

回転自由度を有する四面体要素を用いた フリーメッシュ法

松原 仁¹・伊良波 繁雄²・富山 潤³・山城 建樹⁴・矢川 元基⁵

¹学生会員 修(工) 琉球大学大学院生 理工学研究科 (〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町千原1番地)

E-mail: k038603@eve.u-ryukyu.ac.jp

²正会員 博(工) 琉球大学教授 環境建設工学科 (〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町千原1番地)

³正会員 博(工) 琉球大学助手 環境建設工学科 (〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町千原1番地)

⁴学生会員 学士 琉球大学大学院生 理工学研究科 (〒903-0129 沖縄県中頭郡西原町千原1番地)

⁵工博 東京大学大学院教授 工学系研究科 (〒113-0033 東京都文京区本郷7-3-1)

二次元問題の場合、有限要素に回転自由度を導入することの有用性は、多くの研究者らによって報告されている。しかし、三次元立体要素へ回転自由度を導入することの有用性の検討は少ない。そこで、本研究ではCookらの方法と関口らの方法の二種類の回転自由度の取り扱い手法を三次元領域に拡張し、四面体要素を定式化する。数値解析の結果、中間節点を持たない新しい四面体要素は、極めて良好な精度を得ることができることを示した。また、本要素をメッシュレス法の一つであるフリーメッシュ法の局所要素に適用することで、フリーメッシュ法の精度の問題点を解消することができることを示した。

Key Words : vertex rotations, tetrahedral element, triangular element, high accurate free mesh method

1. はじめに

近年、あらゆる構造物が大型化・複雑形状化する傾向にあり、このような構造物の設計に必要な応力、変位等の物理量を実験や数値解析で求めるとき、特に実験ではコスト的、労力的、技術的に困難な場合がある。一方、計算機性能の著しい発展に伴い、有限要素法、差分法、境界要素法やメッシュレス法等の数値解析手法が発展し、固体力学、流体力学、熱伝導問題等のようなさまざまな工学分野の諸問題に適用され、構造物の設計への数値計算技術の期待も高くなっている。これらの解析手法のうち、通常の有限要素法では節点とその接続情報が必要であるが、メッシュレス法は節点情報のみを用いている。メッシュレス法の利点の一つとして、複雑形状の問題に対するCADデータの利用が容易であり、モデル作成から数値計算までをシームレスに行うことが可能になる点が挙げられる。

このようなメッシュレス法の一つにフリーメッシュ法がある¹⁾。フリーメッシュ法は有限要素法をベースとした解析手法で、入力データとして節点情報のみを必要とし、全ての処理を節点毎に行うことが

できるので、アダプティブ解析や並列計算に適している。このためフリーメッシュ法は、流体問題、破壊力学や弾塑性問題等の多くの分野に適用されている²⁾。また、フリーメッシュ法では節点周りに局所的な要素生成を行うため、中間節点を有するような二次要素を用いることは、局所要素生成アルゴリズムの制約により困難であり、従来、平面問題に対しては定み三角形要素、三次元問題に対しては定み四面体要素が用いられ、解析対象によっては精度的な問題が指摘されてきた^{3), 4)}。

フリーメッシュ法の高精度化に関する既存の研究として、二次元問題に対しては関東⁵⁾、三次元問題に対しては、顧・矢川⁶⁾が混合型変分原理に基づく要素を導き、その高精度化を行い良好な結果を得ている。しかし、混合型変分原理を用いた場合、複合材料の応力解析のように、急激に応力が変化する問題への適用は問題点があると指摘されている^{3), 5)}。

一方、二次元問題における有限要素法では、要素節点に座標 xy 方向の変位だけでなく、回転角を加えることによって、解析精度を向上させる方法が提案されている^{6), 7), 8)}。要素節点に、回転角を加える手法の一つに、中間節点を有するような二次要素の辺

中央節点変位をその節点を挟む頂点の x,y 方向変位と回転角を用いて変換・消去し、要素の頂点のみに x,y 方向変位と回転角を有する平面三角形要素を導くことも可能である⁷⁾。筆者らは、二次元問題に対して、6節点三角形要素から三角形頂点のみに x,y 方向変位と回転角を有する平面三角形要素を導いた⁸⁾。そして、その要素をフリーメッシュ法に適用し、コンクリートの二次元応力解析⁹⁾やフレッシュコンクリートの流動解析に適用¹⁰⁾し、良好な結果を得ている。本研究では、三次元解析における高精度フリーメッシュ法の確立を目的とし、回転自由度を有する平面三角形要素の誘導方法を三次元に拡張し、図-1に示すような、頂点のみに x,y,z 軸方向の並進方向変位と x,y,z 軸まわりの回転角を有する新しい四面体要素を開発した。

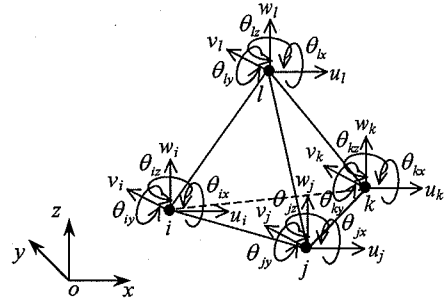


図-1 回転自由度を有する新しい四面体要素

回転自由度を有する要素を導く方法としては、二次要素の辺中央節点変位を頂点の変位で変換・消去し、回転自由度を有する要素を導く方法とは別に、関口らが回転自由度を有する四辺形要素を導く際に用いた回転角を含む変位場を用いる方法もある⁸⁾。関口らは、回転自由度を四辺形要素の自由度に加えることによって、その解析精度は飛躍的に向上し、特に面内の曲げ挙動に対して極めて有効な結果をもたらすことを報告している⁸⁾。このため、本論文では、関口らが四辺形要素を導く際に用いた回転角を有する変位場を三次元に拡張し、回転自由度を有する四面体要素を導いた。そして、導いた四面体要素をフリーメッシュ法に用い、梁や板の弾性解析に適用し、その変位に関する精度について検討を行った。

