

非局所型ボクセル有限要素法の開発と その破壊挙動解析への適用

浅井光輝¹・山岸道弘²・寺田賢二郎³・永井学志⁴

¹正会員 博士 (工学) Dept. of Mech. Engrg., Ohio State University (206 West 18th Avenue, Columbus, OH43210-1107)

²工修 日産自動車株式会社第二車両開発部車体構造グループ (〒 243-0192 神奈川県厚木市岡津古久 560-2)

³正会員 Ph.D 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

⁴博士 (工学) 東京大学助手 生産技術研究所 (〒 153-8505 東京都目黒区駒場 4-6-1)

従来のボクセル解析における材料界面での人工的な応力振動を回避するために積分平均化理論を導入する非局所型ボクセル有限要素法を提案し、任意方向に進展する不連続面の取り扱いが簡便であるエレメント除去技術を導入して不連続面進展解析手法へと拡張する。非局所変数の算定方法、破壊基準、不連続面進展の解析アルゴリズムなどについて述べた後、数値解析例を示して手法の妥当性・適用性を検証する。特に、材料界面における応力振動の問題だけでなく、要素除去に起因する要素寸法依存性に対しても積分平均化理論を適用して算出する非局所ひずみ・応力が有効に機能することを示す。また、コンクリート材料のような非均質脆性材料を想定して、微視的な非均質性に起因した不連続面進展挙動やその強度特性を表す2軸破壊包絡線の再現を試みる。

Key Words : voxel finite element method, image-based modelling, non-local theory, element vanishing technique, heterogeneous brittle materials

1. 緒言

コンクリート・岩盤などの材料は、微視的に観測される非均質構造と脆性的な亀裂進展挙動が密接に関連し、非常に複雑な力学挙動を示す。そして、この種の材料から成る構造物は、微視的非均質性に起因して微細な亀裂が分布して発生し、それらが結合・連結することにより巨視的な不連続面が形成され、終局状態を迎えることが知られている。このため、微視的な非均質性構造を持つ脆性的な材料および構造の強度評価に際しては、微細な領域で発生する不連続変形の発生・進展などの複雑な力学挙動を的確に把握することが肝要である。

近年の計算機ハードウェアの高性能化の後押しもあり、上述のような破壊現象を理解するための道具として種々の数値解析技術に対する期待が高まっている。特にコンクリート材料に対しては、モルタルと骨材からなる2相材料としてモデル化を行い、微視的非均質性と非線形挙動の関連を数値的に評価する研究が盛んに行われており、著者ら¹⁾もラチスモデルによる2次元解析を行うことで実際の材料の微視構造のモデル化と不連続変形の進展挙動の再現性の重要性を指摘している。

非均質材料の微視構造が有する複雑な幾何形状を忠実に再現してその力学挙動を追跡する数値シミュレーション技術としては、デジタル画像の基本単位である画素(ピクセルまたはボクセル)を利用したイメージ

ベースモデリングと有限要素法とを融合したボクセル有限要素法^{2),3),4)}が注目を集めている。この手法は、いかに複雑な幾何形状であっても瞬時に微視構造のメッシュ生成を行い、構造解析までを自動的に行うことを可能にするため、コンクリートだけでなく様々な材料微視構造の数値解析へ応用されている。しかし、必ずモデルの幾何学的な特徴を反映できるというメリットの反面、ボクセルの並びによって物理境界(外部境界および材料界面)を表現することに起因する、応力(およびひずみ)の振動現象がしばしば問題点として挙げられる。これは本来なめらかな境界を人為的に階段状に近似することによって生じた近似誤差であり、特に局所的な応力値に頼る材料非線形解析においては、致命的なエラーを引き起こす可能性が指摘されている。

そこで本研究では、幾何形状の高い再現能力を有するボクセル有限要素法に対して以下の2点に関する技術的改良を施した新規の解析手法の開発を行う。

- 応力振動(近似誤差)の回避方法
- 3次元的に進展する不連続面の解析技術

そして、開発した手法を複雑な幾何形状を有する微視構造の破壊挙動解析に適用し、コンクリートなどの非均質脆性材料の強度評価への適用性について検討する。

まず、前述のような従来のボクセル有限要素法が抱える応力振動の問題に対しては、積分平均化理論^{5)~8)}における非局所ひずみ・応力を導入した非局所型ボクセル有限要素法を提案する。ここで積分平均化理論とは、

「ある局所変数の評価点を中心とした重み付き積分により平均化した非局所変数を定義し、これを局所的な変数の代わり使用する」非局所理論の一つであり、従来のボクセル有限要素法による解析において特異な振動現象を示す応力・ひずみ値に対してはスムージング効果を期待するものである。

次に、不連続面進展解析における不連続変形の幾何学的な表現技法に関しては、すべての領域が微小かつ定形要素で分割されるボクセル有限要素法との親和性や計算効率を考慮して、エレメント除去技術^{9)~11)}を採用する。すなわち、階段状に物理界面を表現する通常のイメージベースモデリングと同様にして、要素除去により発生する空隙の連続として不連続面を表現する。破壊判定には上述の非局所応力を用いることで、不連続面が階段状に表現されることによる不具合もある程度解消されるものと期待される。さらに、積分平均化理論は、軟化型の構成則を使用した際の要素分割依存性の低減化手法の一つとしても知られており、要素除去を施す本手法においてもその効果が保証されている。

このような2つの技術的改良を施した非局所ボクセル有限要素法の有効性について、まず単純な解析モデルを用いて数値的に確認する。そして、コンクリート材料の断面画像から構成した微視構造の3次元ボクセル解析モデルに対して破壊挙動解析を実施して巨視的強度評価を行い、本手法の適用性を検討する。

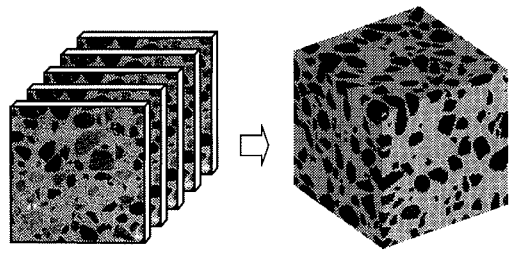
2. 非局所型ボクセル有限要素法

従来のボクセル有限要素法の境界および材料界面の階段状近似に起因した人為的な応力振動を回避するために、積分平均化理論を導入した非局所型ボクセル有限要素法を提案する。なお、本研究のボクセル要素にはすべて8節点の標準的な変位仮定要素 (HEXA8) を用い、完全数値積分 (8点 Gauss 積分) を適用することにする。

(1) ボクセル有限要素法とその問題点

ボクセル有限要素法は、実際の材料微視構造が有する複雑な幾何形状を解析に取り込むために、デジタル画像の基本単位である画素 (ピクセルまたはボクセル) を利用したイメージベースモデリングと有限要素法とが融合した解析手法である^{2),3)}。モデル生成に際しては、画像を構成する各画素を有限要素法の1要素と見なし、グレースケールの画素値によって材料を判別する。このため、通常の有限要素法では要素分割がほぼ不可能とされる実際のコンクリートのメゾ構造であっても、瞬時に解析モデルを生成することができる (図-1参照)。

このように、イメージベースモデリングによれば迅速かつ確実に解析モデルが生成できるという利点の反



コンクリートメゾ構造の断面層のデジタル画像；離散的な画素 (ボクセル) の集合体
ボクセル有限要素法における解析モデル (骨材とモルタルからなる2相複合材としてモデル化)

図-1 イメージベースモデリング

面、解析自由度の膨大化や実際の物理境界に適合しないメッシュによる応力振動などの欠点が指摘されている。前者の欠点は、近年の大規模計算技術やハードウェアの急速な発達によりある程度は補うことができるものの、後者の欠点は手法自体の改良が必要とされている。以下ではこの後者の問題点を例示し、次項でその解決策として積分平均化理論を適用することを提案する。

