

鉛直加速度を考慮した開水路流れの 水深積分モデルの改良とその検証について

音田 慎一郎¹・細田 尚²・木村 一郎³

¹学生員 修(工) 京都大学大学院 工学研究科土木工学専攻博士課程 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail: sonda@river4.kuciv.kyoto-u.ac.jp

²正会員 工博 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

³正会員 博(工) 国立松江高等工業専門学校助教授 土木工学科 (〒690-8518 島根県松江市西生馬町14-4)

本研究は、鉛直加速度を考慮した開水路流れの水深積分モデルについて、基礎式・流速分布を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目し、モデルの改良を検討したものである。基礎式の誘導に際し、非回転条件に適合する流速分布形を求める方法とMadsen & Schafferがポテンシャル流れに対して用いた線形分散関係のsingularityを解消する分散項の修正法を適用するとともに、この修正を流速分布、圧力分布に反映させて平均流速を用いた分布形を導いた。導かれた基礎式を水槽内水面振動現象に適用し、線形・非線形解析と微小振幅波理論、および鉛直2次元数値解析結果を比較することで、モデルの検証を行った。

Key Words : *depth averaged flow model, Boussinesq equation, non-linear analysis, numerical simulation*

1. はじめに

Boussinesq 方程式は海岸域の波・流れ共存場の水面変動の予測だけでなく、開水路流れの波状跳水や砂堆の発生・発達過程を再現できる実用的な水深積分モデルである。しかし、原形 Boussinesq 方程式は、例えば水の波に適用した場合、高波数領域で微小振幅波理論の分散関係と適合しない、波上路床上流れの底面せん断応力分布が再現できないなどの問題点がある。

そこで、原形 Boussinesq 方程式の修正に関して様々な改良が提案されてきた。Madsen ら¹⁾は、分散項に長波の運動方程式を空間的に2階微分した項を加え、線形分散関係が広範囲で適応するようにパラメータを同定した。Nwogu²⁾は、平均流速ではなく任意の高さの流速を速度変数として、非回転条件を近似的に満足する流速分布形を導入した。さらに、連続式、運動量方程式に代入し水深積分することで、任意の高さの流速をパラメータとした基礎式を誘導した。

また最近では、原形 Boussinesq 方程式の改良として、ポテンシャル流の基礎式、境界条件から高精度 Boussinesq 型モデルを求めるという新たなアプローチが展開されている。Madsen & Schaffer³⁾、Madsen ら⁴⁾、Agnon ら⁵⁾は、速度ポテンシャルを静水面から鉛直方

向に展開した無限級数で表し、ラプラス方程式に代入して流速分布形を求めた。得られた流速分布を境界条件に代入することで、静水面での流速をパラメータとした基礎式を導いた。Gobbi ら⁶⁾は、Nwogu の方法を拡張し、任意の高さの2点で内挿した速度ポテンシャルを速度変数として基礎式を表記している。

以上のように、従来より提案されてきた改良型モデルでは、流速分布を任意の高さの流速と水深平均流速の複雑な関係式として陰的に表しているものが多く、河川流などの基本量である水深平均流速と流速分布との関係を陽的に簡易に表している一般的なモデルは少ない。

そこで、本研究では流速分布、基礎式を水深平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目して原形 Boussinesq 方程式の改良を行う。誘導過程を要約すると以下ようになる。

流速分布の一様性を仮定し、非回転条件と連続式を繰り返し用いることで非回転条件に適合する流速分布を求める方法⁷⁾を適用して流速分布の修正を行う。次に、得られた流速分布を運動方程式に代入し積分することで、圧力分布と運動量方程式を導く。さらに、このままでは高波数で分散関係の分母がゼロになるため、Madsen & Schaffer³⁾と類似の方法を適用してこの

singularity を解消するとともに、分散項の修正を流速分布、圧力分布に反映させることを試みる。また、上記の誘導過程を考察することで、Madsen ら¹⁾の改良では言及されていない長波方程式の空間的 2 階微分を分散項に加えた理由と明らかになされていない流速分布形について簡易な解釈を記述する。

導かれた基礎式を水槽内水面振動現象に適用し、線形・非線形解析と微小振幅波理論、および鉛直 2 次元数値解析結果を比較することで、モデルの検証を行った。

2. 基礎式の誘導過程

(1) 流速分布の第 1 修正と運動量方程式

底面は平坦路床とし、路床に沿う流下方向、流下方向と垂直な方向をそれぞれ x 軸、 z 軸とする。座標系を図-1 に示す。原形 Boussinesq 方程式の流速分布、運動量方程式の第 1 修正として、連続式と非回転条件を繰り返し用いることで、非回転条件に適合する流速分布形を求める方法を適用する。誘導過程を以下に示す。

x 方向の流速成分 u を水深方向について一様と仮定すると次式となる。

$$u = U(x) \quad (1)$$

ここに、 u : 流速ベクトルの x 方向成分、 U : 水深平均流速。

式(1)を連続式に代入し、 z から h まで積分すると、 z 方向流速 w の分布形として式(2)が得られる(この手順を過程 1 とする)。

$$w = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2)$$

ここに、 w : 流速ベクトルの z 方向成分、 h : 水深、 t : 時間。

上式を非回転条件に代入し、積分することで u の分布形を求める(この手順を過程 2 とする)。

$$u = U + \frac{h^2}{2} A \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right), \quad A = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} \quad (3)$$

式(3)を用いて、過程 1 を繰り返す。

$$w = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{6} \frac{\partial Ah^2}{\partial x} z - \frac{1}{6} \frac{\partial A}{\partial x} z^3 \quad (4)$$

過程 2 を繰り返し、 u を求め直す。

$$u = U + \frac{h^2}{2} B \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 Ah^2}{\partial x^2} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \quad (5)$$

過程 1 を繰り返し、 w を求め直す。

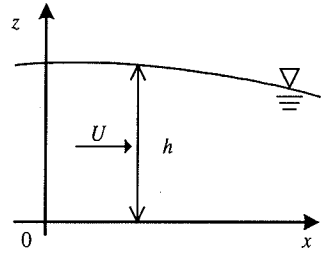


図-1 座標系の説明図

$$w = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left\{ \frac{1}{6} \frac{\partial Bh^2}{\partial x} + \frac{1}{36} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 \frac{\partial^2 Ah^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{120} \frac{\partial}{\partial x} \left(h^4 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) \right\} z - \left(\frac{1}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{36} \frac{\partial^3 Ah^2}{\partial x^3} \right) z^3 + \frac{1}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} z^5 \quad (6)$$

$$B = A = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right\} \quad (7)$$

ここで式(5)、(6)中、例えば Ah^2 の空間微分については、

$$\frac{\partial Ah^2}{\partial x} = h^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 2Ah \frac{\partial h}{\partial x}$$

となるが、本研究では基礎式を簡易に表すことに着目しており、また水深が流下方向に徐々に変化すると仮定すると、上式の右辺第 2 項が無視できることから、第 1 項だけを考慮する。

