_{rf} = \frac{p_r b h}{8h \cdot 2} = \frac{p_r b}{16} \quad (2.4)$$

$$\text{ウェブ側のモーメント } M_{rf} = \frac{p_r b}{8 \cdot 2} = \frac{p_r b}{16} \quad (2.5)$$

それぞれの中点のたわみは

$$\text{フランジ側 } \delta_f = \frac{1}{3E_f I_{rf}} \frac{p_r}{8} \left(\frac{b}{2}\right)^3 \quad (2.6)$$

$$\text{ウェブ側 } \delta_w = \frac{1}{3E_w I_{rw}} \frac{p_r b}{8h} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \quad (2.7)$$

ここに、 I_{rf}, I_{rw} ： はり軸方向単位長さ当たりのフランジ、ウェブの断面2次モーメント

フランジ、ウェブの断面変形角を χ_f, χ_w とするとき、

$$\chi_f = \delta_w \div \frac{h}{2} = \frac{1}{3E_w I_{rw}} \frac{p_r b}{8h} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{p_r b h}{96E_w I_{rw}} \quad (2.8)$$

$$\chi_w = \delta_f \div \frac{b}{2} = \frac{1}{3E_f I_{rf}} \frac{p_r}{8} \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{p_r b^2}{96E_f I_{rf}} \quad (2.9)$$

断面変形角の関係、図-3 a) より $2\chi = \chi_f + \chi_w$ (2.10)

$$\text{これより、 } 2\chi = bp_r \frac{1}{96} \left(\frac{b}{E_f I_{rf}} + \frac{h}{E_w I_{rw}} \right) \quad (2.11)$$

ラーメン変形を生じる外力ずれモーメント、式(2.3)と内力、

$$C\chi \text{ の関係から、 } \frac{p_r b}{2} = C\chi \quad (2.12)$$

$$\text{これより、 } C = \frac{96}{\left(\frac{b}{E_f I_{rf}} + \frac{h}{E_w I_{rw}} \right)} \quad (2.13)$$

$$\text{よって、 } M_{rf} = \frac{p_r b}{16} = C\chi \frac{1}{8} = \frac{C}{8} \chi \quad (2.14)$$

外力と内力の釣合いから

$$m_\chi = m_{\chi_d} + m_{\chi_r} = m_{\chi_d} + C\chi \quad (2.15)$$

これを変形すると下記となる。

$$m_{\chi_d} = m_\chi - C\chi \quad (2.16)$$

すなわち、構面の変形を生じるずれモーメントは外力ずれモーメントからラーメン変形を生じさせる内力ずれモーメントを差し引いたものである。

3. 長方形箱断面はりの断面変形理論式

断面が二軸対称長方形で、断面を構成するフランジ、ウェブの4辺の板が全て通常の平板または版である箱断面はりの断面変形理論式を折板理論により誘導する¹⁰⁾。

(1) はり理論に準拠した構面変形

フランジ、ウェブ各々を独立のはりと考え、このはりに図-4に示す分布荷重が作用した場合の変位の状況を考える。図-5に示すように、各はりの断面はせん断変形を生じた後も平面を保持するものとして、いわゆるチモシェンコはりの取り扱いを行う¹¹⁾。このとき構面内の断面力と変位の関係は以下となる。

$$\text{フランジ面について } w_f = (h/2)\chi_f \quad (3.1)$$

$$\phi_{yf} + \gamma_f = w_f' = (h/2)\chi_f' \quad (3.2)$$

$$M_{yf} = -E_f I_{yf} \frac{d}{dx} \phi_{yf} = -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \frac{d^2 \chi_f}{dx^2} - \frac{d\gamma_f}{dx} \right) \quad (3.3)$$

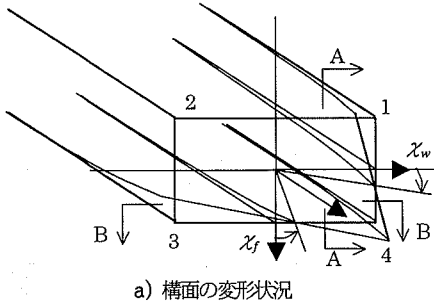
$$Q_{zf} = \frac{d}{dx} M_{yf} = -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \frac{d^3 \chi_f}{dx^3} - \frac{d^2 \gamma_f}{dx^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\text{同様にウェブ面について } v_w = (b/2)\chi_w \quad (3.5)$$

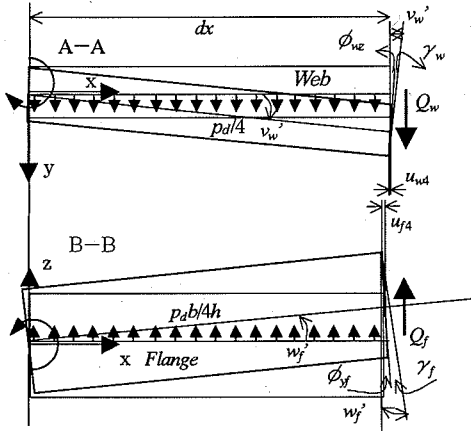
$$\phi_{zw} + \gamma_w = v_w' = (b/2)\chi_w' \quad (3.6)$$

$$M_{zw} = -E_w I_{zw} \frac{d}{dx} \phi_{zw} = -E_w I_{zw} \left(\frac{b}{2} \frac{d^2 \chi_w}{dx^2} - \frac{d\gamma_w}{dx} \right) \quad (3.7)$$

$$Q_{yw} = -E_w I_{zw} \frac{d}{dx} M_{zw} = -E_w I_{zw} \left(\frac{b}{2} \frac{d^3 \chi_w}{dx^3} - \frac{d^2 \gamma_w}{dx^2} \right) \quad (3.8)$$



a) 構面の変形状況



b) はり理論による荷重と変位

図-5 フランジ、ウェブの挙動

ここに

- ϕ_{yf}, ϕ_{zw} : フランジ, ウェブの面内回転角
- w_f, v_w : フランジ, ウェブの面内変位
- χ_f, χ_w : フランジ, ウェブの断面変形角
- γ_f, γ_w : フランジ, ウェブの面内せん断ひずみ
- M_{yf}, M_{zw} : フランジ, ウェブに作用するモーメント
- Q_{zf}, Q_{yw} : フランジ, ウェブに作用するせん断力
- I_{yf}, I_{zw} : フランジ, ウェブの断面2次モーメント

さらに、これらの断面力は一般化された断面力として図-6に示されるずれモーメント M_x

$$M_x = 2\frac{h}{2}Q_{zf} + 2\frac{b}{2}Q_{yw} = hQ_{zf} + bQ_{yw} = hbq_{zf} + bhq_{yw} \quad (3.9)$$

および、そりモーメント M_ω を形成する。

$$M_\omega = 2\frac{h}{2}M_{yf} + 2\frac{b}{2}M_{zw} = hM_{yf} + bM_{zw} \quad (3.10)$$

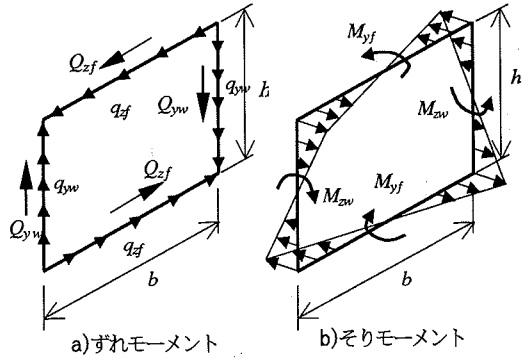
(2) ずれモーメントの釣合式

2. で定義した外力ずれモーメントと図-4 に示す構面変形による断面内のずれモーメントの釣合いを考える。

$$hdQ_{zf} + bdQ_{yw} + (m_x - C\chi)dx = 0 \quad (3.11)$$

両辺を dx で除し、 Q_{zf}, Q_{yw} に式(3.4, 8)の微分を代入して、

$$E_f I_{yf} \frac{h^2}{2} \frac{d^4 \chi_f}{dx^4} + E_w I_{zw} \frac{b^2}{2} \frac{d^4 \chi_w}{dx^4} - E_f I_{yf} h \frac{d^3 \gamma_f}{dx^3} - E_w I_{zw} b \frac{d^3 \gamma_w}{dx^3} = m_x - C\chi \quad (3.12)$$



a) ずれモーメント $q_{zf}bh + q_{yw}bh$ (横方向バイモーメント)
b) そりモーメント $M_{yf}h + M_{zw}b$ (縦方向バイモーメント)

図-6 断面の一般化力

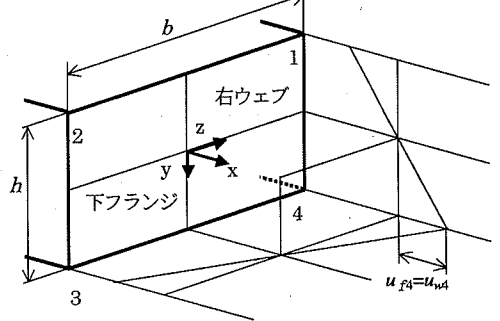


図-7 フランジ、ウェブ交点の適合条件

上記は構面のせん断ひずみを考慮した断面変形角とずれモーメントの関係を示す4階の微分方程式である。

(3) フランジとウェブの交点の適合条件

図-7 に示すように、フランジとウェブの交点における x 軸方向の変位が等しいことから図-5 a) に示すフランジ、ウェブ各々の断面変形角 χ_f, χ_w と断面全体の断面変形角 χ の関係を求め、式(3.12)に代入し、 χ とずれモーメントの関係を示す微分方程式に改める。

下記せん断ひずみの1回微分と外力の関係を用いて、

$$\gamma_f' = \frac{\kappa_f Q_f}{G_f A_f} = -\frac{\kappa_f b}{4hG_f A_f} P_d, \quad \gamma_w' = \frac{\kappa_w Q_w}{G_w A_w} = -\frac{\kappa_w}{4G_w A_w} P_d \quad (3.14, 15)$$

下フランジ右端の x 軸方向変位は式(3.2)より

$$u_{f4} = -\phi_{yf}(b/2) = -\left((h/2)\chi_f' - \gamma_f\right)(b/2) = -(bh/4)\chi_f' + (b/2)\gamma_f \quad (3.16)$$

$$u_{f4}' = -(bh/4)\chi_f'' + (b/2)(\kappa_f Q_f' / G_f A_f) = -(bh/4)\chi_f'' - (p_d b^2 \kappa_f / 8hG_f A_f) \quad (3.17)$$

同様に、右ウェブ下端の x 軸方向変位は式(3.6)より

$$u_{w4} = -(bh/4)\chi_w' + (h/2)\gamma_w \quad (3.18)$$

$$u_{w4}' = -(bh/4)\chi_w'' - (p_d h \kappa_w / 8G_w A_w) \quad (3.19)$$

変位の適合性, $u_{f4} = u_{w4}$ の式に式(3.17,19)を代入して

$$\chi_f'' - \chi_w'' = p_d / 2hG \left\{ h\kappa_w / bG_w A_w - (b\kappa_f / hG_f A_f) \right\} \quad (3.20)$$

式(2.2)および式(2.12)の関係をを用いて

$$\chi_f'' - \chi_w'' = \left\{ \frac{\kappa_w}{b^2 G_w A_w} - \frac{\kappa_f}{h^2 G_f A_f} \right\} (m_\chi - C\chi) \quad (3.21)$$

$$\text{ここで, } \chi_f'' - \chi_w'' = p_d C_o \quad (3.22)$$

$$C_o = \frac{1}{2h} \left\{ \frac{\kappa_w}{b^2 G_w A_w} - \frac{\kappa_f}{h^2 G_f A_f} \right\} \quad (3.23)$$

とおくと, 式(2.10)の2回微分 $\chi_f'' + \chi_w'' = 2\chi''$ より

$$\chi_f'' = \frac{1}{2}(2\chi'' + p_d C_o) = \frac{1}{2} \left[2\chi'' + 2C_o \frac{m_\chi - C\chi}{b} \right] \quad (3.24)$$

$$\chi_w'' = \frac{1}{2}(2\chi'' - p_d C_o) = \frac{1}{2} \left[2\chi'' - 2C_o \frac{m_\chi - C\chi}{b} \right] \quad (3.25)$$

