

# 不確実性下での社会基盤投資・ 運用問題に対する変分不等式アプローチ

赤松隆<sup>1</sup>・長江剛志<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>2</sup>正会員 博士(情報科学) 神戸大学大学院 自然科学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

本研究では、多くの社会基盤投資・運用事業をリアル・オプションと見なし、その評価および最適意思決定問題の統一的な表現および計算法のための枠組を提案する。具体的には、まず、従来研究が対象としてきた典型的なリアル・オプション問題を現実的な枠組に拡張したものが、変分不等式問題として統一的に記述できることを明らかにする。次に、この問題が、適切な関数変換によって、標準形の相補性問題に帰着することを明らかにする。この分析結果に基づき、最近の相補性問題理論を活用した、一般性のある効率的解法を開発する。

*Key Words* : real option, variational inequality, project management, stochastic control

## 1. はじめに

### (1) 背景と目的

動学的不確実性に直面する社会基盤施設の整備・運用事業の多くは、複数のリアル・オプションから構成される複合オプションと見なすことができる。そして、当該事業の財務の評価および最適意思決定問題は、複合リアル・オプション問題に帰着する。例えば、ある有料道路の整備・運用事業において、当該路線の利用状況に応じて、道路の拡幅および料金の変更が行える場合を考えよう。このとき、当該事業は、“道路を拡幅する権利(オプション)”と“料金を変更する権利”から構成される複合オプションと見なされ、それぞれの意思決定は、該当するオプションの行使と捉えられる。

従来、これらのリアル・オプションを扱う研究には膨大な蓄積が存在する(例えば、Dixit and Pindyck<sup>1)</sup>, Schwartz and Trigeorgis<sup>2)</sup>)。しかし、実際の社会基盤施設の投資・運用問題に対する定量的分析に、これらの研究をそのまま適用するのは困難である。なぜなら、これらの研究は、以下の2つの問題点のいずれかを残しているからである。第1に、概念的な分析によるモデルの定性的性質や経済学的解釈の導出を指向している。このため、解析解が得られるような極端に簡略化された問題のみを対象としており、現実的かつ一般的な状況を取り扱えない。第2に、金融オプションを前提として発展した理論をそのまま転用するため、多くのプロジェクトがもつ意思決定構造(後述)を明示的に考慮できない。

本研究では、これら2つの問題を解消したより現実的な社会基盤投資・運用事業(リアル・オプション)問題

に対する、統一的な数学表現および効率的な計算法開発のための枠組を提案する。具体的には、第1に、従来研究で扱われてきた典型的な3種類のリアル・オプション問題(後述)を例として、これらをより現実的な枠組へ一般化した問題が、いずれも、変分不等式問題(VIP: Variational Inequality Problem)として統一的に表現できることを明らかにする。第2に、各リアル・オプション問題を具体的に解くための効率的アルゴリズムを開発する。そのために、本研究では、上述のVIPが、数理計画分野で良く知られる標準形の線形相補性問題(LCP: Linear Complementarity Problem)に帰着することを明らかにする。これにより、最近の数理計画理論を活用した見通しの良い数値解法の開発が可能となる。

本稿は以下のように構成される。まず、本章(2)において、本研究で扱う3種類の典型的なリアル・オプション問題を示し、それぞれの問題に対する従来研究と、本研究との位置づけを明示する。次に、第2章において、各問題の枠組を提示し、定式化を行う。第3章では、こうして定式化された問題が、いずれもVIPとして統一的に記述できることを示し、第4章では、このVIPが、適切な関数変換によって標準形LCPに帰着することを明らかにする。続く第5章では、このLCPに対する効率的アルゴリズムを開発し、最後に、第6章において、この解法を適用した数値計算例を示す。

### (2) 従来研究と本研究との位置づけ

従来のリアル・オプション研究の多くは、ファイナンス分野における標準的なアメリカン・オプション<sup>1)</sup>を、実物

<sup>1)</sup> 権利を行使するかどうかだけでなく、“いつ行使するか”を選択可能なオプション。

資産と読み替えたものを対象としている(例えば, Dixit and Pindyck<sup>3)</sup>). この最も単純な構造のリアル・オプションを対象とした研究には膨大な蓄積が存在する. しかし, いずれの研究も, その分析に際して, value matching 条件と smooth pasting 条件によって解析解を導出するという共通の方法を採用している. この古典的な方法は, 対象期間長が無限で状態変数が幾何 Brown 運動に従うといった, 特殊な仮定をおいた問題には有効であるが, 汎用性に欠ける. すなわち, これら従来研究のアプローチは, 本研究の目的である, より現実的・一般的な状況 (e.g. 対象期間が有限である場合や, 状態変数が実際の確率過程に従う場合) 下での定量的分析には適さない.

なお, ファイナンス分野においてアメリカン・オプションを対象とした研究は, McKean<sup>4)</sup>, Merton<sup>5),6)</sup>, Brennan and Schwartz<sup>7)</sup>, Jaillet et al.<sup>8)</sup>, Geske and Johnson<sup>9)</sup>, Jacka<sup>10)</sup>, Carr et al.<sup>11)</sup>, Huang et al.<sup>12)</sup>, Broadie and Glasserman<sup>13)</sup>, Dempster and Hutton<sup>14)</sup> など, 数多く存在する. しかし, これらの研究は, いずれも, シンプルな構造をもつ金融オプションのみを対象としている. そのため, 以下に述べるような, 多くのプロジェクトに特有の“意思決定構造”を導入することが困難である.

一般に, 多くのプロジェクトは, 複雑な連鎖的権利行使構造 (e.g. あるオプションを行使することで, 同時に, 他のオプションを獲得・喪失する) を持つ複合リアル・オプションと見なせる. しかし, このような複合オプションを対象とした金融/リアル・オプション研究は非常に数が少ない. その上, 後述するように, いずれの研究も, 特定の権利行使構造に対する限定的な分析を行うに留まっている.

これに対し, 長江・赤松<sup>15)</sup>は, 複合オプションがもつ権利行使構造をシステムティックに記述する枠組を構築し, 異なる構造に対しても首尾一貫した評価が可能な複合リアル・オプション評価手法を議論しようとしている. 彼らの提案する枠組においては, オプションの権利行使構造は, “アクティビティ”をノード, アクティビティ間の推移関係を有向リンクで記述した有向グラフ (図-1 参照) として表現される. ここで, アクティビティとは, 特定の経済活動を行っている状況を指す. 例えば, 最もシンプルな構造の実物投資 (リアル・オプション) の場合, アクティビティは, キャッシュ・フローが発生している投資後の状態 (X) と, 投資を保留している状態 (W) の2つである. そして, 投資の実行は W から X へのアクティビティの変更, 投資のサンク・コストはこのアクティビティ推移に必要な費用と見なされ, オプション構造は, 図-1 a) のような, アクティビティ W と X を一本の有向リンクで結んだグラフで表現される (以下では, この権利行使構造を単位構造と呼

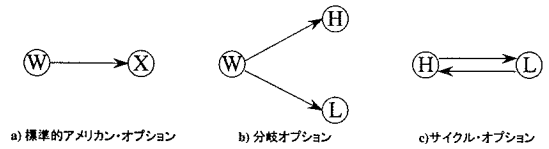


図-1 オプションの権利行使構造

ぶ). このような枠組の下で, 任意の構造をもつ複合オプション問題に適用可能な定量的分析手法を開発するには, 当該オプションを構成する各サブ・オプション・モデルに対して, 見通しの良い数理表現法および計算法の確立が必要不可欠である.

そこで, 本研究では, 長江・赤松<sup>15)</sup>の枠組を構成するサブ・モデルである, 以下の3つのリアル・オプション問題を扱う.

1) 分岐オプション 権利を行使する際に, 複数の候補の中から一つを選択できるオプション. この権利行使は排他的かつ不可逆的であり, いずれかの権利が行使されると同時に, 他のオプションは失われるとする. このオプションの権利行使構造は, 図-1 b) のように, 分岐する2つの単位構造で構成される.

2) サイクル・オプション 一度行使した権利を再び獲得できる (i.e. 意思決定が可逆的である) オプション. このオプションの権利行使構造は, 図-1 c) のように, 2つのアクティビティ間を相互に推移可能な, ループした2つの単位構造で表現される.

3) タイム・ラグ・オプション 意思決定を行ってから, アクティビティが変更される (e.g. キャッシュ・フロー流れが変化する) までに, タイム・ラグが存在するようなオプション. これは, アクティビティの変更にある種の制約が課せられたオプションと見なすこともできる.

この内, 1) の分岐オプションを対象としたファイナンス分野の研究としては, Margrabe<sup>16)</sup>の交換オプション, Stulz<sup>17)</sup>の最大値/最小値オプションが存在する. しかし, これらの研究は, いずれも, 権利行使時刻を与件としたヨーロッパン・オプションのみを対象としているため, リアル・オプション分析において重要なタイミング選択を考慮できない. 一方, リアル・オプション研究の分野では, 状況に応じて, より有利な代替案を選択できるスイッチ・オプション (例えば, Dixit and Pindyck<sup>18)</sup>などを参照) が, 分岐オプションに相当する. しかし, この従来研究は, 上述のように, 極度に簡略化された問題のみを対象としており, 現実的な状況下での定量的分析にそのまま適用することはできない.

次に, 2) のサイクル・オプションを対象としたリアル・オプション研究としては, Dixit<sup>19)</sup>や Dixit and Pindyck<sup>18)</sup>の参入-撤退オプションなどが挙げられる. しかし, いずれの従来研究も, 無限の対象期間を想定し, 状態変

数が幾何 Brown 運動に従うという特殊な仮定をおいているため、実際的な問題への拡張が困難である。

最後に、3) のタイム・ラグ・オプションに関する研究としては、Majd and Pindyck<sup>20)</sup>, Dixit and Pindyck<sup>21)</sup>, Bar-Ilan et al.<sup>22)</sup>などが存在する。しかしこれらの研究もまた、個別の問題に対する限定的な分析を行うに留まっており、複雑な連鎖的権利行使構造を導入したり、非定常状態(あるいは有限満期)の枠組に拡張することが困難である。

これに対し、本研究では、1), 2) および 3) のリアル・オプションに関する従来研究から限定的な仮定を取り除いた問題を、変分不等式問題 (VIP) として統一的に記述する枠組を提案する。その上で、この VIP を、標準形の線形相補性問題 (LCP) に帰着させることで、見通しの良い汎用的解法を開発する。これらの点は、プロジェクト評価論に限らず、他の関連分野 (e.g. ファイナンス論やマクロ経済学における投資理論、確率システム制御理論、数理計画理論等) の研究を含めた観点からも、本研究のオリジナルな貢献である。

## 2. 問題の枠組と定式化

本章では、前章 (2) で述べた、3 種類の典型的なリアル・オプション問題に対応する具体例<sup>2)</sup>を示し、それぞれのオプション問題を定式化する。その例として想定するのは、多くの社会基盤整備・運用事業における典型的な 3 つのフェイズ: (1) 計画段階、(2) 建設段階および (3) 運用段階の、それぞれに対応する問題である。

まず、(1) の計画段階では、複数の候補からの択一的選択が行われる場合を考える。このような意思決定問題は、分岐オプション問題に相当する。次に、多くの社会基盤施設は、着工開始から完成までに、長い年月を必要とするため、(2) の建設段階での建設戦略の決定が重要となる。このような建設戦略問題は、タイム・ラグ・オプション問題に相当する。最後に、完成した社会基盤施設の運用段階 (3) において、事業主体の戦略は可逆的であることが多い。このような運用戦略問題は、サイクル・オプション問題に相当する。以下では、それぞれの問題について、枠組の提示および定式化を行う。

### (1) 路線計画問題—分岐オプションの例

本節では、分岐オプション問題について、問題の枠組を示した上で定式化を行う。その例として想定するのは、道路規格の候補が複数存在するような、有料道路の

新規建設事業の路線計画問題である。ここでは、候補となる道路の規格として、高規格および低規格の 2 つのみを想定する。従って、この分岐オプションのアクティビティは、規格決定前 (O)、高規格道路建設後 (H) および低規格道路建設後 (L) の 3 つである<sup>3)</sup>。

有限の対象期間  $[0, T]$  を考え、満期  $T$  における事象集合を  $\Omega$  で表す。この事象集合の客観的確率測度を  $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega) | \omega \in \Omega\}$  で表し、 $\Omega$  のフィルトレーション  $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t) | t \in [0, T]\}$  を定義する<sup>4)</sup>。次に、当該路線の交通量  $P(t) \in \mathcal{R}_+$  が、アクティビティ  $n$  ごとに異なる以下の伊藤過程に従うと仮定する<sup>5)</sup>。

$$\begin{aligned} dP(t) &= \alpha_n(t, P) dt + \sigma_n(t, P) dZ(t), \quad \forall n \in N, \\ P(0) &= P_0. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $N \equiv \{O, H, L\}$  はアクティビティ集合、 $\alpha_n : [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $\sigma_n : [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_+$ ,  $\forall n \in N$  は既知の関数であり、 $Z(t)$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  上で定義される 1 次元 Wiener 過程であるとする。

