

材料の不確定性を考慮した エレメントフリーガラキン法の拡張

井上純哉¹・金 亨穆²

¹正会員 工学博士 東京大学講師 大学院工学系研究科社会基盤工学専攻 (〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

²正会員 工学博士 株式会社大林組 (〒108-8502 東京都港区港南 2-15-2)

本研究ではメッシュレス法の一つであるエレメントフリーガラキン法 (EFGM) を摂動展開法と Polynomial Chaos 展開法の 2 通りの手法を用いた拡張方法を示し、最終的には様々な土木材料で一般に観察される材料定数の不確定性を考慮しつつ、複雑な層状構造を形成する地盤の挙動を予測する問題に適用する事を考慮した数値解析手法の提案を行った。得られた手法を用い 1 次元の梁の解析を行い、モンテカルロ法を用いた解析結果との比較により、提案する手法の妥当性を示し、同時に摂動展開法と Polynomial Chaos 展開法の長所及び短所を明らかにした。提案する手法は煩雑な要素分割を必要としないため、複雑な層状構造を有する地盤における不確定性を評価する上では欠かせない手法となると考えられる。

Key Words : *uncertainty, stochastic finite element method, spectral approach, perturbative expansion, polynomial chaos, element free galerkin method*

1. はじめに

材料定数・材料形状・境界条件といった実現象で観察される不確定性を評価するための解析手法は古くから研究されており、中でも有限要素を用いた数値解析手法としてはモンテカルロ法が有名である。モンテカルロ法の利点は、既存の確定論的有限要素解析手法がそのまま使える事にあり、市販のプログラムを用いて簡単に様々な不確定性を含んだ境界値問題に対する応答の確率密度関数を求める事が可能となる。しかし、モンテカルロ法において有意義な解を得るためには、相当量の解析を行う必要があり、特に解くべき問題の規模が大きくなる場合においては計算資源の枯渇が問題となってくる。これに対し近年、応答の平均・分散・自己相関係数と言った統計諸モーメントを簡便に算出する方法として摂動展開を用いた確率有限要素解析手法の開発が構造の信頼性を評価する分野¹⁾や、多孔質材料の透水特性を評価する分野²⁾で盛んに行われてきている。摂動展開法を用いた確率有限要素解析手法では確定論的有限要素解析手法で用いられる全体剛性行列を利用し高次のモーメントが求められるため、確定論的有限要素手法において全体剛性行列を作成するアルゴリズムがそのまま転用でき、1回の数値解析で応答の統計諸モーメントが求められる事に最大の利点がある。しかし、摂動展開法では入力パラメータの平均まわりにおけるばらつきが微小である事を仮定しているため、不確定性の度合いが大きくなる問題には適応できないと考えられる。これに対し、確率場をスペクトル

分解する事で応答の確率密度関数を効率的に求める手法として、スペクトル確率有限要素法が提案されている。スペクトル確率有限要素法は Ghanem & Spanos³⁾により提案されて以来、様々な分野に適用されてきている^{4),5),6),7)}。スペクトル確率有限要素法の最大の利点は、応答の確率密度関数を Polynomial Chaos を用いた近似解で求めることにより、応答の確率密度関数が陽な形で求まることにある。しかし、摂動展開を用いた確率有限要素法と異なりスペクトル確率有限要素法では全体剛性行列は独自の形態となり、スペクトル分解に用いる展開の次数の増加に従い全体剛性行列も肥大化するため、精緻な解を得る場合の計算効率の悪さが最大の欠点となってくる。

一方で、表層地盤における波動伝播・地下水浸透流といった解析を行う場合、地盤の層状構造がその応答に大きな影響を与えるため、一般の有限要素解析手法では層状の地盤構造を詳細に要素分割することが必要となり、その要素分割作業の煩雑さが問題となる。特に、実地における探査が詳細になり地盤構造モデルが変更された場合、要素分割も同時に変更する必要があるが、一般にこの様な部分的な変更を行うことは不可能に近い。これに対し、要素に含まれる節点の接続情報を考慮することなく、連続場を解析する手法としてエレメントフリーガラキン法が提案されている^{8),9)}。

以上のことを踏まえ、本研究では要素分割を必要としない数値解析手法であるエレメントフリーガラキン法を摂動展開及び Polynomial Chaos 展開を用いて

拡張することで、材料の不確定性を考慮しつつ複雑な内部構造を有する構造解析を容易にする手法の提案を行う。同時に、解析結果の比較から2つの異なる手法の利点及び短所を明らかにする。なお、本論文の構成は以下のようになっている。第2章においてエレメントフリーガラキン法の解説を行い、第3章では摂動展開及び Polynomial Chaos 展開を用いた拡張方法の解説を行う。次いで第4章では、1次元の梁の問題に対し提案する手法を適用し、有限要素法を用いたモンテカルロ法による結果と比較を行い、結論を第5章で述べる。

2. エレメントフリーガラキン法

本章では、Belytschko ら⁸⁾により提案されたエレメントフリー・ガラキン法 (EFGM) に関する簡単な解説を行う。

(1) 移動最小自乗法による形状関数の導出

EFGM においては要素は存在しないため、有限要素法とは異なる形で、節点での値から場の関数を補完する形状関数を定義する必要がある。EFGM では移動最小自乗近似が用いられる。

領域 Ω 内の関数を $u(x)$ とし、この関数 $u(x)$ を評価点 X の近傍で定義される多項式 $u^h(x)$ で近似することを考える。このとき、多項式 $u^h(x)$ は

$$u^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(X) \equiv p(x) \cdot a(X) \quad (1)$$

と表される。 $p(x)$ は多項式の基底関数であり、二次元の場合は例えば $(1, x, y, x^2, y^2, xy, \dots)$ となる。一方、 $a(X)$ は、評価点の座標 X により変化する係数である。このとき、多項式 $u^h(x)$ の関数 $u(x)$ に対する残差の重み付き L_2 ノルム J は

$$J = \sum_i^n w(X - x_i) \left[\sum_j^m p_j(x_i) a_j(X) - u(x_i) \right]^2 \equiv (P \cdot a - u)^T \cdot W(X) \cdot (P \cdot a - u) \quad (2)$$

で定義される。ここで、重み関数 $w(r) = w(|r|)$ は2点間の距離の関数であり、行列 P 、 $W(X)$ はそれぞれ、

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$W(X) = \begin{bmatrix} w(r_1) & & & 0 \\ & w(r_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w(r_n) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{ただし, } r_i = X - x_i$$