図-2(a)に示すような介在物を1つ含む単純な材料配置の物体をピクセル数 100×100 の解像度でデジタル化し、ボクセル有限要素解析を行う。同図には境界条件も併せて示しており、母材の Young 率と Poisson 比はそれぞれ 20 GPa, 0.3、介在物のそれは 60 GPa, 0.3 とした。図-2(b)に示す通常の有限要素法 (FEM) による結果と比較すると、図-2(c)に示す従来のボクセル有限要素法による解析結果では、材料界面に沿って特異な応力が現れ、振動している様子が見取れる。この特異応力および数値的な振動は、滑らかな界面を人為的に階段状に近似したことによるものであり、物理的には意味がない。しかしこの数値振動は、コンクリート材料のモルタルと骨材の界面剥離に起因する破壊現象をシミュレートするような場合には致命的な解析誤差に繋がるため、何らかの対処が必要となる。

Hollister & Riemer¹²⁾は高速フーリエ変換を利用したガウスフィルタリング技法によってこのような応力振動の問題の回避を試みたが、十分な効果は得られていない。これに対して、永井ら⁴⁾は要素内に異種材料界面が位置することを許容し、ひずみの不連続場を表現できる非適合要素を導入することで応力振動を回避している。しかしながら、この手法は要素の稜線と界面との交点の位置によってパターン化して材料界面を定義するため、1要素内に複数の材料界面を含む場合など、複雑な3次元構造の場合にはパターン化が困難となるほか、複数亀裂の結合・分岐などに対応しにくいなど、その適用範囲は限られている。

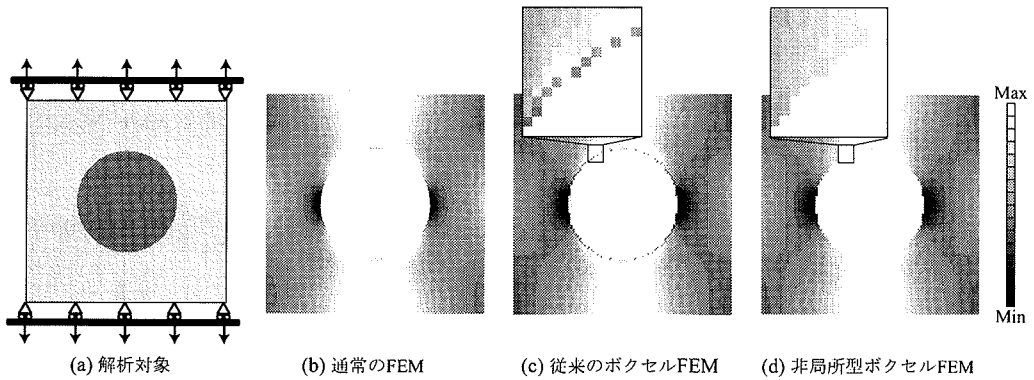


図-2 応力振動の問題に対する検証解析結果 (コンターはすべて von Mises 応力の値)

(2) 非局所型ボクセル有限要素法

図-2(b)・(c)を比較すると、材料界面以外の領域では定性的に有限要素法と一致した結果が得られていることが見て取れる。このことから、材料界面における応力状態については、滑らかに分布する周りの応力状態から推測し得ると考えられる。そこで本研究では、ある1点で応力を評価する際に、その応力評価点の周囲の影響を加味した大域的な点の情報から局所的な点での力学状態を評価する非局所理論^{5)~8)}の考え方を導入し、材料界面における応力振動の抑制効果を期待する。本項では、その具体的な方策を述べる。

a) 積分平均化理論の導入

以下では、各 Gauss 点で算出されるひずみ値の要素内での平均値を各要素の局所ひずみ ϵ と称する。弾性テンソルを C とすれば対応する局所応力は、

$$\sigma = C : \epsilon \quad (1)$$

として得られる。これに対して、評価点周りの局所ひずみの重み付き平均として非局所ひずみ $\bar{\epsilon}$ を次式のように定義し、非局所応力 $\bar{\sigma}$ はこのひずみと C から算定する。

$$\bar{\epsilon}(x) = \int_{\Omega} \alpha(x, \xi) \epsilon(\xi) d\xi \quad (2)$$

$$\bar{\sigma} = C : \bar{\epsilon} \quad (3)$$

ここで、 α は非局所重み関数であり、本研究では以下の釣鐘形関数を採用することにする (図-3 参照)。

$$\alpha(x, \xi) = \frac{\alpha_0(|x - \xi|)}{\int_{\Omega} \alpha_0(|x - \zeta|) d\zeta} \quad (4)$$

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 & \text{if } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{if } R \leq r \end{cases} \quad (5)$$

ここで R は非局所影響半径と呼ばれるパラメータであり、 $r = |x - \xi|$ は評価点 x から任意点 ξ までの距離を示す。

b) ボクセル解析における非局所ひずみの評価

ボクセル有限要素解析において、ある応力評価点での非局所ひずみを算定する際に、すべての要素についての影響の程度を評価すると少なくとも [全要素数] × [全要素数] のループ計算が必要となり、相当の計算負荷を費やす (Gauss 点でのループを考慮した際にはさらなる回数が必要)。このため、積分平均化理論に準じた数値解析では予め応力評価点 (receiver) ごとに影響する source 要素を記憶しておき、無駄なループを避けることが一般的に行われている。本研究でもこの方法を採用し、要素 (ボクセル) 中心が receiver の影響半径 R 内にある要素を source と定義する。

図-4(a)に示すように、定型かつ同じ大きさの要素が全領域に規則的に配置されるボクセル解析のモデルでは、各 receiver に対して source 要素の配置は同一のパターンになる。したがって、距離関数である $\alpha_0(r)$ の積分量を各 source 要素ごとに予め記憶しておくことでループ内で積分計算を行う必要がなく、計算負荷が軽減される。また、式 (2)、(4)における積分は、source 要素ごとに記憶された積分量の和として近似することにする。すなわち、式 (2) は式 (4) を代入することで近似的に

$$\int_{\Omega} \alpha(x, \xi) \epsilon(\xi) d\xi \approx \frac{\cup_{\text{source}} \left\{ \left(\int_{\Omega^e} \alpha_0(|x - \xi|) d\xi \right) \epsilon_e(\xi) \right\}}{\cup_{\text{source}} \left\{ \int_{\Omega^e} \alpha_0(|x - \zeta|) d\zeta \right\}} \quad (6)$$

となる。ここで、 Ω^e は source 要素 e の領域、 \cup_{source} はこれらのみに対して和をとるオペレータである。また、分子における $\epsilon_e(\xi)$ は要素内の全 Gauss 点でのひずみ値の平均 (局所ひずみ) を示す。

実際に与える重み関数 α は式 (4) により α_0 を正規化して与えるため、図-4(b)に示すように receiver が解析領域の境界近傍にある場合でも同様の手順にて重み関数を設定できる。ただし、材料界面近傍の receiver に対して影響半径内にある異種材料要素を source 要素と判

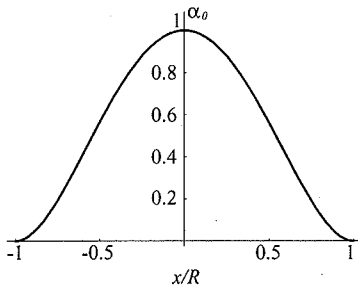
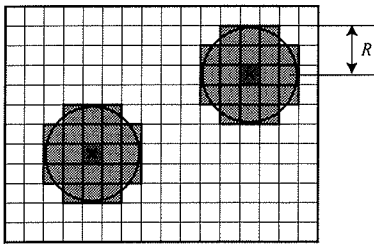
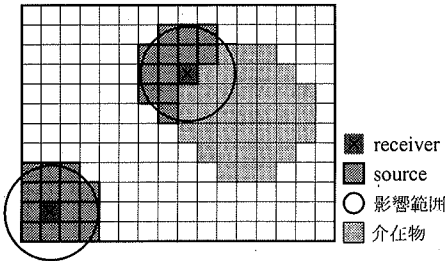