従って、 h を微分の前に出し、 A 、 B について空間微分を行うと、式(5)、(6)は次のようになる。

$$u = U + \frac{h^2}{2} B \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \dots \quad (8)$$

$$w = \frac{z}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left(\frac{h^2}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z - \left(\frac{1}{6} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{h^2}{36} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} \right) z^3 + \frac{1}{120} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} z^5 \dots \quad (9)$$

式(8)、(9)を z 方向の運動方程式に代入し、 z から h まで積分すると圧力分布の表示式(10)が得られる。

$$\frac{p}{\rho} = G(h-z) + \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) (D+H) + \left(1 - \frac{z^4}{h^4} \right) (E+I) + \left(1 - \frac{z^6}{h^6} \right) (F+K) + \dots \quad (10)$$

ここに、 G : 重力加速度、

$$C = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

$$D = \frac{h^2}{2} U \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right) + \dots,$$

$$E = \frac{h^4}{4} U \left(-\frac{1}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{h^2}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right) + \dots,$$

$$F = \frac{h^6}{6} U \left(\frac{1}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \right) + \dots,$$

$$H = \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} + \frac{h^4}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t} - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t} \right) + \dots,$$

$$I = \frac{h^4}{4} \left(-\frac{1}{6} \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} - \frac{h^2}{36} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t} \right) + \dots,$$

$$K = \frac{h^6}{6} \frac{1}{120} \frac{\partial^4 A}{\partial x^3 \partial t}.$$

圧力分布を求める際、 h に関する時間微分も含まれるが、前述の理由から空間微分と同様に取り扱うこととする。

圧力分布、流速分布を x 方向の運動方程式に代入し、水深積分することで運動量方程式(11)を導く。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right. \\ & - \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^4 q}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^4 h}{\partial x^3 \partial t} \\ & \left. - \frac{2}{945} h^6 \frac{\partial^6 q}{\partial x^5 \partial t} + \frac{2}{945} h^6 U^2 \frac{\partial^6 h}{\partial x^6} + \frac{4}{945} h^6 U \frac{\partial^6 h}{\partial x^5 \partial t} \right\} \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 q : 単位幅流量。

式(11)の分散項をみると、微分の全階数、係数は異なるものの、3, 5, 7階微分のそれぞれ3項を1つのまとまりとして、類似した形で表記されていることが分かる。そこで、流速分布、圧力分布式との対応関係を調べると、7次の項は非回転条件を反復することで導かれ、式(8), (9), (10)の A の項から求められる。また、5次の項は B の項から導かれる。Madsen & Schaffer³⁾が指摘するように流速分布に非回転条件のみを考慮しても、水の波の線形分散関係に分母が0になる点 (singularity) が存在するが、反復回数を増やすことでこの点は若干高波数へ移動する。

(2) 分散項の修正

式(11)の微分の階数を減らし、singularityを解消するため、圧力分布の水深積分から導かれる分散項の修正を考える。Madsen & Schaffer³⁾, Agnonら⁵⁾は、ポテンシャル流の基礎式から Boussinesq 型モデルを導き、分散項の修正を加え、モデルの高精度化を計っている。ここでは、彼らが用いた方法と類似の修正法を式(11)に適用することを試みる。

修正の方法を簡単に記述すると次のようになる。考えている微分方程式が次式で表されるとする。

$$L1(x) + L2(x) = \alpha \frac{d^2 L2(x)}{dx^2} + \dots, \quad \alpha: \text{定数}$$

上式中、 $L2$ は $L1$ より高階とし、右辺は左辺各項より微小とする。

このとき、上式の第一近似は $L2(x) = -L1(x)$ であり、これを右辺に代入すると微分の階数を減少させることができる。但し代入する際、 $L2(x) = -\xi L1(x)$ のように定数を乗じて、何らかの制約条件 (ここでは分散関係) を満足させることができるようにする。

上記の方法を式(11)に適用すると次のようになる。なお、以下の修正は分散特性の向上を目的としているため、Madsen & Schaffer³⁾にならない、式(12)右辺については移流項を無視している。

$$\begin{aligned} L2 &= \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} - \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \\ &\approx \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L2}{\partial x^2} &= \frac{1}{45} h^4 \frac{\partial^7 q}{\partial x^6 \partial t} - \frac{1}{45} h^4 U^2 \frac{\partial^7 h}{\partial x^7} - \frac{2}{45} h^4 U \frac{\partial^7 h}{\partial x^6 \partial t} \\ &= \xi \left\{ \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

式(11)中7次の項に、式(13)を代入し、整理すると以下のようになる。 ξ が制約条件としての分散関係を近似的に満足させるための定数である。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G h^2}{2} \right) + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \\ & - \frac{1}{3} h^2 \left(1 + \frac{2}{7} \xi \right) \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{2}{21} \xi h^2 \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{G h^2}{2} \right) \\ & - \frac{1}{45} h^4 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} + \frac{1}{45} h^4 U^2 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} \\ & + \frac{2}{45} h^4 U \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

また、式(11)中の3次の項について上記の方法を適用し、5次の項に式(16)を代入すると式(17)が得られる。

$$\begin{aligned} L2 &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} \\ &\approx \frac{\partial q}{\partial t} + G h \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L2}{\partial x^2} &= \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^5 q}{\partial x^4 \partial t} - \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^5 h}{\partial x^5} - \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^5 h}{\partial x^4 \partial t} \\ &= \eta \left\{ \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} + G h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + Gh \frac{\partial h}{\partial x} \\ & - \left(\frac{\eta}{15} + \frac{1}{3} \right) h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\eta}{15} Gh^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \\ & + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Madsen ら¹⁾の提案式(18)は、平均流速が小さい場合について検討したものであるため、式(17)の左辺第 6, 7 項を無視し、 $\eta=1$ とすると、式(17)は式(18)と一致する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q U}{\partial x} + Gh \frac{\partial h}{\partial x} \\ & - \left(B_M + \frac{1}{3} \right) h^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} - B_M Gh^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0, \quad B_M = \frac{1}{15} \end{aligned} \quad (18)$$

Madsen ら¹⁾は、原形 Boussinesq 方程式の分散項に長波方程式を空間的に 2 階微分した項を加える理由について言及していないが、上記の誘導から次のように解釈できる。即ち Madsen らの改良は、非回転条件を満足するよう流速分布形を修正し、それによって導かれる高次の分散項に、より低次の方程式を代入して微分の階数を減らしていると考えられる。

(3) 流速分布、圧力分布の第 2 修正

本研究では、後述するように矩形水槽内水面振動現象に適用し、基礎式の検証を行っている。水槽内水面振動現象と同様に、急激な水面変動を伴う現象の例として、波状段波が挙げられる。波状段波のように非定常性が卓越する場合、平均流速が小さいと仮定し、原形 Boussinesq 方程式の鉛直加速度非定常項（時間微分を伴う項）のみを考慮することで、流況をある程度再現できることが報告されている⁸⁾。水槽内水面振動現象においても、非定常性が強く、鉛直加速度非定常項を考慮することで、流況を再現できると考えられる。従って、本論文では平均流速が無視できる場合について、分散項の修正を流速分布に反映させ、第 2 修正を検討する。

