

スペクトル確率境界要素法の提案と 幾何形状に不確定性を有する弾性解析への適用

本田 利器¹

¹正会員 工博 京都大学 防災研究所 (〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

不確定性を定量的に考慮することは工学の諸問題において非常に重要な課題である。本論文では、スペクトル確率有限要素法の基本的な考え方である Spectral Stochastic Approach を境界要素法に適用し、境界条件が不確定性を有する問題を扱うための手法として、スペクトル確率境界要素法 (SSBEM) を提案する。SSBEM では、境界条件を Karhunen-Loève 展開し、解を有限次数の Homogeneous Chaos 内で展開することで不確定問題を効率的に扱うことができる。本論文では、SSBEM を境界条件の幾何形状が不確定性を有する静弾性及び動弾性問題に適用する。また、SSBEM の適用性等を検討するため、モンテカルロシミュレーションによる解析結果との比較も行なった。両者は良い一致を示し、提案する SSBEM の有効性が示された。

Key Words : *uncertainty, BEM, boundary condition, geometrical condition, stochastic problem.*

1. はじめに

土木工学においては、構造物の諸特性やその環境のパラメタ等の完全な情報を得ることは非常に困難である。また、想定された設計値を実際の構造物において完全に実現することも多くの場合不可能である。したがって、諸々のパラメタや条件について不確定性を定量的に考慮することの重要性は大きく、そのための技術に対する需要は大きい。

このような背景に鑑み、本研究では、境界条件が不確定性を有する問題を扱うための手法として、スペクトル確率境界要素法 (Spectral Stochastic Boundary Element Method, SSBEM) を提案する。これは、スペクトル確率有限要素法 (Spectral Stochastic Finite Element Method, SSFEM) の基本となる手法 Spectral Stochastic Approach (SSA) を境界要素法に適用するものである。SSA の長所としては、確率密度関数の評価が可能であること、比較的大きい不確定性を有する問題も安定的に解析が可能であること等があげられる。本論文では、SSA の長所を取り込み、境界条件の不確定性の影響を考察する手法を提案する。

なお、Nakagiri *et al.*¹⁾ や Kaminski²⁾ は、不確定性を有する問題に境界要素法を適用しているが、これらは摂動法に基づく方法であり、動的問題への適用については言及されていない。動的問題を対象としたものとしては、Manolis and Karakostas³⁾ の、不確定な媒体における SH 波動場の BEM 解析のための Green 関数についての研究がある。Manolis らの研究は、Polynomial Chaos

展開を用いる点で本研究と共通点も有するものであるが、ここでは境界条件の不確定性についての検討はなされていない。

本論文では、適用例として、境界の幾何条件が不確定性を有している静的/動的弾性問題を SSBEM により解析する。静的問題としては、2次元平面ひずみ弾性問題を扱う。また、動的問題としては、2次元の面内変位を対象とした P-SV 波動伝播問題を対象とする。いずれの場合も解析結果をモンテカルロシミュレーションによる結果と比較することで、その適用性や精度等について検討する。

2. SPECTRAL STOCHASTIC APPROACH

提案するスペクトル確率境界要素法は、Ghanem & Spanos⁴⁾ により提案されたスペクトル確率有限要素法⁴⁾⁻⁸⁾ と同様の考え方に基づき、境界の幾何的な不確定性を考慮した解析を行うものである。本章では、その基本的な考え方である Spectral Stochastic Approach (SSA)、及びそこで用いる確率過程の表現方法などについて述べる。

(1) 概要

SSA では、対象とする問題の不確定性を有するパラメタの場を Karhunen-Loève 展開した定式化を与える。また、解を Polynomial Chaos 展開された形で定式化する。Karhunen-Loève 展開及び Polynomial Chaos 展開さ

れた方程式を, Homogeneous Chaos 空間での近似として求めるため, 同空間の基底である Polynomial Chaos 汎関数へ射影する. そして, 射影されることで得られた (不確定性を有しない) 方程式を解くことで解を得るというものである.

(2) Karhunen-Loève 展開

SSBEM/SSFEM では, 不確定な場を Karhunen-Loève 展開 (KL 展開) する. KL 展開とは, 与えられた相関関数を有する確率場を, 有限の項数の線形和で効率よく再現できるように展開する手法であり, 画像圧縮等の目的で用いられることもある.