である。最適な近似解 $u^h(x)$ の選択方法は様々に存在するが、EFGM では J を最小にする係数 $a_j(X)$ が用いられる。式 (2) より、 J を最小にする係数 $a_j(X)$ は

$$a(X) = A^{-1}(X) \cdot B(X) \cdot u \quad (5)$$

$$\text{ただし, } u_i = u(x_i)$$

となる事が分かる。ここで、行列 A 、 B はそれぞれ

$$A(X) = P^T \cdot W(X) \cdot P \quad (6)$$

$$B(X) = P^T \cdot W(X) \quad (7)$$

である。このとき、式 (5) が解を持つためには、少なくとも条件 $n \geq m$ が満たされる必要がある。

式 (5) を式 (1) に代入すると、

$$u^h(x) = p(x) A^{-1}(X) \cdot B(X) \cdot u = N(x, X) \cdot u \quad (8)$$

となり、関数 $u(x)$ の離散的な点 x_i での値 u_i が既知の場合、任意の点 x での近似値は形状関数 $N(x)$:

$$N(x) = p(x) A^{-1}(x) \cdot B(x) \quad (9)$$

を用いて容易に得られる。

(2) 重み関数

上述のように、EFGM における形状関数の導出において重み関数 $w(r)$ は重要な役割を果たしており、重み関数の形状の違いによる近似関数の違いは Dolbow & Belytschko¹⁰⁾により、詳細に報告されている。

一般に、重み関数は定義された領域内では常に正の関数であり、2点間の距離 r の増加に伴い単調減少する関数が用いられる。また、ガラキン法による定式化において疎な行列が構成されるために、重み関数は出来るだけ小さな領域で0に収束する関数が用いられる。しかし、上述のように式 (5) において解が存在するためには、重み関数が0とならない領域内に存在する接点数 m は近似多項式 $u^h(x)$ で用いられる基底関数の数 n より同じであるか多くなる必要がある。このような条件下、重み関数は様々に提案されているが、本研究では簡単のため以下の数値解析においては全て三次のスプライン関数を用いる事とする:

$$w(r) = w\left(d = \frac{r}{l}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & (d \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & (\frac{1}{2} \leq d \leq 1) \\ 0 & (d \geq 1) \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 l は重み関数が0とならない領域の大きさであり、節点毎に異なる値となる。図-1に式 (10) で定義される重み関数を示す。

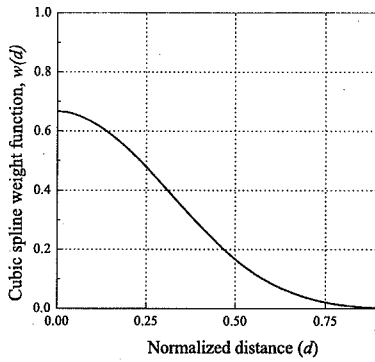


図-1 三次スプラインを用いた重み関数

(3) ガラーキン法による定式化

いま、領域 Ω 内での物理現象の支配方程式が演算子 $L(x)$ を用いて

$$L(x)u(x) = f(x) \text{ in } \Omega \quad (11)$$

と表されているとする。このとき式(11)と等価な変分問題は

$$(Lu - f, \delta u) = 0 \quad (12)$$

となる。ここで、 δu は任意のテスト関数であり、 $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$ は $L_2(\Omega)$ における内積である。テスト関数の形状は一般には任意であるが、ガラーキン法においては、関数 $u(x)$ を有限個 N の基底関数 $\{g_i(x)\}_{i=1}^N$ を用いて

$$u(x) = \sum_i^N u_i g_i(x) \quad (13)$$

と近似したときの基底関数 $\{g_i(x)\}_{i=1}^N$ をテスト関数として用いる：

$$(Lu - f, g_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

これは、内積が $(u, v)_E = (Lu, v)$ と定義される空間 E において近似解の残差のノルムが最小になる条件と等価になることに起因している。有限要素法及び EFGM においては、形状関数が基底関数となるため、式(14)は

$$u_j \int_{\Omega} N_i(x) L(x) N_j(x) dx = \int_{\Omega} N_i(x) f(x) dx \quad (15)$$

となる。

3. 材料の不確定性を考慮した拡張方法

本章では材料の不確定性を考慮した解析で必要となる、確率構造の離散化手法である摂動展開法と Polynomial Chaos 展開法と言う2つの手法に対し、EFGMの拡張方法を示す。

本研究では、材料係数の空間分布が均一な確率空間に従うものを対象とする：

$$a(x, \theta) = a^0(x) [1 + \alpha(x, \theta)] \quad (16)$$

ここで、 $a^0(x) \neq 0$ は材料定数 $a(x, \theta)$ の期待値である。一方、 $\alpha(x, \theta)$ は期待値が0となる均一な確率過程であり、確率過程 $\alpha(x)$ の自己相関関数 $C_{\alpha}(x_1, x_2) = \langle \alpha(x_1) \alpha(x_2) \rangle$ は

$$C_{\alpha}(x + r, x) = C_{\alpha}(r) \quad (17)$$

を満たす。ここで、 r は2点間を結ぶベクトルである。 θ は各事象を表す変数であるが、以下では簡単のため省略する。

(1) Karhunen-Loeve 展開

既知の確率過程の離散化手法は Karhunen-Loeve 展開¹¹⁾、形状関数法¹²⁾、重み付き積分法¹³⁾等々あるが、ここでは Karhunen-Loeve 展開 (KL 展開) を用いる：

$$a(x) = a^0(x) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \xi_i \phi_i(x) \right] \quad (18)$$

ここで、 ξ_i はお互いに直交する確率変数であり、 $\langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たす。 λ_i, ϕ_i はそれぞれ自己相関関数 $C_{\alpha}(r)$ をカーネルとする Fredholm 型固有値問題の固有値及び固有関数である：

$$\int_{\Omega} C_{\alpha}(x_1, x_2) \phi_i(x_2) dx_2 = \lambda_i \phi_i(x_1) \quad (19)$$

このような KL 展開を用いる最大の利点は、有限階数における展開のうち KL 展開が最も残差が小さくなる展開であること³⁾と、固有関数 $\phi_i(x)$ と ξ_i がともに直交性を持つため、応答の諸モーメントの導出が容易になることにある。式(19)の解析的な解は、限られた境界条件に対してのみ得られるため、本研究では数値的に固有値問題を解く。