(2) で行った分散項の修正は、運動量方程式(11)において最も微分の階数の高い 7 次の項を無視し、5 次の項を 3 次以下の項で表した関係式(13)を 7 次の項に代入している。(1) で記述したように、7 次の項は流速分布式(8)、(9)の A の項より導かれることから、A と 5 次の項をより低次の項で表した関係式(12)とを関係付けることで、流速分布の第 2 修正を求めることができると考えられる。そこで、一次的考察から A についての関係式を求めると、時間積分を用いて次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{45\xi}{h^5} \left\{ \int \frac{\partial q}{\partial t} dt + Gh \int \frac{\partial h}{\partial x} dt - \frac{1}{3} h^2 \int \frac{\partial^3 q}{\partial x^2 \partial t} dt \right\} \quad (19)$$

なお、式(19)を用いた流速分布、圧力分布を x 方向の運動方程式に代入し、水深積分することで得られる運動量方程式が式(14)と一致することを確認している。

式(19)を流速分布式(8)、(9)に代入することで本改良モデルの流速分布が求められる。また、圧力分布についても式(19)を式(10)に代入すれば評価できる。さらに同様な考察より、Madsen ら¹⁾の提案式では明らかにされていない流速分布を求めることができる。但し、式(8)、(9)中の A の項を 0 とし、B に式(20)を代入する。

$$B = -\frac{3\eta}{h^3} \left\{ \int \frac{\partial q}{\partial t} dt + Gh \int \frac{\partial h}{\partial x} dt \right\}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0 \quad (20)$$

平均流速が無視できない場合については、時間積分だけでなく空間積分の導入が必要であると推測される。

3. 水槽内水面振動の線形解と微小振幅波理論の比較

本研究では後述の数値計算や非線形解析の容易さを考えて、矩形水槽内の水面振動現象を用いて、基礎式の適用性を検証する。

(1) 線形分散関係

次式のように水理量を平均値と微小な偏差の和として表し、基礎式系を線形化する。

$$h = h_0 + h', \quad U = U_0 + U'$$

ここに、 h_0 , U_0 はそれぞれ平均水深、水深平均流速の平均値を、 h' , U' はそれからの偏差を表したものであり、水槽内水面振動では $U_0=0$ である。上式を式(14)および連続式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U h}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

に代入し、 U' を消去すると、 h' に関する次のような線形方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} - 2U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} - (U_0^2 - Gh_0) \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \\ & + \frac{1}{3} h_0^2 U_0^2 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{2}{3} h_0^2 U_0 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{3} h_0^2 \left(1 + \frac{2}{7} \xi \right) \frac{\partial^4 h'}{\partial x^2 \partial t^2} \\ & - \frac{2}{21} \xi Gh_0^3 \frac{\partial^4 h'}{\partial x^4} + \frac{1}{45} h_0^4 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^4 \partial t^2} \\ & + \frac{1}{45} h_0^4 U_0^2 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^6} + \frac{2}{45} h_0^4 U_0 \left(1 - \frac{10}{7} \xi \right) \frac{\partial^6 h'}{\partial x^5 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、図-2 を参考に水槽内水面振動の初期の波形として、以下のような波形を考える。

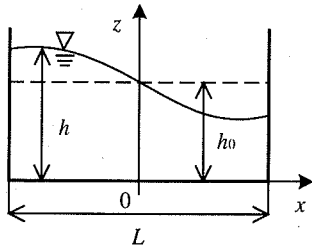


図-2 水槽内水面振動現象

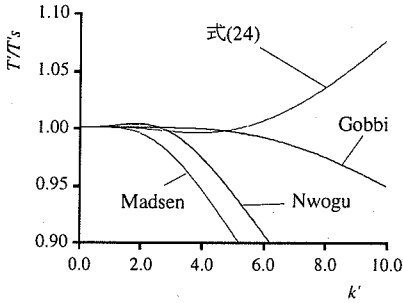


図-3 各モデルにおける線形分散関係の比較

$$h' = -a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad U_0 = 0 \quad (23)$$

式(22)に式(23)を代入すれば、分散関係として次式を得る。

$$T_s'^2 = T^2 \frac{G}{h_0} \left[1 + \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \frac{1}{3} k'^2 - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) k'^4 \right] \quad (24)$$

$$= \frac{k'^2 + \frac{2}{21} \xi k'^4}{k'^2 + \frac{2}{21} \xi k'^4}$$

ここに、 T : 周期、無次元波数 $k' = \pi h_0 / L$ 。

微小振幅波理論についても同様に、水槽内水面振動(重複波)の分散関係を求めると、以下ようになる。

$$T_s'^2 = (2\pi)^2 \frac{1}{k' \tanh k'} \quad (25)$$

図-3 は T_s'/T_0 と k' との関係を示している。微小振幅波理論と高波数領域においても適合するように、式(24)中のパラメータを同定すると、 $\xi = 0.92$ となる。Madsen ら¹⁾、Nwogu²⁾の結果よりも線形分散関係が高波数領域まで適合しており、 $T_s'/T_0 \leq 1 \pm 0.05$ とすると適合する無次元波数がほぼ 9 まで増加している。Gobbi ら⁹⁾の提案式に比べると、若干適応範囲が狭いものの、本改良モデルは、任意の高さの流速をパラメータとしたモデル²⁾⁻⁶⁾より、流速分布、基礎式を水深平均流速で簡易に表すことができると考えられる。また、水槽内水面振動のようにポテンシャル流として扱われる解析では、非回転条件の反復を増やすことで、

線形分散関係がより高波数領域まで適合すると思われる。

(2) 流速分布

流速分布に関しては、 x 方向流速 u について比較を行う。式(7)、(8)、(19)を線形化すると、式(26)、(27)、(28)となる。

$$u = U_0 + U' + \frac{h_0^2}{2} B \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{h_0^4}{12} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) - \frac{h_0^4}{24} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \left(\frac{z^4}{h^4} - \frac{1}{5} \right) \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{45\xi}{h_0^3} \left\{ U_0 \int \frac{\partial h'}{\partial t} dt + h_0 \int \frac{\partial U'}{\partial t} dt + Gh_0 \int \frac{\partial h'}{\partial x} dt - \frac{1}{3} h_0^3 \int \frac{\partial^3 U'}{\partial x^2 \partial t} dt - \frac{1}{3} h_0^2 U_0 \int \frac{\partial^3 h'}{\partial x^2 \partial t} dt \right\} \quad (27)$$

$$B = \frac{1}{h_0} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} + U_0 \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) \quad (28)$$

式(14)、(21)、(23)から求めた U' および式(23)を式(26)-(28)に代入すれば流速分布の線形解を計算することができる。

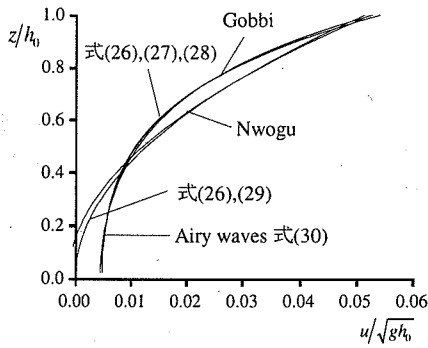
また、Madsen ら¹⁾の提案式では明らかにされていない流速分布として、式(26)の A を 0 とし、式(26)の B に式(29)を代入したもので評価する。

$$B = -\frac{3\eta}{h_0^3} \left\{ U_0 \int \frac{\partial h'}{\partial t} dt + h_0 \int \frac{\partial U'}{\partial t} dt + Gh_0 \int \frac{\partial h'}{\partial x} dt \right\} \quad (29)$$