図-3 釣鐘形の重み関数



(a) receiverとsource要素



(b) 解析領域境界付近・材料界面付近での receiverとsource要素

図-4 2次元問題における receiverとsource要素

別すると、材料界面で不連続であるべきひずみが連続となってしまうため、本研究では同じ材料間のみで平均化を行うことにする。

本論文では、この積分平均化理論を導入したボクセル有限要素法を非局所型ボクセル有限要素法 (non-local voxel FEM) と呼ぶことにする。これを適用して、前項で扱った図-2(a)に示す対象に対して解析した結果を図-2(d)に示す。図-2(c)に示した従来のボクセル有限要素法の結果と比較すると、材料界面における応力振動が効果的に低減されている。これは提案する非局所型ボクセル有限要素法の有効性を示唆しているが、次項ではより詳細な数値検証を行うことにする。

(3) 検証例題：無限遠板の円形介在物問題

前項で提案した非局所型ボクセル有限要素法の精度検証例題として無限遠板の円形介在物問題を設定し、解

析解と比較する。

中央に位置する介在物が一定の体積ひずみ ε^* をデータとして膨張するという問題を設定する。無限遠板を想定すれば、この問題の解析解は Mura¹³⁾によって次のように与えられている。

$$u_r(r) = \begin{cases} Cr, & r \leq \bar{R}, \\ CR^2/r, & r \geq \bar{R}, \end{cases} \quad u_\theta = 0, \quad (7)$$

$$\varepsilon_{rr}(r) = \begin{cases} C, & r \leq \bar{R}, \\ -CR^2/r^2, & r \geq \bar{R}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(r) = \begin{cases} C, & r \leq \bar{R}, \\ CR^2/r^2, & r \geq \bar{R}. \end{cases} \quad (9)$$

ここで、円筒座標系 (r, θ) を用いており、 u_r は半径方向の変位、 ε_{rr} 、 $\varepsilon_{\theta\theta}$ はそれぞれ半径、周方向の垂直ひずみである。また、 $\bar{R} = D/2$ は図-5に示すように円形介在物の半径であり、 C は次式により与えられる。

$$C = \frac{(1 + \nu_2)\{E_1(1 - 2\nu_1) + \nu_1 E_1\}\varepsilon^*}{(1 + \nu_2)\{E_1(1 - 2\nu_1) + 2\nu_1 E_1\} + E_2(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)} \quad (10)$$

ここで、 E_1 、 ν_1 はそれぞれ母材の弾性定数と Poisson 比であり、同様に E_2 、 ν_2 は円形介在物のものである。

ここで示す解析例では、母材に関しては $E_1 = 10000$ 、 $\nu_1 = 0.3$ 、介在物に対しては $E_2 = 9000$ 、 $\nu_2 = 0.3$ を材料定数として用い解析を行った。介在物に与える体積膨張ひずみは $\varepsilon^* = 0.01$ として設定した。また、図-5に示す有限長さに限定した板の境界辺に、式(7)により与えられる解析解を強制変位として与えることにより、無限遠板を模擬した。ちなみにこの例題は、ひずみに不連続性を有する際の数値解の精度検証に際してしばしば用いられるものであり、EFGM^{14),15)}、および X-FEM¹⁶⁾の精度検証例題としても採用されている。

まずはじめに、ボクセル解析において材料界面でひずみ(または応力)が振動する問題に対して、非局所型ボクセル有限要素法の抑制効果と精度を確認する。図-6には、材料界面に沿った要素が持つひずみテンソルの2次不変量の分布を、従来のボクセル解析による解(灰色)とその解に積分平均化理論を適用した提案手法により得られる解(黒色)および解析解(鎖線)を併せて示した。この図から、提案手法による近似解は解析解からは多少ずれるが、従来のボクセル解析の結果と比較すると明らかに界面形状の階段近似に起因する振動が抑えられていることが確認できる。また、 $\theta = 0$ における変位、半径および周ひずみ分布について、式(7)~(9)で与えられるの解析解と数値解の比較をまとめて図-7に示す。本手法による数値解が解析解を精度良く近似している様子が確認できる。

ここで留意すべき事項として、receiverの非局所ひずみはsource要素の局所ひずみを重み付き平均したもの

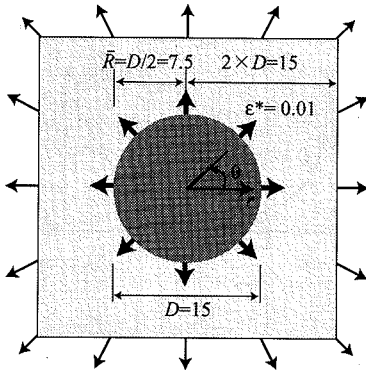


図-5 円形介在物問題の設定

であり、非局所ひずみから算出される非局所応力状態はつり合い状態にあるとは限らない。つまり、つり合い状態はあくまでも局所応力状態のみが保証するものであり、それを平滑化した非局所応力は次節で述べる材料損傷の判定にのみ使用されることを断っておく。したがって最後に、影響半径 $R (=0.4)$ を一定として、要素寸法を $h=0.15, 0.1, 0.075, 0.06$ としたときのつり合い状態にある局所解に対する非局所解の相対誤差を図-8 に示してその程度を確認しておく。ここで相対誤差 err は、局所解および非局所解によって算出されるエネルギーノルムをそれぞれ U, \bar{U} として次式により評価している。

$$err = \left| \frac{U - \bar{U}}{U} \right| \times 100 \quad (\%) \quad (11)$$

$$U = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (12)$$

$$\bar{U} = \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} d\Omega \quad (13)$$

この図から、どの要素分割においても相対誤差が1%にも満たず、非局所型ボクセル有限要素法において損傷判定に用いられる応力値は実際のつり合い状態を満たす応力値から大きくはずれることが確認できる。

3. 不連続面進展解析への拡張

前節では非局所型ボクセル有限要素法の線形問題に対する精度が確認できた。ここでは、これを不連続面進展解析へ拡張し、その解析アルゴリズムを提示する。

(1) 不連続面の表現法

a) エレメント除去技術

複数の不連続面が任意の方向に3次元的に進展する現象をボクセル有限要素法によってシミュレートする場合、不連続面を潜在的に規定する手法やその幾何性

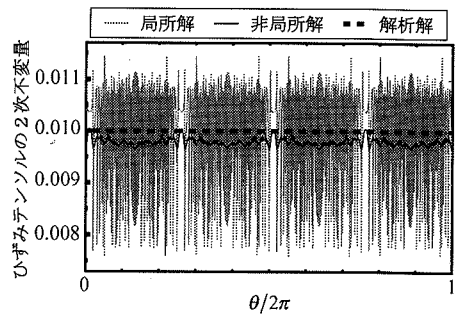
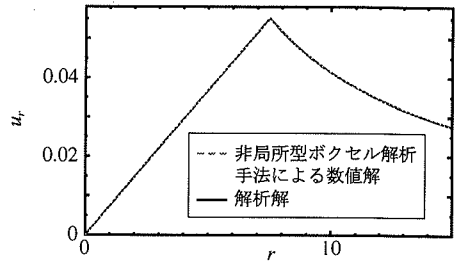
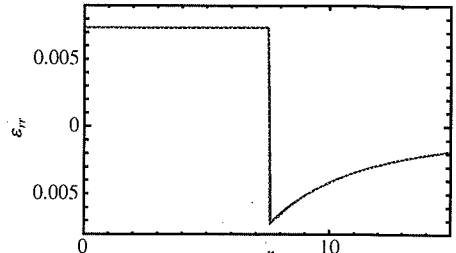


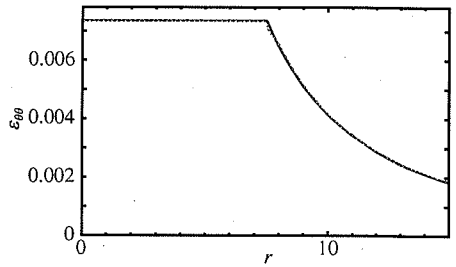
図-6 材料界面におけるひずみ分布



(a)



(b)



(c)

図-7 数値解と解析解の比較

状をより厳密に表現する手法は不適切である。また、不連続面の発生・進展の様子を可視化することによる破壊メカニズムの解明も視野に入れると、不連続面を陽に表現できる手法が好ましい。