以上より χ_f と χ , χ_w と χ の関係が求められた。

なお, $C_o = 0$ かつ $\kappa_w / G_w A_w = \kappa_f / G_f A_f$ の場合は

$$\begin{aligned} h\kappa_w / bG_w A_w &= b\kappa_f / hG_f A_f \\ \text{すなわち } ht_w &= bt_w \end{aligned} \quad (3.26)$$

となり Vlasov¹¹⁾の「 $b_2=0$ の仮定」, 「そりとねじりが連成しない仮定」と一致し, $\chi_f = \chi_w = \chi$ の関係が得られる。

(4) Vlasov の断面変形理論式との照合

式(3.14~15), 式(3.24~25)の関係を式(3.12)に代入し, 本式が Vlasov の一般化座標法による, 長方形断面の断面変形の微分方程式に一致することを証明する。

$$\begin{aligned} E_f I_f \frac{h^2}{4} \frac{d^2}{dx^2} (2\chi'' + p_d C_o) + E_w I_w \frac{b^2}{4} \frac{d^2}{dx^2} (2\chi'' - p_d C_o) \\ + E_f I_f h \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\kappa_f b}{4hG_f A_f} p_d \right) + E_w I_w b \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\kappa_w}{4G_w A_w} p_d \right) \\ = m_\chi - C\chi \end{aligned} \quad (3.27)$$

式(3.23)に示される関係を代入し,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (E_f I_f h^2 + E_w I_w b^2) \frac{d^4 \chi}{dx^4} \\ + \frac{1}{2h} \left\{ \frac{h\kappa_w / bG_w A_w}{-(b\kappa_f / hG_f A_f)} \right\} \frac{1}{4} (E_f I_f h^2 - E_w I_w b^2) \frac{d^2 p_d}{dx^2} \\ + \frac{b}{4} \left(\frac{\kappa_f E_f I_f}{G_f A_f} + \frac{\kappa_w E_w I_w}{G_w A_w} \right) \frac{d^2 p_d}{dx^2} = m_\chi - C\chi \end{aligned} \quad (3.28)$$

第2項と第3項のくくりにより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (E_f I_f h^2 + E_w I_w b^2) \frac{d^4 \chi}{dx^4} \\ + \frac{1}{8G} \left(\kappa b \frac{\kappa_f E_f I_f}{A_f} + \frac{b^3 \kappa_f E_w I_w}{h^2 A_f} \right. \\ \left. + \frac{h^2 \kappa_w E_f I_f}{b A_w} + b \frac{\kappa_w E_w I_w}{A_w} \right) \frac{d^2 p_d}{dx^2} \\ = m_\chi - C\chi \end{aligned} \quad (3.29)$$

式(3.29)に式(2.2)と(2.12)および $I_f = b^2 A_f / 12$, $I_w = h^2 A_w / 12$ の関係を代入し, 因数分解を施す。

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} b^2 h^2 (E_f A_f + E_w A_w) \frac{d^4 \chi}{dx^4} \\ + \frac{bh^2}{24} b (E_f A_f + E_w A_w) \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_f}{h^2 G_f A_f} + \frac{\kappa_w}{b^2 G_w A_w} \right) \frac{d^2}{dx^2} (m_\chi - C\chi) \\ = (m_\chi - C\chi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

式(3.26)の両辺に bh を乗じて

$$hh(bt_f) = bb(ht_w) \text{ より } h^2 A_f = b^2 A_w \quad (3.31)$$

また, E, G, κ を下記とし, 式(3.30)に代入すると,

$$E = E_f = E_w, \quad G = G_f = G_w, \quad \kappa = \kappa_f = \kappa_w \quad (3.32\sim 34)$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{24} b^2 h^2 (A_f + A_w) \frac{d^4 \chi}{dx^4} \\ + \frac{bh^2 E}{24G} b\kappa (A_f + A_w) \frac{1}{2} \frac{1}{b^2 A_w} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) \frac{d^2}{dx^2} (m_\chi - C\chi) \\ = (m_\chi - C\chi) \end{aligned} \quad (3.35)$$

さらに変形して,

$$\begin{aligned} \frac{E}{24} b^2 h^2 (bt_f + ht_w) \frac{d^4 \chi}{dx^4} \\ + \frac{b^2 h^2 E}{24} (bt_f + ht_w) \kappa \frac{2}{G(h^2 bt_f + b^2 ht_w)} \frac{d^2}{dx^2} (m_\chi - C\chi) \\ = (m_\chi - C\chi) \end{aligned} \quad (3.36)$$

ここで, 下記表記を用いると式(3.36)は式(3.39)となる。

$$a = \frac{E}{24} b^2 h^2 (bt_f + ht_w) \quad (3.37)$$

$$\frac{1}{b_1} = \kappa \frac{2}{G(h^2 bt_f + b^2 ht_w)} \quad (3.38)$$

$$a \frac{d^4 \chi}{dx^4} + \frac{a}{b_1} \kappa \frac{d^2}{dx^2} (m_\chi - C\chi) = (m_\chi - C\chi) \quad (3.39)$$

本式は, Vlasov の微分方程式に一致する。

(5) 長方形箱断面はりの断面変形問題のマトリックス解法
一般の骨組み解析と同様にはりを要素分割し, マトリックス変位法(以下, MTと呼ぶ。)によって長方形箱断面はりの断面変形の問題を解析する。

式(3.30)の一般解は以下である。

$$\chi = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (3.40)$$

始点 i と終点 j 間の要素中間に荷重が作用しない場合, 式(3.30)中の $m_\chi - C\chi = 0$ となり, $\chi_f'' = \chi_w'' = \chi''$ となる。さらに, 板内のひずみに関して以下が成立する。

$$\gamma_f' = \frac{\tau_f'}{G_f} = \frac{Q_{zf}'}{G_f A_f} = \frac{q_{zf}}{G_f A_f} = 0 \quad (3.41)$$

$$\gamma_w' = \frac{\tau_w'}{G_w} = \frac{Q_{yw}'}{G_w A_w} = \frac{q_{yw}}{G_w A_w} = 0 \quad (3.42)$$

従って、式(3.3~4, 7~8)に示される、板内のモーメントおよびせん断力は以下の式となる。

$$\begin{aligned} M_{yf} &= -E_f I_{yf} w_f'' = -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \chi_f \right)'' = -\frac{h}{2} E_f I_{yf} \chi_f'' \\ Q_{zf} &= M_{yf}' = -\frac{h}{2} E_f I_{yf} \chi_f''' \\ M_{zw} &= -E_w I_{zw} v_w'' = -E_w I_{zw} \left(\frac{b}{2} \chi_w \right)'' = -\frac{b}{2} E_w I_{zw} \chi_w'' \\ Q_{yw} &= M_{zw}' = -\frac{b}{2} E_w I_{zw} \chi_w''' \end{aligned} \quad (3.43\sim 46)$$

これらの関係を式(3.9~10)に代入すればそりモーメント、ずれモーメントはそれぞれ以下の式となる。

$$\begin{aligned} M_\omega &= 2\frac{h}{2} M_{yf} + 2\frac{b}{2} M_{zw} = -\left(\frac{h^2}{2} E_f I_{yf} + \frac{b^2}{2} E_w I_{zw} \right) \chi'' \\ M_\chi &= hQ_{zf} + bQ_{yw} = -\left(\frac{h^2}{2} E_f I_{yf} + \frac{b^2}{2} E_w I_{zw} \right) \chi''' \end{aligned} \quad (3.47\sim 48)$$

ここで、 $E_w = nE_f$ とし、下記の表記を用いると

$$\frac{h^2}{2} E_f I_{yf} + \frac{b^2}{2} E_w I_{zw} = E_f \left(\frac{h^2}{2} I_{yf} + \frac{b^2}{2} n I_{zw} \right) = E_f I_\omega \quad (3.49)$$

$$M_\omega = -E_f I_\omega \chi'' = -E_f I_\omega (2C_3 + 6C_4 \chi) \quad (3.50)$$

$$M_\chi = -E_f I_\omega \chi''' = -E_f I_\omega (6C_4) \quad (3.51)$$

部材端での変位、材端力として以下を選定する。

$$\text{材端変位} \quad \mathbf{x}_4 = \{ \chi_i; \chi_i'; \chi_j; \chi_j' \} \quad (3.52)$$

$$\text{材端力} \quad \mathbf{f}_4 = \{ M_{\chi_i}; M_{\omega_i}; M_{\chi_j}; M_{\omega_j} \} \quad (3.53)$$

式(3.40)およびその1回微分から、 $x=0$ では

$$\chi_i = C_1 \quad (3.54)$$

$$\chi_i' = C_2 \quad (3.55)$$

要素の部材長を L とするとき、 $x=L$ では

$$\chi_j = C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 \quad (3.56)$$

$$\chi_j' = C_2 + 2C_3 L + 3C_4 L^2 \quad (3.57)$$

図-4 b), c) に示す通り、材端力の正方向が i 点と j 点で逆方向になることに配慮し、式(3.50~51)より

$x=0$ では

$$M_{\chi_i} = -E_f I_\omega (6C_4) \quad (3.58)$$

$$M_{\omega_i} = E_f I_\omega (2C_3) \quad (3.59)$$

$x=L$ では

$$M_\chi = E_f I_\omega (6C_4) \quad (3.60)$$

$$M_\omega = -E_f I_\omega (2C_3 + 6C_4 L) \quad (3.61)$$

これらをマトリックス表示すると以下となる。

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{A}_4 \mathbf{C}_4 \quad (3.62)$$

$$\mathbf{C}_4^T = \{ C_1; C_2; C_3; C_4 \} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{f}_4 = \mathbf{B}_4 \mathbf{C}_4 \quad (3.65)$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6E_f I_\omega \\ 0 & 0 & 2E_f I_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6E_f I_\omega \\ 0 & 0 & -2E_f I_\omega & -6E_f I_\omega \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

式(3.62)より積分定数ベクトル \mathbf{C}_4 は $\mathbf{C}_4 = \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{x}_4$ であり、これを式(3.65)に代入すると、剛性マトリックス \mathbf{K}_4 は以下の様に表される。

$$\mathbf{f}_4 = \mathbf{B}_4 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{x}_4 = \mathbf{K}_4 \mathbf{x}_4 \quad (3.67)$$

外荷重ずれモーメントは節点に作用する集中力として離散化して扱う、またラーメン変形についても離散化して扱い、これに対応した剛性は一般骨組解析²¹⁾における節点弾性拘束支持と同様の扱いを行う。例えば、節点 k におけるラーメン変形を考える時、 k 点では断面変形角に比例したずれモーメントを内力として生じることから、全体剛性の対角行列の χ_k 変位に対応した要素にばね定数 $C L_k$ を加算して扱う。ここに、 C は式(2.13)により算出されるバネ定数、 L_k は節点 k の支配する部材長である。これらマトリックス法による数値計算例は6.に示す。

なお、そり応力は板面内曲げによる応力として下記にて算出され、例えば、フランジ外端については式(3.43)より、

$$\sigma_{mf} = \frac{M_{yf} b}{I_{yf} 2} = -\frac{h E_f I_{yf} b}{2 I_{yf} 2} \chi'' \quad (3.68)$$

これに式(3.50)の関係を代入して、

$$\sigma_{mf} = \frac{bh M_\omega}{4 I_\omega} \quad (3.69)$$

また、ラーメン変形による応力の算定式は4.(7)に示す。

4. 波形ウェブ長方形箱断面はりの断面変形理論式

3.で誘導した折板理論による長方形箱断面に対する断面変形理論式を拡張し、ウェブが波形鋼板による長方形箱断面はり(以下、CWBBはりと呼ぶ)の断面変形理論式を誘導する。