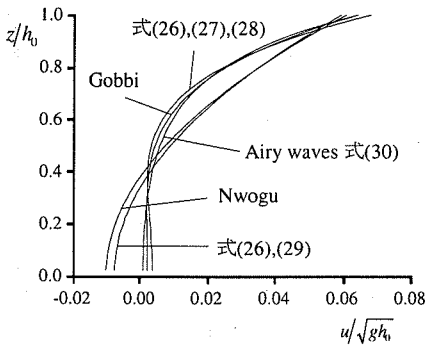
微小振幅波理論についても x 方向の流速分布 u を求めると、次式となる。

$$u = \frac{a_0 T G}{2L} \frac{\cosh \frac{\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{\pi}{L}h} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (30)$$

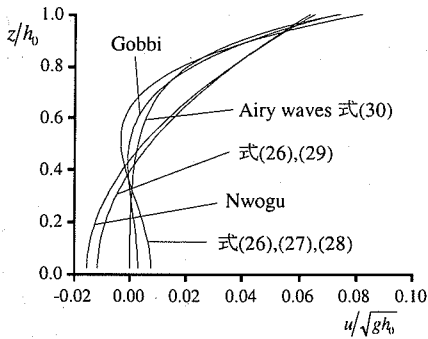
図-4 は、 $h_0 = 0.10\text{m}$ 、 0.15m 、 0.20m (無次元波数はそれぞれ 3.14、4.71、6.28) について、水槽中央断面 $x = 0$ 、 $t = T/4$ における水平方向流速分布の比較を示している。図をみると、 $h_0 = 0.15\text{m}$ までは良好に一致しているが、無次元波数の増加に伴って微小振幅波理論とのずれが大きくなっている。これは、非回転条件を反復することで導かれる高次の項の影響により、流速分布式(26)が水域中に極値を持つためであると考えられる。極値は無次元波数の増加とともに、水域上方へ持ち上げられ、極値から底面に向かって分布形が逆勾配となり、またその勾配が急になることで極値・底面付近でのずれが大きくなっている。Gobbi ら⁹⁾のモデルにおいても極値を持つことが指摘されており、極値を持つ限界無次元波数と求めると、本モデルでは $k' \approx 3.86$ 、Gobbi らのモデルでは 4.24 と若干高い。前述のように非回転条件の反復を増やし、線形分散関係



(a) $h_0=0.10\text{m}$



(b) $h_0=0.15\text{m}$



(c) $h_0=0.20\text{m}$

図-4 各モデルにおける流速分布の比較

が高波数領域まで一致すれば、流速分布についてもより高波数まで適合すると推測される。

4. 矩形水槽内水面振動の鉛直2次元数値解析

次に非線形性が強い領域でのモデルの適用性を検討するために、数値解析を行い、非線形解析と比較するデータとする。

鉛直2次元水面振動の数値計算に関して、時間的に変動する水面に適合した移動一般座標系を用いる方法を考える。

流速ベクトルの反変成分 V を未知数として基礎式を記述すると、移動一般座標系での連続式、運動方程式は以下ようになる。なお、水槽内水面振動はポテンシャル流として扱われるので、粘性項は無視している。

[連続式]

$$\frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial V^a \sqrt{J}}{\partial \zeta^a} = 0 \quad (31)$$

[運動方程式]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^i}{\partial t} + \nabla_j [V^i (V^j - W^j)] + V^i \nabla_j W^j + V^i \nabla_j W^i \\ = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij} \nabla_j p \end{aligned} \quad (32)$$

ここに、 ζ : 計算空間での空間座標、 t : 時間、 ∇ : 共変微分、 V^i : 流速ベクトルの反変成分、 W^i : 計算格子移動速度ベクトルの反変成分、 p : 圧力、 ρ : 水の密度、 F^i : 外力、 g^{ij} : 基本反変テンソル、 J : 基本反変テンソルからなる行列の行列式。

変数の配置には、スタッガードスキームを用いて配置し、基礎式の離散化として、有限体積法を用いる。また移流項の離散化には TVD-MUSCL⁹⁾ を適用する。

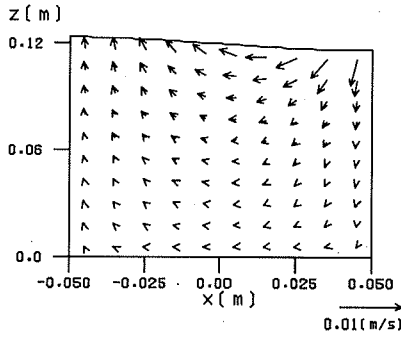
水槽内水面振動の数値解析として初期の波形に以下のような正弦波を与える。

$$h = h_0 - a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad (33)$$

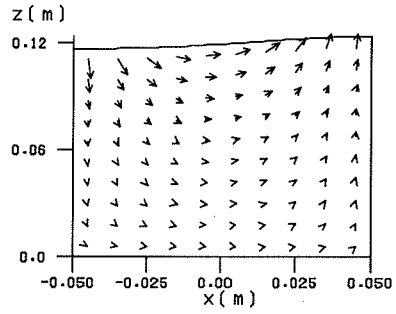
ここに、 a_0/h_0 : 初期振幅、 T : 周期、 L : 水槽の長さ。

$L = 0.1\text{m}$ に固定し、平均水深を $h_0 = 0.05\text{m}$ から 0.15m まで 0.01m ごとに増加させて数値計算を行う。なお、初期水面の振幅については、表-1 に示すように小さい場合、比較的大きい場合、大きい場合としてそれぞれ $a_0/h_0 = 0.03, 0.2, 0.3$ とする。水面の変動がほぼ安定するまで計算を繰り返し、そのときの振幅、周期を求める。また、水深を大きくしていくと、水面の変動によっては移動一般座標系で計算できない場合があるため、 $h_0 = 0.1\text{m}$ からはデカルト座標系での基礎式を用いた VOF 法により解析を行っている。VOF 法においても変数の配置、基礎式の離散化、計算条件などは同じである。

鉛直2次元数値解析による計算例として、初期振幅が小さい場合 (RunA03) の $h_0 = 0.12\text{m}$ における流況の時間的変化を示したものが図-5(a),(b) である。(a),(b) はそれぞれ初期波形とほぼ同位相、あるいは逆位相での計算結果である。周期的に水面の変動している様子が再現されている。また、初期振幅が小さい場合の数値



(a) 初期波形と同位相



(b) 初期波形と逆位相

図-5 初期振幅が小さい場合の水面変動の計算結果 (RunA03, $h_0=0.12\text{m}$)

表-1 数値解析の水量

	数値解析法	初期振幅 a_0/h_0
RunA03	移動一般座標系	0.03
RunA20-B	移動一般座標系	0.2
RunA20-V	VOF	0.2
RunA30-B	移動一般座標系	0.3
RunA30-V	VOF	0.3