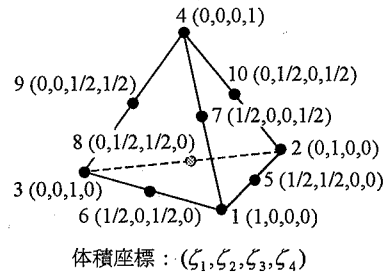


図-2 10 節点アイソパラメトリック四面体要素

さらに、関口らの回転角を有する変位場を用いる方法と辺中央節点変位を頂点の変位で変換・消去する方法の両方法で導いた回転自由度を有する要素の特性についても比較検討を行った。

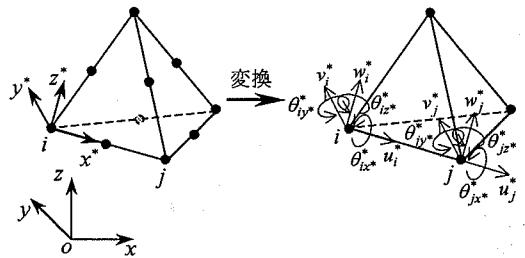


図-3 節点 i, j での変位

2. 回転自由度を有する四面体要素

(1) 中間節点変位を頂点の変位で変換・消去した四面体要素 (D-TETc)

ここでは、 x,y,z 方向変位を辺中央節点を挟む頂点の x,y,z 方向変位と回転角で変換・消去した図-1に示す回転自由度を有する新しい四面体要素(D-TETc)を定式化する。

本研究では、図-2に示す節点に x,y,z 方向変位のみに有する10節点アイソパラメトリック四面体要素(I-TET)を利用して、四面体要素に回転自由度を導入する。

I-TETは曲面を有している問題などの場合、高精度の解を得ることができ⁸⁾、これまで三次元有限要素解析では多く用いられてきた。I-TETの剛性マトリックス $[k_{I-TET}]$ は体積座標 $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ を用いて(図-2参照)次式のように表すことができる⁸⁾。

$$[k_{I-TET}] = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \int_0^{1-\zeta_1-\zeta_2} [B]^T [D] [B] \det[J] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (1)$$

ここに、 $[B]$ はひずみ-変位マトリックスであり、 $[D]$ は弾性論から導かれる応力-ひずみマトリックス、 $[J]$ はヤコビアンマトリックスである。本研究では

$[k_{I-TET}]$ の体積積分を、表-1に示す4点ガウス積分点⁹⁾を利用して求めることにした。I-TETの形状関数 $[N]$ を式(2)に示す¹¹⁾。

$$\begin{cases} N_1 = \zeta_1(2\zeta_1 - 1) \\ N_2 = \zeta_2(2\zeta_2 - 1) \\ N_3 = \zeta_3(2\zeta_3 - 1) \\ N_4 = \zeta_4(2\zeta_4 - 1) \end{cases}, \begin{cases} N_5 = 4\zeta_1\zeta_2 \\ N_6 = 4\zeta_1\zeta_3 \\ N_7 = 4\zeta_1\zeta_4 \\ N_8 = 4\zeta_2\zeta_3 \\ N_9 = 4\zeta_3\zeta_4 \\ N_{10} = 4\zeta_2\zeta_4 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)の形状関数の添え字(1~10)は図-2に示す節点番号である(1-4:頂点番号, 5-10:中間節点番号)。

式(2)で示すように、I-TETは、各頂点に加えて各辺の中央に節点を有している。そこで、各頂点に軸方向周りの回転角を新たに導入し、中間節点変位を消去することを考える。具体的には、I-TETの各辺を仮想的に三次元梁要素と仮定し、中間節点変位と頂点の回転角の関係式を利用する。

局所座標系は、図-3に示すように、 ij 辺の軸方向を x^* と仮定し、 x^* に直交する平面上に y^* 、 z^* をとる。このとき、 xy 平面と x^*y^* 平面が接する線上に y^* 軸をとり、 y^* 軸の正方向は、 z^* が増加するとき、 z^* の値も同時に増加するように仮定する。このような座標系の仮定は、立体ラーメンの剛性方程式を導くときによく用いられる¹²⁾。

局所座標系での i 点での z^* 軸まわりのモーメントによる回転角を θ_{iz}^* 、 y^* 軸まわりのモーメントによる回転角を θ_{iy}^* とし、 j 点でも同様にモーメントによる回転角を θ_{jz}^* 、 θ_{jy}^* とする。これらの i 、 j 点の回転角による ij 間の変位は、局所座標系での x^* 方向の変位を u^* 、 y^* 方向の変位を v^* 、 z^* 方向の変位を w^* とし、三次式で仮定すると、

$$\begin{cases} u^* = 0 \\ v^* = +\theta_{iz}^* l_{ij}(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) + \theta_{iy}^* l_{ij}(\xi^3 - \xi^2) \\ w^* = -\theta_{jz}^* l_{ij}(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) - \theta_{jy}^* l_{ij}(\xi^3 - \xi^2) \end{cases} \quad (3)$$

のようになる。式(3)で、 l_{ij} は辺 ij の長さ、 $\xi = x^*/l_{ij}$ である。また、式(3)では、 i 点及び j 点に作用する局所座標系でのねじりモーメントによる変位は無視すると仮定している。

式(3)より、 ij 辺の中間節点変位 $\{u_m^*, v_m^*, w_m^*\}$ は、 $\xi = 1/2$ を代入することにより求めることができ、これをマトリックス表示すると次式となる。

表-1 ガウス積分点 (四面体領域)

積分点 点数	点	重み	体積座標			
			ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
4	1	0.25	α	β	β	β
	2	0.25	β	α	β	β
	3	0.25	β	β	α	β
	4	0.25	β	β	β	α
$\alpha = 0.58541020$, $\beta = 0.13819660$						

$$\begin{cases} u_m^* \\ v_m^* \\ w_m^* \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 & 0 & -l_{ij}/8 \\ 0 & -l_{ij}/8 & 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{iz}^* \\ \theta_{iy}^* \\ \theta_{jz}^* \\ \theta_{jy}^* \\ \theta_{iz}^* \\ \theta_{jz}^* \end{cases} \quad (4)$$