そこで本研究では、3次元問題における不連続面の取り扱いが容易で、しかも定形かつ微小なボクセルを利用した本手法との親和性を考え、不連続面の表現には

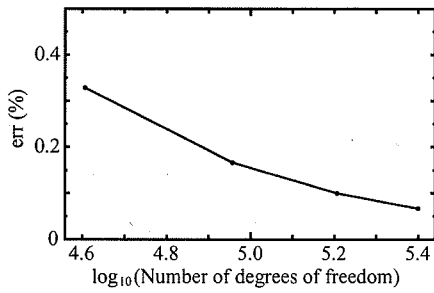


図-8 局所解に対する非局所解のエネルギーノルムの相対誤差

エレメント除去技術^{9)~11)}を採用する。この技術は、ある破壊規準を満たした要素の剛性を徐々に劣化させる、または剛性を消失させることで応力の伝達を遮り不連続面を表現するものであり、構成式(3)を次式で置き換えた一種の損傷モデルと見なすことができる。

$$\bar{\sigma} = (1 - \omega) C : \bar{\epsilon} \quad (14)$$

また、 ω は応力評価点での応力状態により 0 (全く損傷がない状態) から 1 (完全に剛性を失った状態) のスカラー値で材料の損傷度合いを表す損傷パラメータである。

通常の損傷モデルでは、図-9(a)に示すように応力が破壊限界値 σ_c に達したあとはひずみ ϵ に対して指数関数的に減少するような損傷パラメータを設定して巨視的な軟化挙動を表現するものが大半である。これは、要素を除去する際の損傷エネルギーの影響が、要素領域全体に波及することに対する抑制効果を材料モデルに期待するものである。しかし 1 要素が極めて小さい本解析手法では、ごく微小な領域での材料特性を与えるべきであり、ここでは破壊後には完全に脆性挙動を示すモデルを採用することにした(図-9(b)参照)。すなわち、破壊規準を満たした要素は瞬時に損傷パラメータを 1 とし、要素剛性を消失させることで不連続面を表現している。ここで実際の計算上においては、連立方程式の解法に用いている共役勾配法が要素剛性をゼロとすると都合が悪いため、 $1 - \omega = 10^{-4} \sim 10^{-5}$ 程度に設定して極めて弱い剛性を与えることにしている。

また、本研究で採用した積分平均化理論では、材料構成モデル内の各変数あるいは一部の変数に対して非局所変数を導入し、応力評価を行う。実際ここでは、上記の損傷パラメータの評価の際に非局所応力を使用し、つり合い状態を満たす応力にはその損傷パラメータを参照して次式により算出される局所応力 σ を用いることにする。

$$\sigma = (1 - \omega) C : \epsilon \quad (15)$$

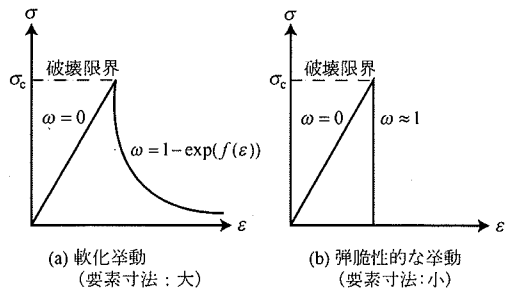


図-9 損傷モデルにおける局所的な挙動

b) エレメント除去技術の問題点

エレメント除去技術はその特徴から不連続面の表現を容易なものにするが、一方で以下の問題点が挙げられる。

- 除去した要素が周囲に与える影響は要素寸法によって異なるため、要素寸法に依存した解析結果が得られる。
- 不連続面はボクセルの並びにより形成されるために実際の亀裂先端が表現できず、その進展長さや方向の評価に用いる応力集中の位置や主応力値・方向の信頼性が低い。

1つ目の要素寸法依存性に関しては、前節で導入した積分平均化理論の有効性が通常の有限要素法の枠組みで Jirásek & Zimmermann¹⁷⁾, Bažant & Lin¹⁸⁾ によって示されている。これらの不連続面の表現法は本手法のそれとは異なるものの、同様の効果が期待できる。また、2つ目の問題点は、応力集中部となる角点を有する立方体状の空隙の並びとして不連続面を表現する事に伴い、至る箇所に応力集中部を生成してしまうことに起因している。しかしこれも積分平均化理論の導入により非物理的な応力振動は補正されるので、亀裂先端部の適正な位置の検出と正しい主応力方向の算定が可能と考えられる。これらの考察の内容は、次節の検証例題における検討事項としても取り上げる。

(2) 不連続面発生規準

a) 単一材料

母材および介在物などの単一材料の破壊規準としては、引張り破壊のみを考慮する古典的な Rankine 破壊規準を採用する。すなわち、要素中心の応力が応力空間において破壊包絡線外(図-10における網掛け部)にある要素は破壊したと見なす。ただし、本提案手法では非局所ひずみ(2)より算出される非局所応力(3)を参照する。

b) 材料界面

複合材料における微視的破壊を考えたとき、各材料の破壊規準が異なることはもとより、異種材料界面で

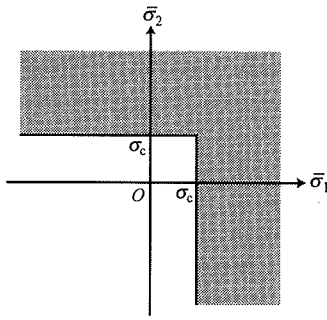


図-10 損傷の発生条件 (Rankine 破壊規準)

はさらに別の破壊規準を用いることがある。例えばコンクリート材料では不連続面が界面剥離破壊から生じることが知られており、母材および介在物より強度の低い界面層を置くことは実際の現象に照らしても妥当なモデル化であるといえる。実際、この界面層は次節で考慮するコンクリート材料の骨材とモルタルの界面に存在する遷移帯と呼ばれる弱層をモデル化したものと捉えてもよい。本研究では、図-11に示すように、この界面層を他の領域とは異なる破壊規準を設定した1要素分で表現し、界面層要素と呼ぶことにする。

本研究では、界面剥離破壊は界面層要素の中心における応力ベクトルの界面法線方向に起こるものと仮定する。ただし、界面は厚みのある層と見なしており、その配置も階段状になるため法線ベクトルの定義は自明ではない。そこで本手法では、以下に述べる方法で法線ベクトルを算定することにした。

ボクセルの並びの行列が \$(m, n)\$ の位置にある界面層要素について、これを囲む要素 \$(i, j)\$ (\$m-1 \leq i \leq m+1, n-1 \leq j \leq n+1\$) のうち介在物要素だけに着目して相対的な位置 \$(m-i, n-j)\$ を求め、これを位置ベクトル \$\{m-i, n-j\}^T\$ と見なす。そして、着目した要素に関する位置ベクトルの和を介在物に対する法線方向と定義し、法線方向単位ベクトルを算定している。図-12はこの算出法を模式的に示すものである。

また、材料界面まで進展してきた不連続面を滑らかに次の領域へと伝達させるために、ここで述べた規準に加えて母材と同一の主応力による破壊規準も併せて設定した。すなわち、界面層要素は両者の一方の破壊規準に達したときに剛性を失うものと仮定している。

(3) 解析アルゴリズム

不連続面進展解析に非局所型ボクセル有限要素法を用いた際の解析手順について概説する。解析の全体的な流れは図-13に示し、ここでは不連続面発生に起因する非線形挙動の追跡法について述べる。