この有料道路事業から発生するキャッシュ・フローは、以下の 2 つのみと仮定する: a) 供用開始後、毎時刻連続的に得られる運用益フロー; b) 規格を選択した瞬間にサンクされる建設費用。まず、a) について、時刻  $t$  における当該路線ごとの単位時間当たりの運用益を、交通量  $P(t)$  の単調増加関数  $\pi_L, \pi_H : [0, T] \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$  で表し、b) を所与の定数  $C_H, C_L$  で表す。ここで、運用益  $\pi_L, \pi_H$  は交通量  $P(t)$  の関数であるため、それ自身が確率過程であることに注意されたい。以下では議論展開を簡潔に示すため、規格を決定してから当該道路が供用されるまでの間にタイム・ラグは存在しない(規格を決定すると同時に運用益が発生する)と仮定する。

この有料道路が、時刻  $\tau$  に規格  $n$  で供用開始される時、期間  $[t, T]$  に当該事業から発生するキャッシュ・フローの、時刻  $t$  での総正味価値は、以下のように定義される:

$$J_A(t, \tau, n) \equiv \int_{\tau}^T e^{-r(s-t)} \pi_n(s, P(s)) ds - e^{-r(t-\tau)} C_n. \quad (2)$$

ただし、 $r$  はキャッシュ・フローの割引率であり、所与の定数とする。このとき、事業主体の  $[0, T]$  間における期待利潤最大化行動は、以下の確率制御問題として定式化される。

[P-A]

$$\max_{\tau \in [0, T], n \in \{L, H\}} E[J_A(0, \tau, n) | P(0) = P_0], \quad \text{s.t. (1),}$$

ここで、規格決定時刻  $\tau$  および道路規格  $n$  は、問題 [P-A]

<sup>3)</sup> 提案手法は、任意数の規格候補が存在する場合にも容易に拡張可能である。

<sup>4)</sup> これら確率論の基本的な用語については、確率過程論や現代ファイナンス論の標準的な教科書 (例えば、Øksendal<sup>23)</sup>, Duffie<sup>24)</sup>) を参照されたい。

<sup>5)</sup> 共用開始前  $O$  における交通量は、何らかの方法で推定された潜在的な交通需要を用いるとする。

<sup>2)</sup> ここで用いる例および仮定は、本稿で扱うリアル・オプション問題の構造を簡潔に示すための便宜であり、提案手法の本質的な仮定あるいは限界を意味するものではない。本稿では、モデルの性質から経済学的解釈を導いたり、特定のプロジェクトの詳細な個別条件を表した新たなモデル化を目的とはしていない。

を解いた結果、時刻  $t \in [0, T]$  と、その時刻における交通量  $P(t)$  の関数として得られる。ここで、交通量  $P(t)$  は確率過程であるため、その関数である  $\tau, n$  もまた確率過程である。

本モデルは、Margrabe<sup>16)</sup>の交換オプションや Stulz<sup>17)</sup>の最大/最小値オプションを、権利行使のタイミング選択が可能な枠組に拡張したものと解釈できる。また、Dixit and Pindyck<sup>18)</sup>らが扱っているスイッチ・オプション (i.e. 状況に応じてより有利な代替案を選択できる) を、有限満期において、任意の確率過程を取り扱える枠組へと一般化したものと見なすこともできる。

## (2) 建設戦略問題—タイム・ラグ・オプションの例

次に、タイム・ラグ・オプション問題の枠組提示および定式化を行う。その例として想定するのは、大規模な有料道路の新規建設事業における建設投資戦略問題である。本章では、議論を簡単にするために、完成した有料道路からは、無限の将来に渡って料金収入が発生すると仮定する。

まず、前章と同様、確率空間  $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  を定義する。次に、時刻  $t$  における有料道路の建設の進行度合いを、1次元のストック変数  $Q(t)$  で表現する。以下では、これを当該道路の“総建設量”と呼ぶ。時刻  $t = 0$  における総建設量を  $Q(0) = 0$ 、完成までに必要な総建設量を  $\bar{Q}$  とし、当該施設の完成時刻を  $\tau$  (i.e.  $Q(\tau) = \bar{Q}$ ) で表す。事業主体は、各時刻において追加投資を行うことで、総建設量を蓄積できる。このダイナミクスは以下の式で表される。

$$dQ(t) = u(t) dt, \quad Q(0) = 0, \quad Q(\tau) = \bar{Q}. \quad (3)$$

ここで、 $u(t)$  は、時刻  $t$  における単位時間当たりの追加的建設量を表す。以下ではこれを“建設フロー”と呼ぶ。この建設フロー  $u(t)$  に対して、以下の制約を仮定する。

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, \tau]. \quad (4)$$

完成後の道路から期間  $[\tau, \infty)$  中に毎時刻得られる単位時間当たりの料金収入は、前章と同じく、当該時刻の交通量  $P(t)$  の単調増加関数  $\pi(P(t))$  で表されるとする。本章では、この交通量が以下の伊藤過程に従うと仮定する。

$$dP(t) = \alpha_n(P) dt + \sigma_n(P) dZ(t), \quad P(0) = P_0, \quad n = 0, 1. \quad (5)$$

ただし、 $n = 0$  は供用前、 $n = 1$  は供用後を表し、 $\alpha_n, \sigma_n : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$  は、いずれも  $P$  についての既知関数とする。

時刻  $t$  での総建設量が  $Q(t) = \bar{Q}$  であるとき、建設戦略  $\{u(s) | s \in [t, \tau]\}$  の下で期間  $[t, \infty)$  に当該事業から発生するキャッシュ・フローの、時刻  $t$  での総正味価値は、

以下の式で定義される。

$$\mathcal{J}_B(Q, u(\cdot)) \equiv - \int_t^\tau e^{-r(s-t)} u(s) C ds + \int_\tau^\infty e^{-r(s-t)} \pi(P(s)) ds. \quad (6)$$

ただし、 $r$  はキャッシュ・フローの割引率、 $C$  は建設フロー 1 単位当りの費用であり、いずれも所与の定数とする。式 (6) の右辺第 1 項は、建設期間  $[t, \tau]$  に支払われる投資費用を表し、第 2 項は、供用期間  $[\tau, \infty)$  に得られる料金収入を表す。このとき、事業主体の期間  $[0, \infty)$  における期待利潤最大化行動は、以下のように定式化される。

[P-B]

$$\max_{\{u(t) | t \in [0, \tau]\}} E[\mathcal{J}_B(0, u(\cdot)) | P(0) = P_0], \quad \text{s.t. (3), (4), (5)}.$$

ここで、建設戦略  $\{u(t)\}$  は問題 [P-B] を解いた結果、建設量  $Q$  と交通量  $P$  の関数として表現されるものであり、それ自身確率過程である。

本モデルは、Majd and Pindyck<sup>20)</sup>や Bar-Ilan et al.<sup>22)</sup>らが扱った time-to-build モデルを、状態変数が一般的な確率過程に従い、そのプロセスが供用前後で異なる枠組へと一般化したものである。

## (3) 料金変更戦略問題—サイクル・オプションの例

最後に、サイクル・オプション問題の枠組提示および定式化を行う。その例として想定するのは、低料金 (L)、高料金 (H) からなる 2 つの料金モードを可逆的に選択可能な有料道路の、料金変更戦略問題である。

前章と同様に、管理期間  $[0, T]$  および確率空間  $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  を定義する。時刻  $t$  における交通量  $P(t)$  が、以下の伊藤過程に従うと仮定する。

$$dP(t) = \alpha_n(t, P) dt + \sigma_n(t, P) dZ(t), \quad \forall n \in N, \quad (7)$$

$$P(0) = P_0$$

ここで、 $N \in \{H, L\}$  は料金モード (アクティビティ) 集合、 $\alpha_n : [0, T] \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$ 、 $\sigma_n : [0, T] \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$ 、 $n \in N$  は既知関数であり、 $Z(t)$  は確率空間  $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$  上で定義される 1 次元 Wiener 過程である。

この有料道路事業からは、以下の 2 種類のキャッシュ・フローが発生すると仮定する：a) 期間  $[0, T]$  の間、毎時刻連続的に得られる料金収入フロー；b) 料金変更を行う瞬間にサンクされるメニュー・コスト。まず、a) について、時刻  $t$  で料金モード  $n \in \{L, H\}$  が選択されているときの単位時間当たりの料金収入を、交通量  $P(t)$  の単調増加関数  $\pi_L, \pi_H : [0, T] \times \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}$  で表す。また、料金モード  $n$  から  $n'$  への料金変更費用を、所与の定数  $C_{n,n'}$  で表す。ここで、料金収入  $\pi_L, \pi_H$  は交通量  $P(t)$  の関数であるため、それ自身が確率過程である。

ここで、事業主体が時刻  $t$  で選択する料金モードを  $n(t) \in \{H, L\}$  で表せば、料金モード戦略  $\{n(s) | s \in [t, T]\}$  の下で、期間  $[t, T]$  に当該事業から発生するキャッシュ・フローの、時刻  $t$  での総正味価値は、以下の式で定義される。

$$\mathcal{J}_C(t, n(\cdot)) \equiv \int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{n(s)}(s, P(s)) ds - \sum_{i \in I(t)} e^{-r(\tau_i-t)} C_{n(\tau_i), n(\tau_i)} \quad (8)$$

ただし、 $\tau_i$  は  $i$  回目に行われた料金変更時刻を表し、 $n(\tau_i)$  はその直前に選択されていた料金モードを表す。また、 $I(t)$  は時刻  $t$  以降に行われる料金変更のインデクス集合を表す。式 (8) の第 1 項は、対象期間中の料金収入を、第 2 項は、料金変更に必要なとされる費用を表す。

このとき、事業主体の  $[0, T]$  間の期待利潤最大化行動は、以下の確率制御問題として定式化される。

[P-C]

$$\max_{\{n(t) | t \in [0, T]\}} E[\mathcal{J}_C(0, n(\cdot)) | P(0) = P_0], \quad \text{s.t. (7).}$$

ここで、料金戦略  $\{n(t)\}$  は問題 [P-C] を解いた結果、時刻  $t$  と交通量  $P$  の関数として表現されるものであり、それ自身確率変数である。

本モデルは、Dixit<sup>19)</sup> や Dixit and Pindyck<sup>18)</sup> の参入-撤退オプションを、対象期間が有限で、状態変数がアクティビティ毎に異なる一般的な確率変数に従う枠組へと一般化したものと見なせる。

### 3. 変分不等式を用いた最適性条件の表現

本章では、前章で定式化した 3 種類のリアル・オプション問題が、いずれも、無限次元の変分不等式問題 (VIP: *Variational Inequality Problem*) に帰着する事を明らかにする。以下では、まず、問題 [P-A]、[P-B] および [P-C] の最適性条件が、それぞれ、変分不等式を用いて記述できることを示す。次に、これらの問題の具体的な計算において無視できない重要な条件である、境界条件を導出する。

#### (1) 路線計画問題

##### a) 最適性条件

ここでは、問題 [P-A] を DP 分解し、各瞬間における最適性条件が変分不等式として記述できることを明らかにしよう。まず、時刻  $t$  において交通量  $P(t) = P$  が観測された状況を、2 つ組  $(t, P)$  で表す。そして、状況  $(t, P)$  における問題 [P-A] の最適値関数を、以下の式：

$$V(t, P) \equiv \max_{\tau \in [t, T], n \in \{L, H\}} E[\mathcal{J}_A(t, \tau, n) | P(t) = P],$$

$$\forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (9)$$

で定義する。ただし、 $\mathcal{J}_A(\cdot)$  は式 (2) で定義される  $[t, T]$  間での利潤の総正味価値であり、 $\mathcal{K} \equiv [0, T] \times \mathcal{R}_+$  は状況  $(t, P)$  がとり得る空間を表す。

ここで、式 (9) の最適値関数は、状況  $(t, P)$  が観測された条件下で時刻  $[t, T]$  に得られる期待最大利潤、すなわち、“2 つの道路規格からいずれか一方を選択し、その運用益を得る権利”の価値を表している。以下では、この権利を規格選択オプションと呼び、その価値を式 (9) の最適値関数として定義する。式 (9) は、期待値のネストを用いて以下のように表現できる。

$$V(t, P) = \max_{\tau \in [t, T]} E \left[ e^{-r(\tau-t)} \max_{n(\tau) \in N} \{V_{n(\tau)}(\tau, P(\tau)) - C_{n(\tau)}\} P(t) = P \right]. \quad (10)$$