固有ベクトル $\phi_k(x)$ を、式(9)と同様にして有限個 M の観測点 y_i から形成される形状関数 $N^{ob}(x) = \{N_i^{ob}(x)\}_{i=1}^M$ を用いて

$$\phi_k(x) = N^{ob}(x) \cdot d^k \quad (20)$$

と近似する。ここで、観測点 y_i と節点 x_i は必ずしも同一である必要性はない。このとき、ガラーキン法により有限個 M の基底関数を用いることによる残差のノルムを最小にする条件として、式(19)は

$$CD = \Lambda BD \quad (21)$$

となり、一般化固有値問題に帰着される。ここで、

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} C_{\alpha}(x_1, x_2) N_i^{ob}(x_1) N_j^{ob}(x_2) dx_1 dx_2 \\ B_{ij} &= \int_{\Omega} N_i^{ob}(x) N_j^{ob}(x) dx \\ D_{ij} &= d_i^j \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Lambda_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$$

である。

(2) 摂動展開による定式化

摂動法においては、材料の不確定性及びそれに起因する応答の確率空間の平均値からのずれは微小であるとし、全ての確率過程が有限個 M の確率変数 $Y = \{Y_i\}_{i=1}^M$ で表記されるものと仮定される。このとき、式 (15) における演算子 $L(x)$ 、入力関数 $f(x)$ 、応答変数 u_i はそれぞれ、テイラー展開することで

$$\begin{cases} L = L^0 + \sum_i^M L_{,i} Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M L_{,ij} Y_i Y_j + \dots \\ f = f^0 + \sum_i^M f_{,i} Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M f_{,ij} Y_i Y_j + \dots \\ u_i = u_i^0 + \sum_i^M u_{i,i} Y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^M u_{i,ij} Y_i Y_j + \dots \end{cases} \quad (23)$$

と表される。ここで、

$$\begin{cases} L_{,i}(x) = \left. \frac{\partial L(x)}{\partial Y_i} \right|_{Y_i=0} \\ L_{,ij}(x) = \left. \frac{\partial^2 L(x)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_i, Y_j=0} \\ f_{,i}(x) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial Y_i} \right|_{Y_i=0} \\ f_{,ij}(x) = \left. \frac{\partial^2 f(x)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_i, Y_j=0} \\ u_{i,i}(x) = \left. \frac{\partial u_i(x)}{\partial Y_i} \right|_{Y_i=0} \\ u_{i,ij}(x) = \left. \frac{\partial^2 u_i(x)}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_i, Y_j=0} \end{cases} \quad (24)$$

である。式 (23) を式 (15) に代入し、 Y_i に関して同じオーダーの項を集め整理すると、

$$L_{kl}^0 u_l^0 = f_k \quad (25)$$

$$L_{kl}^0 u_{l,i} = -L_{kl,i} u_l^0 + f_{k,i} \quad (26)$$

$$L_{kl}^0 u_{l,ij} = -L_{kl,ij} u_l^0 - L_{kl,j} u_{l,i} - L_{kl,i} u_{l,j} + f_{k,ij} \quad (27)$$

となる。ここで、

$$\begin{cases} L_{kl}^0 = \int_{\Omega} N_k L^0 N_l dx \\ L_{kl,i} = \int_{\Omega} N_k L_{,i} N_l dx \\ L_{kl,ij} = \int_{\Omega} N_k L_{,ij} N_l dx \\ f_k = \int_{\Omega} N_k f dx \\ f_{k,i} = \int_{\Omega} N_k f_{,i} dx \\ f_{k,ij} = \int_{\Omega} N_k f_{,ij} dx \end{cases} \quad (28)$$

である。よって、応答変数 u_l の各オーダーの係数は式 (25)–(27) を順に解くことにより求まる。ここで重要なことは、 u_l の各オーダーの係数の導出には L_{kl}^0 の逆行列のみが用いられることである。

材料定数の確率構造の離散化に KL 展開を用いた場合、応答変数 u_l のモーメントは確率変数 ξ_i の直交性より

$$\langle u_l \rangle = u_l^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M u_{l,ii} + \dots \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \langle u_o u_p \rangle - \langle u_o \rangle \langle u_p \rangle &= u_{o,i}^0 u_{p,i} + \sum_{i=1}^M u_{o,i} u_{p,i} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^M u_{o,ij} u_{p,ij} + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

(3) Polynomial Chaos 展開による定式化

ここでは、応答変数 u_i の展開に Polynomial Chaos 展開 (PC 展開) を用いる^{3),4)}：

$$\begin{aligned} u_l &= u_l^0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} u_{i_1}^l \Gamma_1(\xi_{i_1}) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2}^l \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} u_{i_1 i_2 i_3}^l \Gamma_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

$\Gamma_i(\xi)$ は PC と呼ばれ、確率空間で正規直交基底を形成する。確率変数 ξ が正規分布となる場合、 $\Gamma_i(\xi)$ は

$$\Gamma_i(\xi) = (-1)^i \exp(0.5 \xi \cdot \xi) \frac{\partial^i}{\partial \xi_{m_1} \dots \partial \xi_{m_i}} \exp(-0.5 \xi \cdot \xi)$$

で与えられる。ただし、 $\xi = \{\xi_m\}_{m=1}^{m_i}$ である。以下では簡単のため、

$$u_l = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^l \Psi_i(\xi) \quad (32)$$

と表記する。このとき、 $\Gamma(\xi)$ と $\Psi(\xi)$ の間には 1 対 1 の関係があり、KL 展開での打ち切り階数を M 、PC 展開の打ち切り次数を p とすると、式 (32) の展開の項数 P は

$$P = 1 + \sum_{s=1}^p \frac{1}{s!} \prod_{r=0}^{s-1} (M+r) \quad (33)$$

となる³⁾。

KL 展開を用いて支配方程式 (11) における演算子 $L(x)$ を展開すると

$$L(x) = L^0(x) + \sum_{i=1}^M \xi_i R_i(x) \quad (34)$$

となる。例えば、演算子 $L(x)$ が $L(x) = \nabla[a(x)\nabla]$ で与えられていた場合、式 (34) は

$$L(x) = \nabla[a^0(x)\nabla] + \sum_{i=1}^M \xi_i \sqrt{\lambda_i} \nabla[a^0(x)\phi_i(x)\nabla] \quad (35)$$

となり、不確定性を含んだ演算子 $R_i(x)$ は $R_i(x) = \sqrt{\lambda_i} \nabla[a^0(x)\phi_i(x)\nabla]$ となる。式 (15) に式 (34) 及び式 (32) を代入すると、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^N u_j^k \Psi_j(\xi) \int_{\Omega} N_l L^0 N_k dx \\ &+ \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M \xi_i \Psi_j(\xi) \sum_{k=1}^N u_j^k \int_{\Omega} N_l R_i N_k dx \\ &= \int_{\Omega} N_l f dx, \quad l = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (36)$$