(1) CWBBへの作用力と断面力

文献⁷⁾にて著者らが紹介したように、曲げを受けるCWBBでは、床版がはり全体のたわみ変形とは独立に別

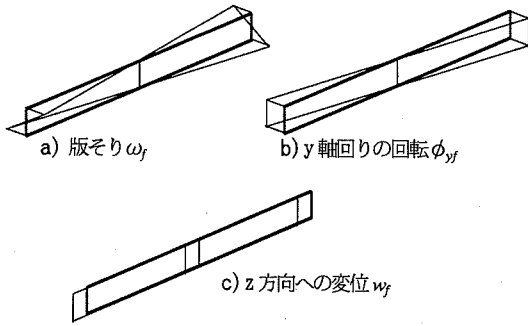


図-8 版の変位

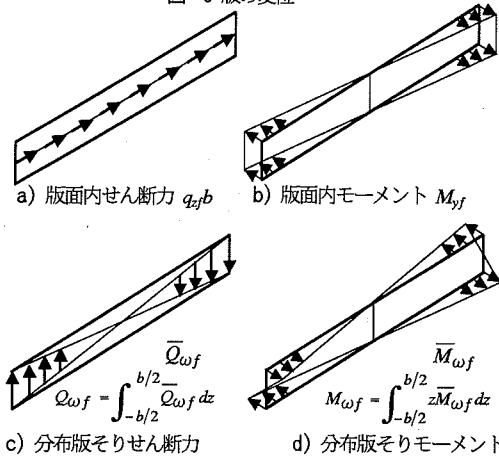


図-9 版の断面力

途単独で曲げ変形を受け、それに起因する応力が生じることが特徴である。この状況は CWBB 断面変形の問題についても同様に現れ、本報告ではこれを版単独に生じるそりとして追跡する。図-8および図-9にはそれぞれ CWBB の上下床版において考慮する変位と断面力を示す。また図-10には CWBB の微小要素に作用する外力と要素内の断面力の釣合状況を示す。

(2) 版の面内変形

上下床版の構面内変位と面内モーメントの関係は式(3.3)と同じである。微分記号を改めて表記すれば、

$$M_{yf} = -E_f I_{yf} \phi'_{yf} = -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \chi_f'' - \gamma_f' \right) \quad (4.1)$$

構面内変位と面内せん断力の関係は式(3.4)と同じであるが、さらに式(2.2)と式(3.14)の式を用いてせん断ひずみを外力ずれモーメントとラーメン変形による内力との差として表記する。

$$\begin{aligned} Q_{yf} &= \frac{dM_{yf}}{dx} = -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \frac{d^3 \chi_f}{dx^3} + \frac{d}{dx} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} P_d \frac{b}{4h} \right) \\ &= -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \chi_f''' + \frac{\kappa_f}{2h G_f A_f} (m_\chi' - C \chi) \right) \quad (4.2) \end{aligned}$$

一方、版内の水平方向の外力と内力の釣合いから以下の関

係が得られる。

$$Q_{yf}' = \frac{G_f A_f \gamma_f'}{\kappa_f} = -\frac{b p_d}{4h} = -\frac{1}{2h} (m_\chi - C \chi) \quad (4.3)$$

式(4.2)の1回微分と式(4.3)は等値であるから、

$$\begin{aligned} -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} \chi_f'' + \frac{\kappa_f}{2h G_f A_f} (m_\chi'' - C \chi'') \right) &= -\frac{1}{2h} (m_\chi - C \chi) \\ \chi_f'' &= \frac{1}{h^2 E_f I_{yf}} (m_\chi - C \chi) - \frac{\kappa_f}{h^2 G_f A_f} (m_\chi'' - C \chi'') \quad (4.4) \end{aligned}$$

(3) 版そりの定義

図-9 c)に示す、版の単位幅当たりの版そりせん断力 $\bar{Q}_{\omega f}$ は版中心からの距離に比例し、以下で表せられる。

$$\bar{Q}_{\omega f} = \bar{Q}_{\omega f 0} \frac{2z}{b} \quad (4.5)$$

ここに、 $\bar{Q}_{\omega f 0}$ は最外縁のせん断力。

版そりせん断力によって生じる断面のずれモーメントは

$$M_{\chi f} = \int_{-b/2}^{b/2} \bar{Q}_{\omega f} z dz = \int_{-b/2}^{b/2} \bar{Q}_{\omega f 0} \frac{2z}{b} z dz = \frac{\bar{Q}_{\omega f 0}}{6} b^2 \quad (4.6)$$

ところで、面内の(y, z)点における版そりによる軸方向変位は版内のせん断変形を無視すると

$$u = -y z \omega_f = -y \left(\frac{d}{dx} v_w \right) = -y (\chi_w z)' = -y z \chi_w' \quad (4.7)$$

(y>0, z>0にてu<0, ∴ω_f = χ_w' の関係がある。(4.7.a))

軸方向応力σ_{ωf}は

$$\sigma_{\omega f} = E_f \frac{du}{dx} = E_f \frac{d}{dx} (-y z \omega_f) = -E_f y z \chi_w'' \quad (4.8)$$

図-9 d)に示す、版そりによる版単位幅当たりのモーメント $\bar{M}_{\omega f}$ は

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\omega f} &= \int_{-t_f/2}^{t_f/2} \sigma_{\omega f} y dy = \int_{-t_f/2}^{t_f/2} E_f \frac{d}{dx} (-y z \omega_f) y dy \\ &= \int_{-t_f/2}^{t_f/2} (-E_f y z \chi_w'') y dy = -E_f z \frac{t_f^3}{12} \chi_w'' \quad (4.9) \end{aligned}$$

版そりモーメントM_{ωf}は

$$M_{\omega f} = \int_{-b/2}^{b/2} \bar{M}_{\omega f} z dz = \int_{-b/2}^{b/2} \left(-E_f z \frac{t_f^3}{12} \chi_w'' \right) z dz \quad (4.10)$$

$$= -E_f \frac{t_f^3}{12} \chi_w'' \frac{1}{3} [z^3]_{-b/2}^{b/2} = -E_f \frac{2b}{3} C_{\omega f} \chi_w''$$

$$\text{ここに、} \quad C_{\omega f} = \frac{t_f^3 b^2}{96} \quad (4.11)$$

ところで $\bar{Q}_{\omega f} = \frac{d}{dx} \bar{M}_{\omega f}$ の関係が成立するから、式(4.5)と式(4.10)の1回微分より

$$\bar{Q}_{\omega f 0} = -E_f \frac{t_f^3 b}{24} \chi_w''' \quad (4.12)$$

従って、式(4.6)の版のずれモーメントM_{χf}は

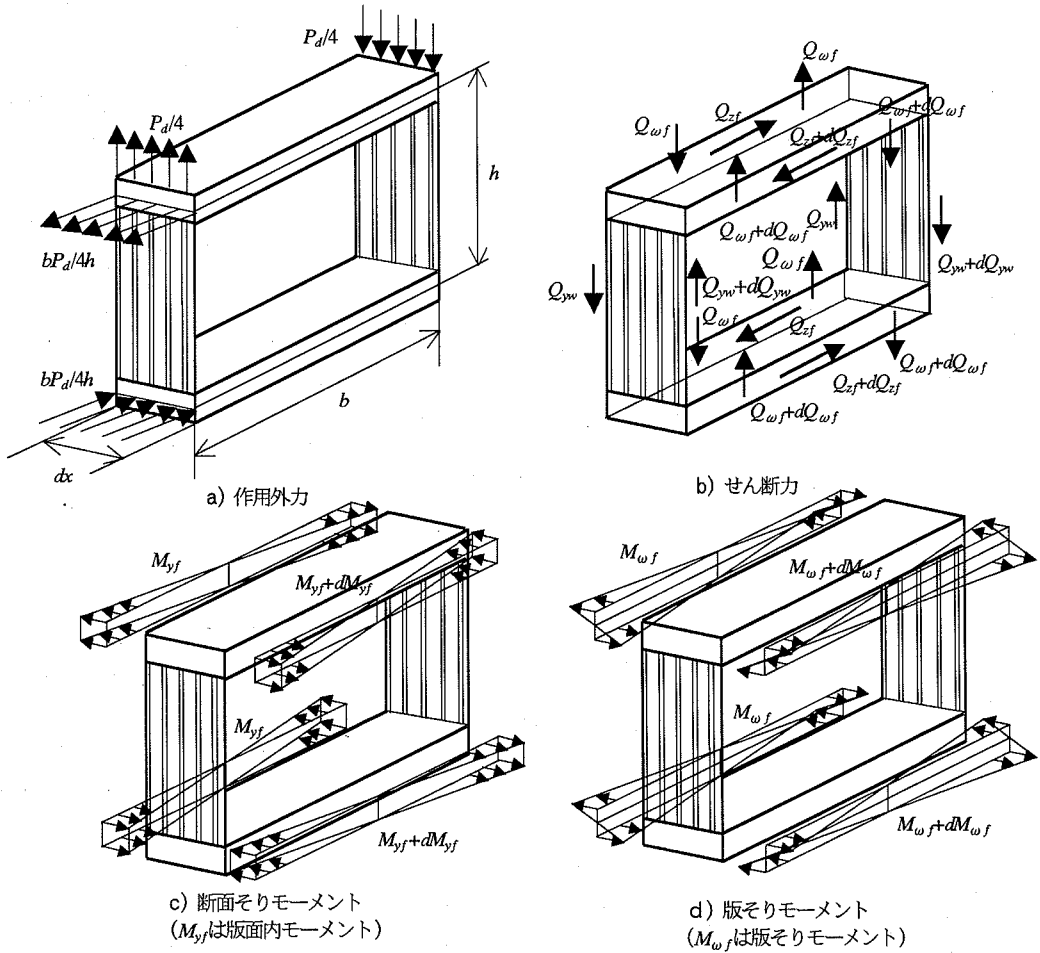


図-10 作用外力および断面力の釣合い

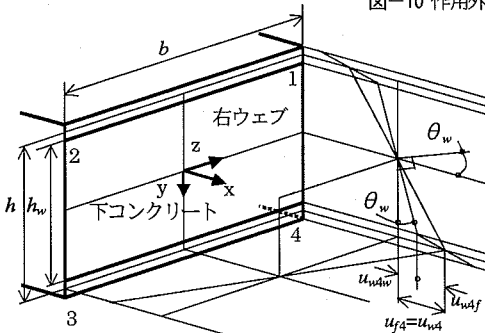


図-11 CWBB フランジ、ウェブ交点の適合条件

$$M_{\chi f} = -E_f \frac{t_f^3 b^3}{144} \chi_w^{\text{III}} \quad (4.13)$$

$M_{\chi f}$ と版そりせん断力 $Q_{\omega f}$ の関係は、 $M_{\chi f} = 2Q_{\omega f} \frac{2}{6} b$

$$\therefore Q_{\omega f} = -E_f \frac{t_f^3 b^2}{96} \chi_w^{\text{III}} = -E_f C_{\omega f} \chi_w^{\text{III}} \quad (4.14)$$

(4) CWBB のずれモーメントの釣合い式

図-10 a) に示す作用外力と図-10 b) に示す断面力の釣

合いより、ずれモーメントの釣合いを考える。その際、はり桁断面の外郭(上下コンクリート床版と左右の波形ウェブ)のラーメン変形による断面変形に対する抵抗を分布ずれ外力と同等に評価する。

$$2\left(\frac{b}{2}\right) dQ_{yw} + 2\left(\frac{h}{2}\right) dQ_{zf} + 4\left(\frac{b}{3}\right) dQ_{\omega f} + (m_{\chi} - C\chi) dx = 0$$

$$bQ_{yw}' + hQ_{zf}' + \frac{4}{3}bQ_{\omega f}' = -(m_{\chi} - C\chi) \quad (4.15)$$

Q_{zf}' を式(4.3)、 $Q_{\omega f}'$ を式(4.14)の1回微分により置換え、かつ Q_{yw}' をひずみ γ_w' で表示する。

$$Q_{yw}' = \frac{h}{b} \frac{b}{4h} \frac{2}{b} (m_{\chi} - C\chi) + \frac{4}{3} E_f C_{\omega f} \chi_w^{\text{IV}} - \frac{1}{b} (m_{\chi} - C\chi)$$

$$\gamma_w' \frac{G_w A_w}{K_w} = + \frac{4}{3} E_f C_{\omega f} \chi_w^{\text{IV}} - \frac{1}{2b} (m_{\chi} - C\chi) \quad (4.16)$$