ここで、 $n(\tau), P(\tau)$  なる表現は、供用開始時刻  $\tau$  にその値が確定する変数であることを明示するため用いた。これらの変数は、現在時刻  $t$  においては確率変数であることに注意されたい。また、 $V_{n(\tau), P}$  は、以下の式：

$$V_n(\tau, P) \equiv E \left[ \int_{\tau}^T e^{-r(s-\tau)} \pi_{n(s)}(s) ds \mid P(\tau) = P \right], \quad (11)$$

$$\forall (\tau, P) \in \mathcal{K}, \forall n \in \{L, H\}.$$

で定義される。式 (11) は、時刻  $\tau$  に交通量  $P(\tau) = P$  が観測された条件下で、期間  $[\tau, T]$  に規格  $n$  の有料道路から得られる期待利潤を表す。以下では、この  $V_n(\tau, P(\tau))$  を、状況  $(\tau, P(\tau))$  における規格  $n$  の“価値”と呼ぶ。

なお、式 (11) で定義される  $V_L, V_H : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R}$  は、以下の偏微分方程式：

$$\begin{cases} \mathcal{L}_n V_n(t, P) + \pi_n(t, P) = 0, & \forall (t, P) \in \mathcal{K}, \\ V_n(T, P(T)) = 0 & \forall P(T) \in \mathcal{R}_+, \end{cases} \quad n = L, H$$

の解として予め計算しておくことができる。従って、問題 [P-A] において、 $V_L, V_H$  は、 $(t, P)$  についての既知関数と見なせることに注意しよう。ここで  $\mathcal{L}_n$  は、交通量プロセス (1) から決定される偏微分作用素で、以下のように定義される。

$$\mathcal{L}_n \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_n(t, P) \frac{\partial}{\partial P} + \{\sigma_n(t, P)\}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} - r. \quad (12)$$

最適値関数の式 (10) を DP 分解すれば、問題 [P-A] は、各状況  $(t, P)$  において、以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：i) 微小時間  $dt$  だけ規格の決定・建設を延期 (i.e. 権利行使を待機) する；ii) 最大の純価値  $V_n(t, P) - C_n$  をもたらす規格を決定し、道路建設および供用を開始する (i.e. 規格選択オプションを行使する)。以下では、それぞれの選択が行われる場合について、最適値関数  $V$  が満たすべき条件を述べる。

i) 建設を待機する場合 状況  $(t, P)$  下で  $dt$  間だけ建設を先送りすることが最適な意思決定となる場合、最適値関数の定義より、

$$V(t, P) \geq e^{-r dt} E[V(t, P) + dV(t, P) | P(t) = P] \quad (13)$$

が成立する。この式 (13) に伊藤の補題を適用して展開し、左辺から右辺を引けば、状況  $(t, P)$  において成立すべき以下の不等式を得る。

$$-\mathcal{L}_0 V(t, P) \geq 0. \quad (14)$$

ここで、 $\mathcal{L}_0$  は、式 (12) で定義される偏微分作用素である。

ii) 規格を決定し、建設・供用開始する場合 状況  $(t, P)$  下で当該有料道路の規格が決定され、道路の建設および供用を開始するのが最適となる場合、最適値関数  $V(t, P)$  の定義より、以下の不等号が成立する。

$$V(t, P) \geq \max. \{V_H(t, P) - C_H, V_L(t, P) - C_L\}. \quad (15)$$

左辺から右辺を引いて整理すれば、状況  $(t, P)$  において成立すべき以下の不等式を得る。

$$\Psi V(t, P) \geq 0 \quad (16)$$

ここで、 $\Psi$  は以下の式：

$$\Psi V(t, P) \equiv \min_{n \in \{H, L\}} \{V(t, P) - V_n(t, P) + C_n\}. \quad (17)$$

で定義される演算子である。

各状況  $(t, P)$  において、上述の 2 つの選択肢 i), ii) は排他的である。すなわち、式 (14), (16) のいずれかについてののみ等号が成立する<sup>6</sup>。すなわち、

$$\begin{cases} \text{if } -\mathcal{L}_0 V(t, P) = 0 \Rightarrow \Psi V(t, P) \geq 0 \text{ (権利行使を待機)} \\ \text{if } -\mathcal{L}_0 V(t, P) > 0 \Rightarrow \Psi V(t, P) = 0 \text{ (権利を行使)} \end{cases}$$

が成立する。これらは以下の無限次元 VIP としても表現できる。

[VIP'-A] Find  $\{V(t, P)\}$  such that

$$\min. \{-\mathcal{L}_0 V(t, P), \Psi V(t, P)\} = 0, \forall (t, P) \in \mathcal{K}.$$

ここで、対象期間の満期  $T$  においては、いずれのアクティビティからも料金収入が発生しないため、終端条件は以下の式で表される。

$$V(T, P(T)) = 0, \quad \forall P(T) \in \mathcal{R}_+. \quad (18)$$

## b) 境界条件

最適値関数  $V$  の境界条件は、問題 [P-A] の個別条件に応じて決定される。本稿では、判りやすい例として、以下の 2 つの仮定の下での境界条件を示す。まず、 $P(t) \rightarrow \infty$  の極限では、高規格道路の運用益は低規格道路のそれに比べて十分に大きいとする。すなわち、

$$\lim_{P(t) \rightarrow \infty} \pi_H(t, P) \gg \pi_L(t, P), \quad \forall t \in [0, T].$$

次に、交通需要は負の値をとることがないと仮定する。本稿では、これを実装する上で最も単純な、 $P(t) = 0$  において  $\alpha_n(t, P) = 0, \sigma_n(t, P) = 0 \forall n$  なる仮定を採用する。

<sup>6</sup> 不等式 (14), (16) の等号が同時に成立するのは、権利行使を保留しても、権利を行使しても無差別となる場合に限られる。

これらの仮定の下で、 $P \rightarrow \infty, P \rightarrow 0$  における境界条件を求めよう。

まず、 $P \rightarrow \infty$  の場合、事業主体は、より運用益の大きい高規格道路の建設および供用開始を直ちに行う。これより上側境界条件は以下の式で表される。

$$\lim_{P \rightarrow \infty} V(t, P) = V_H(t, P) - C_H, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (19)$$

一方、 $P \rightarrow 0$  においては、当該事業からは運用益が一切得られないため、下側境界条件は以下の式で表される。

$$\lim_{P \rightarrow 0} V(t, P) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (20)$$

これらの境界条件は、第 5 章 (1) 節の数値計算において利用される。

## (2) 建設投資戦略問題

### a) 最適性条件

次に、問題 [P-B] の最適性条件もまた変分不等式を用いて記述できることを明らかにする。ここで、問題 [P-B] は無限の対象期間 (i.e. 定常状態) を仮定しているため、絶対時刻  $t$  を明示的に考慮しなくて良いことに注意しよう。以下では、建設量が  $Q(t) = Q$  であるときに交通量  $P(t) = P$  が観測された状況を、2 つ組  $(Q, P)$  で表現し、その集合全体を  $\mathcal{K} \equiv [0, \bar{Q}] \times \mathcal{R}_+$  と記述する。

まず、状況  $(Q, P)$  における問題 [P-B] の最適値関数を以下のように定義する。

$$V(Q, P) \equiv \max_{\{u(t) | t \in [0, \tau]\}} E[\mathcal{J}_B(Q, u(\cdot)) | P(0) = P], \quad \forall (Q, P) \in \mathcal{K}. \quad (21)$$

ここで、 $\mathcal{J}_B(Q, u(\cdot))$  は  $[0, \infty)$  で得る利潤の正味価値を表し、式 (6) で定義される。

式 (21) の最適値関数は、期待値のネストを用いて以下のように書き直せる。

$$V(Q, P) \equiv \max_{\{u(t) | t \in [0, \tau]\}} E \left[ \int_0^\tau -e^{-rt} C u(t) dt + e^{-r\tau} V_C(P(\tau)) \right]. \quad (22)$$

また、 $V_C(P(\tau))$  は、完成時に交通量  $P(\tau)$  が観測された条件下で、期間  $[\tau, \infty)$  に得られる期待利潤であり、以下の式で定義される。

$$V_C(P(\tau)) \equiv E \left[ \int_0^\infty e^{-rt} P(t) dt \mid P(0) = P(\tau) \right]. \quad (23)$$

以下では、 $V_C(P)$  を、“完成後の事業価値”と呼ぶ。前章と同様、この完成後の事業価値は、以下の常微分方程式の解として予め計算可能な、既知関数である。

$$\mathcal{D}_1 V_C(P) = 0. \quad (24)$$

ただし、 $\mathcal{D}_n$  は、以下の式で定義される常微分作用素：

$$\mathcal{D} \equiv \alpha_n(P) \frac{\partial}{\partial P} + \{\sigma_n(P)\}^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} - r, \quad n = 0, 1. \quad (25)$$

であり、交通量が従う確率微分方程式 (5) より一意に決定される。以下では、記号の煩雑さを避けるため、 $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_0$  と記述する。

式 (22) を DP 分解し、伊藤の補題を適用して整理すれば、状況  $(Q, P)$  において成立すべき以下の HJB 方程式を得る。

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \left\{ \frac{\partial V(Q, P)}{\partial Q} - C \right\} u + \mathcal{D}V(Q, P) = 0. \quad (26)$$

HJB 方程式 (26) は、 $u$  について線型であるため、状況  $(Q, P)$  下での最適制御  $u^*(Q, P)$  は以下の Bang-Bang 制御となる：i)  $q < 1$  ならば、一切の投資を行わない；ii)  $q \geq 1$  ならば、建設フローの上限まで追加的建設（投資）を行う。ここで、 $q$  は以下の式：

$$q \equiv \frac{\partial V(Q, P)}{\partial Q} / C \quad (27)$$

で定義される<sup>7</sup>。以下では、それぞれの選択が行われる場合について、最適値関数が満たすべき条件を述べる。

**i) 投資を凍結する場合** この場合、 $u^*(Q, P) = 0$  であるため、これを HJB 方程式 (26) に代入すれば、以下の常微分方程式を得る。

$$\mathcal{D}V(Q, P) = 0. \quad (28)$$

**ii) 投資を実行する場合** この場合、建設フローの上限まで追加的建設を行うため、 $u^*(Q, P) = 1$  である。これを HJB 方程式 (26) に代入して整理すれば、以下の偏微分方程式を得る。

$$\mathcal{L}V(Q, P) - C = 0. \quad (29)$$

ここで、 $\mathcal{L}$  は  $\mathcal{L} \equiv \frac{\partial}{\partial Q} + \mathcal{D}$  なる偏微分作用素である。

各状況  $(Q, P)$  において、上述の 2 つの選択肢 i), ii) は排他的であるため、常微分方程式 (28)、もしくは偏微分方程式 (29) のいずれかのみが成立する。具体的には、まず、i) が選択されるとき、式 (28) と  $q < 1$  より、 $\mathcal{L}V(Q, P) - C < 0$ 。一方、ii) が選択されるとき、式 (28) と  $q \geq 1$  より、 $\mathcal{D}V(Q, P) \leq 0$ 。これらはまとめて、以下の無限次元 VIP として表現できる。

[VIP'-B] Find  $\{V(Q, P)\}$  such that  
 $\min. \{-\mathcal{L}V(Q, P) + C, -\mathcal{D}V(Q, P)\} = 0, \forall (Q, P) \in \mathcal{K}$ .