前節の数値例で示したように、非局所応力を用いて評

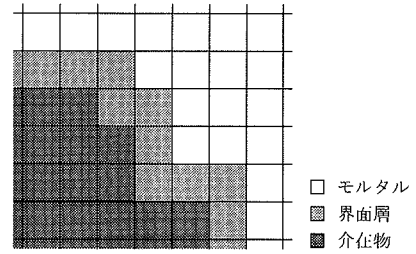


図-11 界面層要素の配置

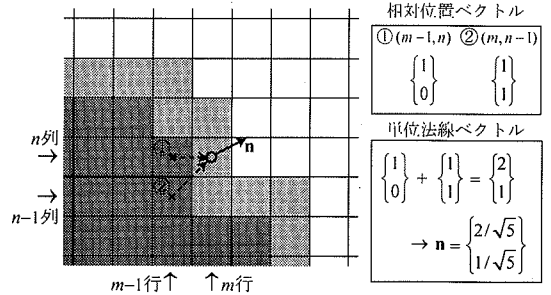
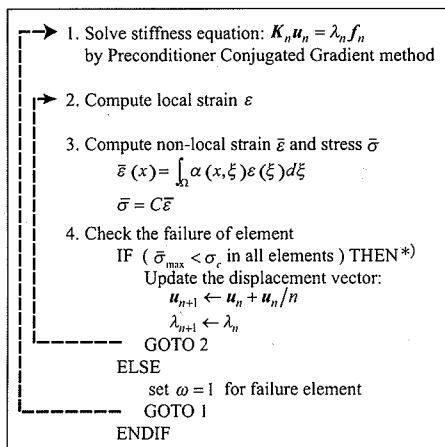


図-12 単位法線ベクトルの算出例

価する内力と外力とはつり合い状態が保証されないため、非線形つり合い経路を追跡する際に一般的な Newton-Raphson 法などの増分解法は利用できない。そこで本研究では、線形弾性体であることを利用して初期状態 (図-14における原点) からの全変位を各ステップごとに強制的に与える割線法を採用する。以下、強制変位は各ステップ間で等しい増分を与えること想定して、この解析アルゴリズムを図-14に即して説明する。

まず、第 1-1 ステップにおいて剛性方程式から得られた変位 $u_1^{(1)}$ を用いて非局所ひずみ、そして非局所応力を算定する。ここで全要素の非局所応力値と破壊強度を比較し、破壊規準を満足する要素が 1 つもなければ、第 2-1 ステップへ移行する。この際、線形性が成立するので $u_2^{(1)} = u_1^{(1)} + u_1^{(1)}$ が第 2-1 ステップの全変位となる。さらにこのステップでも破壊規準を満たす要素がなければ、 $u_3^{(1)} = u_2^{(1)} + u_2^{(1)}/2$ が第 3-1 ステップの全変位となる。もし、この変位 $u_3^{(1)}$ から算出される非局所応力で破壊すると判定された要素があれば、その要素の損傷パラメータを $\omega \approx 1$ にして剛性行列 $K_3^{(2)}$ を再構成し、今度は新たに剛性方程式 $K_3^{(2)} u_3^{(2)} = \lambda_3 f$ を解くことで第 3-2 ステップの全変位 $u_3^{(2)}$ を求める。この変位から算定した非局所応力で破壊条件を満たす要素がなければ、次の第 4-1 ステップの全変位は線形性から $u_4^{(1)} = u_3^{(2)} + u_3^{(2)}/3$ が求められる。破壊規準を満たす要素がない限り引き続きこの操作を続ける。ここで、例えば第 3-2 ステップにおける剛性方程式を共役勾配



*) $\bar{\sigma}_{max}$: 非局所応力の最大主応力
 σ_c : 破壊限界応力
 λ_n : 荷重パラメータ

図-13 解析アルゴリズム

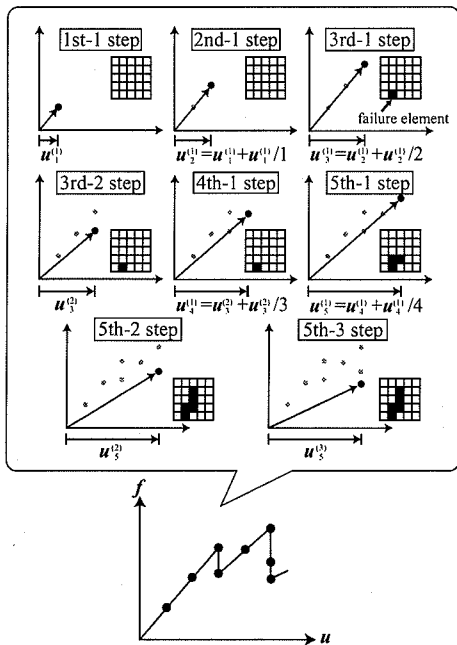


図-14 割線法による非線形挙動の追跡方法

法によって解く場合、前(第3-1)ステップの変位は比較的精度のよい初期値であり、共役勾配法に関する計算コストを大幅に削減することが可能となる。

このように、要素が取り除かれた構造を反映した(割線)剛性方程式を解いて逐次追跡していくが、あくまでも構成材料は線形弾性体に限定した手法であることを断っておく。

4. 数値解析例

本節では、提案するエレメント除去技術を導入した非局所型ボクセル有限要素法により不連続面進展解析を行い、手法の有用性・適用性を調べる。まず、要素寸法依存性に対する検証により、不連続面進展解析における積分平均化理論の有効性を示す。次に、本手法により得られる破壊形態と実験結果との比較により、エレメント除去技術の有効性を示す。最後に、コンクリート材料のメゾ構造に対してモルタル・骨材間の遷移帯の影響も考慮して3次元解析を行い、本手法の強度評価法としての適用性について検討する。

(1) 不連続面進展解析における積分平均化理論の有効性に関する検証

図-15に示すような、下端に切り欠きをいれたはり状構造物の4点せん断試験のシミュレーションを行う。この実験はArrea & Ingraffea¹⁹⁾によって行われたものであり、図-15は実験で観察された破壊モードも模式的に示している。要素分割数が330×75(Mesh-A)、440×100(Mesh-B)、660×150(Mesh-C)の3種類のモデルを用意し、各々に対してボクセル有限要素法および非局所型ボクセル有限要素法により解析を行った。均質体を仮定して材料定数は弾性定数に $E = 30 \text{ GPa}$ 、ポアソン比に $\nu = 0.18$ を用いている。

まず、破壊規準に局所応力を用いて従来のボクセル有限要素法による不連続面進展解析の結果を図-16(a)に示す。不連続面が荷点に向かって分岐しながら進展しており、図-15に示す実験結果とは明らかに異なる破壊モードが得られていることが観察される。これは、前節の第(1)項b)で考察したように、不連続面先端部分で局所応力の集中する場所が定まらないこと、隣接するボクセル間での主応力方向の整合性が取れないことなどが原因として考えられる。一方、図-16(b)に示す提案手法による解析結果では、非局所モデリングを施した効果により、亀裂先端に相当する領域における応力集中の位置と主応力方向が的確に評価されるために、どの要素分割のモデルを用いても実験結果に類似の不連続面進展の様子がシミュレートされている。

図-17には荷重-変位関係を示す。この種の4点せん断試験では荷点Aの変形にsnapback¹⁷⁾が現れることが知られているが、今回の解析では荷点の変位を制御したのでこの現象は再現されない。したがって、この図では切り欠き部における鉛直方向変位(CMSD)を用いている。図-16(a)に示す従来のボクセル有限要素法による解析結果では、どの要素分割を用いても同様な破壊形態を示しており、一見要素寸法に依存していないように見えるが、図-17(a)からは明らかに要素寸法が大きくなるほど構造全体の耐力が増加するという要

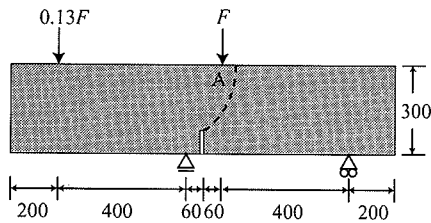


図-15 4点せん断試験における解析モデルと実験結果の模式図

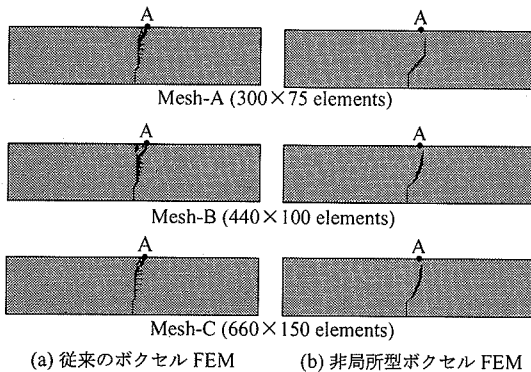


図-16 4点せん断試験の数値シミュレーション結果

素寸法依存性が見て取れる。これに対して、非局所型ボクセル有限要素法によって得られた荷重-変位関係を図-17(b)に示すが、この手法によれば要素分割に対する依存性がかなり軽減できることが分かる。実際、局所的な応力値を参照し材料の損傷を評価する際には、要素寸法が小さくなるほど不連続面先端の応力の集中度が増加するのに対して、非局所応力の集中度は非局所影響半径に依存することになり、これを材料パラメータとして適切に設定することで要素寸法そのものの影響をある程度除外できるのである。