式(4)は局所座標系での式であるから、左辺は全体座標系での節点変位、右辺の回転に関する項は全体座標系での節点の x, y, z 軸まわりの回転角 $(\theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz}, \theta_{jx}, \theta_{jy}, \theta_{jz})$ を用いて全体座標系へ変換する必要がある。そこで、式(5)の座標変換マトリックス $[\lambda]$ を用いて変換すると、式(4)は式(6a)のようになる。

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ -m_x \varphi & l_y \varphi & 0 \\ -n_x l_x \varphi & -m_x n_x \varphi & 1/\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}} \quad (5)$$

$$[\lambda] \begin{cases} u_m \\ v_m \\ w_m \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 & 0 & -l_{ij}/8 \\ 0 & -l_{ij}/8 & 0 & 0 & l_{ij}/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\lambda] & 0 \\ 0 & [\lambda] \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{cases} \quad (6a)$$

ここに、 $[\lambda]$ は局所座標系から全体座標系への座標変換マトリックスである。式(5)の l_x 、 m_x 、 n_x はそれぞれ ij 辺に沿った単位ベクトルの方向余弦であり、 u_m, v_m, w_m は全体座標系での ij 辺の中間節点変位である。よって、式(6a)の両辺に $[\lambda]^{-1} = [\lambda]^T$ を乗じると、 $\{u_m, v_m, w_m\}^T$ は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix} = [t_{ij} \quad t_{jy}] \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (6b)$$

ここで、 $[t_{ij} \quad t_{jy}]$ は(6a)の右辺のマトリックスの積の左から $[\lambda]^{-1} = [\lambda]^T$ を乗じた 3×6 マトリックスであり、 $[t_{ij}]$ を具体的に示すと、

$$[t_{ij}] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & (z_j - z_i) & -(y_j - y_i) \\ -(z_j - z_i) & 0 & (x_j - x_i) \\ (y_j - y_i) & -(x_j - x_i) & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

である。ここに、 (x_i, y_i, z_i) 、 (x_j, y_j, z_j) は、それぞれ、 i, j 頂点の座標値である。

ij 辺の中間節点変位は、式(6b)で求めた回転角に加え、各頂点を持つ全体座標系での並進方向変位 (i 点については、 u_i, v_i, w_i) の影響も受ける。

そこで、 i, j 頂点での全体座標系での並進方向変位 ($u_i, v_i, w_i, u_j, v_j, w_j$) の影響を加えると、全体座標系での中間節点変位 (u_m, v_m, w_m) は次式となる。

$$\begin{cases} u_m = \frac{1}{2}(u_i + u_j) + \frac{1}{8}(z_{ji}\theta_y - y_{ji}\theta_z + z_{ji}\theta_y - y_{ji}\theta_z) \\ v_m = \frac{1}{2}(v_i + v_j) + \frac{1}{8}(x_{ji}\theta_z - z_{ji}\theta_x + x_{ji}\theta_z - z_{ji}\theta_x) \\ w_m = \frac{1}{2}(w_i + w_j) + \frac{1}{8}(y_{ji}\theta_x - x_{ji}\theta_y + y_{ji}\theta_x - x_{ji}\theta_y) \end{cases} \quad (8)$$

ただし、 $x_{ji} = x_j - x_i$ 、 $y_{ji} = y_j - y_i$ 、 $z_{ji} = z_j - z_i$ である。なお、式(8)では右辺第一項に示すように、 x, y, z 並進方向の変位の影響については、 i, j 頂点の変位の平均値を中間節点の変位と仮定したことになる。

従って、式(8)を用いてI-TETの中間節点変位を消去することができ、 $\{\delta\}$ をI-TETの節点の変位ベクトル ($\{\delta\}^T = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_{10}, v_{10}, w_{10}\}^T$)、 $\{\delta\}$ をD-TETcの回転自由度を含む節点変位ベクトル

($\{\delta\}^T = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}, \dots, u_4, v_4, w_4, \theta_{4x}, \theta_{4y}, \theta_{4z}\}^T$) とすると、I-TETの節点の変位ベクトル ($\{\delta\}$) は、

$$\{\delta\} = [T]\{\delta\} \quad (9)$$

と表すことができる。 $[T]$ は式(8)をI-TETの全ての辺に対して適用することによって得ることができる変換マトリックスである。具体的には後で示す。

式(9)を用いると、D-TETcのひずみエネルギー (U) は、式(1)の剛性マトリックスを導く際の定式化を参考にすれば、次のように表すことができる。

$$U = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\delta\}^T [T]^T [B]^T [D][B][T]\{\delta\} dv^e \quad (10)$$

ここで、 V^e は要素体積である。よって、D-TETcの要素剛性マトリックス $[k_e]$ は式(10)より、

$$[k_e] = [T]^T [k_{I-TETc}] [T] \quad (11)$$

と導くことができる^{6), 7)}。なお、具体的な $[T]$ は、式(7)の $[t_{ij}]$ (i, j は、節点番号1から4)を用いて、

$$[T] = \begin{bmatrix} [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [e_1] & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{12}] & [e_{1/2}] & [t_{21}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{13}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{31}] & 0 & 0 \\ [e_{1/2}] & [t_{14}] & 0 & 0 & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{41}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{23}] & [e_{1/2}] & [t_{32}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{34}] & [e_{1/2}] & [t_{43}] \\ 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{24}] & 0 & 0 & [e_{1/2}] & [t_{42}] \end{bmatrix} \quad (12a)$$

ここに、

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [e_{1/2}] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (12b)$$

である。

(2) 回転角を有する変位場から導かれた四面体要素 (D-TETs)

関口、菊池は、四辺形要素の各頂点に回転自由度を持たせることで、四辺形要素の高精度化に成功した⁸⁾。図-4に関口らの仮定による回転自由度を有する四辺形要素を示す。関口らは四辺形要素の変位場を次式のように仮定した。