総建設量が  $\bar{Q}$  に到達した時刻  $\tau$  において、供用が開始され、事業主体は完成後の事業価値を即座に受け取る。従って、終端条件は、以下の式で表される。

$$V(\bar{Q}, P(\tau)) = V_C(P(\tau)), \quad \forall P(\tau) \in \mathcal{R}_+. \quad (30)$$

<sup>7</sup> 式 (27) は、総建設量に対する限界期待利潤  $\frac{\partial V(Q, P)}{\partial Q}$  を、投資費用  $C$  で正規化したものであり、Tobin の  $q$  と見なせる。

## b) 境界条件

問題 [P-B] の  $P \rightarrow \infty$  および  $P \rightarrow 0$  における境界条件は、以下のように求められる。前章と同じく、 $\alpha_n(0) = 0, \sigma_n(0) = 0, \forall n$  と仮定する。このとき、 $P \rightarrow 0$  の境界においては、完成した有料道路から料金収入が発生する見込みが一切無いため、境界条件は、

$$\lim_{P \rightarrow 0} V(Q, P) = 0, \quad \forall Q \in [0, \bar{Q}] \quad (31)$$

と表現される。一方、 $P \rightarrow \infty$  の境界においては、利潤の単調性より、非常に大きい料金収入を見越して、常に建設投資が実行される。このとき、条件式 (29) より、境界条件は以下の偏微分方程式で表される。

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \mathcal{L}V(Q, P) - C = 0, \quad \forall Q \in [0, \bar{Q}]. \quad (32)$$

ここで、下側境界条件 (31) が最適値関数の値そのものを与えるのに対して、上側境界条件 (32) は、 $V(Q, P)$  が従う偏微分方程式のみを与えることに注意されたい。この非対称性は、具体的な計算を行う際に重要となる。その詳細は第 5 章 (2) 節で述べる。

## (3) 料金変更戦略問題

### a) 最適性条件

最後に、問題 [P-C] の最適性条件を導出しよう。ここでは、問題 [P-C] が、2 つの料金モードそれぞれで定義される最適値関数を同時に求める VIP に帰着することを示す。まず、状況  $(t, P)$  において、高料金モードが選択されているときの最適値関数を、以下のように定義する。

$$V_H(t, P) \equiv \max_{\{n(s) | s \in [t, T]\}} E[\mathcal{J}_C(t, n(\cdot)) | P(t) = P], \quad \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \quad (33)$$

ただし、 $n(t) = H$  とする。ここで、 $\mathcal{J}_C(t, n(\cdot))$  は式 (8) で定義される  $[t, T]$  間の総利潤である。以下では、この最適値関数  $V_H(\cdot)$  を、料金モード H の“価値”と呼ぶ。

式 (34) は、期待値のネストを用いて、以下のように記述できる。

$$V_H(t, P) = \max_{\tau_H \in [t, T]} E \left[ \int_t^{\tau_H} e^{-r(s-t)} \pi_H(s, P(s)) ds + e^{-r(\tau_H-t)} \{V_L(\tau_H, P(\tau_H)) - C_{H,L}\} | P(t) = P \right]. \quad (34)$$

ここで、 $\tau_H$  は、料金引き下げ (i.e. 高料金から低料金への料金変更) が行われる時刻である。また、 $V_L(\tau_H, P(\tau_H))$  は、状況  $(\tau_H, P(\tau_H))$  で低料金モードが選択されているときの最適値関数を表す。以下では、この  $V_L$  を“低料金モードの価値”と呼ぶ。

最適値関数  $V_H(t, P)$  の定義式 (34) を DP 分解すれば、状況  $(t, P)$  で高料金モードが選択されているときの事業主体の行動は、i) 微小時間  $dt$  だけ高料金を維持するか、ii) 料金を引き下げる (低料金モードに変更する)、のい

いずれかを離散的に選択する問題に帰着する。以下では、それぞれの選択が行われる場合について、高料金モードの価値  $V_H(t, P)$  が満たすべき条件を述べる。

i) 高料金を維持する場合 このとき、最適値関数の定義より、以下の不等式が成立する。

$$-\mathcal{L}_H V_H(t, P) - \pi_H(t, P) \geq 0. \quad (35)$$

ここで、 $\mathcal{L}_H$  は、高料金モードにおける交通量プロセス (7) より決定される偏微分作用素で、以下の式で定義される。

$$\mathcal{L}_H \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_H(t, P) \frac{\partial}{\partial P} + \frac{1}{2} \{\sigma_H(t, P)\}^2 \frac{\partial^2}{\partial P^2} - r. \quad (36)$$

ii) 料金を引き下げの場合 このとき、高料金モードの価値は低料金モードの純価値以上であるため、以下の不等式が成立する。

$$V_H(t, P) - V_L(t, P) + C_{H,L} \geq 0. \quad (37)$$

こうして得られた状況  $(t, P)$  下での料金引き下げ行動に関する最適性条件式 (35), (37) は、以下の変分不等式としてまとめて記述できる。

$$\min\{-\mathcal{L}_H V_H(t) - \pi_H(t), V_H(t) - V_L(t) + C_{H,L}\} = 0. \quad (38)$$

ただし、状態変数  $P(t) = P$  についての記述を省略した。

同様の議論は、低料金から高料金への料金引き上げ行動についても成立する。すなわち、状況  $(t, P)$  において低料金モードが選択されているときの最適値関数  $V_L(t, P)$  を DP 分解すれば、当該状況下での事業主体の行動は、以下のいずれかを選択する問題となる：i) 微小時間  $dt$  だけ低料金を維持するか、ii) サク・コスト  $C_{L,H}$  を支払って料金を引き上げる。従って、料金引き上げ行動に関する最適性条件は、式 (38) と同様の変分不等式で表される。

以上の議論より、問題 [P-C] は、料金引き下げおよび料金引き上げ行動に関する最適性条件を連立させ、各料金モードの価値  $V_H, V_L$  を同時に求める以下の無限次元 VIP に帰着する。

[VIP'-C] Find  $\{V_H(\cdot), V_L(\cdot)\}$  such that

$$\begin{cases} \min\{-\mathcal{L}_L V_L(\cdot) - \pi_L(\cdot), V_L(\cdot) - V_H(\cdot) + C_{L,H}\} = 0 \\ \min\{-\mathcal{L}_H V_H(\cdot) - \pi_H(\cdot), V_H(\cdot) - V_L(\cdot) + C_{H,L}\} = 0 \\ \forall (t, P) \in \mathcal{K}. \end{cases}$$

ただし、記号の煩雑さを避けるため、 $(t, P)$  の記述をドットを用いて省略した。また、 $\mathcal{L}_L$  は、式 (36) の  $\alpha_H, \sigma_H$  を、 $\alpha_L, \sigma_L$  に置き換えた偏微分作用素である。

ここで、対象期間の満期  $T$  以降においては、いずれのモードからも料金収入が発生しないため、問題 [VIP'-C] の終端条件は以下の式で表される。

$$V_H(T, P(T)) = 0, \quad V_L(T, P(T)) = 0, \quad \forall P(T) \in \mathcal{R}_+. \quad (39)$$

## b) 境界条件

問題 [P-C] についても、これまでと同様に、 $P \rightarrow \infty, P \rightarrow 0$  での境界条件を導出する。ここでは、以下の2点を仮定する。まず、前節と同様、 $\alpha_n(t, 0) = 0, \sigma_n(t, 0) = 0, \forall n$  とし、常に高料金モードの方が交通量の成長率が小さい (i.e.  $\alpha_L(t, P) > \alpha_H(t, P), \forall (t, P) \in \mathcal{K}$ ) とする。次に、 $P(t) \rightarrow \infty$  の極限では、高料金での料金収入は低料金のそれに対して十分に大きい。すなわち、

$$\lim_{P(t) \rightarrow \infty} \pi_H(t, P) \gg \pi_L(t, P), \quad \forall t \in [0, T].$$

これらの仮定の下で境界条件を求めよう。

まず、 $P \rightarrow \infty$  の場合、事業主体は常に高料金モードを選択する。これは、低料金モードと比較した際に、交通量の成長率の低さが、高い料金収入によって完全にカバーされるためである。従って、上側境界条件は、

$$\begin{cases} \lim_{P \rightarrow \infty} \mathcal{L}_H V_H(t, P) + \pi_H(t, P) = 0 \\ \lim_{P \rightarrow \infty} V_L(t, P) - V_H(t, P) + C_{L,H} = 0 \end{cases}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (40)$$

で表される。一方、 $P \rightarrow 0$  の場合、事業主体は常に低料金モードを選択する。これは、料金収入が極めて小さい場合、料金を下げること、少しでも交通量の増加を促そうとするためである。従って、下側境界条件は以下の式で表される。

$$\begin{cases} \lim_{P \rightarrow 0} \mathcal{L}_L V_L(t, P) + \pi_L(t, P) = 0 \\ \lim_{P \rightarrow 0} V_H(t, P) - V_L(t, P) + C_{H,L} = 0 \end{cases}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (41)$$

上述の議論は、以下のようにまとめられる。まず、低料金モードの価値  $V_L$  についての上側境界条件と、高料金モードの価値  $V_H$  についての下側境界条件は、最適値関数の値が直接与えられる。一方、 $V_L$  についての下側境界条件と  $V_H$  についての上側境界条件は、最適値関数が従う偏微分方程式のみが与えられる。この境界条件の非対称性は、具体的な計算を行う際に重要となる。その詳細は第5章 (3) を参照されたい。

## 4. 標準形の線形相補性問題への帰着

前章までで、一見性質の異なる3つのリアル・オプション問題 [P-A], [P-B] および [P-C] が、変分不等式問題 [VIP'-A], [VIP'-B] および [VIP'-C] として統一的に記述できることが示された (以下では、これらをまとめて [VIP] と表現する)。本章では、これらのVIPが、いずれも標準形の線形相補性問題 (LCP: Linear Complementarity Problem) に帰着することを明らかにする。具体的には、まず、前章で得られた変分不等式問題 [VIP] を、それぞれ、状態変数を離散化した枠組下で表現する。次に、こうして離散表現された有限次元VIPが、適切な変数変換によって、以下の標準形の有限次元LCP:



Find  $X$  such that  $X \cdot G(X) = 0, \quad X \geq 0, G(X) \geq 0$

に帰着することを示す。このLCPへの帰着は、本研究において、オプション評価問題の効率的解法を見通しよく開発する鍵となる。

なお、本稿で議論する標準形LCPへの帰着は、連続時間-連続状態の枠組下でも可能である。しかし、その数学的に厳密な理論展開は、煩雑な(読者に高度な数学的予備知識を要求する)議論が必要となる。さらに、標準形のLCPへ帰着することの目的は具体的な数値計算方法の開発にあるため、いずれ問題を離散表現する必要がある。上記の理由から、本稿では、提案手法の基本的考え方の具体的な理解が容易な離散的な(有限次元の)枠組下で議論を展開する。

### (1) 路線計画問題

#### a) 離散的表現の枠組

本項では、分岐オプション問題[VIP-A]を離散的表現する。まず、十分に大きな交通量の領域  $[P_{\min}, P_{\max}] \in \mathcal{R}_+$  をとる。そして、時間と交通量の空間  $[0, T] \times [P_{\min}, P_{\max}]$  を、以下の格子：

$$\gamma \equiv \{(i, j) | i = 0, 1, \dots, I, j = \min, 1, \dots, J, \max\} \quad (42)$$

を用いて、 $(i, P^j) \equiv (i\Delta T, j\Delta P + P_{\min})$  と離散近似する。ただし、 $\Delta T, \Delta P$  は、それぞれ、時刻および状態変数(交通量)についての格子間隔を表し<sup>8</sup>、 $\min \equiv 0$  および  $\max \equiv J+1$  は、状態変数領域の境界インデックスを表す。ここで、任意関数  $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R}$  の格子  $\gamma$  の  $(i, j)$  座標上での値を、 $f^{i,j} \equiv f(i, P^j)$  と表現する<sup>9</sup>。

最適値関数の座標  $(i, j)$  における値を  $V^{i,j}$  で表すとき、式(18)~(20)の終端条件および境界条件は以下のように表現される。

$$V^{I,j} = 0, \quad \forall j \in \{\min, 1, \dots, J, \max\}. \quad (43)$$

$$V^{i,\min} = 0, \quad V^{i,\max} = V_H^{i,\max} - C_H, \quad \forall i \in I \quad (44)$$

ただし、 $I \equiv \{0, 1, \dots, I-1\}$  は時刻についてのインデックス集合である。従って、時点  $i$  における未知変数は、 $V^i \equiv \{V^{i,1}, \dots, V^{i,J}\}$  と定義される。このとき、問題[P-A]中の  $L_0 V(i, P)$  は以下のように離散近似される。

$$L_0 V(i, P) \approx L_0^i V^i + M_0^i V^{i+1}, \quad \forall i \in I.$$

ここで、 $L_0^i, M_0^i$  は、式(12)の偏微分作用素  $L_0$  を適当なスキームで差分近似して得られる  $J \times J$  の正方行列である(詳細は付録I参照)。

<sup>8</sup> 本稿では、格子間隔が一定として議論を進める。これは、記述の煩雑さを避け、理論展開を簡便に示すための便宜であり、提案手法は、格子間隔が一定でないような場合にも適用可能である。

<sup>9</sup> 提案手法では、座標間の整合性が保たれている限り、各アクティビティごとに別々の(ただし、時刻と状態変数の次元  $I, J$  は等しい)格子を想定してもよい。