解析結果を用いて分散関係を示したのが図-6 であり、微小振幅波理論とほぼ一致している。

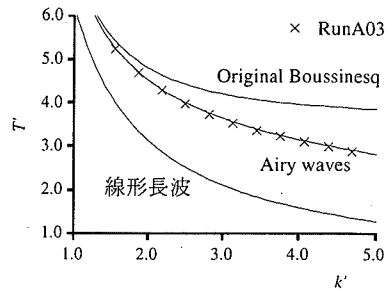


図-6 計算結果と微小振幅波理論の比較

5. 非線形解析結果と数値計算結果の比較

(1) 初期振幅が大きい場合の数値解析結果の考察

初期振幅が比較的大きい場合(RunA20)の計算例として、 $h_0=0.07\text{m}$ の流況の時間変化を図-7 に示す。また、初期振幅が大きい場合(RunA30)の $h_0=0.07\text{m}$, 0.12m での流況の時間的变化を図-8, 9 に示す。 $h_0=0.07\text{m}$ は移動一般座標系を用いた計算結果であり、 0.12m はVOF法による計算結果である。図7-9(a), (b)の流況、特に流速ベクトルにおいて、対称になっていない場合がある。初期振幅が大きいケースでは、非線形性が強く、水面がひずみながら水面振動しているため、非対称となり得るのではないかとと思われる。

初期振幅の大きさによる水面形状の違いを比較してみると、初期振幅が大きいほうが非線形性によって水面のひずみ大きい。また、VOF法による解析は移動一般座標系とは異なり、水面形状をなだらかに表現できないが、RunA30の場合には両ケースとも水面のひずみが確認される。表-2はRunA20, RunA30での計算結果から定常振幅、周期について整理したものである。定常振幅と初期振幅の値を比較してみると、

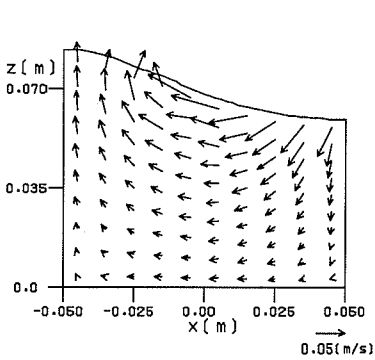
移動一般座標系での定常振幅は初期振幅よりも若干減衰しており、VOF法による結果は大きくなっていることが分かる。移動一般座標系を用いた解析では、水面を計算する際に流速ベクトルの内挿が必要となるため、振幅が若干減衰すると考えられる。また、水槽内水面振動現象では、同じ初期振幅を与えても水深の増大により a_0/L が大きくなり、水面がオーバーハングするような急激な変形を伴って定常状態になるため、VOF法での結果は初期振幅に比べ振幅が大きくなると思われる。急激な波形の変形により波形勾配が急になることで、移動一般座標系での解析が困難なことも説明される。

(2) 非線形解析

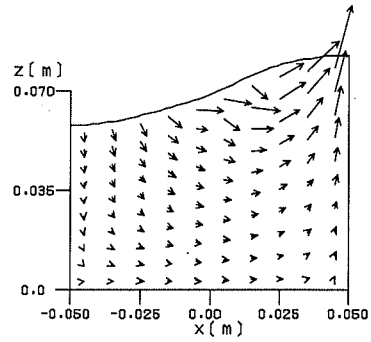
a) 1次モードによる分散関係

非線形解析として、まず水深 h , 平均流速 U を式(34), (35)のように1次モードで表す。初期の波形は、線形解析の場合と同様であり、平均流速については図-2の境界条件を満たすように定める。

$$h = h_0 - h_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (34)$$

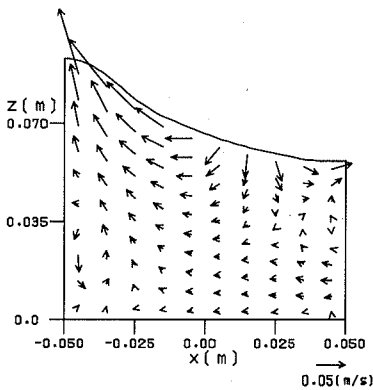


(a) 初期波形と同位相

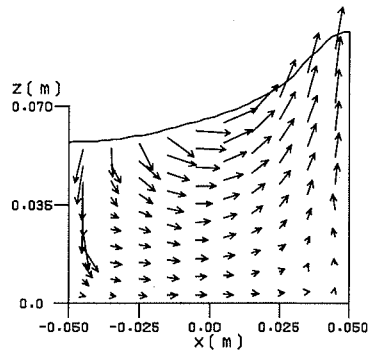


(b) 初期波形と逆位相

図-7 初期振幅が比較的大きい場合の計算結果 (RunA20, $h_0=0.07\text{m}$)

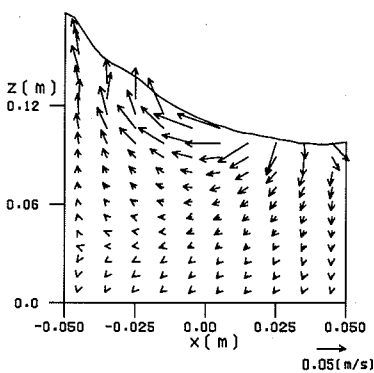


(a) 初期波形と同位相

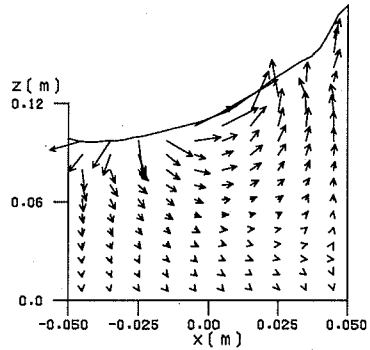


(b) 初期波形と逆位相

図-8 初期振幅が大きく初期水深が小さい場合の計算結果 (RunA30, $h_0=0.07\text{m}$)



(a) 初期波形と同位相



(b) 初期波形と逆位相

図-9 初期振幅が大きく初期水深が大きい場合の計算結果 (RunA30, $h_0=0.12\text{m}$)

$$U = U_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi_{UT1}\right) \quad (35)$$

ここに、 h_1 , U_1 はそれぞれ水面、平均流速の振動振幅を表し、 ϕ_{UT1} は位相差である ($0 \leq \phi_{UT1} < 2\pi$) .