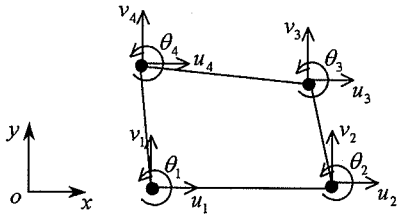


図-4 開口らによる回転自由度を有する四辺形要素

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 \{u_i - (y - y_i)\theta_i\} N_i \\ v = \sum_{i=1}^4 \{v_i + (x - x_i)\theta_i\} N_i \end{cases} \quad (13)$$

ここに、 u, v は並進方向変位、 i は四辺形要素節点番号、 N_i は四辺形一次要素の形状関数で、 θ_i は i 点の回転角、 x_i は i 点の x 座標、 y_i は i 点の y 座標である。式(13)を微分して、ひずみ-変位マトリックス $[B]$ を求めると次式になる。

$$[B] = [[B_1] \quad [B_2] \quad [B_3] \quad [B_4]] \quad (14a)$$

ここで、 $[B_i]$ は四辺形の各節点に関する微分項であり次式で表せる。

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -(y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} - (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (14b)$$

本節では式(13),(14)に習い、回転自由度を有する四面体要素 (D-TETs) を定式化する。四面体要素内部の任意点座標を (x, y, z) とし、ある頂点 i に生じる各軸 $(x, y, z$ 軸) 周りの回転角を $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ (i は節点1~4) とし、要素内部の変位場 (u, v, w) は、体積座標を用いて以下のように仮定する。

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^4 \{u_i + (z - z_i)\theta_y - (y - y_i)\theta_x\} N_i \\ v = \sum_{i=1}^4 \{v_i + (x - x_i)\theta_x - (z - z_i)\theta_z\} N_i \\ w = \sum_{i=1}^4 \{w_i + (y - y_i)\theta_z - (x - x_i)\theta_y\} N_i \end{cases} \quad (15)$$

ここで、 u_i, v_i, w_i は i 節点の各軸 (x, y, z 軸) 方向の並進方向変位であり、 x_i, y_i, z_i は i 点の座標、 $N_i (= \zeta_i)$ は一般的に用いられている定ひずみ四面体要素の形状関数である⁵⁾。よって式(15)より、D-TETsのひずみ-変位マトリックス $[B]$ は、次のようになる。

$$[B] = [[B_1] \quad [B_2] \quad [B_3] \quad [B_4]] \quad (16a)$$

ここで、 $[B_i]$ はD-TETsの各節点に関する微分項であり具体的には次式となる。

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -(z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & -(z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} - (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} & & & -(y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & & & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ -(x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} & & & 0 \\ (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} & & & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} - (y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ -(x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial y} & & & (x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ -(x - x_i) \frac{\partial N_i}{\partial x} + (z - z_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} & & & -(y - y_i) \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (16b)$$

ここで、 x, y, z の値は体積座標系で表すことができ、一般に次式となる⁵⁾。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix} \quad (16c)$$

式(16b)から、D-TETsの要素剛性マトリックス $[k_s]$ は、式(1)を参考にすれば次式となる。

$$[k_s] = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta_1} \int_0^{1-\zeta_1-\zeta_2} [B]^T [D] [B] \det[J] d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (17)$$

なお式(17)の意味は式(1)と異なり、[B]は式(16a)、形状関数は定みずみ四面体要素の形状関数である。

式(17)より、回転角を有する変位場を式(15)のように仮定することにより、式(11)のように座標変換することなく直接に回転自由度を有する四面体要素の剛性マトリックスを導くことができる。なお、本研究では、式(17)の体積積分については、第2章(2)節と同様に、ガウスの数値積分法(表-1の4点積分)で求めている。

3. 中間節点を変換・消去した要素と回転角を有する変位場から導かれた要素の関係

ここでは、三次元領域で、D-TETcとD-TETsの変位場の関係式を導く。なお、これら二つの要素は第2章で述べたように、まったく異なった仮定のもとで定式化されている。しかし、両者の変位場が等価であることをこれから示す。

I-TETの変位場 $\{u, v, w\}$ は、式(2)で示した形状関数 $[N_i]$ を用いて、次のように表せる¹¹⁾。

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^{10} u_i N_i \\ v = \sum_{i=1}^{10} v_i N_i \\ w = \sum_{i=1}^{10} w_i N_i \end{cases} \quad (18)$$

ここで、式(18)の u_i, v_i, w_i の下添字1~10のうち1~4は図-2に示すような四面体の頂点であり、5~10は中間節点番号である。回転自由度を有するD-TETcでは、I-TETの中間節点変位を式(8)で近似するから、式(18)の中間節点変位は、式(8)を代入することにより陽に求まる。ここでは、式が煩雑になるのを防ぐため各頂点(頂点番号1~4)毎に式を展開する。まずx軸方向変位に関して考えると、

頂点番号1(中間節点5,6,7が寄与) :

$$\begin{aligned} & \zeta_1(2\zeta_1 - 1)u_1 + 4\zeta_1\zeta_2\left(\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{8}z_{21}\theta_{1y} - \frac{1}{8}y_{21}\theta_{1z}\right) \\ & + 4\zeta_1\zeta_3\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{8}z_{31}\theta_{1y} - \frac{1}{8}y_{31}\theta_{1z}\right) \\ & + 4\zeta_1\zeta_4\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{8}z_{41}\theta_{1y} - \frac{1}{8}y_{41}\theta_{1z}\right) \\ & = \left\{u_1 + \frac{1}{2}\left((z-z_1)\theta_{1y} - (y-y_1)\theta_{1z}\right)\right\}\zeta_1 \end{aligned} \quad (19a)$$

頂点番号2(中間節点5,8,10が寄与) :

$$\begin{aligned} & \zeta_2(2\zeta_2 - 1)u_2 + 4\zeta_2\zeta_2\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{8}z_{21}\theta_{2y} + \frac{1}{8}y_{21}\theta_{2z}\right) \\ & + 4\zeta_2\zeta_3\left(\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{8}z_{32}\theta_{2y} - \frac{1}{8}y_{32}\theta_{2z}\right) \\ & + 4\zeta_2\zeta_2\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{8}z_{24}\theta_{2y} + \frac{1}{8}y_{24}\theta_{2z}\right) \\ & = \left\{u_2 + \frac{1}{2}\left((z-z_2)\theta_{2y} - (y-y_2)\theta_{2z}\right)\right\}\zeta_2 \end{aligned} \quad (19b)$$