#### b) 標準形の線形相補性問題への帰着

上述の枠組の下で、[VIP-A]は、以下の有限次元VIPとして表現される。

[VIP-A] Find  $\{V^i | i \in I\}$  such that

$$\min. \{-L_0^i V^i - M_0^i V^{i+1}, \Psi V^i\} = 0, \quad \forall i \in I.$$

ただし、 $\Psi$  は以下の式で定義される演算子である。

$$\Psi V^i \equiv \min. \{V^i - V_H^i + 1C_H, V^i - V_L^i + 1C_L\}.$$

ここで、式(43)より、終端条件は  $V^I = 0$  である。

この問題[VIP-A]は、全ての時点  $i \in I$  ごとに成立するサブ問題を連立させたものである。以下では、時点  $i$  におけるサブ問題を[VIP-A- $i$ ]と表す。この問題[VIP-A- $i$ ]は、次の時点の最適値関数  $V^{i+1}$  が既知ならば、 $V^i$  のみを未知変数とした独立な問題となる。以下では、このサブ問題[VIP-A- $i$ ]が適切な変数変換によって、標準形の線形相補性問題(LCP)に帰着することを示す。まず、以下の変数変換：

$$X^i \equiv -L_0^i V^i - M_0^i V^{i+1}. \quad (45)$$

を考え、 $X^i \equiv \{X^{i,1}, \dots, X^{i,J}\}$  とする。式(45)より、時点  $i$  の最適値関数  $V^i$  は、新たな未知変数  $X^i$  と所与のベクトル  $V^{i+1}$  を用いた以下の式で表される。

$$V^i(X^i) = L_0^{i-1} \{-X^i - M_0^i V^{i+1}\}. \quad (46)$$

式(45)、(46)を問題[VIP-A- $i$ ]に代入して整理すれば、時点  $i$  で成立すべき以下の有限次元LCPを得る。

[LCP-A- $i$ ] Find  $X^i$  such that

$$\begin{cases} X^i \cdot G^i(X^i) = 0 \\ X^i \geq 0, \quad G^i(X^i) \geq 0 \end{cases}$$

ここで、 $G^i: \mathcal{R}^J \rightarrow \mathcal{R}^J$  は、以下の式で定義される線型写像である。

$$G^i(X^i) \equiv -L_0^{i-1} \{X^i + M_0^i V^{i+1}\} - \min. \{-V_H^i + 1C_H, -V_L^i + 1C_L\}. \quad (47)$$

ここで、[VIP- $i$ ]は、問題[VIP]の時点  $i$  におけるサブ問題であるように、[LCP-A- $i$ ]もまた時点  $i$  で成立するサブ問題である。以下では、[LCP-A- $i$ ]を全ての時点  $i$  について連立させた問題を[LCP-A]で表す。

#### c) 未知変数 $X^i$ の境界条件

式(45)の変数変換により、最適値関数に対する境界条件もまた、標準化された問題の未知変数に対する境界条件に変換される。しかし、問題[VIP-A]の最適値関数については上下の境界値  $V^{i,\min}, V^{i,\max}$  が与えられているため、未知変数  $X^i$  の境界条件は、各時点で成立する相補性問題[LCP-A- $i$ ]の写像の計算に何ら影響を与えない。このことは、第5章(1)節で解説される。

(2) 建設投資戦略問題

a) 離散的表現の枠組

次に、問題 [VIP-B] を離散表現しよう。前章と同様、十分に大きな交通量の領域  $[P_{\min}, P_{\max}] \in \mathcal{R}_+$  をとり、総建設量と交通量の空間  $[0, \bar{Q}] \times [P_{\min}, P_{\max}]$  を、以下の格子：

$$\gamma \equiv \{(i, j) | i = 0, 1, \dots, I, j = \min, 1, \dots, J, \max\}$$

を用いて、 $(Q^i, P^j)$  と離散近似する<sup>10</sup>。前章と同様、最適値関数  $V(Q, P)$  を  $V^{i,j} \equiv V(Q^i, P^j)$  と離散表現すれば、その終端条件および境界条件 (30)~(31) は、それぞれ、以下のように表現できる。

$$V^{i,j} = V_C^j, \quad \forall j \in \{\min, 1, \dots, J, \max\} \quad (48)$$

$$V^{i,\min} = 0, \quad \forall i \in I. \quad (49)$$

ただし、 $V_C^j$  は、完成後の有料道路の価値  $V_C(P^j)$  を離散近似したものであり、 $I \equiv \{0, 1, \dots, I-1\}$  は総建設量  $Q$  についてのインデックス集合を表す。

境界条件式 (49) より、問題 [VIP-B] の時点  $i$  における未知変数は、 $V^i \equiv \{V^{i,1}, \dots, V^{i,j}, V^{i,\max}\}$  と定義される。問題 [VIP-A] と異なり、この問題では上側境界での最適値関数  $V^{i,\max}$  が未知変数に含まれることに注意されたい。この枠組の下では、問題 [VIP-B] に現れる、最適値関数の偏微分  $\mathcal{L}V(Q, P)$  および常微分  $\mathcal{D}V(Q, P)$  は、それぞれ、以下のように離散近似される。

$$\mathcal{L}V(Q^i, P) \approx LV^i + MV^{i+1}, \quad \forall i \in I \quad (50)$$

$$\mathcal{D}V(Q^i, P) \approx DV^i, \quad \forall i \in I. \quad (51)$$

ここで、 $L, M$  および  $D$  は、それぞれ、式 (25) および  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial Q}$  を適当なスキームで差分近似して得られる  $(J+1) \times (J+1)$  の正方行列である (詳細は付録 I 参照)。

b) 標準形の線形相補性問題への帰着

上述の枠組の下で、変分不等式問題 [VIP-B] は、以下の有限次元 VIP として離散表現される。

[VIP-B] Find  $\{V^i | i \in I\}$  such that

$$\min. \{-LV^i - MV^{i+1} + 1C, -DV^i\} = 0, \quad \forall i \in I.$$

ただし、終端条件式 (48) より、 $V^I = V_C$  である。

前章と同様、時点  $i$  で成立する [VIP-B] のサブ問題を問題 [VIP-B- $i$ ] で表す。以下では、最適値関数  $V^{i+1}$  が既知であるとき、[VIP-B- $i$ ] が変数変換

$$X^i \equiv -LV^i - MV^{i+1} + 1C \quad (52)$$

によって、有限次元 LCP に帰着することを明らかにしよう。まず、式 (52) より、総建設量  $i$  での最適値関数  $V^i$  は、新たな未知変数  $X^i$  と  $V^{i+1}$  の関数

$$V^i(X^i) = L^{-1} \{-X^i - MV^{i+1} + 1C\} \quad (53)$$

として表現される。これを変分不等式問題 [VIP-B- $i$ ] に代入して整理すれば、以下の有限次元 LCP を得る。

[LCP-B- $i$ ] Find  $X^i$  such that

$$\begin{cases} X^i \cdot G^i(X^i) = 0 \\ X^i \geq 0, \quad G^i(X^i) \geq 0 \end{cases}$$

ただし、 $G^i : \mathcal{R}^{J+1} \rightarrow \mathcal{R}^{J+1}$  は、以下の式で定義される線型写像である。

$$G^i(X^i) \equiv -DL^{-1} \{-X^i - MV^{i+1} + 1C\} \quad (54)$$

前節と同様、[LCP-B- $i$ ] を全ての時刻について連立させた問題を、以下では [LCP-B] と記述する。

c) 未知変数  $X^i$  の境界条件

前章と同様、問題 [LCP-B- $i$ ] の未知変数  $X^i$  についての境界条件を求めよう。まず、 $X^i$  の定義式 (52) の右辺が、最適値関数の偏微分  $\mathcal{L}V(Q, P) - C$  の離散近似表現と見なせることと、問題 [VIP-B] の上側境界条件 (32) より、 $X^i$  の上側境界条件は以下の式で与えられる。

$$X^{i,\max} = 0, \quad \forall i \in I. \quad (55)$$

一方、下側境界条件は与えられない。

問題 [LCP-B- $i$ ] における最適値関数  $V^i$  と未知変数  $X^i$  の境界条件は非対称的——最適値関数は下側境界値のみ、未知変数は上側境界値のみ——である。すなわち、 $V^i$  と  $X^i$  との間では対応する領域が異なり、それ故、写像  $G$  の具体的な計算には若干の注意が必要である。この議論の詳細については第 5 章 (2) を参照されたい。

(3) 料金変更戦略問題

a) 離散的表現の枠組

最後に、変分不等式問題 [VIP-C] を離散表現しよう。問題 [VIP-C] の離散化の枠組は、本章 (1) で用いたものと全く同じである。この枠組の下で、状況  $(i, P^j)$  における料金モード H, L の価値を、 $V_H^{i,j}, V_L^{i,j}$  と離散表現すれば、終端条件および境界条件 (39)~(41) は、それぞれ、以下のように表現される。

$$V_H^{i,j} = V_L^{i,j} = 0, \quad \forall j \in \{\min, 1, \dots, J, \max\} \quad (56)$$

$$V_H^{i,\min} = V_L^{i,\min} - C_{H,L}, \quad \forall i \in I, \quad (57)$$

$$V_L^{i,\max} = V_H^{i,\max} - C_{L,H}, \quad \forall i \in I. \quad (58)$$

従って、時点  $i$  における未知変数は、以下の 2 つのベクトルで定義される。

$$V_H^i \equiv \{V_H^{i,1}, \dots, V_H^{i,j}, V_H^{i,\max}\} \quad (59)$$

$$V_L^i \equiv \{V_L^{i,\min}, V_L^{i,1}, \dots, V_L^{i,j}\} \quad (60)$$

ここで、各料金モードの価値が対応する領域が、 $V_H, V_L$  の間で異なることに注意されたい。この非対称性は、第

<sup>10</sup> この離散化の枠組は、前節の枠組における時刻  $t \in [0, T]$  を、総建設量  $Q \in [0, \bar{Q}]$  に置き換えたものと見なせる。

5章(3)における数値解法の実装において無視できない要因となる。

上述の枠組の下では、高料金モードの価値が従う変分不等式(38)に現れる偏微分  $\mathcal{L}_H V_H(t, P)$  は、以下のよう  
に離散近似される。

$$\mathcal{L}_H V_H(t^i, P) \approx L_H^i V_H^i + M_H^i V_H^{i+1}, \quad \forall i \in I. \quad (61)$$

ここで、 $L_H^i, M_H^i$  は、式(36)で定義される偏微分作用素  $\mathcal{L}_H$  を、適当なスキームで差分近似して得られる  $(J+1) \times (J+1)$  正方行列である(付録I参照)。

### b) 標準形の線形相補性問題への帰着

上述の枠組の下で、変分不等式問題[VIP-C]は、以下の連立有限次元VIPとして離散表現される。

[VIP-C] Find  $\{V^i | i \in I\}$  such that

$$\begin{cases} \min. \{-L_L^i V_L^i - M_L^i V_L^{i+1} - \pi_L^i, \Psi_L V^i\} = 0 \\ \min. \{-L_H^i V_H^i - M_H^i V_H^{i+1} - \pi_H^i, \Psi_H V^i\} = 0 \end{cases}, \quad \forall i \in I.$$

ただし、終端条件は  $V_H^J = V_L^J = \mathbf{0}$  である。ここで、 $V^i$  は  $V_L, V_H$  を縦に並べた  $2(J+1)$  次元未知ベクトルであり、 $\Psi_L, \Psi_H$  は以下のように定義される演算子である。

$$\begin{cases} \Psi_L V^i \equiv V_L^i - V_H^i + 1C_{L,H} \\ \Psi_H V^i \equiv V_H^i - V_L^i + 1C_{H,L} \end{cases} \quad (62)$$

これまでの分析と同様、時点  $i$  におけるサブ問題[VIP-C- $i$ ]は、各アクティビティの価値を適切に変数変換する事で、有限次元LCPに帰着する。以下ではこれを明らかにしよう。まず、各アクティビティの価値について、以下の変数変換を考える。

$$\begin{cases} X_H^i \equiv -L_H^i V_H^i - M_H^i V_H^{i+1} - \pi_H^i \\ X_L^i \equiv -L_L^i V_L^i - M_L^i V_L^{i+1} - \pi_L^i \end{cases} \quad (63)$$

このとき、高料金モードの価値  $V_H^i$  は、新たな未知変数  $X_H^i$  を用いた以下の式で表される。

$$V_H^i(X_H^i) = L_H^{i-1} \{-X_H^i - M_H^i V_H^{i+1} - \pi_H^i\}. \quad (64)$$

同様に、低料金モードの価値  $V_L^i$  も、未知変数  $X_L^i$  の関数として表現できる。式(64)を演算子  $\Psi_H$  の定義式(62)に代入して整理すれば、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \Psi_H V^i = & -L_H^{i-1} \{X_H^i + M_H^i V_H^{i+1} + \pi_H^i\} \\ & + L_L^{i-1} \{X_L^i + M_L^i V_L^{i+1} + \pi_L^i\} + 1C_{H,L} \end{aligned} \quad (65)$$