以上の検証結果より、不連続面の進展解析にエレメント除去技術と非局所変数による破壊判定を併用するという本アプローチの妥当性が示された。

(2) 破壊規準値と破壊モードに関する検証例

材料の破壊モードは、微視的な構造を構成する材料の強度に依存することが簡単な試験体に対する実験を行うことで再現されている²⁰⁾。例えば、疑似骨材が単純なパターンで配置されたモデルコンクリート試験体に対する3点曲げ試験においては、骨材の種類によってそれを貫通あるいは迂回するなどの破壊モードの違いが観察されている。そこで、骨材について異なる破壊規準値を設定して、本手法による数値解が実験と同様にその違いを反映しうるか否かを検証する。

この検証には図-18に示す2種類の試験体を用意した。

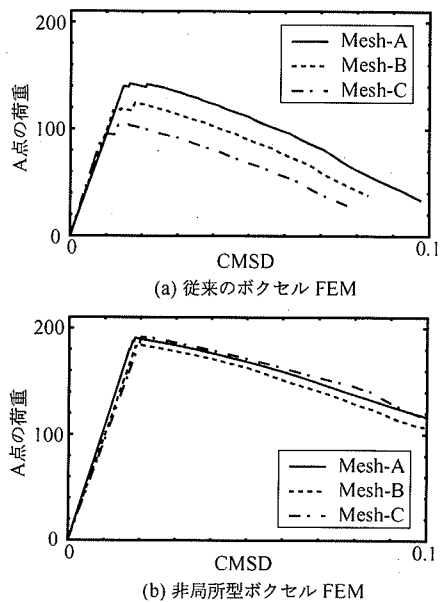


図-17 異なるメッシュサイズを用いた際の荷重-CMSD 関係

表-1 解析に用いる破壊規準値

	母材 (MPa)	界面 (MPa)	介在物 (MPa)
Case 1	2.8	2.0	3.1
Case 2	2.8	2.0	5.1

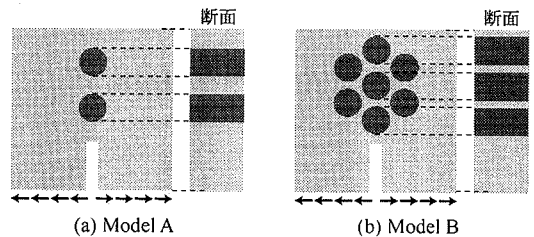


図-18 解析対象

母材の弾性係数と Poisson 比をそれぞれ $E_m = 27.8 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.22$, 介在物のそれを $E_i = 34.5 \text{ GPa}$, $\nu_i = 0.18$ とした。破壊規準値は、表-1に示すように母材・界面層要素に対する破壊規準値は一定とし、介在物に対する破壊規準値だけを変えたモデルを設定している。図-19に示す解析結果から、介在物の破壊規準値が母材の破壊規準値に対して同程度ならば貫通し、高ければ迂回するという経験的洞察と一致した破壊モードが確認できる。これは実験でも確認されている現象であり²⁰⁾、本解析手法による解析の妥当性を示すものである。

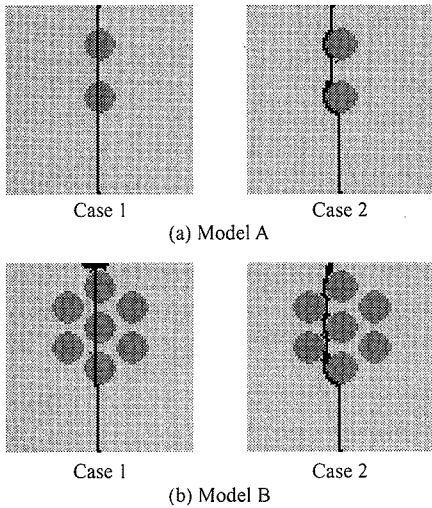


図-19 各破壊規準に対応する解析結果

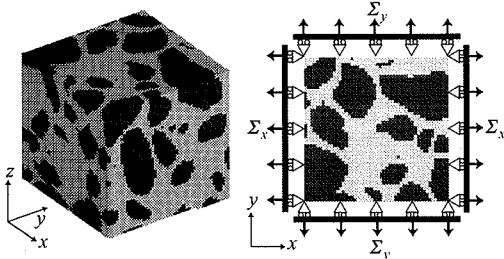


図-20 2軸荷荷試験における解析モデル

(3) コンクリート材料の強度評価への適用

a) 本解析における材料のモデル化

コンクリート材料では、単純な構成モデルのみにより説明されない現象が多数存在する。例えば、材料試験によってコンクリート特有の破壊包絡線が得られる力学的理由付けや、粗骨材の最大寸法とコンクリート強度の相関性などについては未だに議論的である。これらの現象の説明としては、骨材粒子と水和セメントペーストとの間に存在する遷移帯までを考慮することが重要であることが経験的に知られている。そこで本項では、前項同様コンクリート材料を骨材・モルタル・遷移帯の3つの物質モデルに分類し、それぞれの物質に対し破壊強度を設定する。また、材料モデルは他の解析同様、弾脆性の構成モデルを用いることにする(図-9(b)参照)。

b) 解析モデル

この解析は、計算時間の都合上図-1に示すコンクリート画像の一部を用いて行う(図-20参照)。ただし、図-1に示すオリジナルのボクセル要素は、一辺が64mmの

コンクリート塊の立方体を 100^3 分割したものであり、ここでは $1/8$ 領域より解析モデルを作成した(ボクセル要素作成の手順の詳細は文献^{2)~4)}を参照)。したがって、本解析モデルは 50^3 分割されており、要素一辺の長さは $640\mu\text{m}$ 、節点数 132,651、要素数 125,000、自由度 397,953 である。また、一般に骨材とモルタル界面付近に広がる遷移帯の厚さは $40\mu\text{m}$ 程度といわれており、この場合の1要素よりも小さい領域となる。このため本研究では、図-11で示した界面層要素の配置図と同様にして、骨材要素と面あるいは辺を共有するモルタル要素を遷移帯要素に置換することで、一層分の遷移帯領域を作成した。

荷荷条件としては、2軸荷荷試験を想定し、 y - z 平面 x 方向および z - x 平面 y 方向に強制変位を与える。以下、この解析対象を便宜的に供試体モデルと呼ぶことにし、結果として得られる変形と反力から見かけのひずみ E_x, E_y と見かけの応力 Σ_x, Σ_y などを算出することにする。

モルタルと遷移帯(界面層要素)の弾性定数は共に $E_m = 20 \text{ GPa}$ 、骨材に対しては $E_a = 60 \text{ GPa}$ を用いた。また、Poisson 比はすべて $\nu = 0.25$ とした。引張強度に関しては実測することは困難であるが、実験において供試体の最大耐力の30~50%の荷重レベルで界面剥離破壊が発生し、クラックの進展とともにモルタルが破壊されピークを迎えるという経験的事実から、本解析ではそのピークをモルタルの強度(破壊限界応力)と仮定し、遷移帯強度はモルタル強度の $1/3$ と設定している。また骨材はモルタルの2倍の強度を有すると仮定している。

c) 解析結果

供試体見かけの応力-ひずみ関係 図-21(a)・(b)には、1軸圧縮状態と1軸引張状態の条件下で解析を行った際の見かけの応力-ひずみ関係を示す。ここで、この解析を通して図中の f_c は1軸圧縮強度である。本手法により算出された1軸圧縮時と引張時の強度比は約 $1/13$ であり、経験的な数値である $1/10 \sim 1/15$ の範囲に含まれていることから、妥当な結果が得られたといえる。