となる。ここで、上式を ξ_i に関して展開し、同一項を集め整理すれば摂動法と同じ定式化となる。ここでは Ghanem ら³⁾ にならない、上式を更に Galerkin 法を適用

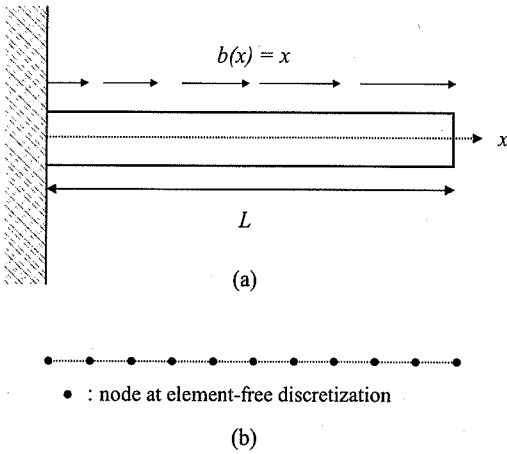


図-2 引張り荷重を受ける単純梁 (a) と解析で用いた節点 (b)

することで

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \langle \Psi_m^2(\xi) \rangle L_{kl} u_m^k \\ & + \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^N u_j^k \sum_{i=1}^M \langle \xi_i \Psi_j(\xi) \Psi_m(\xi) \rangle R_{ikl} \\ & = \langle f_l \Psi_m(x) \rangle, \quad l = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, P \end{aligned} \quad (37)$$

とし、線形連立方程式を得る。ここで、

$$\begin{cases} L_{kl} = \int_{\Omega} N_l L^0 N_k dx \\ R_{ikl} = \int_{\Omega} N_l R_i N_k dx \\ f_l = \int_{\Omega} N_l f dx \end{cases} \quad (38)$$

である。つまり、PC 展開を用いた手法は基本的に式 (36) までは摂動法と同一の式を用いているわけであるが、式 (36) の解法として摂動法は応答の期待値周りの形状を正確に求めているのに対し、PC 展開を用いた手法では近似多項式を用いる事による入力と応答の残差のモーメント $\langle (u - \bar{u}) L(u - \bar{u}) \rangle$ を最小にする事に主眼が置かれている事が両者の手法の差となっている。

その結果、式 (37) から分かるように、PC 展開を用いた手法では、応答変数 u_l を求めるためには摂動展開を用いた手法で用いられる行列の P 倍の大きさのランクを持つ行列の逆行列を求める必要がある。

このようにして求めた応答変数 u_l のモーメントは、PC $\Psi_i(\xi)$ の直交性より

$$\langle u_l \rangle = u_l^1 \quad (39)$$

$$\langle u_k u_l \rangle = \sum_{i=1}^P \langle \Psi_i^2(\xi) \rangle u_i^k u_i^l \quad (40)$$

となる。

4. 単純梁を用いた数値解析結果の比較

ここでは材料の不均質性の影響が大きく出る問題として単純梁の引張り問題を選択し、モンテカルロ法・摂動展開法・PC 展開法を適用し、得られた応答の比較を行う事により提案する 2 手法の性能を検証した。

梁の長さ、断面積は確定値で 1 とし、材料定数は正規分布に従うものとする。ここで、材料定数の標準偏差が大きくなった場合、材料定数が負となる部位が存在することになる為、本研究では標準偏差 σ_α が $\sigma_\alpha < 0.3$ となる場合に対してのみ比較を行った。材料定数の共分散関数 $C_\alpha(r)$ は指数型で与えられるとする：

$$C_\alpha(r) = \sigma_\alpha^2 \exp \frac{-|r|}{\lambda_\alpha} \quad (41)$$

ここで、 λ_α は材料の相関関係を表す特徴的長さ (相関長) である。図-2 に示すように梁方向に x 軸をとり、外力として分布荷重 $f(x) = x$ を与える。このとき、支配方程式は

$$\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{d}{dx} \right] u(x) + f(x) = 0 \quad (42)$$

で与えられる。

(1) 摂動展開を用いた解析

入力関数 $f(x)$ は確定値であると仮定しているため、式 (23) における $f_{,i}, f_{,ij}$ は 0 となる。よって、支配方程式 (42) に対して式 (25)-(27) は

$$K^0 \cdot u^0 = f + f^{t0} \quad (43)$$

$$K^0 \cdot u_{,i} = -K_{,i} \cdot u^0 + f_{,i}^t \quad (44)$$

$$K^0 \cdot u_{,ij} = -K_{,i} \cdot u_{,j} - K_{,j} \cdot u_{,i} + f_{,ij}^t \quad (45)$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} K_{kl}^0 = \int_0^1 B_k(x) a^0(x) B_l(x) dx \\ K_{kl,i} = \sqrt{\lambda_i} d^i \cdot \int_0^1 B_k(x) a^0(x) N^{ob}(x) B_l(x) dx \\ f_k = \int_0^1 N_k(x) f(x) dx \\ f_k^{t0} = [N_k(x) f_{,i}^{t0}]_0^1 \\ f_{k,i}^t = [N_k(x) f_{,i}^t]_0^1 \\ f_{k,ij}^t = [N_k(x) f_{,ij}^t]_0^1 \end{cases} \quad (46)$$

であり、 $f^{t0}, f_{,i}^t, f_{,ij}^t$ は境界における外力の摂動展開における係数である。なお、上記の式展開には境界条件

$$\begin{aligned} f^t &= f^{t0} + \sum_{i=1}^M f_{,i}^t \xi_i + \sum_{i,j=1}^M f_{,ij}^t \xi_i \xi_j + \dots \quad (47) \\ &= a(x) \frac{d}{dx} u(x) \end{aligned}$$

より

$$\begin{cases} f^t = B(x) \cdot u^0 \\ f_{,i}^t = B(x) \cdot u_{,i} + \sqrt{\lambda_i} a^0(x) N^{ob}(x) \cdot d^i B(x) \cdot u^0 \\ f_{,ij}^t = B(x) \cdot u_{,ij} + \sqrt{\lambda_j} a^0(x) N^{ob}(x) \cdot d^j B(x) \cdot u_{,i} \\ \quad + \sqrt{\lambda_i} a^0(x) N^{ob}(x) \cdot d^i B(x) \cdot u_{,j} \\ \text{at } x = 0, 1 \end{cases}$$