(5) CWBB の床版とウェブの交点の適合条件

図-11 に示す CWBB 下コンクリート床版右端および右側波形ウェブ下端の x 軸方向変位をそれぞれ求め、これらが等しいことより得られる関係を求める。
下コンクリート床版右端の軸方向変位

$$u_{f4} = -\frac{b}{2}\phi_{yf} = -\frac{b}{2}(w'_f - \gamma_f) = -\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}\chi'_f - \gamma_f\right) \quad (4.17)$$

右波形ウェブ下端の軸方向変位

$$\begin{aligned} u_{w4} &= u_{w4w} + u_{w4f} \\ &= -\left(\frac{h_w}{2}\theta_w + \frac{h-h_w}{2}v'_w\right) = -\frac{h_w}{2}(v'_w - \gamma_w) - \frac{h-h_w}{2}v'_w \\ &= \frac{h_w}{2} \frac{\kappa_w Q_{yw}}{G_w A_w} - \frac{h}{2} \left(\frac{b}{2}\chi'_w\right) = -\frac{bh}{4}\chi'_w + \frac{h_w}{2} \frac{\kappa_w Q_{yw}}{G_w A_w} \quad (4.18) \end{aligned}$$

ここに, u_{w4w} ; ウェブ高さ半分部分における変位

u_{w4f} ; 床版厚さ半分部分における変位

θ_w ; ウェブ回転角(文献⁹⁾の図-2参照)

変位の適合条件, $-u_{w4} = -u_{w4}$ より

$$\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}\chi'_f - \gamma_f\right) = \frac{bh}{4}\chi'_w - \frac{h_w}{2} \frac{\kappa_w Q_{yw}}{G_w A_w} \quad (4.19)$$

$$\chi'_f = \chi'_w - \frac{2h_w}{bh} \frac{\kappa_w Q_{yw}}{G_w A_w} + \frac{2\kappa_f Q_{zf}}{h G_f A_f} \quad (4.20)$$

両辺を1回微分して

$$\chi''_f = \chi''_w - \frac{2h_w}{bh} \frac{\kappa_w Q'_{yw}}{G_w A_w} + \frac{2\kappa_f Q'_{zf}}{h G_f A_f} \quad (4.21)$$

Q'_{yw} に式(4.16), Q'_{zf} に式(4.3)を代入して

$$\begin{aligned} \chi''_f &= -\frac{8h_w}{3bh} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} E_f C_{\omega f} \chi''_w + \chi''_w \\ &+ \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} - \frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f}\right) (m_\chi - C\chi) \quad (4.22) \end{aligned}$$

(6) CWBBのそりモーメントの釣合い式

図-10 d) に示すそりモーメントの釣合いにより

$$\begin{aligned} 2\left(\left(\frac{h}{2}\right)dM_{yf} - \left(\frac{h}{2}\right)Q_{zf} dx\right) \\ + 2\left(dM_{\omega f} - \left(\frac{b}{2}\right)Q_{yw} dx - 2\frac{b}{3}Q_{\omega f} dx\right) = 0 \quad (4.23) \end{aligned}$$

$$hM'_{yf} + 2M'_{\omega f} = bQ_{yw} + \frac{4b}{3}Q_{\omega f} + hQ_{zf} \quad (4.24)$$

式(4.24)の1回微分の右辺が式(4.15)の左辺と等しいこと, すなわち, そりモーメントの1回微分はすれモーメントに等しい関係から

$$hM''_{yf} + 2M''_{\omega f} = -(m_\chi - C\chi) \quad (4.25)$$

式(4.25)に式(4.1), 式(4.10)を代入して

$$\begin{aligned} h\left(-E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2}\chi''_f - \gamma''_f\right)\right) + 2\left(-E_f \frac{2b}{3} C_{\omega f} \chi''_w\right) \\ = -m_\chi + C\chi \quad (4.26) \end{aligned}$$

(7) χ_w に関する微分方程式の誘導

式(4.20)を3回微分して, ひずみ記号に改めると

$$\chi_f^{IV} = \chi_w^{IV} - \frac{2h_w}{bh} \gamma_w^{III} + \frac{2}{h} \gamma_f^{III} \quad (4.27)$$

式(4.27)を式(4.26)へ代入して χ_f^{IV} を消去し, さらに γ_w^{III} へ式(4.16)の2回微分を代入する. 式の展開の結果 γ_f^{III} は相殺され消滅する.

$$\begin{aligned} h \left(-E_f I_{yf} \left[\frac{h}{2} \chi_w^{IV} - \frac{h_w}{b} \left(\frac{\kappa_w}{G_w A_w} \left(\frac{4}{3} E_f C_{\omega f} \chi_w^{VI} - \frac{1}{2b} (m_\chi'' - C\chi'') \right) \right) \right] \right) \\ + 2 \left(-E_f \frac{2b}{3} C_{\omega f} \chi_w^{IV} \right) = -m_\chi + C\chi \quad (4.28) \end{aligned}$$

ここで,

$$I_{\omega F} = \frac{4b}{3} C_{\omega f}, \quad I_{\omega N} = \frac{h^2}{2} I_{yf}, \quad I_{\omega G} = I_{\omega F} + I_{\omega N} \quad \text{とおく.} \quad (4.29. a, b, c)$$

$$\begin{aligned} \chi_w^{VI} - \frac{b^2 h}{2 h_w \kappa_w E_f I_F I_{\omega N}} I_{\omega G} \chi_w^{IV} \\ = -\frac{b^2 h}{2 h_w \kappa_w E_f I_{\omega F} E_f I_{\omega N}} (m_\chi - C\chi) \\ + \frac{1}{2 E_f I_{\omega F}} (m_\chi'' - C\chi'') \quad (4.30) \end{aligned}$$

上式はCWBBのウェブの断面変形角とすれモーメントの関係を示す微分方程式である.

(8) 版内の応力算出

下コンクリート床版と右側波形ウェブの交点におけるコンクリート内の直応力を算出する式を示す.

1) 版そりによる床版下面の応力(橋軸方向)

式(4.8)に式(4.10)を代入して χ_w'' を消去すれば,

$$\sigma_{\omega f} = M_{\omega f} \frac{3t_f}{8C_{\omega f}} \quad (4.31)$$

2) 版面内曲げによる応力(橋軸方向)

$$\sigma_{mf} = M_{yf} \frac{b}{2I_{yf}} \quad (4.32)$$

3) ラーメン変形による応力(橋軸直角方向)

式(2.14)を用いてコンクリート床版上面では

$$\sigma_{rf} = \frac{M_{rf} t_f}{I_{rf} 2} = \chi \frac{C}{8I_{rf}} t_f \quad (4.33)$$

5. CWBB 断面変形問題のマトリックス解法

3.の長方形箱断面はりと同様にCWBB断面変形問題をマトリックス変位法(以下, MTと呼ぶ)によって解法する.

χ_w の一般解は

$$\chi_w = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 + A_5 \cosh(\varepsilon x) + A_6 \sinh(\varepsilon x) \quad (5.1)$$

ここに ε は、式(4.29.a, b, c)の表記を用いて、

$$\varepsilon^2 = \frac{\frac{h^2}{2} E_f I_{yf} + \frac{4b}{3} E_f C_{\omega f}}{\frac{4hh_w}{3b} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} E_f I_{yf} E_f C_{\omega f}} = \frac{b^2 h G_w A_w I_{\omega G}}{2 h_w \kappa_w E_f I_{\omega F} I_{\omega N}} \quad (5.2)$$

(1) χ_f の x 関数表示

始点 i と終点 j に挟まれた要素の中間に荷重が作用せず、ラーメン変形を部材端のみで離散的に扱う場合は、式(4.22)中の $m_x - C\chi = 0$ となり、

$$\chi_f'' = -\frac{8h_w \kappa_w}{3bh G_w A_w} E_f C_{\omega f} \chi_w^{IV} + \chi_w'' \quad (5.3)$$

これに式(5.1)の4回微分、2回微分を代入すると、

$$\chi_f'' = 2A_3 + 6A_4x - \varepsilon^2 \left(\frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) \left(A_5 \cosh(\varepsilon x) + A_6 \sinh(\varepsilon x) \right) \quad (5.4)$$

(2) 断面力 hM_{yf} , $2M_{\omega f}$, M_x の x 関数表示

要素の中間に荷重が作用せず、ラーメン変形を部材端のみで離散的に扱う場合の床版フランジにおける版面内モーメントによる断面そりモーメント、 hM_{yf} と版のそりによる断面そりモーメント、 $2M_{\omega f}$ 、および断面のずれモーメント、 M_x を x の関数で表示する。

$$\text{式(4.3)中の } m_x - C\chi = 0 \text{ であるから、} \gamma_f' = 0 \quad (5.5)$$

これを式(4.1)に代入し、式(4.29.b)の関係を用いれば、

$$M_{yf} = -E_f I_{yf} \left(\frac{h}{2} (\chi_f'') \right) = -E_f \frac{1}{h} I_{\omega N} \chi_f'' \quad (5.6)$$

従って、版面内モーメントによる断面そりモーメントは式(5.4)を用いて

$$\begin{aligned} \frac{2h}{2} M_{yf} &= hM_{yf} \\ &= A_3 (-2E_f I_{\omega N}) + A_4 (-6E_f I_{\omega N})x \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$+ A_5 (\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \cosh(\varepsilon x) + A_6 (\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \sinh(\varepsilon x)$$

版そりによる断面そりモーメントは式(4.10)を用い、式(5.1)の2回微分を代入することにより、

$$\begin{aligned} 2 \times M_{\omega f} &= A_3 (-2E_f I_{\omega F}) + A_4 (-6E_f I_{\omega F})x \\ &+ A_5 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \cosh(\varepsilon x) + A_6 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \sinh(\varepsilon x) \end{aligned} \quad (5.8)$$

下記、そりモーメントとずれモーメントの関係から

$$M_x = \frac{d}{dx} M_{\omega} = \frac{d}{dx} (hM_{yf} + 2M_{\omega f}) \quad (5.9)$$

上式に式(5.7)、式(5.8)の1回微分を代入して

$$M_x = A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \quad (5.10)$$

(3) χ_f' の x 関数表示

内力の釣合い、すなわちずれ荷重のみが作用する断面内のモーメントはゼロである条件より

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{h}{2} \right) Q_{zf} - 2 \left(\frac{b}{2} \right) Q_{yw} - 2 \times 2 \left(\frac{b}{3} \right) Q_{\omega f} &= 0 \\ Q_{yw} &= \frac{h}{b} Q_{zf} - \frac{4}{3} Q_{\omega f} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ずれモーメント M_x は式(5.10)と等値であるから

$$\begin{aligned} M_x &= 2 \left(\frac{h}{2} \right) Q_{zf} + 2 \left(\frac{b}{2} \right) Q_{yw} + 2 \times 2 \left(\frac{b}{3} \right) Q_{\omega f} \\ &= hQ_{zf} + bQ_{yw} + \left(\frac{4b}{3} \right) Q_{\omega f} = A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \end{aligned} \quad (5.12)$$

式(5.11)と式(5.12)の和、差より

$$2hQ_{zf} = A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \quad (5.13)$$

$$2 \left(bQ_{yw} + \frac{4b}{3} Q_{\omega f} \right) = A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \quad (5.14)$$

式(4.20)に式(5.11)を代入して Q_{yw} を消去し、 $Q_{\omega f}$ 、 Q_{zf} をそれぞれ式(4.14)と式(5.13)を用いて置換えると

$$\begin{aligned} \chi_f' &= \chi_w' + \frac{8h_w \kappa_w}{3bh G_w A_w} (-E_f C_{\omega f} \chi_w''') \\ &+ \frac{2}{h} \left(\frac{\kappa_f}{G_f A_f} - \frac{hh_w \kappa_w}{b^2 G_w A_w} \right) \frac{1}{2h} A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

式(5.1)の1回微分、3回微分を代入して

$$\begin{aligned} \chi_f' &= \left(A_2 + 2A_3x \right. \\ &\left. + A_4 \left(3x^2 - 6 \left(\frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} \right. \right. \\ &\left. \left. + 6 \left(\frac{h_w \kappa_w}{b^2 h G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \right) \right) \\ &+ \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \sinh(\varepsilon x) + A_6 \cosh(\varepsilon x)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