式(34), (35) を式(14), (21)に代入し、時間・空間モード毎に整理する. 例えば、連続式(21)を整理すると、

$$\left(h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} \cos \phi_{UT1}\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

表-2 計算結果 (定常振幅と周期)

	平均水深 h_0 (m)	定常振幅 (h_1/h_0)	周期 (s)
RunA20-B05	0.05	0.190	0.375
RunA20-B06	0.06	0.189	0.371
RunA20-B07	0.07	0.178	0.370
RunA20-B08	0.08	0.172	0.370
RunA20-B09	0.09	0.172	0.373
RunA20-V10	0.10	0.305	0.403
RunA20-V11	0.11	0.318	0.410
RunA20-V12	0.12	0.329	0.411
RunA20-V13	0.13	0.323	0.416
RunA20-V14	0.14	0.318	0.419
RunA20-V15	0.15	0.320	0.419
RunA30-B05	0.05	0.277	0.381
RunA30-B06	0.06	0.266	0.379
RunA30-B07	0.07	0.251	0.374
RunA30-B08	0.08	0.243	0.376
RunA30-B09	0.09	0.234	0.379
RunA30-V10	0.10	0.364	0.412
RunA30-V11	0.11	0.371	0.417
RunA30-V12	0.12	0.370	0.423
RunA30-V13	0.13	0.356	0.419
RunA30-V14	0.14	0.372	0.436
RunA30-V15	0.15	0.328	0.429

$$+ h_0 U_1 \sin \phi_{UT1} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0$$

のようになり、それぞれのモードの係数を 0 にすることで、式(36)、(37)が得られる。

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} \cos \phi_{UT1} = 0 \quad (36)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_0 U_1 \sin \phi_{UT1} = 0 \quad (37)$$

同様に、運動量方程式(14)においても、以下のモードの係数を 0 とすると式(38)、(39)が導かれる。なお、前述のように式(14)の鉛直加速度項については、非定常項のみを考慮する。

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$-h_0 U_1 \frac{2\pi}{T} \sin \phi_{UT1} - \frac{1}{16} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} \sin 2\phi_{UT1}$$

$$- \frac{1}{3} h_0 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \sin \phi_{UT1} \left\{h_0^2 + \frac{1}{16} h_1^2\right\}$$

$$- \frac{1}{3} h_0 h_1^2 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \sin \phi_{UT1}$$

× RunA20-B ($h_1/h_0=0.2$)

+ RunA20-V ($h_1/h_0=0.2$)

△ RunA30-B ($h_1/h_0=0.3$)

□ RunA30-V ($h_1/h_0=0.3$)

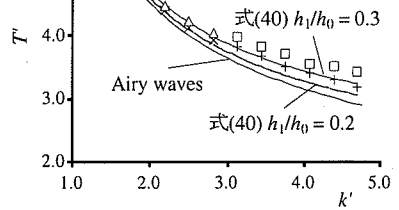


図-10 非線形解析結果と計算結果の比較

$$+ \frac{1}{45} h_0 U_1 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2\pi}{T} \sin \phi_{UT1}$$

$$\times \left\{h_0^4 + \frac{67}{8} h_0^2 h_1^2 + \frac{129}{64} h_1^4\right\} = 0 \quad (38)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

$$h_0 U_1 \frac{2\pi}{T} \cos \phi_{UT1} - \frac{1}{8} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} + \frac{1}{16} h_1 U_1^2 \frac{\pi}{L} \cos 2\phi_{UT1}$$

$$- G h_0 h_1 \frac{\pi}{L}$$

$$+ \frac{1}{3} h_0 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \cos \phi_{UT1} \left\{h_0^2 + \frac{3}{16} h_1^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{3} h_0 h_1^2 U_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{2\pi}{T} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) \cos \phi_{UT1}$$

$$- \frac{2}{21} \xi G h_0^3 h_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 - \frac{3}{56} \xi G h_0 h_1^3 \left(\frac{\pi}{L}\right)^3$$

$$- \frac{1}{45} h_0 U_1 \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{2\pi}{T} \cos \phi_{UT1}$$

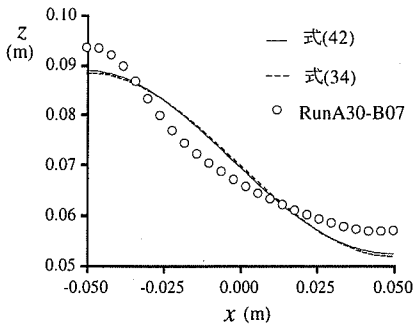
$$\times \left\{h_0^4 + \frac{73}{8} h_0^2 h_1^2 + \frac{261}{64} h_1^4\right\} = 0 \quad (39)$$

式(34)、(35)の振幅、位相差に関する連立方程式(36)-(39)を解くことで、非線形領域における水面振動の近似解が計算できる。

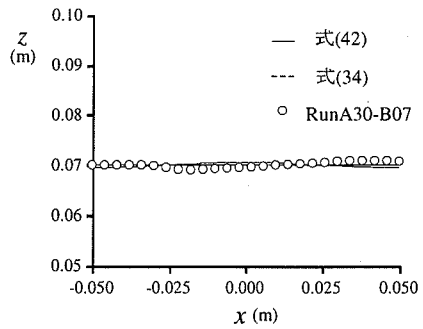
式(37)より $\sin \phi_{UT1} = 0$ なので、式(38)は自動的に満足される。また、 $\phi_{UT1} = 0$ 、 π が考えられるが、式(36)、(37)を用いて式(39)から $\sin \phi_{UT1}$ 、 U_1 を消去し、 h_1^2 、 U_1^2 以上の項を無視して得られる分散関係が線形分散関係と一致するように ϕ_{UT1} を求めると、 $\phi_{UT1} = 0$ となる。したがって、式(39)から ϕ_{UT1} 、 U_1 を消去し整理すると、非線形領域における分散関係は次のように求められる。

$$\left\{k'^2 + \frac{2}{21} \xi k'^4 + \frac{3}{56} \xi \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 k'^4\right\} T'^2$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{7}\xi\right) k'^2 - \frac{1}{45} \left(1 - \frac{10}{7}\xi\right) k'^4$$

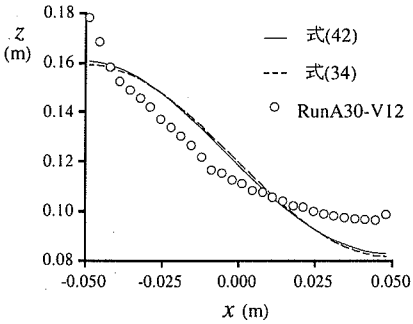


(a) 初期波形と同位相

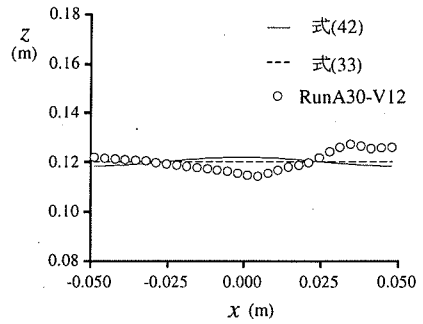


(b) 初期波形と位相差 $\pi/2$

図-11 水面変動の時間発展 ($h_0=0.07\text{m}$)



(a) 初期波形と同位相



(b) 初期波形と位相差 $\pi/2$

図-12 水面変動の時間発展 ($h_0=0.12\text{m}$)

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 + \frac{19}{48}\left(1 + \frac{2}{7}\xi\right)\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 k'^2 - \frac{73}{360}\left(1 - \frac{10}{7}\xi\right)\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^2 k'^4 - \frac{261}{2880}\left(1 - \frac{10}{7}\xi\right)\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^4 k'^4 \quad (40)$$