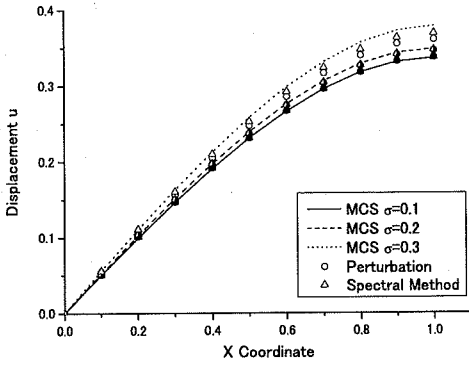


図-3 節点変位の期待値の比較 ($\lambda_\alpha = 0.3$). 線: モンテカルロ法, ○: 摂動展開, △: PC 展開

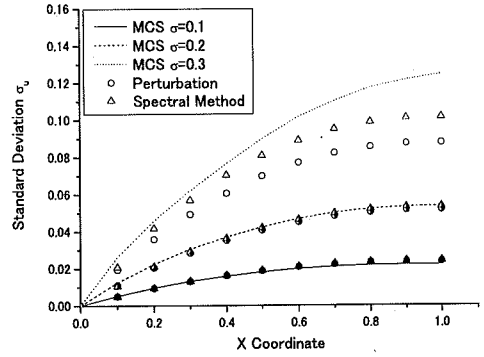


図-5 節点変位の標準偏差の比較 ($\lambda_\alpha = 0.3$). 線: モンテカルロ法, ○: 摂動展開, △: PC 展開

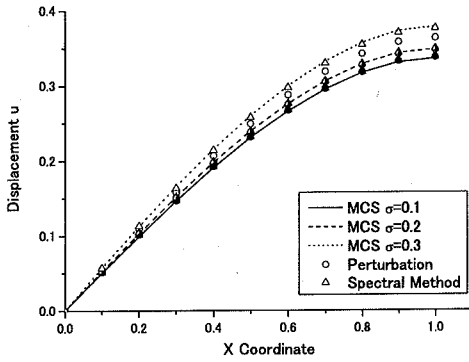


図-4 節点変位の期待値の比較 ($\lambda_\alpha = 0.7$). 線: モンテカルロ法, ○: 摂動展開, △: PC 展開

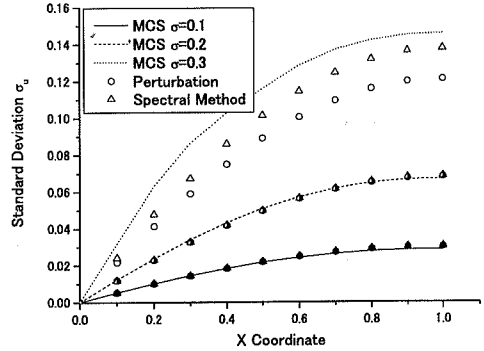


図-6 節点変位の標準偏差の比較 ($\lambda_\alpha = 0.7$). 線: モンテカルロ法, ○: 摂動展開, △: PC 展開

である事を用いた。更に単純梁の場合、境界では

$$\begin{cases} f^t|_{x=1} = 0, \\ f_{,i}^t|_{x=1} = 0, \\ f_{,ij}^t|_{x=1} = 0 \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = N(0) \cdot u^0 = 0, \\ u_{,i}|_{x=0} = N(0) \cdot u_{,i} = 0, \\ u_{,ij}|_{x=0} = N(0) \cdot u_{,ij} = 0 \end{cases} \quad (49)$$

となり、節点変位 $\{u_l, u_{l,i}, u_{l,ij}, \dots\}$ 及び固定点 $x=0$ における反力 $\{f^t, f_{,i}^t, f_{,ij}^t, \dots\}_{x=0}$ が解くべき未知数となる。

(2) PC 展開を用いた解析

支配方程式 (42) に対し式 (37) は、

$$\sum_{k=1}^N \langle \Psi_m^2 \rangle K_{kl}^0 u_m^k + \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^N u_j^k \sum_{i=1}^M \langle \xi_i \Psi_j \Psi_m \rangle K_{kl,i}$$

$$= \langle f_i \Psi_m \rangle + \langle \Psi_m^2 \rangle f_{,ml}^t,$$

$$l = 1, \dots, N, m = 1, \dots, P \quad (50)$$

となる。右辺の第1項及び第2項はそれぞれ

$$\langle f \Psi_m \rangle = \begin{cases} \int_0^1 N f dx & m = 1 \\ \mathbf{0} & m > 1 \end{cases} \quad (51)$$

$$f_m^t = [N(x) f^t]_0^1 \quad (52)$$

となる。また、上記の式展開には摂動法と同様にして、境界条件

$$\begin{aligned} f^t &= \sum_{m=1}^P f_m^t \Psi_m \\ &= a(x) \frac{d}{dx} u(x) \end{aligned} \quad (53)$$

より、反力 f^t の PC 展開の各項が

$$\langle \Psi_m^2 \rangle f_m^t = \langle \Psi_m^2 \rangle \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_m$$

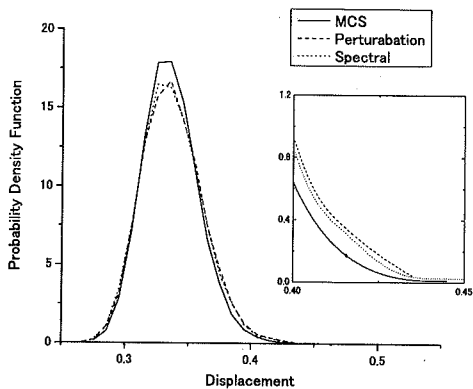


図-7 確率密度関数の比較 ($\lambda_\alpha = 0.3, \sigma_\alpha = 0.1$). 実線:モンテカルロ法, 破線:摂動展開, 点線:PC展開

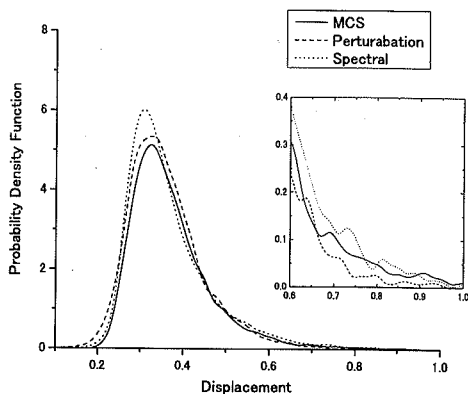


図-9 確率密度関数の比較 ($\lambda_\alpha = 0.3, \sigma_\alpha = 0.3$). 実線:モンテカルロ法, 破線:摂動展開, 点線:PC展開