(4) χ の x 関数表示

式(5.16)の χ_f' を1回積分して χ_f の式を得る。

$$\begin{aligned} \chi_f &= \left(B_1 + A_2x + A_3x^2 \right. \\ &\left. + A_4 \left(x^3 - 6 \left(\frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} x \right. \right. \\ &\left. \left. + 6 \left(\frac{h_w \kappa_w}{b^2 h G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) x \right) \right) \\ &+ \left(-\frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \cosh(\varepsilon x) + A_6 \sinh(\varepsilon x)) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$\chi_w + \chi_f = 2\chi$ の関係に式(5.1)と(5.17)を代入し、 χ の x 関数表示式を求める。

$$\chi = \frac{1}{2}(A_1 + B_1) + A_2x + A_3x^2 + \left(A_4 \left(x^3 - 3 \left(\frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} x + 3 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) x \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \cosh(\varepsilon x) + A_6 \sinh(\varepsilon x)) \quad (5.18)$$

(5) 材端変位と材端力の選定

材端変位と材端力を関係付ける剛性マトリックスには相反定理成立のため、対称性が要求され、選定される変位と材端力はこの条件を満足する必要がある。表-1 に文献⁹にて報告された CWB の面内鉛直変形に関する諸関数とそれに対応する CWBB の断面変形に関する諸関数を併記する。CWB の MT 法で選定された変位は v , v' , ϕ であった。これら v , v' に対応する CWBB の変位が χ と χ_w' であることは容易に推察できる。残る ϕ に対応する変位は以下のアナロジーにより見いだされる。

鉛直面内問題における下フランジの x 軸方向変位は

$$u = (h/2)\phi \quad (5.19)$$

これに相当する断面変形問題の x 軸方向変位は

$$u = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} \chi_f' - \gamma_f \right) = \frac{hb}{2} \left(\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f \right) \quad (5.20)$$

従って、 ϕ に相当する変位は下式となる。

$$b/2 \left(\chi_f' - (2/h) \gamma_f \right) \quad (5.21)$$

以下、上記括弧内の計算をする。

$$\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f = \left(A_2 + 2A_3x + A_4 \left(3x^2 - 6 \left(\frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} + 6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \right) \right) + \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \sinh(\varepsilon x) + A_6 \cosh(\varepsilon x)) - \frac{2}{h} \gamma_f \quad (5.22)$$

せん断ひずみとせん断力の関係に式(5.13)を用いて、

$$\gamma_f = \frac{\kappa_f Q_f}{G_f A_f} = \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \frac{A_4 (-6E_f I_{\omega G})}{2h} \quad (5.23)$$

これを式(5.22)に代入して

$$\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f = \left(A_2 + 2A_3x + A_4 \left(3x^2 + 6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \right) \right) + \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \sinh(\varepsilon x) + A_6 \cosh(\varepsilon x)) \quad (5.24)$$

$$+ \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \sinh(\varepsilon x) + A_6 \cosh(\varepsilon x)) \quad (5.24)$$

以上より材端変位、材端力として以下を選定する。
材端変位

$$\mathbf{x}_6 = \left\{ \chi_i; \chi_w', i; \left(\chi_f' - \frac{h}{2} \gamma_f \right), i; \chi_j; \chi_w', j; \left(\chi_f' - \frac{h}{2} \gamma_f \right), j \right\} \quad (5.25)$$

材端力

$$\mathbf{f}_6 = \{ M_{\chi_i, i}; 2M_{\omega_f, i}; hM_{\gamma_f, i}; M_{\chi_j, j}; 2M_{\omega_f, j}; hM_{\gamma_f, j} \} \quad (5.26)$$

材端変位について式(5.18)、式(5.1)の1回微分および式(5.24)より $x=0$ では

$$\chi_i = \frac{1}{2}(A_1 + B_1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5) \quad (5.27)$$

$$\chi_w', i = A_2 + A_6 \varepsilon \quad (5.28)$$

$$\left(\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f \right), i = \left(A_2 + A_4 \left(6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \right) \right) + A_6 \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) \quad (5.29)$$

要素の部材長を L とするとき、 $x=L$ では

$$\chi_j = 1/2(A_1 + B_1) + A_2L + A_3L^2$$

$$+ \left(A_4 \left(L^3 - 3 \left(\frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} L + 3 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) L \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \cosh(\varepsilon L) + A_6 \sinh(\varepsilon L)) \quad (5.30)$$

$$\chi_w', j = A_2 + 2A_3L + 3A_4L^2 + A_5 \varepsilon \sinh(\varepsilon L) + A_6 \varepsilon \cosh(\varepsilon L) \quad (5.31)$$

$$\left(\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f \right), j = \left(A_2 + 2A_3L + A_4 \left(3L^2 + 6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \right) \right) + \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \sinh(\varepsilon L) + A_6 \cosh(\varepsilon L)) \quad (5.32)$$

材端力については式(5.10, 8, 7)より $x=0$ では

$$M_{\chi_i, i} = -A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \quad (5.33)$$

$$2M_{\omega_f, i} = A_3 (-2E_f I_{\omega F}) + A_5 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \quad (5.34)$$

$$hM_{\gamma_f, i} = A_3 (-2E_f I_{\omega N}) + A_5 (\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \quad (5.35)$$

$$x=L \text{ では } M_{\chi_j, j} = A_4 (-6E_f I_{\omega G}) \quad (5.36)$$

$$2M_{\omega_f, j} = -A_3 (-2E_f I_{\omega F}) - A_4 (-6E_f I_{\omega F}) L - A_5 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \cos(\varepsilon L) - A_6 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \sinh(\varepsilon L) \quad (5.37)$$

表-1 CWBB と CWB の諸式比較

	CWB	CWBB
ウェブひずみ	$\gamma = v' - \theta$	$\gamma_w = \frac{b}{2} \chi_w' - \theta_w$
適合条件	$h\phi = h_w\theta + (e_1 + e_2)v'$	$\frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} \chi_f' - \gamma_f \right) = \left(\frac{h_w}{2} \theta_w + \frac{h - h_w}{2} v_w' \right)$
微分方程式	$v^{VI} - \frac{I_g}{I_n} \frac{h}{h_w} \frac{GA_w}{EI_f} v^{IV} = -\frac{1}{EI_n} \frac{h}{h_w} \frac{GA_w}{EI_f} q + \frac{1}{EI_f} q''$	$\chi_w^{VI} - \frac{b^2}{2} \frac{h}{h_w} \frac{G_w A_w}{\kappa_w E_f I_{\omega F}} \frac{I_{\omega G}}{I_{\omega N}} \chi_w^{IV} = -\frac{b^2}{2} \frac{h}{h_w} \frac{G_w A_w}{\kappa_w E_f I_{\omega F}} \frac{1}{E_f I_{\omega N}} (m_\chi - C\chi) + \frac{1}{2} \frac{1}{E_f I_{\omega F}} (m_\chi'' - C\chi'')$
常数	$\alpha^2 = \frac{I_g}{I_n} \frac{h}{h_w} \frac{GA_w}{EI_f}$	$\varepsilon^2 = \frac{b^2}{2} \frac{h}{h_w} \frac{G_w A_w}{\kappa_w E_f I_{\omega F}} \frac{I_{\omega G}}{I_{\omega N}}$
解	$v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 \cosh(\alpha x) + C_6 \sinh(\alpha x)$	$\chi_w = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 + A_5 \cosh(\varepsilon x) + A_6 \sinh(\varepsilon x)$
選定材端変位-1	同上	$\chi = \frac{1}{2} (A_1 + B_1) + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 \left(x^3 - 3 \left(\frac{1}{h^2} \frac{\kappa_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} x \right) + 3 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \cosh(\varepsilon x) + A_6 \sinh(\varepsilon x))$
選定材端変位-2	$v' = C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x + C_5 \alpha \sinh(\alpha x) + C_6 \alpha \cosh(\alpha x)$	$\chi_w' = A_2 + 2A_3 x + 3A_4 x^2 + A_5 \varepsilon \sinh(\varepsilon x) + A_6 \varepsilon \cosh(\varepsilon x)$
選定材端力-1	$Q_g = C_4 (-6EI_g)$	$M_\chi = A_4 (-6E_f I_{\omega G})$
選定材端力-2	$M_f = C_3 (-2EI_f) + C_4 (-6EI_f x) + C_5 (-\alpha^2 EI_f \cosh(\alpha x)) + C_6 (-\alpha^2 EI_f \sinh(\alpha x))$	$2M_{\omega f} = A_3 (-2E_f I_{\omega F}) + A_4 (-6E_f I_{\omega F}) x + A_5 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \cosh(\varepsilon x) + A_6 (-\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \sinh(\varepsilon x)$
選定材端力-3	$M_n = C_3 (-2EI_n) + C_4 (-6EI_n x) + C_5 \alpha^2 EI_f \cosh(\alpha x) + C_6 \alpha^2 EI_f \sinh(\alpha x)$	$hM_{yf} = A_3 (-2E_f I_{\omega N}) + A_4 (-6E_f I_{\omega N}) x + A_5 (\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \cosh(\varepsilon x) + A_6 (\varepsilon^2 E_f I_{\omega F}) \sinh(\varepsilon x)$
下フランジ変位	$u = \frac{h}{2} \phi$	$u = \frac{b}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \chi_f \right)' - \gamma_f \right) = \frac{h}{2} \frac{b}{2} \left(\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f \right)$
選定材端変位-3	$\phi = C_2 + C_3 2x + C_4 (3x^2 + 6\beta) + \left(-\alpha \frac{I_f}{I_n} \right) (C_5 \sinh(\alpha x) + C_6 \cosh(\alpha x))$	$\chi_f' - \frac{2}{h} \gamma_f = \left(A_2 + A_3 2x + A_4 \left(3x^2 + 6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{\kappa_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \right) \right) + \left(-\varepsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \right) (A_5 \sinh(\varepsilon x) + A_6 \cosh(\varepsilon x))$

$$hM_{yf,j} = -A_3(-2E_f I_{\omega N}) - A_4(-6E_f I_{\omega N})L - A_5(\epsilon^2 E_f I_{\omega F}) \cosh(\epsilon L) - A_6(\epsilon^2 E_f I_{\omega F}) \sinh(\epsilon L) \quad (5.38)$$

これらをマトリックス表示すると以下となる。

$$\mathbf{x}_6 = \mathbf{A}_6 \mathbf{C}_6 \quad (5.39)$$

$$\mathbf{C}_6^T = \{A_1 + B_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6\} \quad (5.40)$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 & a_{3,4} & 0 & -\epsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}} \\ \frac{1}{2} & L & L^2 & a_{4,4} & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}}\right) C_h & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}}\right) S_h \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & \epsilon S_h & \epsilon C_h \\ 0 & 1 & 2L & a_{6,4} & \left(-\epsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}}\right) S_h & \left(-\epsilon \frac{I_{\omega F}}{I_{\omega N}}\right) C_h \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

ここに、 $S_h = \sinh(\epsilon L)$ 、 $C_h = \cosh(\epsilon L)$ (5.42, 43)

$$a_{3,4} = 6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{K_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \quad (5.44)$$

$$a_{4,4} = L^3 - 3 \left(\frac{1}{h^2} \frac{K_f}{G_f A_f} \right) E_f I_{\omega G} L \quad (5.45)$$

$$+ 3 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{K_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) L$$

$$a_{6,4} = 3L^2 + 6 \left(\frac{h_w}{b^2 h} \frac{K_w}{G_w A_w} \right) E_f (I_{\omega N} - I_{\omega F}) \quad (5.46)$$

$$\mathbf{f}_6 = \mathbf{B}_6 \mathbf{C}_6 \quad (5.47)$$

$$\mathbf{B}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6E_f I_{\omega G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2E_f I_{\omega F} & 0 & -\epsilon^2 E_f I_{\omega F} & 0 \\ 0 & 0 & -2E_f I_{\omega N} & 0 & \epsilon^2 E_f I_{\omega F} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6E_f I_{\omega G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2E_f I_{\omega F} & 6E_f I_{\omega F} L & \epsilon^2 E_f I_{\omega F} C_h & \epsilon^2 E_f I_{\omega F} S_h \\ 0 & 0 & 2E_f I_{\omega N} & 6E_f I_{\omega N} L & -\epsilon^2 E_f I_{\omega F} C_h & -\epsilon^2 E_f I_{\omega F} S_h \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