解析結果と数値計算結果を比較する際、分散関係の非線形解は、式(40)中の振幅 h_1/h_0 に計算結果の値を代入することで求められる。しかし、前述のように、初期振幅が大きい場合には、定常振動での振幅の値が初期振幅と異なるケースがあるため、振幅 h_1/h_0 を 0.2, 0.3 に固定し、比較することを試みる。そこで、振幅の小さい RunA03 と大きい RunA20, RunA30 から得られる周期、定常状態での振幅の値を補間することで、振幅 $h_1/h_0 = 0.2, 0.3$ での周期を求め、これを数値計算結果としてプロットする。近似解式(40)については $h_1/h_0 = 0.2, 0.3$ を代入し、計算する。図-10 は非線形領域における分散関係を示している。修正式の近似解が数値解析結果に対しほぼ一致していることから非線形性が強い領域においても適応できると考えられる。

b) 2次モードを考慮した非線形解析

振幅が大きい非線形領域においては、図-8, 9 より水面のひずみが確認できる。しかし、水面を1次モードまでで表した式(34)では、水面のひずみを表現でき

ない。そこで、式(34), (35)に2次モードまでを考慮し、水面変動の時間発展について近似解を求め、計算結果との比較を試みる。その際、2次モードまで考慮することで非線形領域における分散関係式(40)も求め直す必要があるが、ここでは1次モードまでの分散関係で表せると仮定し、フィードバックは考えない。従って、1次の係数 h_1, U_1, ϕ_{U1} については式(36), (37)から得られる次の関係を用いる。

$$h_1 \frac{2\pi}{T} - h_0 U_1 \frac{\pi}{L} = 0, \quad \phi_{U1} = 0 \quad (41)$$

式(14), (21)に

$$h = h_0 - h_1 \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + h_2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \phi_{hT2}\right) \quad (42)$$

$$U = U_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + U_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{4\pi}{T}t + \phi_{UT2}\right) \quad (43)$$

を代入し、時間・空間の2次モードの係数を0にすると、以下ようになる。なお、2次モードの積については微小と仮定し、無視する。

式(21)から

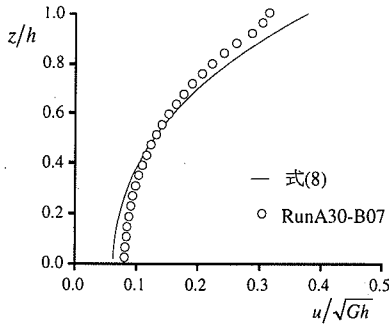
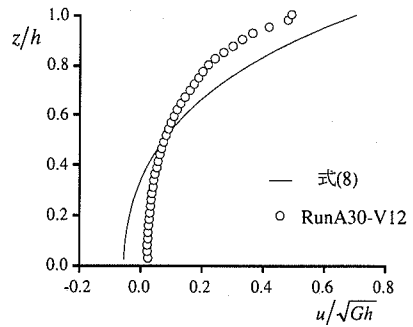
(a) $h_0 = 0.07\text{m}$ (b) $h_0 = 0.12\text{m}$

図-13 非線形領域における水平方向流速分布の比較

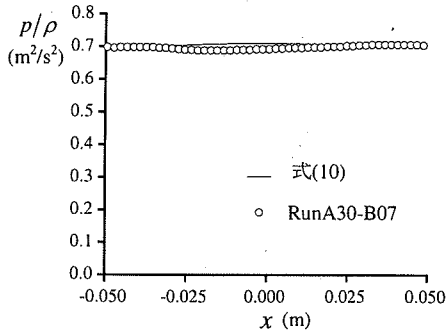
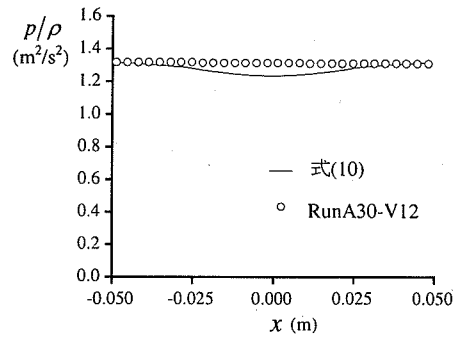
(a) $h_0 = 0.07\text{m}$ (b) $h_0 = 0.12\text{m}$

図-14 非線形領域における底面での圧力分布の比較

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & -h_2\frac{4\pi}{T}\cos\phi_{hT2} - \frac{1}{2}h_1U_1\frac{\pi}{L} + h_0U_2\frac{2\pi}{L}\cos\phi_{UT2} = 0 \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & -h_2\frac{4\pi}{T}\sin\phi_{hT2} + h_0U_2\frac{2\pi}{L}\sin\phi_{UT2} = 0 \quad (45) \end{aligned}$$

また、式(14)から

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & -h_0U_2\frac{4\pi}{T}\sin\phi_{UT2} + \frac{1}{4}h_2U_1^2\frac{2\pi}{L}\sin\phi_{hT2} \\ & + G\frac{\pi}{L}2h_0h_2\sin\phi_{hT2} \\ & -\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{7}\xi\right)\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(8h_0^3U_2\sin\phi_{UT2}\right. \\ & \quad \left.+ 7h_0h_1^2U_2\sin\phi_{UT2} + 2h_0h_1h_2U_1\sin\phi_{hT2}\right) \\ & -\frac{2}{21}\xi G\left(\frac{\pi}{L}\right)^3\left\{-8h_2\left(h_0^3+\frac{3}{4}h_0h_1^2\right)\sin\phi_{hT2}\right\} \\ & -\frac{1}{45}\left(1-\frac{10}{7}\xi\right)\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left(-40h_0^3h_1h_2U_1\sin\phi_{hT2}\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1788}{64}h_0h_1^3h_2U_1\sin\phi_{hT2} - 32h_0^5U_2\sin\phi_{UT2} \\ & \left. - 130h_0^3h_1^2U_2\sin\phi_{UT2} - \frac{2895}{65}h_0h_1^4U_2\sin\phi_{UT2}\right) = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right); \\ & h_0U_2\frac{4\pi}{T}\cos\phi_{UT2} - \frac{1}{4}h_1U_1\frac{4\pi}{T} \\ & + \frac{1}{4}h_0U_1^2\frac{2\pi}{L} - \frac{1}{4}h_2U_1^2\frac{2\pi}{L}\cos\phi_{hT2} \\ & + G\frac{\pi}{L}\left(-2h_0h_2\cos\phi_{hT2} + \frac{1}{4}h_1^2\right) \\ & -\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{7}\xi\right)\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left\{\frac{5}{2}h_0^2h_1U_1 + \frac{1}{2}h_1^3U_1\right. \\ & \left.- h_0U_2\left(8h_0^2+7h_1^2\right)\cos\phi_{UT2} - 2h_0h_1h_2U_1\cos\phi_{hT2}\right\} \\ & -\frac{2}{21}\xi G\left(\frac{\pi}{L}\right)^3\left\{-\frac{3}{4}h_0^2h_1^2 - \frac{1}{8}h_1^4\right. \\ & \quad \left.+ 8h_0h_2\left(h_0^2+\frac{3}{4}h_1^2\right)\cos\phi_{hT2}\right\} \\ & -\frac{1}{45}\left(1-\frac{10}{7}\xi\right)\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left(-9h_0^4h_1U_1 - \frac{25}{2}h_0^2h_1^3U_1\right. \\ & \quad \left.- \frac{32}{35}h_1^5U_1 + 40h_0^3h_1h_2U_1\cos\phi_{hT2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1500}{64} h_0 h_1^3 h_2 U_1 \cos \phi_{hT2} + 32 h_0^5 U_2 \cos \phi_{UT2} \\
 & + 130 h_0^3 h_1^2 U_2 \cos \phi_{UT2} + \frac{3465}{65} h_0 h_1^4 U_2 \cos \phi_{UT2} \Big) = 0 \quad (47)
 \end{aligned}$$