頂点番号3(中間節点6,8,9が寄与) :

$$\begin{aligned} & \zeta_3(2\zeta_3 - 1)u_3 + 4\zeta_3\zeta_3\left(\frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{8}z_{31}\theta_{3y} + \frac{1}{8}y_{31}\theta_{3z}\right) \\ & + 4\zeta_3\zeta_3\left(\frac{1}{2}u_3 - \frac{1}{8}z_{32}\theta_{3y} + \frac{1}{8}y_{32}\theta_{3z}\right) \\ & + 4\zeta_3\zeta_4\left(\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{8}z_{43}\theta_{3y} - \frac{1}{8}y_{43}\theta_{3z}\right) \\ & = \left\{u_3 + \frac{1}{2}\left((z-z_3)\theta_{3y} - (y-y_3)\theta_{3z}\right)\right\}\zeta_3 \end{aligned} \quad (19c)$$

頂点番号4(中間節点7,9,10が寄与) :

$$\begin{aligned} & \zeta_4(2\zeta_4 - 1)u_4 + 4\zeta_4\zeta_4\left(\frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{8}z_{41}\theta_{4y} + \frac{1}{8}y_{41}\theta_{4z}\right) \\ & + 4\zeta_4\zeta_4\left(\frac{1}{2}u_4 - \frac{1}{8}z_{43}\theta_{4y} + \frac{1}{8}y_{43}\theta_{4z}\right) \\ & + 4\zeta_4\zeta_2\left(\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{8}z_{24}\theta_{4y} - \frac{1}{8}y_{24}\theta_{4z}\right) \\ & = \left\{u_4 + \frac{1}{2}\left((z-z_4)\theta_{4y} - (y-y_4)\theta_{4z}\right)\right\}\zeta_4 \end{aligned} \quad (19d)$$

となる。よって、式(19a)から式(19d)より、D-TETcのx方向変位場 u は

$$u = \sum_{i=1}^4 \left\{u_i + \frac{1}{2}\left((z-z_i)\theta_{iy} - (y-y_i)\theta_{iz}\right)\right\}\zeta_i \quad (20a)$$

となる。同様に、y, z方向変位場 v および w を求めると

$$\begin{cases} v = \sum_{i=1}^4 \left\{v_i + \frac{1}{2}\left((x-x_i)\theta_{ix} - (z-z_i)\theta_{iz}\right)\right\}\zeta_i \\ w = \sum_{i=1}^4 \left\{w_i + \frac{1}{2}\left((y-y_i)\theta_{iy} - (x-x_i)\theta_{ix}\right)\right\}\zeta_i \end{cases} \quad (20b)$$

となる。

ここで、式(15)と式(20a), (20b)を比較すると、両者の形状関数は定みずみ四面体要素を求めるときの

形状関数 $N_i = \zeta_i$ であるから、D-TETcの回転角の項の係数がD-TETsの回転角の項の係数の1/2になっている以外は、全く同一のものであることが分かる。

以上のことから、三次元領域で要素の稜線の変位を三次式として仮定したD-TETcと、頂点の回転角を有する変位場から導かれたD-TETsは、全く同一の変位場となっていることが分かる。

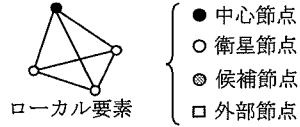
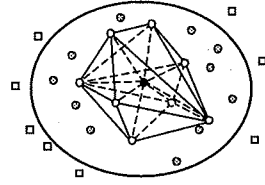


図-5 フリーメッシュ法概念図

4. フリーメッシュ法

本研究で定式化した二種類の回転自由度を有する四面体要素は中間節点を持たない。よって、フリーメッシュ法のような中間節点を有する要素を使用することが困難な解析手法に極めて適していると考えられる。

よって、本研究ではフリーメッシュ法に本要素を適用することを考える。そこで、本節ではフリーメッシュ法の基本的アルゴリズムと本要素を適用するための処理について述べる。なお、フリーメッシュ法はメッシュ生成から求解までをシームレスに行う解析手法であり、解析領域で同じ要素及び要素分割を用いれば有限要素法と全く同じ解を与える。

(1) 基本的アルゴリズム

フリーメッシュ法は、矢川らによって提案された一種のメッシュレス法であり、有限要素法を基本概念に置く解析手法である。有限要素法では、剛性マトリックスが要素単位で求められるために、基本的な入力情報として、各節点の座標情報の他に、要素-節点コネクティビティー情報が必要となる。即ち、Element by Element型の解析手法であると言える。一方、フリーメッシュ法では、その剛性は節点ごとに評価されるので、節点情報のみで解析を行うことが可能である。即ち、Node by Node型の解析手法である。

フリーメッシュ法では図-5に示すように、与えられた節点群において、ある一つの節点に着目し、これを中心節点とし、この中心節点の周りのある領域の内部に含まれる節点を候補節点とする。次に、この中から中心節点に寄与する四面体要素を一時的に作成(ローカル要素生成)し、これらの要素剛性マトリックスのうち、中心節点に寄与する行成分のみを全体剛性マトリックスへと足し合わせる。このとき、中心節点周りのローカル要素に選ばれた中心節点以外の節点を衛星節点と呼ぶ(図-5参照)。ローカル要素剛性マトリックスの作成に関する計算は、

従来の有限要素法の手法をそのまま用いることができる。このため、各中心節点に関して最適な衛星節点を選ばれた場合には、従来の有限要素法と同じ解析精度を得ることができる。

以上のことを全節点について繰り返すことで、中心節点に関する処理をNode by Nodeに計算、記憶することができる。即ち、フリーメッシュ法はローカル要素生成から、全体剛性マトリックス作成及び求解までをシームレスに行うことのできる解析手法である。