4. と同じく剛性マトリックス \mathbf{K}_6 は以下のように表される。

$$\mathbf{f}_6 = \mathbf{B}_6 \mathbf{A}_6^{-1} \mathbf{x}_6 = \mathbf{K}_6 \mathbf{x}_6 \quad (5.49)$$

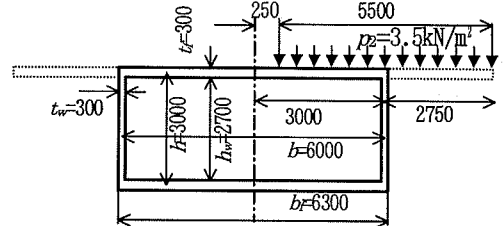
また、外荷重すれモーメント、ラーメン変形の剛性の扱いも 3.(5) で述べた手法と同じである。

6. 数値解析

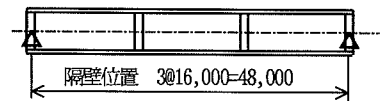
3.(5), 5. で記述したマトリックス法を用いて実構造に対する数値解析を行い、FEM 解析との比較を通してその妥当性の検証を行うとともに隔壁の有無による、そり応力およびラーメン変形応力の発生状況の違いを明らかにする。

(1) 4 辺版構造の解析結果

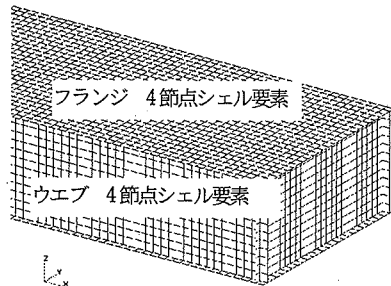
まず 3. の長方形箱断面構造を 4 辺がコンクリート版からなる構造(以下、4 辺版構造と呼ぶ。)に適用し、解析を行う。図-12、表-2 に解析の対象とした構造緒元と荷重の状況を示す。荷重については道路橋示方書¹⁹⁾の L 荷重を断面に対して偏心して桁全長に載荷し、衝撃係数 $i=0.137$ を採用する。FEM ではこの偏心荷重を図-1 に従い、純ねじり荷重 A1 とすれ荷重 A2 に分解し、それぞれの解析を行う。中間隔壁は支間全長に亘り無いもの D0 と、中間に均等に 2 枚配置するもの D2 の 2 種類とした。いずれも両支点上に中間隔壁と同等の端隔壁を配置した。隔壁は 30cm 厚のコンクリートを想定したが、MT では隔壁が桁のそり変形を拘束する効果は考慮できないため、FEM ではそり変形に及ぼす影響を取り除く意味で弾性係数を 100 倍する代わりに板厚を 1/100 に換算した。この換算により桁の断面変形を支配する隔壁のせん断剛性を変化することなく、桁のそり変形を拘束する板曲げ剛度を 1/10,000 にできる。MT における隔壁の剛性値は長方形の隔壁が単位角度変形し、平行四辺形になるために必要な外辺上の作用力から逆算した。図-13 に 4 辺版構造の MT と FEM の解析結果を示す。図-13 a) からわかる通り、FEM では A1 荷重の変形はフランジ、ウェブが同方向同程度に回転するのみであるが、A2 荷重では逆方向に回転し、断面形状の変形がより顕著に現れる。表-3 に D0 の変



a) 断面寸法と荷重



b) 側面構造と隔壁位置



c) FEM モデル詳細

図-12 4 辺版構造断面寸法と荷重

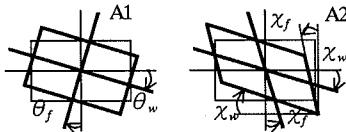
表2 数値解析対象構造の諸元

		4 辺版	CWBB
フランジE	E_f (N/mm ²)	30,370	30,370
$n=E_w/E_f$		1	6.776
ウェブ厚	t_w (mm)	300	9
隔壁厚	t_d (mm)	3	3
同 E	E_d (N/mm ²)	3,040,000	3,040,000
同 G	G_d (N/mm ²)	1,320,000	1,320,000

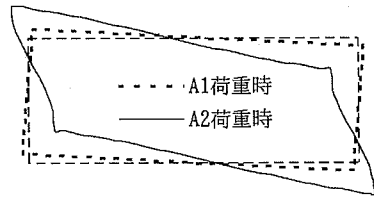
表-3 断面変形角

		4 辺版		CWBB	
A1	FEM	θ_f	θ_w	θ_f	θ_w
		6.799	6.791	18.38	17.78
A2	FEM	χ_f	χ_w	χ_f	χ_w
		9.675	9.559	26.10	26.95
		$2\chi = \chi_f + \chi_w$	$2\chi = \chi_f + \chi_w$		
	19.23	53.05			
	MT	19.75	43.47		

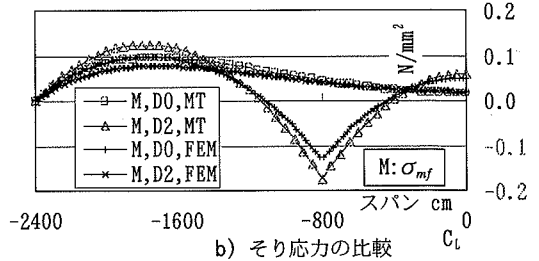
隔壁無し(D0)構造, 単位 $\times 10^5$ ラジアン



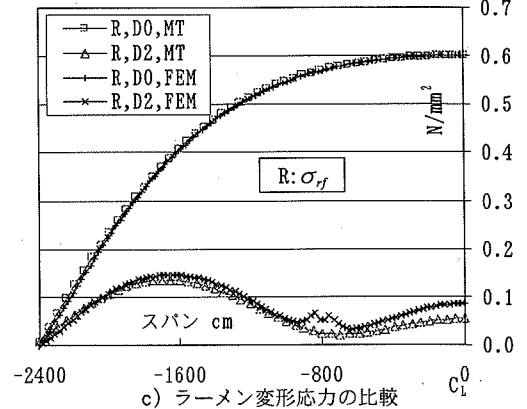
形角を示すが, A2 において MT は FEM に対して 4 辺版構造ではよく一致し, 後述する CWBB 構造では約 18% 小さい計算結果となった。図-13 に示す A2 荷重によるそり応力はフランジとウェブの交点のうち断面右下の版中心における橋軸方向のものであるが, これらは隔壁の有無によって発生状況が大きく異なる。隔壁が有る場合, その分布形状は連続桁のモーメント分布と同様となり, 隔壁付近では連続桁の中間支点のごとく符号が逆転する。文献²⁰⁾にも同様の紹介があるが, D0 の場合は概ね凸型分布ではあるが, 支間中央で最大とはならず, 敵密にはやや凹型である。これは構面の変形に比べラーメン変形の影響が大であり, BEF アナロジーのバネ値が大きい場合と考えられる。逆に D2 の場合は隔壁点で断面変形が拘束されるため断面変形に対する支間が短く, ラーメン変形の影響は小である。また, 応力絶対値の最大値は D2 の場合の隔壁点に生じ, D0 の最大の約 2 倍である。これらのそり応力は死活荷重によって生じる鉛直曲げ応力を 10 N/mm² 程度と考えれば 5% 以下であり, かなり小さい。図-13 c) に示す A2 荷重によるラーメン変形応力はフランジとウェブの交点のうち断面右下の版下表面における橋軸直角方向のものであるが, D0 の場合が D2 の 3 倍程度に大きい。これは D0 では, 断面変形角が大きくなり, 式(4.43)のとおり, ラーメン変形応力は断面変形角に比例するためである。この応力値はそり応力の 3 倍程度であるが, 死活荷重の曲げ応力に比べれば, D0 の最大の場合においても 5% 程度であり, 床版の設計上, 若干の配慮が



a) FEM 断面変形形状



b) そり応力の比較



c) ラーメン変形応力の比較

図-13 4 辺 PC 構造の MT と FEM の比較

必要である。いずれにしても, これら応力分布の傾向は MT, FEM 間で良好な一致をみた。

(2) CWBB 構造の解析に現れる局部応力

次に, CWBB 構造の解析結果を紹介する。図-14 に FEM モデルを示す。荷重, 隔壁の詳細は 4 辺版構造と同様とし, ウェブを 9mm 厚の波形鋼板とする。波形ウェブの上下端には鋼フランジが取り付けられ, それにジベルを配置しコンクリート床版と結合する構造が一般的であるが, 本解析においては簡単のため, 鋼フランジはコンクリート換算してコンクリートのソリッド要素に含まれると考え省略し, 結合は完全にずれないものとしてウェブのシェル要素とコンクリートのソリッド要素の節点を共有とした。図-15 に FEM 解析によるそり応力の分布状況を示す。図-15 a) に示す A2 荷重によるそり応力はフランジとウェブの交点のうち断面右下の版中心および版下表面における橋軸方向のものである。図-15 b) に応力分布と波形形状の位置関係の詳細

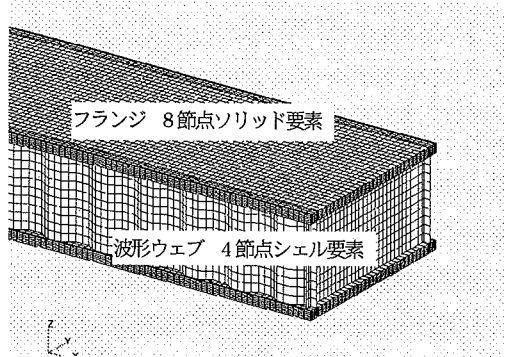


図-14 CWBB 構造 FEM モデル詳細

を示すが、そり応力は隔壁位置に応じて、4 辺版構造の場合と同様の全体的な分布を有するのに加えて、波形の 1 波長に応じた局部分布を生じる。その中間値は波形の斜部分の中間点に現れ、平行部分で極大、極小値となる。図-15 c) 上側は FEM モデルの波形ウェブ上端と床版下面の結合部のメッシュ分割の概略を鳥瞰図として描いたもので、小黑丸が節点、I~IV は橋軸方向の分割線に付けた名称、またこれに沿う波線は床版の鉛直方向変位を誇張して描いたもので、下側 A-A 断面と B-B 断面はそれぞれの断面における波形ウェブと床版のずれ荷重による変形状況を模式的に描いたものである。A-A 断面と B-B 断面において、波板平行部の床版と波形ウェブの取り付け点の水平位置が異なり、断面変形角が生じた場合、ウェブ中心線の取り付け点の高さが A-A と B-B で反転する。これを橋軸方向に見た場合、ウェブ中心線上の床版は波板形状に応じた上下の連続たわみを有することとなり、その結果、橋軸方向に局部的な曲げ応力が付加される。本論文が対象とする MT による構造解析の範疇に、このような局部応力の考慮は含まれておらず、応力値も全体そり応力に比べれば比較的小さいことから、以後の FEM 解析の結果の表示には局部応力の分布は省略し、斜部中間点、すなわち図-15 c) の II 線上、大丸点の応力値をその付近の平均そり応力として表示する。また、ラーメン応力については、床版とウェブの厚みを考慮し、これらの影響の無くなる、IV 線上、大丸点の応力値を断面の中心からの水平距離に比例させ、フランジとウェブの交点での応力値に換算して表示する。

(3) CWBB 構造の解析結果

図-16 に CWBB 構造の MT と FEM の解析結果を示す。本 FEM 解析では 6. (4) で述べたの局部応力の分布を省略し、かつ隔壁点での最大そり応力を把握できるようにするため、図-15 b) に示す隔壁位置を支間中央方向に 40cm 移動し、隔壁位置が波形斜部中間に一致するモデルとした。図-16 a) から判る通り、FEM の A1, A2 荷重による変形状況は 6. (1) の場合と同様である。図-16 b) に示す A2 荷重による