式(45), (46)から $h_2 \sin \phi_{hT2} = U_2 \sin \phi_{UT2} = 0$ となる。式(44), (47)に式(41)を代入し, U_1 を消去すると, $h_2 \cos \phi_{hT2}$, $U_2 \cos \phi_{UT2}$ に関する連立方程式が得られ, これらを解くことにより $h_2 \cos \phi_{hT2}$ が求められる。得られた $h_2 \sin \phi_{hT2}$, $h_2 \cos \phi_{hT2}$ を式(42)に代入すると, ひずみを考慮した水面変動の時間発展について近似解を計算することができる。但し計算結果と比較する際, 式(42)中の振幅 h_1/h_0 については, 計算結果から得られた表-2の値を用いている。

次に, 非線形領域における流速・圧力分布の近似解を求め, 計算結果との比較を行う。 h , U の1次, 2次の係数, 位相差については上記の過程で全て求められており, 式(42), (43)を式(7), (8), (10), (19)に代入すれば流速分布・圧力分布の非線形解が計算できる。

図-11, 12 は $h_0 = 0.07, 0.12\text{m}$ における水面変動について数値解析結果と非線形解析式(42)を比較したものであり, (a), (b)はそれぞれ初期波形とほぼ同位相, 位相差 $\pi/2$ の結果である。また, 図には式(42)において $h_2 = 0$ とした1次モードによる非線形解, 即ち式(34)も併せて示している。図をみると, 特に同位相の場合において計算結果との適合性が十分ではなく, モードの違いによる非線形解の差はほとんど見られない。この理由として, 初期振幅が大きい場合は, 前述のように水面のひずみが大きく, 波形勾配が急激になるため, 基礎式の誘導する際に水深変化の影響を無視したことが考えられる。この点については, 今後検討したい。しかし, 2次モードまでを考慮することで, ごく僅かではあるが, 壁面付近で水面が跳ね上がり, またそれに伴ってくびれも大きくなる特徴が確認できる。

図-13 は初期波形と位相差 $\pi/2$ における水槽中央断面 ($x=0$) の水平方向流速について, 非線形解析式(8)と数値計算結果の比較を表したものであり, 図-14 は底面での圧力分布を比較したものである。 $h_0 = 0.07\text{m}$ の場合には, ほぼ一致しているが, 0.12m については底面付近で流速分布が, 水槽中央断面で圧力分布が十分に再現できていない。前述のように, 振幅が大きい非線形領域では, 水深勾配の効果が影響するのではないかと考えられる。

6. おわりに

本研究は, 基礎式, 流速分布を河川流などの基本量である平均流速で陽的かつ簡易に表すことに着目し,

鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良について検討したものである。得られた結論をまとめると以下のようなになる。

- (1) 非回転条件に適合する流速分布形を求める方法とMadsen & Schaffer³⁾がポテンシャル流れに対して用いた線形分散関係のsingularityを解消する分散項の修正法を適用して, 鉛直加速度を考慮した水深積分モデルの改良を行った。さらに, 時間積分を用いて分散項の修正を流速分布形に反映させ, 平均流速で表記した流速分布形を誘導した。また, 誘導過程を考察することで, Madsenら¹⁾のモデルの簡易な解釈を示した。
- (2) 導かれた基礎式を水槽内水面振動現象に適用した。微小振幅波理論と本モデルによる線形解析の比較を行い, 従来のモデルより高波数領域まで適合することを示した。
- (3) 水深, 平均流速を1次モードで表し, 非線形領域における分散関係を求めた。鉛直2次元数値計算結果とほぼ一致していることから非線形領域においても適用できることが分かった。
- (4) さらに水深, 平均流速に関して2次モードまでを考慮し, 水面変動の時間発展, 水平方向流速分布, 底面での圧力分布の近似解を求めた。2次モードを考慮することにより, 水面形状については若干計算結果の特徴を捉えることができた。流速分布, 圧力分布については高波数になると十分に再現することができなかった。

今後, 平均流速の影響を無視できない場合について, 分散項の修正を流速分布に反映させる方法を考察するとともに, 水深勾配の効果についても検討したい。

参考文献

- 1) Madsen, P.A., Murry, R. and Sorensen, O.R. : A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, Vol.15, pp.374-388, 1991.
- 2) Nwogu, O. : Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Water, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, ASCE, Vol.119, No.6, pp.618-638, 1993.
- 3) Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : High order Boussinesq - type equations for surface gravity waves-derivation and analysis, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A356, pp.3123-3184, 1998.
- 4) Madsen, P.A., Bingham, H. and Liu, H. : The ultimate Boussinesq formulation for highly dispersive and highly nonlinear water waves, *Proc. Coastal Eng.*, pp.176-189, 2000.
- 5) Agnon, Y., Madsen, P.A. and Schaffer, H.A. : A new approach to high-order Boussinesq model, *J. Fluid Mech.*, Vol.399, pp.319-333, 1999.

- 6) Gobbi, M.F., Kirby, J.T. and Wei, G. : A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part2. Extension to $O(kh)^4$, *J. Fluid Mech.*, Vol.405, pp.181-210, 2000.
- 7) 細田 尚, 村本嘉雄, 宮本雅章 : 水深積分モデルによる波状路床上の流れの底面せん断応力解析, 土木学会論文集, No.558/II-38, pp.81-89, 1997.
- 8) Peregrine, D.H. : Calculation of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, Vol.25, pp.321-330, 1966.
- 9) 藤井孝蔵 : 流体力学の数值計算法, 東京大学出版会, 1984.

(2003. 5. 9 受付)

CONSIDERATIONS ON REFINEMENT OF A DEPTH AVERAGED MODEL OF OPEN CHANNEL FLOWS AND ITS VERIFICATION

Shinichiro ONDA, Takashi HOSODA and Ichiro KIMURA

A refinement on a depth averaged model of open channel flows with the effects of vertical acceleration is investigated in this paper. We first derived a refined momentum equation of the depth averaged model formulated by the depth-averaged velocity, applying the iteration procedures to modify a vertical velocity distribution under irrotational condition and modifying the dispersion terms to avoid the singularity in linear dispersion relation. To evaluate the model performance, the equation was applied to the free surface oscillation in a water tank. The solution of linearized equation and the non-linear approximate solution were derived and were compared with the Airy waves and the numerical results by vertical 2-D CFD model, respectively.