これらの各節点に関する処理は、本質的に節点ごとに独立であるため、大規模問題を取り扱う並列計算、リメッシングを必要とするようなアダプティブ解析などに有効である¹³⁾。

(2) 回転自由度を有する四面体要素を用いたフリーメッシュ法

前節で述べたように、フリーメッシュ法では各中心節点ごとに、一時的に局所的な要素を作成するために、中間節点を有するような高精度な要素の使用は困難であり、従来、定みずみ四面体要素が用いられてきた。そのために、解析対象によっては精度的な問題点が指摘されている。

本稿で定式化したD-TETcとD-TETsは、中間節点を有していないので、フリーメッシュ法への移植は容易である。具体的には、D-TETcでは、ローカル要素作成時に、仮想的に四面体の各辺の中央に中間節点を作成し、中間節点を有する二次四面体要素I-TETの剛性マトリックスを一時的に作成する。次に、変換マトリックスを求め、式(11)のようにD-TETcに変換すればよい。一方、D-TETsでは、変位場そのものを定義しているため、式(17)を数値積分で求めることで剛性マトリックスを導けばよい。

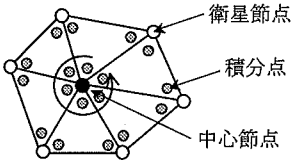


図-6 フリーメッシュ法での節点ひずみ・応力評価法

フリーメッシュ法では、節点単位で応力やひずみを処理する必要があるため、要素ごとに計算された応力やひずみの値を用いて節点の応力やひずみを求める必要がある。

そこで本研究では、式(21)に示すように、中心節点番号 n におけるひずみ $\{\varepsilon\}_n$ や応力 $\{\sigma\}_n$ は中心節点まわりのローカル要素群における積分点のうち、中心節点に最も近い積分点のひずみ $\{\varepsilon\}_{e, near}$ や応力 $\{\sigma\}_{e, near}$ から体積の重み(ローカル要素の体積 w_e)を用いて求めた。

$$\{\varepsilon\}_n = \frac{\sum_e w_e \{\varepsilon\}_{e, near}}{\sum_e w_e}, \quad \{\sigma\}_n = \frac{\sum_e w_e \{\sigma\}_{e, near}}{\sum_e w_e} \quad (21)$$

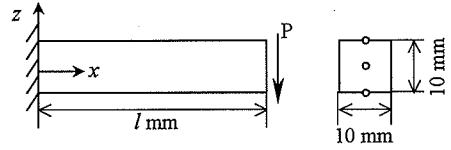
ここで、 e は、中心節点周りの要素である。なお、中心節点でのひずみや応力の評価方法の概念図を図-6に示した。

5. 数値解析例

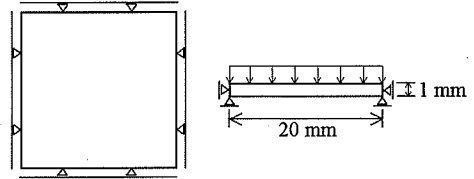
(1) 解析精度に関する検討

ここでは、定ひずみ四面体要素を用いた既存フリーメッシュ法と回転自由度を有する要素を用いたフリーメッシュ法との精度比較を行う。解析対象として、自由端に集中荷重を受ける片持ち梁と等分布荷重が作用する周辺単純支持の平板の曲げ解析を行う。なお、これらの梁や板のヤング係数は 20000N/mm^2 、ポアソン比は 0.2 として解析を行った。図-7に、解析対象モデルを示し、図-8に解析に使用した節点分布の一例を示す。なお、回転自由度を有する要素の積分点はガウス積分点を用い、4点積分を使用している。

片持ち梁に関しては、自由端の荷重軸方向変位を理論解と比較する。ここで、理論解とは、チモシェンコのせん断変形を考慮した梁理論解¹⁴⁾である。なお、節点分布は図-8に示すように、等間隔ではない

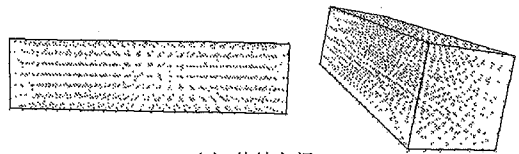


(a) せん断力を受ける片持ち梁

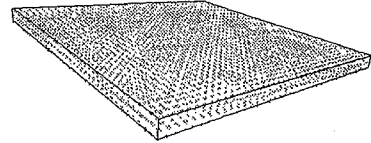


(b) 等分布荷重を受ける正方形板(四辺単純支持)

図-7 解析モデル



(a) 片持ち梁



(b) 正方形板

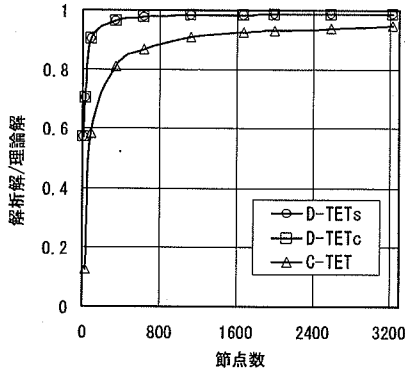
図-8 解析に用いた節点分布

がほぼ一様な節点分布になるように配置した。

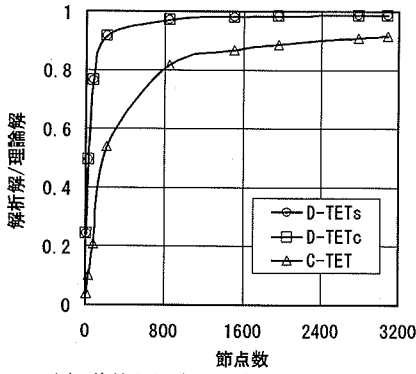
図-9に解析精度と節点数の関係を示す。図中のC-TETは、定ひずみ四面体要素を用いた場合の既存フリーメッシュ法の結果である。図-9より、片持ち梁のスパン長が長くなってもD-TETc、D-TETsの精度は良く、D-TETc、D-TETsによる解は、C-TETによる解よりも少ない節点数で理論解に近づいていることが分かる。