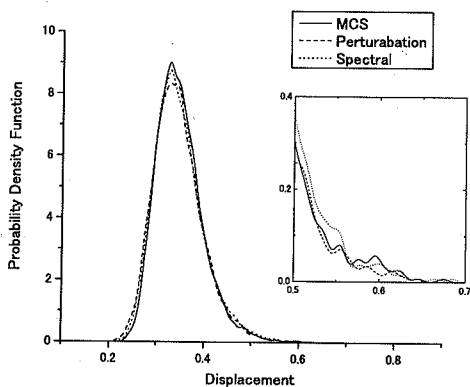


図-8 確率密度関数の比較 ($\lambda_\alpha = 0.3, \sigma_\alpha = 0.2$). 実線:モンテカルロ法, 破線:摂動展開, 点線:PC展開

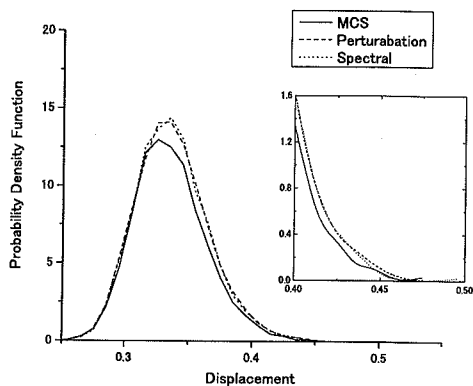


図-10 確率密度関数の比較 ($\lambda_\alpha = 0.7, \sigma_\alpha = 0.1$). 実線:モンテカルロ法, 破線:摂動展開, 点線:PC展開

$$+ \sum_{j=1}^P \sum_{i=1}^M \langle \xi_i \Psi_j \Psi_m \rangle \sqrt{\lambda_i} a^0(x) N^{ob} \cdot d^i B \cdot u_j$$

at $x = 0, 1$

で与えられることを用いた。境界では

$$f_m^t|_{x=1} = 0 \quad (54)$$

$$u_m|_{x=0} = N(0) \cdot u_m = 0 \quad (55)$$

となり、節点変位 u_m^t 及び固定点 $x = 0$ における反力 $f_m^t|_{x=0}$ が解くべき未知数となる。

(3) 数値解析結果

図-2 に示すように、モンテカルロ法及び EFGM で用いた節点数と形状関数の導出に用いる観測点数は 11 とし、節点と観測点には同一の座標を用いた。数値積分にはガウス積分を用い、個々の積分区間は隣り合う 2 節

点間とし、10 区間の合計を全体の積分量とした。個々の積分区間で用いたガウス点の数は、形状関数の次数を考慮し 4 とした。相関長 λ_α は 0.3, 0.7 の 2 通り、材料定数 $a(x)$ の平均 $a^0(x)$ は均一であるとし、簡単のため 1 に設定した。標準偏差 σ_α は 0.1, 0.2, 0.3 の 3 通りに変化させ解析を行った。モンテカルロ法では、既往の解析手法の代表例であり、精度も十分に検証されている手法として有限要素法を用い、それぞれのケースにつき 1 万個のサンプルを発生させ解析を行った。モンテカルロ法で用いた有限要素法の要素は 2 節点の梁要素を用いた。なお、 σ_α が 0.3 となる場合には、材料定数が負となる解析が約 50 回出現したが、ここでは結果から除外し総サンプル数から除いた。材料定数の KL 展開は摂動展開を用いた手法では最大 8 個、PC 展開を用いた手法では後述の様に行列が肥大化する為、最大

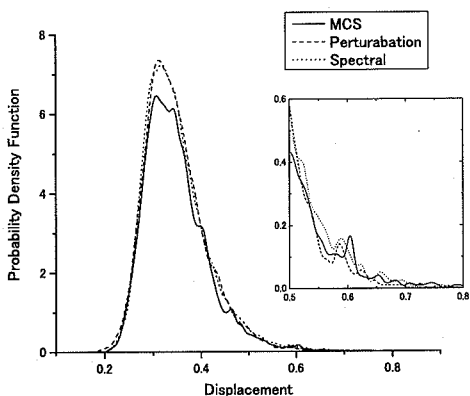


図-11 確率密度関数の比較 ($\lambda_\alpha = 0.7, \sigma_\alpha = 0.2$). 実線:モンテカルロ法, 破線:摂動展開, 点線:PC展開

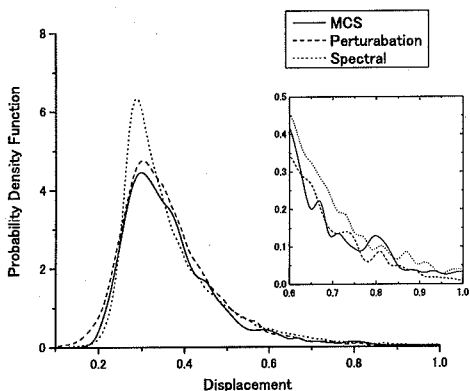


図-12 確率密度関数の比較 ($\lambda_\alpha = 0.7, \sigma_\alpha = 0.3$). 実線:モンテカルロ法, 破線:摂動展開, 点線:PC展開

で4個の確率変数を用いるにとどめた。相関長 λ_α が0.3と0.7の場合のKL展開における固有値を図-13に示すが、図より系の長さに対し相関長が短くなるに従い、固有値の低減速度が鈍くなり、系の確率構造を表すために必要な確率変数は増大することが見て取れる。本研究では、PC展開で用いた4個の確立変数で確率構造を再現する必要がある為、相関長 λ_α は0.3以上とした。本解析では摂動展開・PC展開共に3次までの近似を行ったが、この場合PC展開を用いた手法で解かれる逆行列の大きさは摂動展開を用いた手法の35倍となる。表-1に確率変数の個数・PC展開に用いた Polynomial Chaosの次数と解くべき行列の大きさの対応を示す。

図-3・4はそれぞれ相関長 λ_α が0.3及び0.7の場合の各節点での変位の平均値、図-5・6は標準偏差を表

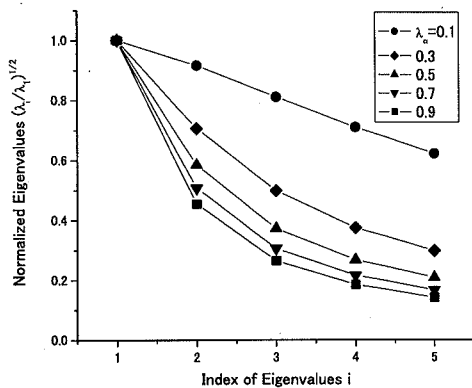


図-13 相関長 λ_α の変化に伴う固有値の変化

表-1 Polynomial Chaos 展開の項数

KL 展開 (M)	Polynomial Chaos の次数 (p)				
	0	1	2	3	4
2	1	3	6	10	15
4	1	5	15	35	70
6	1	7	28	83	210