$\Psi_L V^i$  についても同様の式が得られる。こうして得られた式(63), (65)を問題[VIP-C- $i$ ]に代入して整理すれば、時点  $i$  で成立すべき以下の有限次元LCPを得る。

[LCP-C- $i$ ] Find  $X^i$  such that

$$\begin{cases} X^i \cdot G^i(X^i) = 0 \\ X^i \geq 0, \quad G^i(X^i) \geq 0 \end{cases}$$

ただし、 $X^i$  は  $X_L^i, X_H^i$  を縦に並べた  $2(J+1)$  次元の未知変数であり、 $G^i(X^i)$  は以下の式で定義される線型写像である。

$$G^i(X^i) \equiv \begin{bmatrix} -L_L^{i-1} & L_H^{i-1} \\ L_L^{i-1} & -L_H^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L^i \\ X_H^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_L \\ K_H \end{bmatrix} \quad (66)$$

ここで、 $K_L, K_H$  は、それぞれ、以下の式で定義される  $J+1$  次元の定数ベクトルである。

$$\begin{aligned} K_L \equiv & -L_L^{i-1} \{M_L^i V_L^{i+1} + \pi_L^i\} \\ & + L_H^{i-1} \{M_H^i V_H^{i+1} + \pi_H^i\} + 1C_{L,H} \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} K_H \equiv & -L_H^{i-1} \{M_H^i V_H^{i+1} + \pi_H^i\} \\ & + L_L^{i-1} \{M_L^i V_L^{i+1} + \pi_L^i\} + 1C_{H,L} \end{aligned} \quad (68)$$

前節までと同様、以下では、[LCP-C- $i$ ]を全時刻について連立させた問題を[LCP-C]と表現する。

### c) 未知変数 $X^i$ の境界条件

これまでと同様、問題[LCP-C- $i$ ]の未知変数  $X_H^i, X_L^i$  についての境界条件を求めよう。まず、 $X_L(t, P) \equiv L_L V_L(t, P) - \pi_L(t, P)$  と問題[VIP-C]の境界条件式(41)より、 $X^i$  の下側境界条件は、

$$X_L^{i,\min} = 0, \quad \forall i \in I. \quad (69)$$

で表される。一方、 $X_H(t, P) \equiv L_H V_H(t, P) - \pi_H(t, P)$  と式(40)より、上側境界条件は、以下の式で表される。

$$X_H^{i,\max} = 0, \quad \forall i \in I. \quad (70)$$

前節と同様、問題[LCP-C- $i$ ]は、各料金モードの価値  $V_L^i, V_H^i$  と未知変数  $X_L^i, X_H^i$  の間に対応する領域が異なる。のみならず、本節a)で示したように、各料金モードの価値の間でも対応する領域が異なる。従って、写像  $G(X)$  を具体的に評価する際には、第5章(3)節に述べるような注意が必要である。

## 5. アルゴリズム

ここまでの議論により、オプション評価問題の典型例である3つの問題が、いずれも、有限次元の線形相補性問題[LCP-A], [LCP-B]および[LCP-C](以下では、これらをまとめて、単に[LCP]と記述する)に帰着することが明らかにされた。本章では、これらの問題に対する具体的な解法を示そう。

問題[LCP]は、図-2に示す格子上の各点における未知変数  $X^{i,j}$  を求める問題である。ここで、時点  $i$  における<sup>11</sup>サブ問題[LCP- $i$ ]は、次の時点  $i+1$  の最適値関数  $V^{i+1}$  が与えられれば、それだけで独立した問題となることが前章で示された。従って、問題[LCP]は、図-2に示すように、終端条件から順に時点を遡りながらサブ問題[LCP- $i$ ]を逐次的に解く問題に帰着する。

<sup>11</sup> 問題[P-B]の場合は総建設量  $i$

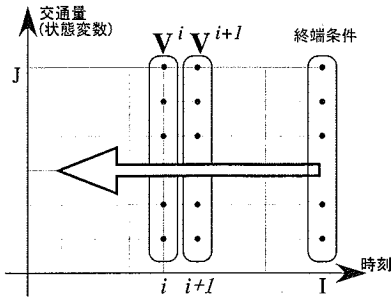


図-2 数値解法概念図

問題 [LCP- $i$ ] のように標準形 LCP として表現された問題は、数理計画法の分野で開発された様々なアルゴリズムによって解くことができる。以下では、最近の数理計画理論の進展に伴って現れた“merit 関数アプローチ”を採用した場合のアルゴリズムを議論する。このアプローチは、LCP に対する古典的な解法である対角化法、Lemke 法、射影法（例えば、Ferris and Pang<sup>25</sup>）を参照）などに比べると、一般に、より緩い条件の下で収束が保証され、かつ効率的である。

このアプローチは、相補性問題 [LCP- $i$ ] を、“merit 関数”と呼ばれる関数  $\Phi(X^i)$  の最小化問題に帰着させて解くものである。ここで、merit 関数  $\Phi(X^i)$  とは、 $X^i$  が [LCP- $i$ ] の解ならば  $\Phi(X^i) = 0$ 、そうでなければ  $\Phi(X^i) > 0$  となる連続微分可能な実数値関数である。本稿では、このような性質を満たす merit 関数として、以下の Fukushima 型関数<sup>26</sup>)を採用する。

$$\Phi(X^i) \equiv -G(X^i) \cdot H(X^i) - \frac{1}{2} H(X^i) \cdot H(X^i), \quad (71)$$

where

$$H(X^i) \equiv [X^i - G(X^i)]_+ - X^i. \quad (72)$$

ここで、 $[Z]_+$  は正の実数空間  $\mathcal{R}_+^J$  への射影演算子であり、その第  $k$  要素は  $\max\{Z^k, 0\}$  で表される。式 (71) の merit 関数を用いて問題 [LCP- $i$ ] を解く最も簡単なアルゴリズムは、以下のようにまとめられる<sup>26</sup>)。

**Step 0** 初期可能解  $X^{(1)} \in \mathcal{R}_+^J$ ,  $n := 1$ .

**Step 1** 降下方向ベクトルの決定

$$d^{(n)} := H(X^{(n)}). \quad (73)$$

**Step 2** ステップ・サイズ  $\alpha$  を、以下の一次元探索問題の解として求める。

$$\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(X^{(n)} + \alpha d^{(n)}). \quad (74)$$

**Step 3** 解の改訂。  $X^{(n+1)} := X^{(n)} + \alpha d^{(n)}$

**Step 4** 収束判定：収束していれば停止、そうでなければ  $n := n + 1$  として Step 1 へ。

上述のアルゴリズムを用いれば、時点  $i$  における線型相補性問題 [LCP- $i$ ] は、その時点において既に計算された

最適値関数  $V^{i+1}$  と、各境界条件  $V^{i,\min}, V^{i,\max}, X^{i,\min}, X^{i,\max}$  を与件とした上で解くことができる。

このアプローチでは、写像  $G^i(X^i)$  の評価を効率的に行えるか否かが、アルゴリズム全体の性能を左右する鍵となる。そこで、以下では、写像  $G^i(X^i)$  の効率的計算方法を、問題 [LCP-A- $i$ ]、[LCP-B- $i$ ] および [LCP-C- $i$ ] の各問題について述べる。

### (1) 路線計画問題

時点  $i$  での  $n$  回目繰り返し計算における未知変数を  $X^{i(n)}$  で表すとき、問題 [LCP-A- $i$ ] の写像  $G^{i(n)} \equiv G^i(X^{i(n)})$  は、以下の 2 段階の手続きによって計算できる。まず、線型方程式

$$L_0^i V^{i(n)} = -X^{i(n)} - M_0^i V^{i+1} \quad (75)$$

を解き<sup>12</sup>、最適値関数  $V^{i(n)}$  を求める。次に、得られた  $V^{i(n)}$  を用いた以下の式：

$$G^{i(n)} := V^{i(n)} + \min\{V_H^i - 1C_H, V_L^i - 1C_L\} \quad (76)$$

より写像  $G^{i(n)}$  を計算する。

本来、問題 [LCP-A- $i$ ] の写像 (47) は逆行列  $L^{i-1}$  を含むため、これをナイーブに直接計算する方法では、 $J^2$  のオーダーの計算量が必要となることに注意されたい。しかし、上述したように、写像  $G^{i(n)}$  を求める際に必要となるのは、線型方程式 (75) の解のみである。特に、Crank-Nicolson 法などの一般的な差分スキームを用いる場合、線型方程式 (75) を解く問題は、常微分方程式の差分法とほぼ同形の問題に帰着する。従って、問題 [LCP-A- $i$ ] の写像  $G^i(X^{i(n)})$  は、 $J$  のオーダーというわずかな計算量で評価でき、merit 関数を用いた前述のアルゴリズムは極めて効率的なアプローチとなる。

### (2) 建設投資戦略問題

問題 [LCP-B- $i$ ] の写像  $G^i(X^{i(n)})$  は、前節と同じく、以下の 2 段階の手続きによって効率的に評価できる。まず、未知変数  $X^i$  から最適値関数  $V^i$  を求め、次に、求めた  $V^i$  を用いて写像  $G^i$  を計算する。

ここで、問題 [LCP-B- $i$ ] については、最適値関数の下側境界値  $V^{i,\min}$  と未知変数の上側境界値  $X^{i,\max}$  のみとが与えられていることに注意しよう。このため、図-3 に示すように、最適値関数  $V^i$  と未知変数  $X^i$  の間で、対応する領域が異なる。従って、写像  $G^i$  の評価においては、 $X^i$  から  $V^i$  を求める手続きと、 $V^i$  から  $G^i$  を求める手続きの双方において、対応する領域の整合性を保つ必要がある。その詳細は付録 II で述べる。

<sup>12</sup> 方程式 (75) は、最適値関数  $V^i \equiv \{V^{i,1}, \dots, V^{i,J}\}$  と未知変数  $X^i \equiv \{X^{i,1}, \dots, X^{i,J}\}$  の次元および状態変数のインデクスが同じであるため、最適値関数の境界条件  $V^{i,\min}, V^{i,\max}$  のみから  $X^i$  が計算可能である。このことは、第 4 章 (1) 節で  $X^i$  についての境界条件が不足していても問題ないことを意味している。

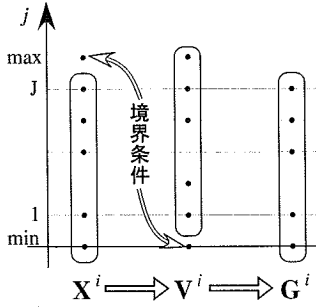


図-3 問題 [P-B] の最適値関数と未知変数

### (3) 料金変更戦略問題

最後に、問題 [LCP-C-1] の写像の計算方法を示そう。この問題の写像  $G^i(X^{i(n)})$  についても、①各料金モードの価値  $V_H^{i(n)}, V_L^{i(n)}$  を求め、②それを用いて  $G(X^{i(n)})$  を計算するという、2段階の手続きによって効率的に写像の評価が行える。

ただし、前節と同様、最適値関数  $V$  と未知変数  $X$  との間で対応する領域が異なる上、各料金モードの価値  $V_H, V_L$  の間でも対応する領域が異なる。そのため、上述の①、②のそれぞれの手続きにおいて、これらの領域の整合性を保つ必要がある(詳細は付録 II を参照)。

## 6. 数値計算例

最後に、3つのリアル・オプション問題 [P-A], [P-B] および [P-C] のそれぞれに提案手法を適用し、その数値結果を示そう。ただし、本章の目的は、提案手法の判りやすい例を示し、前章で示した数値解法が適切に動作することを確認することである。そのため、以下では、従来の金融/リアル・オプション研究との対比が行いやすい形式に単純化された仮定下での数値計算例を示す。