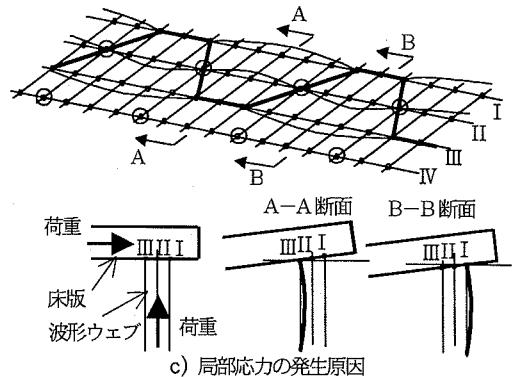
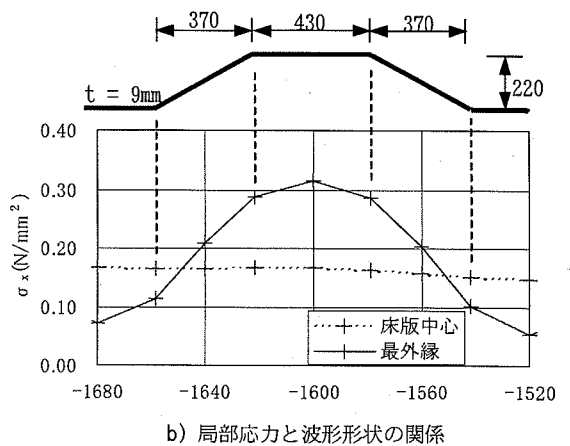
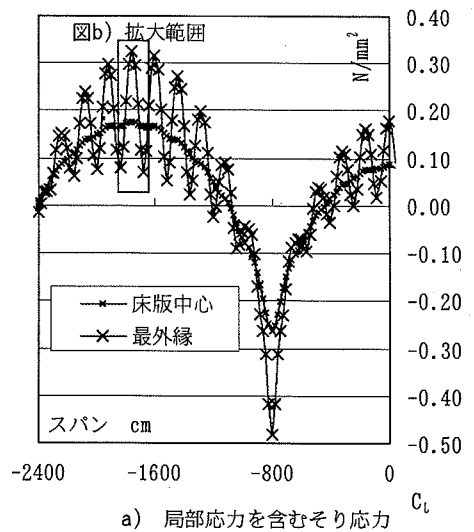


図-15 CWBB 構造の FEM による局部応力

そり応力はフランジとウェブの交点のうち断面右下の橋軸方向のものであるが、このうち版面内曲げのみによる版厚中心の応力(以下、 σ_{mf} と呼ぶ。)とこれに版そりによる版下表面の応力(以下、 $\sigma_{\omega f}$ と呼ぶ。)を付加したものを併記した。MT について、隔壁付近を除きこれらの値は図-13 b) の約 2 倍であるが分布形状は隔壁の有無による差異を含めて、

6. (1)の場合と同様である。一方、隔壁点付近では床版外縁応力に局部的な極値が現れた。この状況は著者らが文献⁹⁾で報告した連続桁の中間支点で鉛直面内モーメントに顕著な付加曲げが加わる状況と相似である。この状況を MT で追跡するためには版自身のそり変形を考慮に含める必要があり、その誘導過程を 4., 5. で紹介した。版そりの応力性状のみを明確に示すため D2 について $\sigma_{\omega f}$ の分布を図-16 c) に示した。これらそり応力について隔壁点では FEM の値は少々 MT の値より少ないが、全径間で概ね一致した結果を得た。隔壁点の差異は MT においては連続指数関数として隔壁点直上における応力値が計算されるのに対して、FEM ではその近傍の要素の平均応力として計算されるための違いと思われる。D0 については上述と同じく 6. (2) の局部応力が全支間に渡って大きく、その影響のため、 $\sigma_{mf} + \sigma_{\omega f}$ の値は MT の約 2 倍となった。しかし、 σ_{mf} 単独については MT と良く一致した。図-16 d) に示す A2 荷重によるラーメン変形応力はフランジとウェブの交点のうち断面右下の版下表面における橋軸直角方向のものであるが、その分布形状は図-13 c) と同様である。以上より、CWBB 構造においても版そりの考慮により、そりならびにラーメン変形の応力分布の傾向は MT, FEM 間で良好な一致をみた。

上記の通り、MT と FEM 間の一致が検証できたことから CWBB に対する MT の妥当性が確認できた。以後、図-17 に示す隔壁の枚数を無しから 3 枚、それぞれ D0~D3、に変更した構造についてパラメトリック解析を行う。図中大きなバネが隔壁の設置位置を示し、小さなバネがラーメン変形に対する剛性設置位置である。これらは各節点に離散化して配置される。図-18 にそれぞれの構造に対して、 σ_{mf} とこれに $\sigma_{\omega f}$ を付加したものを併記した。これら応力の発生点、作用方向は図-16 と同じである。隔壁が D0 場合、断面変形角は全支間に渡り大きい、中央凸形状が扁平である。このため変形角の 2 回微分に比例する σ_{mf} は D0 が D1~D3 に比べて小さくなる。隔壁付近では $\sigma_{\omega f}$ の影響が大きく、とくに隔壁の枚数が少ないほどその影響が大きい。D1 の場合、とりわけ隔壁点での応力値が大きく、絶対値は D0 の最大の 4.5 倍に達する。

本報告では微分方程式を長方形断面に対してそり応力分布を図-9 c), d) に示す分布形状として誘導した。この場合そり応力は断面中心からの水平距離に比例して大きくなるため版端で最大応力となる。また、斜張橋ではケーブル定着点ごとに 20m 程度の間隔で隔壁が配置され、その状況は D1 に近いと考えられる。以上、図-18 の D1 のそり応力発生状況および斜張橋の隔壁間隔を考慮した場合、そり応力については最大 $1\text{N}/\text{mm}^2$ 程度の発生を覚悟する必要がある、直応力に対する許容応力度を $10\text{N}/\text{mm}^2$ とした場合、そり応力がその 10% 程度を占めることとなり、断面設計あるいは配筋上の配慮が必要である。図-19 にラーメン変形の応力を示す。これら応力の発生点、作用方向は図-16 d) と同じであ

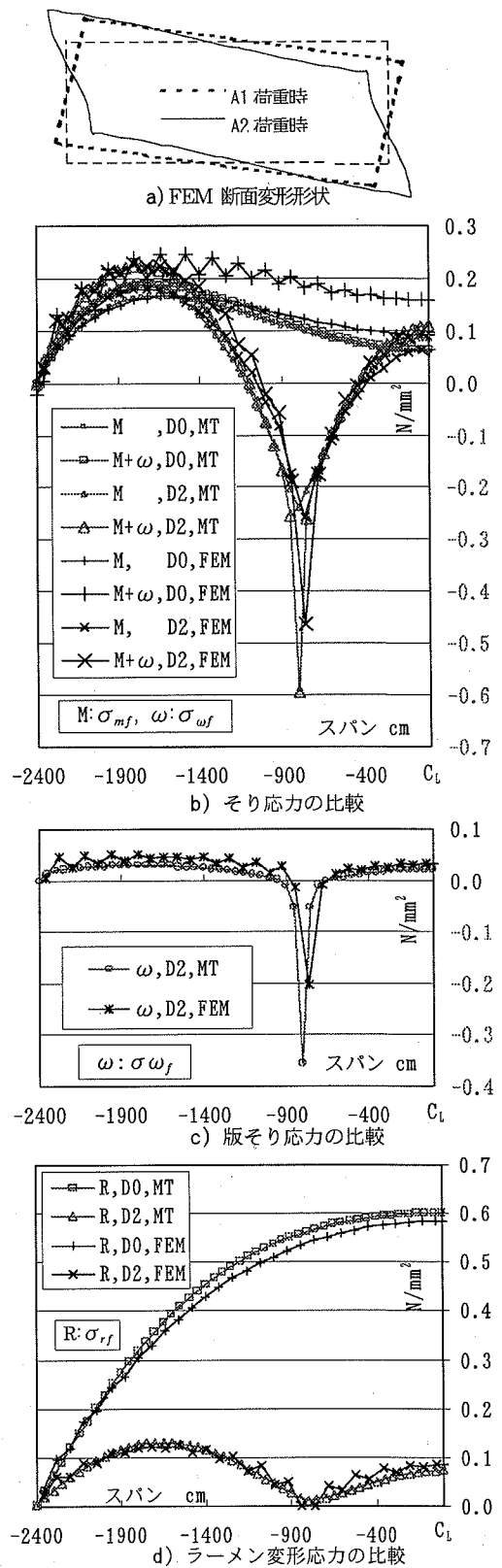


図-16 CWBB 構造の MT と FEM

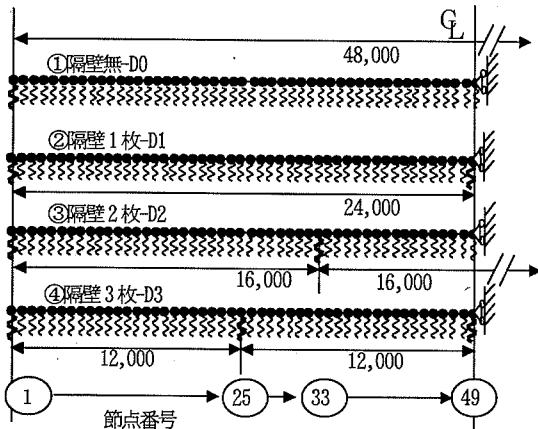


図-17 CWBB 構造パラメトリック解析の隔壁位置

る。図-19 では隔壁の枚数が減少するに従い断面変形角が大きくなるため、ラーメン変形応力は大きくなるがいずれも直応力に対する許容応力度を $10\text{N}/\text{mm}^2$ とした場合の 5%程度あるいはそれ以下であるため設計上の配慮は不要と考える。ラーメン変形による床版の曲げモーメントの反作用として、波形ウェブにも曲げモーメントが生じ、ラーメン変形の応力が生じることになるが、鋼材の応力としては小さく、他の橋軸直角方向の応力も存在しないことから設計上の問題は無い。

7. まとめ

以上、CWBB 構造の断面変形問題を表現する微分方程式を誘導し、MT 法を用いて版そりを考慮した応力性状の解明を行った。本論文で得られた知見を以下に総括する。

- 1) 長方形箱断面はりの断面変形問題に関して、フランジ、ウェブの変形角を χ_f 、 χ_w とし、折れ板理論による 4 階の微分方程式を誘導し、Vlasov の一般化座標法による微分方程式との一致を確認した。
- 2) CWBB 構造の断面変形問題に関して、床版そりの影響を考慮に入れた 6 階の微分方程式を誘導した。
- 3) 上記 1), 2) の方程式を MT 法を用いて解析し、FEM による解析結果との良好な傾向の一致を確認した。
- 4) 偏心活荷重による CWBB の σ_{mf} は 4 辺版構造の約 2 倍となり、隔壁付近ではこれに $\sigma_{\omega f}$ が付加され直応力に対する許容応力度の 10% 程度に達する。これら応力は斜張橋等で隔壁間隔が 20m 程度の場合、顕著に大きくなるため設計上の配慮が必要である。
- 5) 偏心活荷重による CWBB の σ_{rf} は 4 辺版構造と同程度となり直応力に対する許容応力度の 5% 以下のため床版および波形ウェブの設計に配慮は不要である。