し、線がモンテカルロ法、○が摂動展開、△がPC展開の結果である。実線及び白抜き図形が標準偏差 σ_α が0.1の場合、破線及び半分が黒抜きの図形が0.2、点線及び黒抜き図形が0.3の場合に相当する。図より、摂動展開及びPC展開ともに材料定数の標準偏差 σ_α が小さい領域 ($\sigma_\alpha \leq 0.2$) においては十分良い近似を得ていることが分かる。しかし、標準偏差 σ_α が大きくなるに従い、節点変位の標準偏差はともに正解(モンテカルロ法)から大きくずれてくる。Ghanemら³⁾の主張するPC展開の優位性も見て取れなくもないが、非常に微小である。

一方、図-7・8・9は相関長 λ_α が0.3の場合の、図-10・11・12は相関長 λ_α が0.7の場合の端点での変位の確率密度関数を表している。図中の実線がモンテカルロ法、破線が摂動展開、点線がPC展開を用いた手法による解である。図より、平均・標準偏差と同様に材料定数の標準偏差 σ_α が0.2以下の場合においてはいずれの手法においても良く近似できている事が見て取れる。しかし、 σ_α が0.3の場合には、PC展開を用いた手法による解は平均値周りで大きな誤差が生じている事が理解できる。

(4) 摂動展開とPC展開の差異

摂動展開は応答の確率密度関数を期待値周りでテイラー展開の低次項を忠実に再現する、つまり確率密度関数の期待値周りの形状を精度良く近似する手法であるのに対し、PC展開は式(37)に示すように、入力と応答のモーメントにおける正解値と近似値の差を最小にする、つまり確率密度関数全体の誤差を最小にしようとする手法であると言える。そのため、上述のように摂動展開とPC展開を用いた定式化では、材料定数のKL展開と応答の展開次数を同一にしても、標準偏差 σ_α の増大に従い解析結果に差異が生じ、摂動展開では応答の確率密度関数の全体の形状を概ね予測できるのに対し、PC展開では応答の確率密度関数自体の形状は正解(モンテカルロ法)とは大きく異なって来るもの、標準偏差及び平均と言ったモーメントは正確に予測が出来る事は至極当然の結果であると言える。以上のことから、材料定数の標準偏差 σ_α が非常に小さな場合や、応答の期待値周りの挙動が重要となる問題では、摂動展開の方が効率的に良好な近似を得ることが出来ると考えられ、応答の2次までのモーメントが重要となる問題においてはPC展開がより良い精度を与えたと考えられる。

5. 結論

本研究では材料定数の不確定性を考慮しつつ、複雑な層状構造を有する地盤の解析手法を提案した。解析そのものよりも多大な時間を要する要素分割を必要としない手法であるエレメントフリーガラークン法を、確率過程の離散化手法である摂動展開法とPolynomial Chaos展開法を用いて拡張する手法の詳細を示した。得られた手法を用い1次元の梁の解析を行い、モンテカルロシミュレーションの結果との比較により本手法の妥当性を示した。更に、摂動展開法とPolynomial Chaos展開法の長所及び短所を明らかにした。摂動展開は確率密度関数の期待値周りの形状を精度よく近似し、Polynomial Chaos展開法は確率モーメントの誤差を最小にする方法であることが示された。その結果として、入力材料パラメータの標準偏差が大きい場合、摂動展開は応答のモーメントの誤差が、Polynomial Chaos展開法は期待値の周りの確率密度関数にずれが生じることが分かった。また、Polynomial Chaos展開法を用いる場合は、莫大な逆行列を解くことになるため(補遺参照)、適用時慎重な検討が要求されると考えられる。

本研究は、材料定数が正規分布に従う材料を仮定したため、材料定数が正值を持たせるための条件を満たすべく、標準偏差が比較的小さい場合の結果を紹介した。しかし、材料定数が常に正值を持つ分布、例えば

lognormal等の場合の展開法は既に報告されているため⁵⁾、地下水浸透流問題等で報告されているような標準偏差が平均値より大きな問題¹⁴⁾への本手法の適用は容易であると考えられ、標準偏差が小さな問題に限る手法ではないと考えられる。

本手法は煩雑な要素分割を必要としないため、層状構造を有する地盤および複雑な構造における不確定性を評価する上では非常に有効な解析手法であると考えられ、高次元問題への応用が今後期待される。ただし、提案する手法の導出に用いられた理論展開は材料の線形性改定しているため、直ちに非線形問題に拡張する事は難しく、中川・堀の手法⁷⁾等の適用が不可欠と考えられる。

付録 I Polynomial Chaos 展開を用いた定式化による行列構造

PC展開法を用いた定式化の場合、式(37)に示すように摂動法で用いられる行列 L_{kl} と比較し P 倍の行列を扱う必要がある。しかし、式(37)における左辺第2項における行列 $\sum_{i=1}^M \langle \xi_i \Psi_j \Psi_m \rangle R_{ikl}$ は、 $\Psi_j(\xi)$ の性格上、非常に疎な行列となる事が分かる。図-14に行列 $\sum_{i=1}^M \langle \xi_i \Psi_j \Psi_m \rangle R_{ikl}$ の構造の1例を示す。図は $M=4, P=35$ の場合の行列構造であり、図中の□は行列 K_{kl}^0 と同じ大きさの行列に相当する。白抜きの□は全ての要素が0となる行列を示し、黒抜きの■は要素中に0でない物が1つでも存在する行列を示している。 $M=4$ の場合、1次のPC $\Gamma_1(\xi)$ は Ψ_2, \dots, Ψ_5 に対応し、2次のPC $\Gamma_2(\xi)$ は Ψ_6, \dots, Ψ_{15} に対応し、3次のPC $\Gamma_3(\xi)$ は $\Psi_{16}, \dots, \Psi_{35}$ に対応しており、図-14における太線はそれぞれの次数のPCに対応する領域の境界を示している。

この様に解くべき逆行列のサイズがKL展開の次数及び、PC展開の次数の増大に従い飛躍的に大きくなる事がPC展開を用いた手法の最大の欠点であり、そのような問題は特に材料定数の共分散構造に存在する相関長と比較し、解くべき領域が大きくなり、材料定数の確率構造の離散化に必要な確率変数 ξ_i の個数が多くなる場合に深刻となる。そのため、本研究の目標とする複雑な地層構造に対する数値解析においては、式(37)を直接解くことは非現実的になると考えられる。そこで本研究では、行列を以下に示す方法を用いて縮小している。