### (1) 路線計画問題の例

まず、分岐オプションの例である路線計画問題に対して提案手法を適用し、その計算結果を示す。ここでは、第2章(1)節で示した枠組に加え、以下の2つの仮定をおく。まず、全てのアクティビティ(i.e. O, H および L)において、交通量  $P(t)$  が、以下の共通の幾何 Brown 運動に従うとする。

$$dP(t)/P(t) = \alpha dt + \sigma dZ(t). \quad (77)$$

次に、低規格道路および高規格道路のそれぞれの運用益が、以下の交通量と料金の積で表されるとする。

$$\pi_L(t, P) = X_L P, \quad \pi_H(t, P) = X_H P. \quad (78)$$

ここで、 $X_L, X_H$  は、それぞれ、低規格および高規格道路の利用料金であり、いずれも所与の定数とする。こ

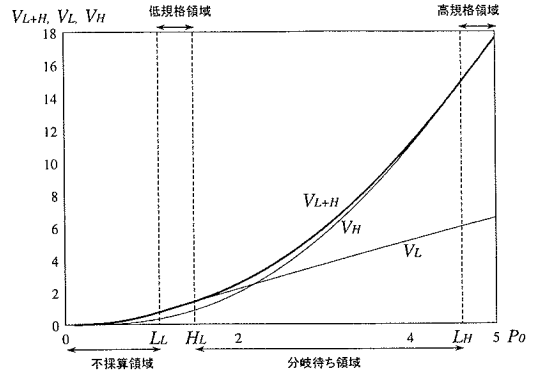


図-4 路線計画問題：初期交通量  $P_0$  と事業価値

のような状況を想定した上で、以下のパラメタ：

$$T = 10, \quad \alpha = 4\%, \quad \sigma = 40\%, \quad r = 8\%, \quad (79)$$

$$X_R = 1, \quad X_L = 0.2, \quad C_R = 20, \quad C_L = 1$$

を採用したときの、規格選択オプションの価値と、その最適権利行使戦略を示す。

#### a) 初期交通量と事業価値

図-4に、低規格および高規格の2つの規格候補をもつ事業(i.e. 規格選択オプション)と、規格をいずれか1つに限定された事業(i.e. 標準的な実物投資オプション)について、それぞれの価値を示す。このグラフは、横軸に時刻  $t = 0$  での初期交通量  $P_0$  をとり、縦軸に、各事業の価値をプロットしたものである。ここで、 $V_{L+H}$  は、2つの規格候補をもつ事業の価値、 $V_L, V_H$  は、それぞれ、低規格あるいは高規格のみに規格を限定された事業の価値を表す。

この図より、以下の2つのことが判る。第1に、2つの規格候補をもつ事業の価値は、規格候補を1つしか持たない事業の価値と等しいか、それ以上である。これは、規格候補が多い事業ほど高いオプション価値をもつことを意味している。第2に、低規格道路が選択される領域  $[L_L, L_H]$  と(以下、低規格領域)と高規格道路が選択される領域  $[L_H, \infty]$  (以下、高規格領域)との間に、権利行使を待機する領域が存在する。この領域では、高規格と低規格のどちらを建設するのが有利なのか判明するまで意思決定が遅延される。以下では、この領域を“分岐待ち領域”と呼び、交通量が少なすぎて十分な収益が期待できないために建設が遅延される“不採算領域”とは明示的に区別する。このような分岐待ち領域は、従来の無限満期モデルでは得られないことに注意されたい。

#### b) 時間経過に伴う権利行使領域の推移

図-5は、時間の経過に伴い、権利行使領域がどのように変化するかを示したものである。この図では、横軸に時刻を、縦軸に権利行使領域をプロットしたも

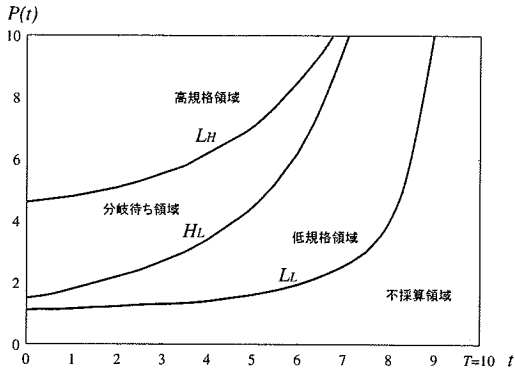


図-5 路線計画問題：時間経過に伴う権利行使領域の推移

である。ここで、 $L_L, H_L$  は、それぞれ、低規格領域の下側および上側境界を表し、 $L_H$  は高規格領域の下側境界を表す。この図より、時間の経過と共に分岐待ち領域が減少することが判る。これは、対象期間の満期が近づくにつれ、意思決定を遅らせる（供用期間を短縮させる）ことで減少する料金収入が、遅延オプションの価値を上回ることを意味している。一方で、分岐待ち領域の減少は、低規格領域の増加をもたらす。これは、満期が近い場合、安価で道路を建設し、少しでも料金収入を得ようとする近視眼的な行動が行われるためである。

## (2) 建設投資戦略問題の例

次に、タイム・ラグ・オプション問題の例である建設投資戦略問題に対して、提案手法を適用した計算結果を示す。ここでは、供用前後を通じて、交通量が以下の幾何 Brown 運動：

$$dP(t)/P(t) = \alpha dt + \sigma dz(t), \quad P(0) = P_0 \quad (80)$$

に従うとし、完成後からの道路から得られる料金収入が  $\pi(P(t)) \equiv P(t)$  で表されると仮定する。このとき、完成時の有料道路事業の価値  $V_C(P)$  は、以下の式で表される。

$$V_C(P) \equiv E \left[ \int_0^{\infty} e^{-rt} P(t) dt \mid P(0) = P \right] = \frac{P}{r - \alpha}$$

上述の仮定の下で、問題 [P-B] に対する数値解析結果を示そう。ここでは、感度分析のベース・ケースとして以下のパラメータを用いる。

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= 1, & r &= 8\%, & K &= 100, \\ \alpha &= 4\%, & \sigma &= 40\% \end{aligned} \quad (81)$$

### a) 投資実行・凍結領域

図-6 に、総建設量が  $Q=0$  であるときの交通量  $P_0$  と事業価値の関係を示す。このグラフは横軸に初期交通量を、縦軸に事業価値をとり、 $\sigma = 0.2, 0.4, 0.6$  について、それぞれプロットしたものである。なお、図-6 における intrinsic value とは、 $P(0) = P_0$  の下で、now-or-never

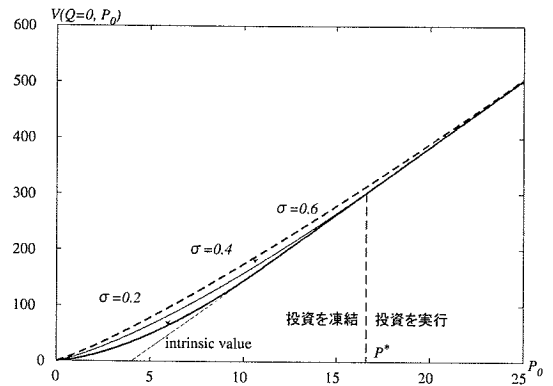


図-6 建設投資問題：初期交通量と事業価値

型的意思決定 (i.e. 完成するまで自動的に追加投資を行い続けるか、一切建設を行わない) を行う場合の期待最大利潤であり、以下の式で定義される。

$$\max. \left\{ \int_0^{\bar{Q}} e^{-rr^{-1}(Q)} [V_C(P) - K] dQ, 0 \right\}. \quad (82)$$

ここで、 $r^{-1}(Q)$  は、 $Q$  だけの総建設量を達成するための最短時間を表す<sup>13</sup>。

図 4 の  $\sigma = 0.2$  において、intrinsic value よりも事業価値が高い領域  $[0, P^*]$  では、建設投資が凍結される。この領域における事業価値と intrinsic value の差が投資延期オプションの価値である。この図より、交通量のボラティリティが高いほど事業価値が高く、投資凍結/実行の閾値 (i.e. intrinsic value と事業価値が接する点  $P^*$ ) が右にシフトすることが判る。これは、従来のリアル・オプション分析と同様、不確実性が高いほど投資延期オプション価値が高くなり、意思決定 (建設投資の実行) が慎重になることと整合的である。

### b) 総建設量と投資凍結・再開領域

次に、総建設量の増加に伴う意思決定戦略の推移を示そう。図-7 は、横軸に総建設量を、縦軸に投資凍結・再開の閾値  $P^*(Q)$  を、 $\sigma = 0.2, 0.4, 0.6$  のそれぞれについてプロットしたものである。各閾値の上側の領域では投資実行、下側の領域では投資凍結が行われる。

この図より、以下の 2 点が判る。第 1 に、総建設量が増加するほど、投資凍結領域が減少する。これは、有料道路の完成が間近な場合、よほど料金収入が低い限り道路建設が中断されないことを意味している。第 2 に、交通量のボラティリティが増加するほど、投資凍結領域が増加する。これは、前節と同じく、従来のリアル・オプション分析で得られる結果と整合的である。

以上のことより、本提案手法は、タイム・ラグ・オプション問題に対しても適切に動作することが判った。

<sup>13</sup> 我々の枠組においては、 $\sup\{u(t)\} = 1$  であるため、 $r^{-1}(Q) = Q$  である。

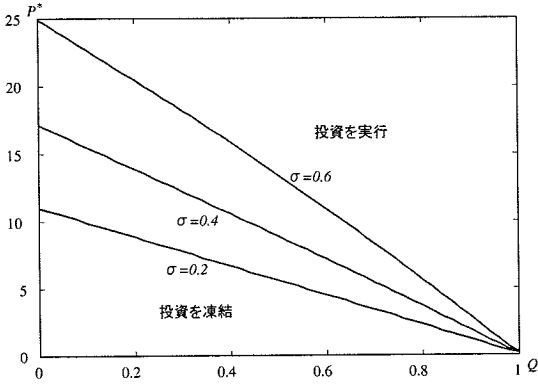


図-7 建設投資問題：総建設量と投資凍結・再開領域

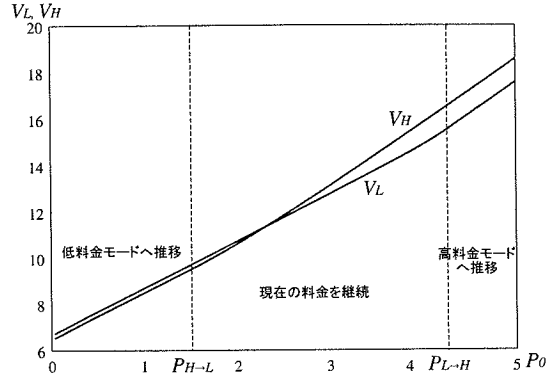


図-8 料金変更問題：交通量  $P_0$  と各料金モードの価値

### (3) 料金変更問題の例

最後に、サイクル・オプションの例である有料道路事業の料金変更問題の数値計算例を示す。本節では、前章までの枠組に加えて以下の2つの仮定をおく。まず、交通量  $P(t)$  が以下の平均回帰 (mean reverting) 過程：

$$dP(t) = \mu(\bar{P}_n - P(t)) dt + \sigma P(t) dZ(t), \quad n \in \{L, H\}.$$

に従うとする (これは、本研究で提案する枠組が任意の確率過程を扱えることを示す一例である)。この式の右辺第1項は、交通量が料金に応じた平均的交通量レベル  $\bar{P}_H, \bar{P}_L$  に回帰する (決定論的) 傾向を表現しており、係数  $\mu$  は、その回帰速度である。また、第2項は交通量の確率的変動を表す。ここで、平均回帰係数  $\mu$ 、およびボラティリティ  $\sigma$  は、いずれも所与の定数とする。次に、各料金モードから発生する料金収入が、以下の式：

$$\pi_H(t, P) \equiv X_H P, \quad \pi_L(t, P) \equiv X_L P$$

で定義される。ここで、 $X_H, X_L$  は各モードの料金を表す所与の定数である。

上記の仮定の下で、提案手法の適用例を示す。ここでは、以下のパラメタ：

$$\begin{aligned} T = 20, \quad \mu = 0.2, \quad \sigma = 20\%, \quad r = 10\%, \\ \bar{P}_H = 0, \quad \bar{P}_L = 1, \quad X_H = 1.5, \quad X_L = 1, \\ C_{L,H} = 1, \quad C_{H,L} = 0.2 \end{aligned}$$

の下で、各料金モードの価値  $V_L, V_H$  と、料金変更戦略を求めた結果を示す。

#### a) 交通量と各料金モードの価値

まず、図-8に、初期交通量と各料金モードの価値の関係を示そう。このグラフは、横軸に初期交通量  $P_0$ 、縦軸に各料金モードの価値  $V_H, V_L$  をプロットしたものである。この図において、 $P_{L \rightarrow H}$  および  $P_{H \rightarrow L}$  は、それぞれ、時刻  $t=0$  において料金引き上げ、および料金引き下げが行われる閾値を表す。

図8は、低料金が選択される領域と高料金が選択される領域は必ずしも排他的ではないことを表して

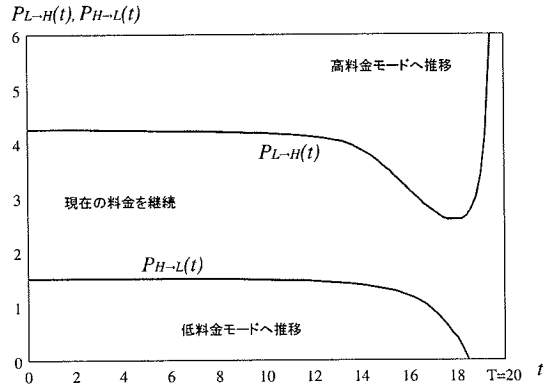


図-9 料金変更問題：料金変更領域

いる。すなわち、2つの料金変更領域に挟まれた領域  $[P_{L \rightarrow H}, P_{H \rightarrow L}]$  においては、その直前まで選択されてきた料金モードがそのまま継続される。このことは、Dixit and Pindyck<sup>18)</sup>などの分析結果と整合的である。