これらの知見は図-12 に示される代表的な波形鋼板ウェブ箱桁橋に対して MT と FEM の比較検討から得られたも

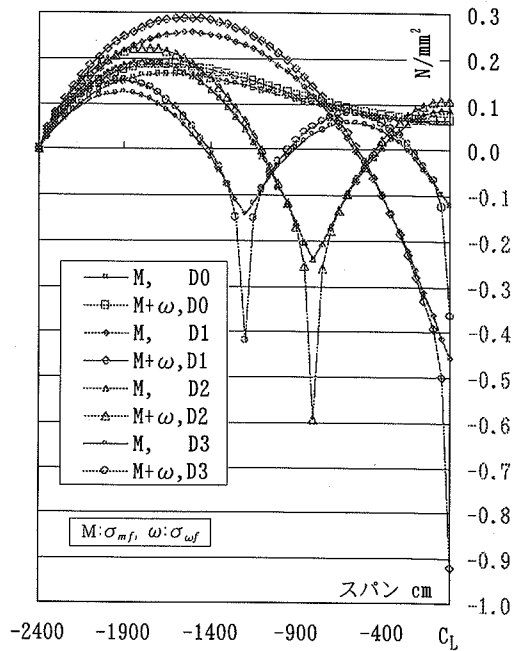


図-18 MT 法による CWBB パラメトリック解析
そり応力

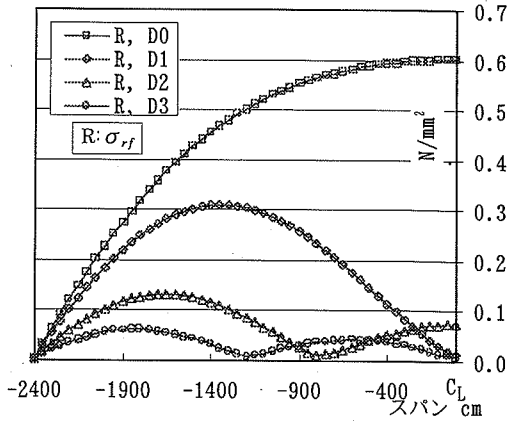


図-19 MT 法による CWBB パラメトリック解析
ラーメン変形応力

のである。実際の構造では支間が異なり、曲線形の場合や断面が非対称あるいは極端に扁平な場合もあり、また車線数が多い場合には多室の構造も実在する。これらの構造に対して、本論文の知見をそのまま適用することはできず、それぞれに適した解析を行う必要があるが、ウェブアコーディオン効果に起因する局部応力の発生は波形ウェブ橋に共通の問題である。もちろん FEM によってその応力を捕らえることは可能であるが、その発生メカニズムを解釈し、対応方法を検討する上で今回紹介する手法は有用と考える。

付録 記号一覧

断面諸量

- b : フランジ幅(左右ウェブ中心間距離)
 h : ウェブ高さ(上下フランジ中心間距離)
 h_w : 波形ウェブ, ウェブ高さ
 t_f, t_w : フランジ, ウェブの板厚
 A_f, A_w : フランジ, ウェブの断面積
 I_{yf}, I_{zw} : フランジ, ウェブの断面2次モーメント
 I_{rf}, I_{rw} : はり軸方向単位長さ当たりのフランジ, ウェブの断面2次モーメント

$$C: C = \frac{96}{\left(\frac{b}{E_f I_{rf}} + \frac{h}{E_w I_{rw}} \right)}$$

$$C_o: C_o = \frac{1}{2h} \left\{ \frac{\kappa_w}{b^2 G_w A_w} - \frac{\kappa_f}{h^2 G_f A_f} \right\}$$

$$C_{\omega f}: C_{\omega f} = \frac{t_f^3 b^2}{96}$$

$$I_{\omega}: I_{\omega} = \frac{h^2}{2} I_{yf} + \frac{b^2}{2} n I_{zw} \text{ (長方形箱断面はり)}$$

$$I_{\omega F}: I_{\omega F} = \frac{4b}{3} C_{\omega f} \text{ (CWBB)}$$

$$I_{\omega N}: I_{\omega N} = \frac{h^2}{2} I_{yf} \text{ (CWBB)}$$

$$I_{\omega G}: I_{\omega G} = I_{\omega F} + I_{\omega N} \text{ (CWBB)}$$

κ_f, κ_w : フランジ, ウェブのせん断断面係数

変位

δ_f, δ_w : ラーメン変形におけるフランジ, ウェブの中間点たわみ

χ : 断面変形角, $2\chi = \chi_f + \chi_w$

χ_f, χ_w : フランジ, ウェブの断面変形角

w_f, v_w : 構面変形のフランジ, ウェブの面内たわみ

γ_f, γ_w : 構面変形のフランジ, ウェブの面内ひずみ

ϕ_{yf}, ϕ_{zw} : 構面変形のフランジ, ウェブの面内回転角

ω_f : フランジの版そり変位

θ_w : 波形ウェブの回転角

断面力

- m_x : 断面変形を生じさせるずれモーメント
 m_{xd} : 構面の変形を生じさせるずれモーメント
 m_{xr} : ラーメン変形を生じさせるずれモーメント
 p_o : m_x を生じさせる分布荷重
 p_d : m_{xd} を生じさせる分布荷重
 p_r : m_{xr} を生じさせる分布荷重
 q_{zf}, q_{yw} : 構面変形のフランジ, ウェブの分布せん断力
 M_r : ラーメン変形によるフランジ, ウェブ交点のはり軸方向単位長さ当たりのモーメント
 M_{yf}, M_{zw} : 構面変形のフランジ, ウェブのモーメント
 Q_{zf}, Q_{yw} : 構面変形のフランジ, ウェブのせん断力
 M_{ω} : そりモーメント(縦方向バイモーメント)

- M_x : ずれモーメント(横方向バイモーメント)
 M_{xf} : 版そりせん断力による断面のずれモーメント
 $M_{\omega f}$: 版そりモーメントによる断面のそりモーメント
 $\bar{Q}_{\omega f}$: 単位幅当たりの版そりせん断力
 $\bar{M}_{\omega f}$: 単位幅当たりの版そりモーメント
 σ_{mf} : フランジ, ウェブ交点の版面内曲げによる応力(断面そりによるフランジ応力)
 $\sigma_{\omega f}$: フランジ, ウェブ交点のフランジ外縁の版そりによる応力(版そりによるフランジ外縁応力)
 σ_{rf} : フランジ, ウェブ交点のフランジ外縁のラーメン変形による応力(ラーメン変形によるフランジ外縁応力)

その他

- a, b_1, b_2 : ウラソフ微分方程式の係数
 x, y, z : 右手系座標軸, はり軸方向 x , 下方 y
 u_{f4}, u_{w4} : CWBB のフランジ, ウェブ交点の x 方向変位
 $u_{\omega f}, u_{\omega w}$: CWBB の側面のフランジ高さの半分および波形ウェブ高さの半分に生じる x 方向変位
 E_f, E_w : フランジ, ウェブの弾性係数
 G_f, G_w : フランジ, ウェブのせん断弾性係数
 n : $n = E_s / E_c$
 A_1 : CWBB のフランジ断面変形角の1回微分 χ_f' を1回積分する時に表れる積分定数
 $B_1 \sim B_6$: CWBB のウェブ断面変形角 χ_w に関する微分方程式の解の積分常数
 $C_1 \sim C_4$: 長方形箱断面はりの断面変形角 χ に関する微分方程式の解の積分常数
 ε : CWBB のウェブ断面変形角 χ_w に関する微分方程式の解の係数

マトリックス変位法

添え字 4 は長方形箱断面はり, 6 は CWBB を示す。

- A_4, A_6 : A マトリックス
 \hat{A}_4, B_6 : B マトリックス
 C_4, C_6 : C マトリックス
 f_4, f_6 : 材端力ベクトル
 x_4, x_6 : 材端変位ベクトル
 K_4, K_6 : 剛性マトリックス
 S_h, C_h : $S_h = \sinh(\varepsilon L)$, $C_h = \cosh(\varepsilon L)$
 a_{ij} : A マトリックスの i 行, j 列要素
 L : マトリックス変位法における要素長さ

用語

- CWB: 波形ウェブを有する PC はり
CWBB: 波形ウェブを有する箱断面 PC はり
MT: マトリックス変位法
FEM: 有限要素解析法
BEF: 弾性支承上の連続はり
PC: プレストレストコンクリート
D0~D3: 隔壁の枚数 0~3
A1, A2: 純ねじり荷重, ずれ

参考文献

- 1) 田川健吾, 岡本晴仁, 中田公夫: コルゲートウェブガーターの研究, 日本鋼管技報, Vol. 71, pp. 25-33, 1976. 10.
- 2) Combault, J.: *The Maupre Viaduct Near Charolles, France*, Proc. of AISC Engineering Conference, Miami Beach, 12-1 ~ 22, 1988. 6.
- 3) Combault, J., Lebon, J.D., and Pei, G.: *Box-Girders Using Corrugated Steel Webs and Balanced Cantilever Construction*, FIP Symposium Kyoto, 1993. 10.
- 4) 水口和之, 芦塚憲一郎, 古田公夫, 大浦隆, 滝 憲司, 加藤卓也: 本谷橋の設計と施工, 橋梁と基礎, Vol. 32, No. 9, pp. 2-10, 1998.
- 5) Watanabe, E., Kadotani, T., Miyauchi, M., Tomimoto, M. and Kano, M.: *On reliability of corrugated steel web in prestressed concrete box girder bridges*, Journal of Structural Safety and Reliability, ICOSAR 2001, Newport Beach, 2001.
- 6) プレストレストコンクリート技術協会: プレストレストコンクリートの新たな発展—21世紀—, 第30回PC技術講習会, 2002. 2
- 7) 加藤久人, 川畑篤敬, 西村宣男: 波形鋼板ウェブを有する鋼・コンクリート複合構造橋梁の変位と断面力の実用計算法, 土木学会論文集, No. 703/1-59, pp. 293-300, 2002. 4
- 8) 加藤久人, 西村宣男: 波形鋼板ウェブを有する連続桁および斜張橋の実用解析法, 土木学会論文集, No. 731/1-63, pp. 231-245, 2003. 4
- 9) 上平謙二, 立神久雄, 本田秀行, 園田恵一郎: 波形鋼板ウェブを有するPC箱桁橋のせん断およびねじり特性に関する研究, プレストレストコンクリート, Vol. 40, No. 3, 1998. 5
- 10.1) 依田照彦, 大浦隆: 波形鋼板ウェブを用いた合成PC箱桁のねじり特性について, 構造工学論文, Vol. 39A, pp1251-1258, 1993. 3
- 10.2) 依田照彦, 生田芳子: 波形鋼板ウェブを用いた合成PC箱桁のねじりと断面変形, 構造工学論文集, Vol. 40A, pp1381-88, 1994. 3
- 11) Vlasov, V.Z.: *Thin-Walled Elastic Beams*, U.S. Department of Commerce, PST Catalogue, NO. 428, 1959. (奥村敏恵ほか訳: 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.)
- 12) 野田行衛, 大槌邦夫: 鋼板ウェブを有するプレストレストコンクリート箱桁の断面計算, 土木学会論文集, No. 641/V-46, pp. 29~37, 2000. 2
- 13) 木村智, 星埜正明: 波形鋼板ウェブを有するPC箱桁橋の断面変形を考慮したねじり解析, 研究奨励研究梗概集, 鋼材倶楽部, 2001. 4
- 14) Wright, R.N., Abdel Samad, S.R. and Robinson, A.R.: *BEF Analogy for Analysis of Box Girder*. Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST7, July, 1968.
- 15) 小松定夫, 長井正嗣: 中間ダイヤフラムの新しい設計法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第326号, 1982年10月
- 16) Kristek, V.: *Tapered Box Girders of deformable Cross Section*, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. ST8, Aug., 1970
- 17) Timoshenko, S. and Goodier, J.N.: *Theory of Elasticity*, ASCE, 1951. (McGraw-Hill Book Company, Inc)
- 18) 小松定夫: 構造解析 I, II, 丸善, 1982
- 19) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, II, 2002. 3
- 20) 佐伯昇: 二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算, 土木学会論文報告集, No. 209, pp. 27~36, 1973. 1
- 21) Weaver, W. Jr. and Gere, J.M.: *Matrix Analysis of Framed Structures*, D. Van Nostrand Company, 1980

(2003.7.4. 受付)

CROSS SECTIONAL DISTORSION THEORY FOR PC BOX BEAMS WITH CORRUGATED STEEL WEB

Hisato KATO, Tomoaki SATO, Nobukazu MAKIURA and Nobuo NISHIMURA

The authors earlier developed an elastic equation by extending the beam-bending theory while considering the shear deformation of the corrugated steel web, and discussed additional stress induced by the bending acting solely on the slab. Similar additional stress is induced where torsional loads acting on the box girder with corrugated web causes the warping of the slab. In this study, the amount and distribution of the stress were analyzed by the matrix method, which solves differential equations for problems of cross-sectional deformation. The knowledge obtained is so important that bridge engineers should take it into consideration in actual design and construction.