図-14に示すように、モーメント $\langle \xi_i \Psi_j \Psi_k \rangle$ は2つのPCの次数が同じか2つ以上異なる場合、その値は常に0となる。一方、式(37)の左辺第1項の行列は図-14の対角成分のみが非0となる行列である。よって、式(37)における最大次数の係数 $u_{j_{\max}}^k$ は最大次数より1

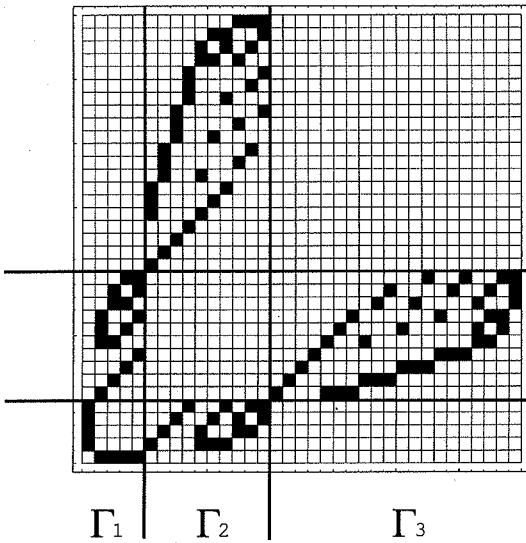


図-14 $\sum_{i=1}^M (\xi_i \Psi_j \Psi_m) R_{ikl}$ の構造 ($M=4, P=35$), □: 全ての要素がゼロの行列, ■: 一つでもゼロでない要素を持つ行列

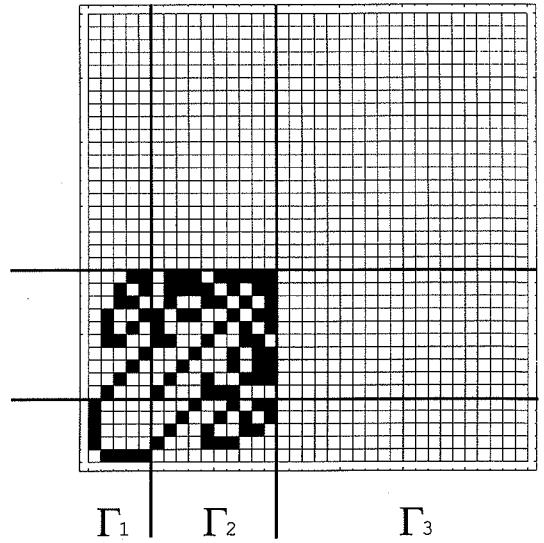


図-15 式 (I.1) により簡略された行列, □: 全ての要素がゼロの行列, ■: 一つでもゼロでない要素を持つ行列

つ小さい次数の係数 $u_{j_{\max-1}}^k$ を用いて

$$u_{j_{\max}}^k = [(\Psi_{j_{\max}}^2) L_{kl}]^{-1} \left\{ - \sum_{j=j_1}^{j_m} \sum_{n=1}^N u_{j_{\max-1}}^n \times \sum_{i=1}^M (\xi_i \Psi_j \Psi_{j_{\max}}) R_{inl} + \langle f_l \Psi_{j_{\max}} \rangle \right\} \quad (I.1)$$

と表されることが分かる。ただし, $\{j_1, \dots, j_m\} \in j_{\max-1}$ である。式 (I.1) を用いて $\sum_{i=1}^M (\xi_i \Psi_j \Psi_m) R_{ikl}$ を縮小した場合の行列を図-15 に示す。

PC の低次の項に対する高次の影響は小さいとし、低次の項より順に式 (I.1) を解くと言う方法もあるが¹⁵⁾、この場合は摂動展開を用いた手法と解法的には同じとなる事が容易に理解できる。

参考文献

- 1) 中桐滋・久田俊明. 確率有限要素法入門—不確構造の解析—. 培風館, 1990.
- 2) D. Zhang. *Stochastic Methods for flow in Porous Media*. Academic Press, San Diego, 2002.
- 3) R.G. Ghanem and P.D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- 4) R.G. Ghanem and V. Brzkala. Stochastic finite element analysis of randomly layered media. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(4):361-369, 1996.
- 5) R.G. Ghanem. Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158:199-220, 1998.
- 6) 本田利器. スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析. 土木学会論文集 I, 57(689):321-331, 2001.
- 7) 中川英則・堀宗朗. スペクトル確率有限要素法を用いた

横ずれ断層運動に伴う地表地盤の変状とその確率分布に関する研究. 応用力学論文集, 5:573-580, 2002.

- 8) T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229-256, 1994.
- 9) 野口裕久. エレメントフリー法の理論と応用. 機械の研究, 53(4):442-449, 2001.
- 10) J Dolbow and T. Belytschko. An introduction to programming the meshless element free galerkin method. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(3):207-241, 1998.
- 11) P.D. Spanos and R.G. Ghanem. Stochastic finite element expansion for random media. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 115(5):1035-1053, 1989.
- 12) W.K. Liu, T. Belytschko, and A. Mani. Random fields finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:1831-1845, 1986.
- 13) G. Deodatis. Weighted integral method i: Stochastic stiffness matrix. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 117(8):1851-1864, 1991.
- 14) 核燃料サイクル開発機構. わが国における高レベル放射性廃棄物の地層処分の技術的信頼性. 核燃料サイクル開発機構, 2000.
- 15) R.G. Ghanem and R.M. Kruger. Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129:289-303, 1996.

(2003.6.2 受付)

A STOCHASTIC ELEMENT FREE GALERKIN METHOD BASED ON PERTURBATIVE EXPANSION AND POLYNOMINAL CHAOS

Junya INOUE and Hyung-Mok KIM

This paper presents a stochastic element free Galerkin method for the problems involving random material property. The stochastic process in the material is represented by perturbative expansion as well as Polynominal Chaos, and implemented into Element Free Galerkin Method (EFGM). 1-dimensional linear elastic problem was solved by the proposed method and compared with Monte Carlo Simulation for the verification purpose. Besides, the characteristics in the results of both perturbative expansion and Polynominal Chaos are discussed. The present approach is distinguished in that it not only can consider the uncertainty in material property, but also requires no nodal connectivity for mesh construction. The present approach can be useful in analyzing the problems with complex geometry and stochastic uncertainties.