#### b) 時間経過と料金変更領域

次に、時間の経過に伴う料金変更領域の推移を示そう。図-9は、横軸に時刻を、縦軸に料金変更領域をそれぞれプロットしたものである。この図より、以下の2点が判る。第1に、対象期間の満期付近ではあらゆる料金変更が行われない。これは、料金変更に伴うサンク・コストを、変更後の料金収入でカバーできないためである。第2に、時間の経過と共に、料金変更が行われる閾値  $P_{H \rightarrow L}, P_{L \rightarrow H}$  がいずれも低下する。これは以下のように解釈できる。まず、料金引き上げについての閾値  $P_{L \rightarrow H}$  が低下するのは、高い料金に利用者が反応する前に、少しでも多くの料金を徴収しようとする近視眼的な行動が行われることを反映している。同様に、料金引き下げの閾値  $P_{H \rightarrow L}$  が低下するのは、低料金の下で利用者が十分増加する前に管理期間が終了するため、料金変更へのインセンティブが減少することを意味している。

## 7. おわりに

本研究では、従来のリアル・オプション研究における典型的な3種類の問題を現実的な枠組みへ一般化した問題に対し、統一的な数学表現および見通しの良い解法開発のための枠組みを提案した。具体的には、第1に、一見性質の異なるこれら3つのリアル・オプション問題が、いずれも、VIPとして統一的に記述・分析できることを明らかにした。第2に、このVIPが適切な関数変換によって標準形のLCPに帰着することを明らかにし、最近の数理計画理論を活用した、一般性のあるアルゴリズムを開発した。

本研究のアプローチを活用した重要な研究課題として、より複雑な意思決定構造を持つリアル・オプションへの拡張がある。一般に、多くのプロジェクトは、様々なアクティビティと、それらを状況に応じて切り替えるオプションから構成される複合オプションである。例えば、本稿で扱った3つのフェイズ全体を一つの有料道路の整備・運用事業として運用する場合がこれに相当する。このようなプロジェクトは、各サブ・オプションの権利行使が相互に依存し合う、複雑な連鎖的構造をもっている。こうした複雑な構造を持つ複合オプション全体の評価・意思決定問題に対しては、本研究で行った時間についての分解のみならず、オプションの権利行使構造についての問題の分解可能性に着目したアプローチが有効である。その詳細は、長江・赤松<sup>15)</sup>で報告する予定である。

## 付録 I 微分作用素の差分近似

ここでは、問題 [VIP], [LCP] に現れる偏微分作用素  $\mathcal{L}$  の具体的な差分近似の例を示す。偏微分方程式の差分解法で一般的に用いられる Crank-Nicolson 法を差分スキームとして採用すれば、偏微分作用素  $\mathcal{L}V(t, P)$  は、以下のように差分近似される。

$$\mathcal{L}V(t^i, P) \approx L^i V^i + M^i V^{i+1} \quad (\text{I.1})$$

ここで、 $L^i$  は、以下の3項帯行列：

$$L^i \equiv \begin{bmatrix} b^{i,1} & c^{i,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^{i,2} & b^{i,2} & c^{i,3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{i,j} & b^{i,j} \end{bmatrix}$$

であり、その各要素は、 $A^{i,j} \equiv \frac{a^{i,j}}{4\Delta t P}$ ,  $B^{i,j} \equiv \frac{(\sigma^{i,j})^2}{4(\Delta P)^2}$  を用いて、それぞれ、 $a^{i,j} \equiv -A^{i,j} + B^{i,j}$ ,  $b^{i,j} \equiv -\frac{1}{\Delta T} + 2B^{i,j} - r$  および  $c^{i,j} \equiv A^{i,j} + B^{i,j}$  と定義される。また、 $M^i$  は、 $L^i$  の対角成分  $b^{i,j}$  を  $a^{i,j} \equiv \frac{1}{\Delta T} + 2B^{i,j}$  で置き換えたものである。

## 付録 II 写像の効率的計算方法

ここでは、問題 [LCP-B], [LCP-C] の具体的な計算において必要な写像の効率的評価方法を示す。以下では、任意のベクトル  $f^i$  が、異なる3つのインデクス集合  $\bar{\mathcal{J}} \equiv \{1, \dots, J, \max\}$ ,  $\underline{\mathcal{J}} \equiv \{\min, 1, \dots, J\}$  および  $\mathcal{J} \equiv \{\min, 1, \dots, J, \max\}$  に対応していることを明示するために、それぞれ、 $\bar{f}^i, \underline{f}^i, f^i$  と記述する。

### (1) 建設投資戦略問題 [LCP-B]

問題 [LCP-B] の最適値関数、未知変数および写像は、それぞれ、 $\bar{V}, \underline{X}$  および  $\bar{G}$  と記述される。このとき、写像  $\bar{G}(\underline{X}^i)$  は、以下の手続きにより計算できる。

**Step 1**  $\underline{X}^i$  を  $\bar{X}^i$  に変換。  $\underline{X}^i$  の第1要素を取り除き、末尾に  $X^{i,\max} = 0$  を挿入。

**Step 2** 線型方程式

$$\bar{L} \bar{V}^i = -\bar{X}^i - \bar{M} \bar{V}^{i+1} + \bar{1}C \quad (\text{II.1})$$

を解いて、最適値関数  $\bar{V}^i$  を求める。

**Step 3**  $\bar{V}^i$  を  $V^i$  に変換。  $\bar{V}^i$  の先頭に  $V^{i,\min} = 0$  を挿入。

**Step 4**  $V^i$  を用いた以下の式より、写像  $\bar{G}^i$  を計算する。

$$\bar{G}^i := -\underline{D}V^i \quad (\text{II.2})$$

ここで、 $\bar{L}, \bar{M}$  は、それぞれ、インデクス  $\bar{\mathcal{J}}$  に対応する  $(J+1) \times (J+1)$  正方行列である。また、 $\underline{D}$  は、 $J \times (J+1)$  の矩形行列であり、インデクス  $\underline{\mathcal{J}}$  から  $\underline{\mathcal{J}}$  へと対応する変数を変換する演算子である。

### (2) 料金変更問題 [LCP-C]

問題 [LCP-C] の最適値関数、未知変数および写像は、それぞれ、

$$V \equiv \begin{bmatrix} V_L \\ V_H \end{bmatrix}, \quad X \equiv \begin{bmatrix} \bar{X}_L \\ X_H \end{bmatrix}, \quad G \equiv \begin{bmatrix} \bar{G}_L \\ G_H \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

と記述される。このとき、写像  $G^i(X^i)$  を計算する具体的な手続きは、以下のように表せる。

**Step 1**  $\bar{X}_L^i, X_H^i$  を、 $\underline{X}_L^i, \bar{X}_H^i$  に変換。  $\bar{X}_L^i$  の末尾要素を取り除き、先頭に  $X_L^{i,\min} = 0$  を挿入。同様に、 $\underline{X}_H^i$  の先頭要素を取り除き、末尾に  $X_H^{i,\max} = 0$  を挿入。

**Step 2** 最適値関数の計算。以下の線型方程式を、それぞれ、 $\bar{V}_H^i, \underline{V}_L^i$  について解く。

$$\bar{L}_H^i \bar{V}_H^i = -\bar{X}_H^i - \bar{M}_H^i \bar{V}_H^{i+1} - \bar{\pi}_H^i$$

$$\underline{L}_L^i \underline{V}_L^i = -\underline{X}_L^i - \underline{M}_L^i \underline{V}_L^{i+1} - \underline{\pi}_L^i$$

**Step 3** 以下の式より写像  $G^i$  を計算する。

$$G^i := \begin{bmatrix} \bar{V}_L^i - \bar{V}_H^i + \bar{1}C_{L,H} \\ \underline{V}_L^i - \underline{V}_L^i + \underline{1}C_{H,L} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

ここで、 $\bar{V}_L^i$  は、変数の次元を合わせるために、Step 2 で求めた  $\underline{V}_L^i$  の先頭要素を削除し、末尾に  $V_L^{i,\max} =$



$V_H^{i,\max} - C_{L,H}$  を挿入したものである。同様に,  $\hat{V}_H$  は,  $\bar{V}_H$  の末尾要素を削除し, 先頭に  $V_H^{i,\min} = V_L^{i,\min} - C_{H,L}$  を挿入したものである。

## 参考文献

- 1) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- 2) Schwartz, E. S. and Trigeorgis, L. eds.: *Real Options and Investment under Uncertainty - Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press, 2001.
- 3) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, chapter 5, Princeton University Press, 1994.
- 4) McKean Jr., H.: Appendix: A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics, *Industrial Management Review*, Vol. 6, pp. 32–39, 1965.
- 5) Merton, R. C.: The theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141–183, 1973.
- 6) Merton, R. C.: *Continuous Time Finance*, Blackwell, 1990.
- 7) Brennan, M. J. and Schwartz, E. S.: The valuation of American put options, *The Journal of Finance*, Vol. 32, No. 2, pp. 449–462, 1977.
- 8) Jaillet, P., Lamberton, D. and Lapeyre, B.: Variational inequalities and the pricing of American options, *Acta Applicandae Mathematicae*, Vol. 21, pp. 263–289, 1990.
- 9) Geske, R. and Johnson, H.: The American put option valued analytically, *Journal of Finance*, Vol. 39, pp. 1511–1524, 1984.
- 10) Jacka, S.: Optimal stopping and the American put, *Mathematical Finance*, Vol. 1, pp. 1–14, 1991.
- 11) Carr, P., Jarrow, R. and Myneni, R.: Alternative characterization of American puts, *Mathematical Finance*, Vol. 2, pp. 87–106, 1992.
- 12) Huang, J., Subrahmanyam, M. and Yu, G.: Pricing and hedging American options: A recursive integration method, *The Review of Financial Studies*, Vol. 9, pp. 277–300, 1996.
- 13) Broadie, M. and Glasserman, P.: Pricing American-style securities using simulation, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 21, pp. 1323–1352, 1997.
- 14) Dempster, M. and Hutton, J.: Pricing American stock options by linear programming, *Mathematical Finance*, Vol. 9, pp. 229–254, 1999.
- 15) 長江剛志, 赤松隆: 連鎖的な意思決定構造を持つプロジェクトの動学的評価法: グラフ・オプション・モデルとその解法, 土木学会論文集, 2004, 投稿中.
- 16) Margrabe, W.: The value of an option to exchange one asset for another, *The Journal of Finance*, Vol. 33, No. 1, pp. 177–186, 1978.
- 17) Stulz, R. M.: Options on the minimum or the maximum of two risky assets, *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, No. 2, pp. 161–185, 1982.
- 18) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, chapter 7, Princeton University Press, 1994.
- 19) Dixit, A. K.: Entry and exit decisions under uncertainty, *Journal of Political Economy*, Vol. 97, pp. 620–638, 1989.
- 20) Majd, S. and Pindyck, R. S.: Time to build, option value, and investment decisions, *Journal of Financial Economics*, Vol. 18, pp. 7–17, 1987.
- 21) Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, chapter 11, Princeton University Press, 1994.
- 22) Bar-Ilan, A., Sulem, A. and Zanello, A.: Time-to-build and capacity choice, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 26, pp. 69–98, 2002.
- 23) Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations, An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, 1998.
- 24) Duffie, D.: *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, 2nd edition, 1996.
- 25) Ferris, M. C. and Pang, J.-S. eds.: *Complementarity and Variational Problems: State of the Art*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
- 26) Fukushima, M.: Equivalent differentiable optimization problem and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Mathematical Programming*, Vol. 53, pp. 99–110, 1992.

(2003.8.21 受付)

## VARIATIONAL INEQUALITY APPROACH TO INFRASTRUCTURE INVESTMENT/MANAGEMENT PROBLEMS UNDER UNCERTAINTY

Takashi AKAMATSU and Takeshi NAGAE

This study proposes a unified framework for formulating and computing the financial value of various infrastructure projects (real options). We first show that the pricing problems of typical real options can be represented as a VIP (variational inequality problem). Our analysis then reveals that the VIP reduces to a LCP (linear complementarity problem) by using certain function transformation techniques. This enables us to develop an efficient method for solving the real option problems in a unified manner, exploiting the recent advances in the theory of complementarity problems.