また図-21(a)~(d)のどの荷荷パターンにおいても、微視的には弾脆的な構成関係を採用しているにも関わらず、供試体モデルの平均挙動としては界面剥離破壊に伴う非線形挙動の発現から最大耐力後の軟化挙動までを表現できている。しかしながら、界面剥離発生時に供試体強度の急激な低下が観察される。これは、遷移帯の特性を与えた界面層要素はすべて同じ強度を設定したため、瞬時に多くの界面層要素が取り除かれたことによるものである。実際、今回の解析における遷移帯の破壊規準値は仮定した各材料の強度比から適当に定めたものであり、その値自体には何の物理的根拠もない。より実現性に近づけるには、界面層要素の強

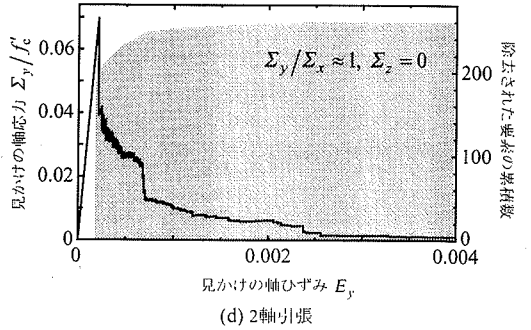
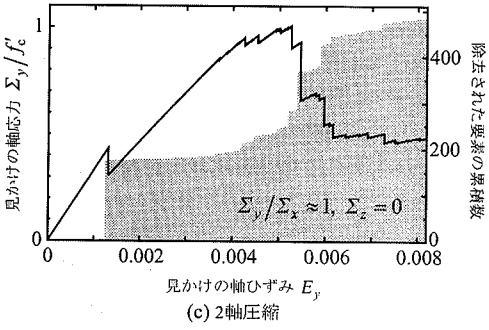
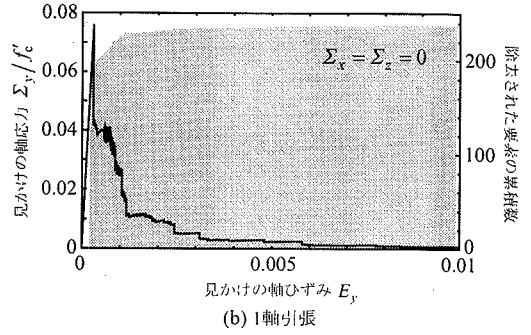
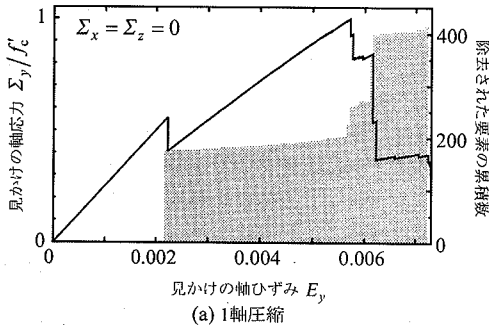


図-21 各载荷パターンについての見かけの応力-ひずみ関係および破壊要素数

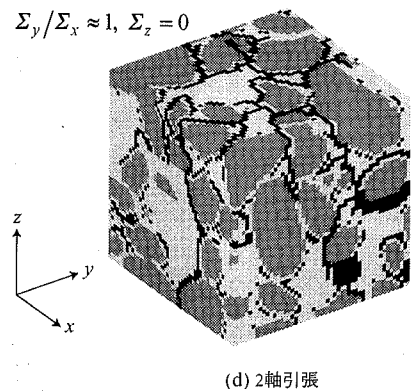
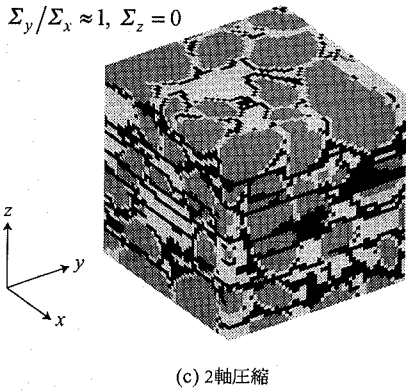
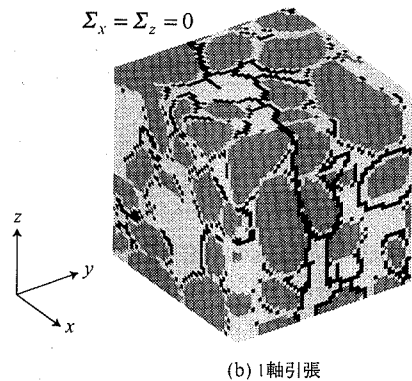
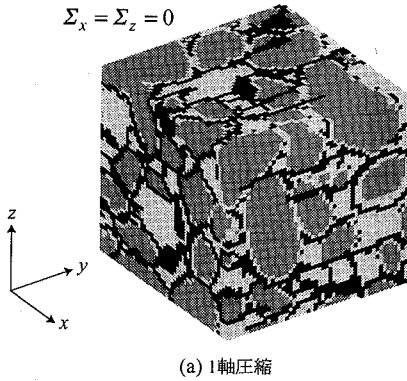


図-22 各载荷パターンについての破壊モード

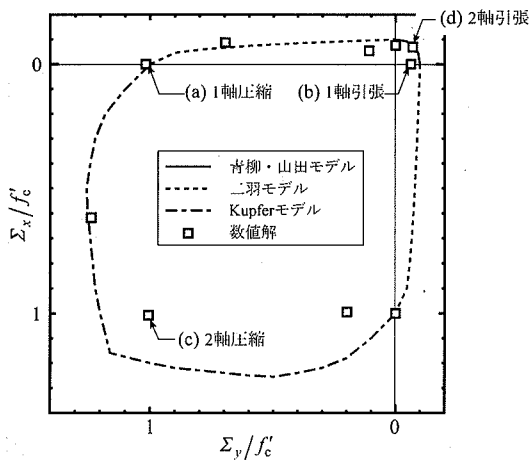


図-23 2軸荷重試験の実験および数値解析による破壊包絡線

度を分布させるなどの処置が必要であろう。また、母材や介在物を含めて破壊パラメータは実験データとのキャリブレーションにより決定するのが望ましい。

破壊モード 図-22には、(a)1軸圧縮、(b)1軸引張、(c)2軸圧縮、(d)2軸引張荷重の各破壊モードを示す。これらの結果より、どの荷重パターンにおいても骨材周囲に引張方向（(a)z・x方向、(b)y方向、(c)z方向、(d)x・y方向）と垂直な方向にマイクロクラックが顕著に発生し、それらの相互作用によって巨視的な破壊が起きていることが確認できる。特に2軸圧縮においては、通常の2次元解析では再現できないz方向への体積変化による割裂破壊が起きており、本手法による3次元解析の妥当性が示されている。

2軸破壊包絡線 最後に、図-23には本解析で得られた各荷重パターンの最大耐力を、代表的な経験則である、青柳・山田モデル²¹⁾（引張-引張領域）・二羽モデル²²⁾（圧縮-引張領域）・Kupferモデル²³⁾（圧縮-圧縮領域）と併せて示す。実験で得られた破壊包絡線とは異なる傾向を示すものの、3次元効果により2軸圧縮領域における破壊包絡線を表現できていることがわかる。ちなみに、ラチスモデルを用いて本手法と同様に微視的な引張破壊だけを考慮して2軸応力下における破壊包絡線の再現を試みた浅井ら¹⁾も、2軸引張領域および圧縮-引張領域では実験で得られた破壊包絡線と同様な傾向を再現しているが、2次元の平面ひずみを仮定したために2軸圧縮における破壊を十分に再現できず強度評価までは至っていない。