また、三次元的な曲げ挙動を有する正方形板においては、その差は顕著である。また、D-TETcとD-TETsは、全く同じ数値を得ている。よって、第3章で証明したように、D-TETcとD-TETsの変位場が全く同一であることを確認することができた。

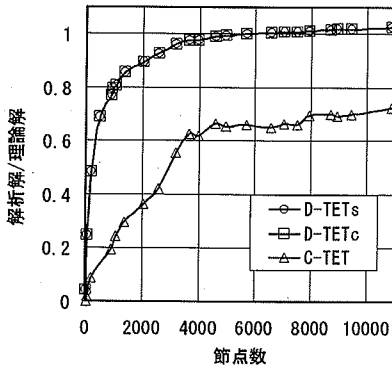
次に、応力に関する精度を評価する。解析モデルは、図-7(a)に示す片持ち梁($l=40\text{mm}$)で、自由端に



(a) 片持ち梁自由端変位, $l=40\text{mm}$



(b) 片持ち梁自由端変位, $l=100\text{mm}$



(c) 正方形板の最大変位

図-9 三次元フリーメッシュ法解析による精度比較

集中荷重を与えた。応力の評価は、図-10に示すように片持ち梁の上面中央部分の梁の軸方向応力 (σ_x) の解析値を梁理論解と比較した。節点数と応力の解析値/理論解の関係を図-11に示す。回転自由度を含むD-TETsとD-TETcは変位の精度と同様にC-TETと比較して高精度であることが分かる。なお、変位の精度と比較して応力の精度が少し低いのは、梁上面の節点の応力を式(21)のようにその節点まわ

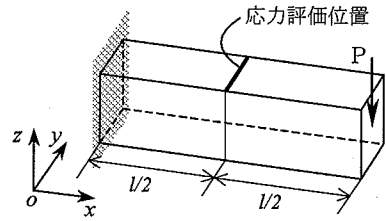


図-10 応力の評価位置

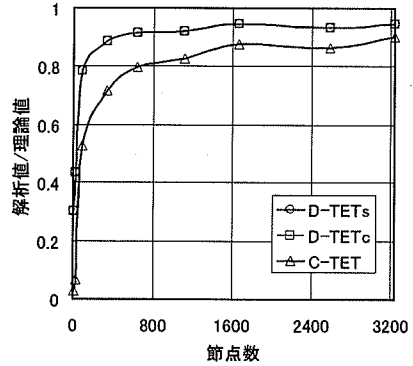


図-11 片持ち梁のx軸方向応力精度比較

表-2 片持ち梁自由端の回転角 (θ_y) の比較 ($l=100\text{mm}$)

要素	D-TETc		
	上	中	下
断面			
数値解	0.04891	0.04869	0.04891
数値解/理論解	1.63033	1.62299	1.63033
要素	D-TETs		
	上	中	下
断面			
数値解	0.02445	0.02435	0.02447
数値解/理論解	0.81500	0.81166	0.81500

りのローカル要素群における積分点のうち、中心節点に最も近い積分点の応力の平均値としたこともその原因の一つとなっている。この点については、さらなる応力の評価方法を検討する必要がある。

また、D-TETsとD-TETcの応力は変位同様に全く同じ結果であり、応力についても第3章の証明の妥当性を確認できた。

表-2には、 $l=100\text{mm}$ の片持ち梁の解析で、節点数が最も多い3088節点の時の梁の自由端の回転角を示した。回転角は自由端断面上・中・下(図-7の(a)の梁断面図に位置○印を示す)の三点の回転角 (θ_y) である。また、表中の理論値とは、初等梁

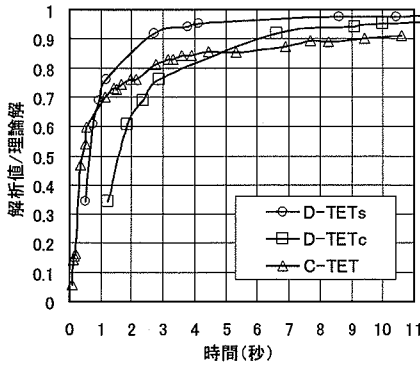


図-12 剛性マトリックス作成に要した時間と精度

理論から求めることができる梁自由端の回転角 ($\theta = Pl^2/2EI$: E :ヤング係数, I :断面二次モーメント)である¹⁴⁾. 表-2より, 第3章で証明したように, D-TETcによる回転角の数値解はD-TETsによる回転角の数値解のちょうど二倍になっているのがわかる. よって, 表-2からも第3章の証明が正しいことが分かる. 表-2はせん断変形を考慮していない初等梁理論の回転角との比較であるが, D-TETsの誤差が20%程度, D-TETcの誤差が60%程度であることを考えれば, 本解析例に関しては, D-TETsの精度が良いことが分かる.

(2) 解析時間に関する検討

D-TETcはI-TETを変換して得ることのできる要素であるから, 式(11)に示したように, 一度, 仮想的にI-TETの剛性マトリックスを作成する必要がある.

一方, D-TETsは, 式(17)に示すように, 回転自由度を考慮した剛性マトリックスを直接計算することができる. よって, 解析精度は同一であっても, 計算時間は異なるはずである. そこで, D-TETc, D-TETs及びC-TETの全体剛性マトリックス作成時の時間について議論する. 解析対象は, 図-7(a)で示した片持ち梁とし, スパン長は100mmとした. 弾性係数, ポアソン比及び節点分布はどの要素を利用した場合も同じである.

図-12に時間と自由端変位の解析精度の関係を示した. C-TETの最良の精度は, 図-9(b)に示すように節点数が3088でも理論解の90%程度であるので, 精度が理論解の90%に達した時間について比較する. 図より, D-TETcは約6.1秒, D-TETsは約2.1秒, C-TETは約10.1秒で理論解の90%の精度に達している. よって, 時間的な面と, 精度的な面の両方を考えると, D-TETsの利用が有利であると考えられる. し

かし, D-TETcに関しては, 本研究で導いた回転角を有する変位場である式(20a), (20b)を用いれば, D-TETsと全く同一の解析時間となることは明らかである. なお, 本研究では, Pentium4 CPU 2GHzのマシンを使用している.

6. 結論

本研究では, 関口らの回転角を有する変位場を用いる方法と, 辺中央節点変位を変換・消去する方法の両方法で導いた回転自由度を有する四面体要素をフリーメッシュ法に適用することで, 高精度な解(変位及び応力解)を得る方法を示した. 得られた結論をまとめると次のようになる.

- (1) 辺中央節点変位を頂点の x,y,z 方向変位と回転角を用いて, 変換・消去する方法で導かれた回転自由度を有する四面体要素を導いた. そして, 得られた四面体要素を三次元フリーメッシュ法に適用した. この要素を用いた弾性解析で, 高精度な変位解及び応力解を得ることができた.
- (2) 関口らの回転角を有する変位場を三次元に拡張し, 回転自由度を有する四面体要素を導き, フリーメッシュ法に適用し, 弾性解析において, 高精度な解を得ることができた.
- (3) 辺中央節点変位を変換・消去する方法で導かれた回転角を有する要素を用いた数値解と, 関口らの回転角を含む変位場を用いる方法で導いた回転自由度を有する要素を用いた数値解は, 並進方向変位及び応力については同じ値を示した. 変換・消去する方法で導かれた要素による節点の回転角は, 関口らの方法で導いた要素のちょうど二倍となった.
- (4) 辺中央節点変位を変換・消去する方法で導かれた回転角を有する要素の変位場と関口らの回転角を含む変位場は全く同一で, 回転に関する項のみが前者は, 後者の1/2になることを示した. このことから, 結論(3)に示すように, 全く異なる手法から導かれた要素を用いた数値解が並進方向変位については同じ値を示し, 回転角については, 辺中央節点変位を変換・消去する方法で導かれた要素は関口らの方法で導いた要素のちょうど二倍になることを証明できた.

CAD情報から要素自動分割を行う手法が主流になっている現在, 六面体形状の本質的な制限から, 六

面体要素の性能を活かしたような自動要素分割を複雑形状に対して行うことは困難であると考えられている¹⁵⁾。一方、四面体要素を用いれば、基本的にどのような複雑形状に対しても自動要素分割が可能であり、四面体要素の適用範囲は広い。このため、本研究で得られた頂点のみに x,y,z 方向変位と回転角を有する四面体要素は、通常の三次元有限要素解析にも有効であると考えられる。なお、本要素は節点自由度として回転自由度を含んでいるが、剛性方程式を解くときに数値的な不安定性はなかった。

謝辞：本研究を遂行するにあたり、関口美奈子博士（ミシガン大学）に貴重な御意見を賜りました。ここに、深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 矢川元基, 細川孝之: フリーメッシュ法の三次元問題への適用, 日本機械学会論文集(A編), Vol.63, No.614, pp.2251-2256, 1997.10.
- 2) 矢川元基, 白崎実: フリーメッシュ法(一種のメッシュレス法)の流体解析への適用, 日本機械学会論文集(B編), Vol.63, No.614, pp.3263-3268, 1997.
- 3) 関東康祐: 混合法による高精度フリーメッシュ法, 日本計算工学会論文集, No.20000036, 2000.
- 4) 顧文煒, 矢川元基: フリーメッシュ混合法による3次元応力解析, 日本機械学会論文集(A編), Vol.67, No.663, pp.1718-1723, 2000.
- 5) O. C. ツェンキーヴィッツ: マトリックス有限要素法, 培風館, 1992.
- 6) Allman, D. J.: A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Computer and Structures*, Vol.19, pp.1-8, 1984.
- 7) Cook, R. D., Malkus, D. S., and Plesha, M. E.: *Concepts and applications of finite element analysis*, Third edition, Wiley, 1989.
- 8) Sekiguchi, M. and Kikuchi, N.: Re-examination of membrane elements with drilling freedom, *Proceedings of the fifth world congress on computational mechanics*, 2002.
- 9) 安和守史, 伊良波繁雄, 富山潤, 矢川元基: 改良アイソパラメトリック要素を用いた高精度フリーメッシュ法の二次元応力解析への適用に関する研究, 日本コンクリート工学年次論文報告集, Vol.23, No.3, pp.1-6, 2001.
- 10) 富山潤, 山田義智, 伊良波繁雄, 矢川元基: フリーメッシュ法によるフレッシュコンクリートの粘塑性流動解析, 日本コンクリート工学年次論文報告集, Vol.24, No.1, pp.861-866, 2002.
- 11) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック, 培風館, pp.349-405, 1993.
- 12) 小堀為雄, 吉田博: 有限要素法による構造解析プログラム, 丸善, pp.53-73, 1980.
- 13) 矢川元基: フリーメッシュ法について, 日本機械学会第74期通常総会講演会資料集(V), pp.6-9, 1997.
- 14) 鶴戸口英善, 国尾武 訳: S.チモシェンコ材料力学(上巻), 東京図書, 1968.
- 15) 山田貴博: 四面体要素の性能評価, 計算工学講演会論文集, Vol.5, pp.435-436, 2000.

(2004. 7. 3 受付)

FREE MESH METHOD USING TETRAHEDRAL ELEMENT INCLUDING THE VERTEX ROTATIONS

Hitoshi MATSUBARA, Shigeo IRAHA, Jun TOMIYAMA,
Tateki YAMASHIRO and Genki YAGAWA

In 2 dimensional problems, the utility of the vertex rotations on membrane element has been discussed and proved by a lot of researchers. However, up to now, the study of the solid element which has the vertex rotations has not been performed. Therefore, in this work, we propose the tetrahedral element including the vertex rotations based on Cook's assumption and Sekiguchi's, and these elements are applied to the free mesh method which is a kind of mesh-free method. As the result of numerical analyses made in this study, it was found that the accuracy problem of the free mesh method is eliminated by using these elements.