以上、コンクリート材料の材料特性評価に対して実際の微視的（あるいはメゾ）構造を模擬した解析モデルを用いて3次元解析を実施したが、ここでの結果はボクセル要素レベルでの引張破壊だけを考慮した本手法の適用性を示している。

5. 結語

従来のボクセル解析における材料界面での人工的な応力振動を回避するために、本研究では積分平均化理論を導入した非局所型ボクセル有限要素法を提案した。また、任意方向に進展する不連続面の取り扱いが簡便であるエレメント除去技術を導入することにより、不連続面進展解析手法に拡張した。検証例題を通し、ボクセル解析への積分平均化理論の導入が、応力振動の低減手法として期待できるだけでなく、不連続面進展解析における要素分割依存性の解消に有効であることを確認した。また、不連続面の表現としてエレメント除去技術を採用により、複数の不連続面が複雑に進展する過程を定性的に再現することが可能となった。

提案手法の有用性を確認すべく、応用例題としてコンクリート材料の2軸荷重試験を実施した。この例題では、コンクリートメゾ構造をモルタル・骨材・遷移帯からなる3相複合材料としてモデル化し、引張力による脆性破壊を示す破壊規準のみを導入した単純な構成モデルを採用した。その結果、界面剥離破壊を起点としてマクロクラックの発生・進展から崩壊過程までの一連の破壊現象が再現され、コンクリート材料の特徴的な材料特性である2軸破壊包絡線を定性的に評価することができた。

現在、コンクリート材料や岩盤などの非均質かつ脆性的な特徴を併せ持つ材料の構成則として数多くのモデルが存在するが、そのほとんどが供試体実験から得られる見かけの応力-ひずみ関係から記述する“現象学モデル”であり、構造解析へ使用を睨んだ巨視的な構成則である。これに対して本研究は、見かけの巨視的材料挙動を支配する微視的（あるいはメゾ）構造を解析対象として、複雑な幾何学的特性の再現性の高いボクセル有限要素法を採用するとともに、構成材料には極めて単純な構成モデルを採用することで、供試体実験のシミュレーションに成功した。計算コストの面から、現状のモデルをそのまま土木構造の解析へ転用することは賢明ではないが、実験では観測が困難な材料内部での破壊過程の再現を目指したこうした微視的力学アプローチは、材料の破壊メカニズムの解明に有効活用されることが期待される。

今後、微視的な不連続面における接触・摩擦現象のモデル化を取組むなど各構成材料のモデル化の再検討が急務であり、さらには供試体試験などの結果とのキャリブレーションを併せることでより信頼性の高い巨視的構成モデルの構築が望まれる。また、コンクリート材料における遷移帯、あるいは実際に発生している尖り点など、通常の写真のデジタルイメージからは検出が困難となる構成材料の幾何学特性の再現方法など、ボクセル解析自体の改良も必要であろう。

謝辞：日本コンクリート工学協会コンクリート微細構造解析研究委員会の皆様から有益なコメントをいただきました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

- 1) Asai, M., Terada, K. and Ikeda, K., Suyama, H., Fujii, K.: Meso-scope numerical analysis of concrete structures by a modified lattice model, *J. Struct. Mech. Earth. Engrg.*, No.731/I-63, pp. 19-30, 2003.
- 2) Hollister, S.J. and Kikuchi, N.: Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, *Biotechnology and Bioengineering*, Vol.43-7, pp.586-597, 1994.
- 3) Terada, K., Miura, T. and Kikuchi, N.: Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials, *Comput. Mech.*, Vol.20, pp.331-346, 1997.
- 4) 永井学志, 山田貴博, 和田章: 階層型デジタル画像に基づく粗骨材-モルタル界面を考慮したコンクリート材料の非線形有限要素解析手法, 日本建築学会構造系論文集, Vol.528, pp.91-98, 2000.
- 5) Bažant, Z.P. and Pijaudier-Cabot, G.: Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.55, pp.287-293, 1988.
- 6) Bažant, Z. P. and Lin, F.-B.: Nonlocal yield limit degradation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.26, pp.1805-1823, 1988.
- 7) Vermeer, P.A. and Brinkgreve, R.B.J.: A new effective non-local strain measure for softening plasticity, in *Localization and Bifurcation Theory for Solids and Rocks*, (eds. Chambon, R., Desrues, J. and Vardoulakis, I.), Balkema, Rotterdam, pp.89-100, 1994.
- 8) Nilson, C.: On nonlocal plasticity, strain softening and localization, Report TVSM-1007, Division of Structural Mechanics, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1994.
- 9) Mahishi, J.M. and Adams, D.F.: Micromechanical Predictions of Crack Initiation, Propagation and Crack Growth Resistance in Boron/Aluminum Composites, *Journal of Composite Materials*, Vol.16, pp457-469, 1982.
- 10) Ortiz, M. and Giannakopoulos, A.E.: Crack propagation in monolithic ceramics under mixed mode loading, *International Journal of Fracture*, Vol.44, pp233-258, 1990.
- 11) Haidar, H., Dubé, J.F. and Pijaudier-Cabot, G.: Modelling of crack propagation in large structures with a two scales approach, *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, pp.799-804, 2001.
- 12) Hollister, S.J. and Riemer, B.A.: Digital image based finite element analysis for bone microstructure using conjugate gradient and Gaussian filter techniques, *Mathematical Methods in Medical Imaging*, Vol.2035, pp.95-106, 1993.
- 13) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Pub., The Hague, 1987.
- 14) Cordes, R.W. and Moran, B.: Treatment of material discontinuity in the Element-Free Galerkin method: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, pp.75-89, 1996.
- 15) Drongauz, Y. and Belytschko, T.: EFG approximation with discontinuous derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.41, pp.1215-1233, 1998.
- 16) Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N. and Belytschko, T.: Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.190, pp.6183-6200, 2001.
- 17) Jirásek, M. and Zimmermann, T.: Rotating crack model with transition to scalar damage, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.124, pp.277-284, 1998.
- 18) Bažant, Z.P. and Lin, F.B.: Nonlocal smeardcracking model for concrete fracture: *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.114, pp.2493-2510, 1998.
- 19) Arrea, M. and Ingraffea, A.R.: Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete, *Dept. of Struct. Engrg. Rep. 81-13*, Cornell University, Ithaca, N.Y., 1981.
- 20) 小野正樹, 橘高義典, 上村克郎, 中村成春, 小西敏正, 金子和人, 九岡和之: 高強度コンクリート複合モデルの破壊性状-多相複合材モデルのひびわれ進展解析-, 日本建築学会大会学術講演概要集, pp.871-872, 1994
- 21) Aoyagi, Y. and Yamada, K.: Strength and deformation characteristics of reinforce concrete shell elements subjected to in-plane forces, *Proc. of JSCE*, No.331, pp.167-180, 1983.
- 22) Niwa, J., Yamada, K., Yokozawa, K. and Okamura, H.: Reevaluation of the equation for shear strength of reinforced concrete beams without web reinforcement, *Concrete Library of JSCE*, No.9, pp.65-84, 1987.
- 23) Kupfer, H.B. and Gerstle, K.H.: Behavior of concrete under biaxial stresses, *Proc. of ASCE*, EM4, pp.853-866, 1973.

(2003.5.26 受付)

A NON-LOCAL VOXEL FINITE ELEMENT METHOD AND ITS APPLICATION TO FAILURE ANALYSES

Mitsuteru ASAI, Michihiro YAMAGISHI, Kenjiro TERADA and Gakuji NAGAI

A non-local voxel FEM is developed for simulating the failure phenomena of heterogeneous brittle materials. The micro-scale or meso-scale morphology of heterogeneous materials is realized by the image-based modeling technique, whereas the cracking is simulated by the element vanish technique. Also, the nonlocal technique of integral-averaging type is effectively utilized to avoid both the stress oscillation errors on the material interfaces and the spurious dependency on the voxel size for crack propagation problems. The three-dimensional numerical simulations successfully demonstrate the cracking phenomena induced by the micro-scale heterogeneities and the so-called biaxial effect that is typical in the strength characteristics of concrete.