SSBEM では, KL 展開を用い, 対象とする確率過程 $s(x, \omega)$ を,

$$s(x, \omega) = \bar{s}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega) \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \quad (1)$$

という線形和で表現する. ここで, x は空間座標位置; ω は確率空間における事象; \bar{s} は s の期待値; $f_i(x)$ は展開の基底関数; λ_i は定数, $\xi_i(\omega)$ は正規直交性を有する独立 Gauss 確率変数をそれぞれ表わす.

なお, 関数 $f_i(x)$ 及び定数 λ_i は, 対象とする領域を S , 領域内の 2 点 x_1, x_2 の相関関数を $C(x_1, x_2)$ とすると, 積分方程式

$$\int_S C(x_1, x_2) f(x_2) dx_2 = \lambda_i f(x_1) \quad (2)$$

の固有関数及び対応する固有値としてそれぞれ与えられる.

実際の解析においては, 式 (1) の和を無限大までとることは不可能であるため, 展開次数を有限とし, 式 (1) の i についての和を有限の展開次数で打ちきる. (この展開次数を以下では KL 展開次数といい, N_{KL} と書く.) したがって, 対象となる問題を完全に表現するものではない. しかし, KL 展開は与えられた確率場の比較的よい再現を与える. KL 展開により再現される精度については, 例えば Ghanem & Spanos,⁴⁾ Spanos & Ghanem⁹⁾ 等に検討例がある.

(3) Polynomial Chaos 展開

SSFEM では, 解を, Homogeneous Chaos 空間 (HC 空間) 上での近似として算出する. HC 空間は, 独立な Gauss 確率変数 $\xi_i(\omega)$ ($i = 1, \dots, \infty$, 以下では, 引数を省略して ξ_i と書く.) を引数に有する Polynomial Chaos 汎関数 (PC 汎関数) の線形和として表現される. したがって, SSFEM の解 $u(\omega)$ は, PC 汎関数 $\Gamma_n(\xi)$ を用い

て, 次式のように表わされる.

$$u(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \sum_{i_1, \dots, i_k} \left\{ a_{i_1, \dots, i_k}^{n_1, \dots, n_k} \Gamma_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \right\} \quad (3)$$

ここで, PC 汎関数 $\Gamma_n(\xi)$ は,

$$\Gamma_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}) = e^{\frac{1}{2} \xi^T \xi} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2} \xi^T \xi} \quad (4)$$

ただし,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)^T \quad (5)$$

として得られる. 以下では, Ghanem & Spanos⁴⁾ になり, $\Gamma_n(\xi)$ に順に番号を与えた PC 汎関数 $\Psi_i(\xi)$ を用いる. この時, 式 (3) は,

$$u(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i(\xi) \quad (6)$$

となる. PC 汎関数 $\Psi_i(\xi)$ は

$$\langle \Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi) \rangle = 0 \quad (i \neq j) \quad (7)$$

($\langle \cdot \rangle$ は期待値を表す.) という直交性を有し, HC 空間の直交基底を構成する. この基底を用いた展開を, Polynomial Chaos 展開 (PC 展開) という.

PC 汎関数の引数として, KL 展開で用いた Gauss 確率変数 ξ_i を用いることで, KL 展開した確率過程に対応する解を算出することができる. 確率変数 ξ_i の数や, 考慮する HC 空間の次数 (以下, HC 次数という.) が上がると, それに伴い, 基底として用いる PC 汎関数の項数 (N_{PC} と書く.) も増える.

HC 空間を無限大の次元まで考えることは不可能であるので, 有限の HC 次数を考慮する. KL 展開次数と HC 次数が与えられれば, PC 展開の項数は一意に決まる. 例えば, 2 次までの KL 展開, 及び, 2 次までの HC 空間を考慮する場合, 式 (5) は,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \quad (8)$$

となる. この時, PC 汎関数の項数は $N_{PC} = 5$ となる. また, $\Psi_i(\xi)$ を式 (4) から算出して書き下すと, 0 次 HC 空間の基底が

$$\Psi_0(\xi_1, \xi_2) = 1, \quad (9)$$

1 次 HC 空間の基底が

$$\Psi_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1, \quad \Psi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2, \quad (10)$$

そして, 2 次 HC 空間の基底が

$$\Psi_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - 1, \quad \Psi_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2, \quad \Psi_5(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^2 - 1, \quad (11)$$

と求められる.

以下では, Ghanem らの表記に従い, PC 展開の項数は対応する HC 次数により表わす.

(4) 期待値, 分散, 確率密度関数

式(6)の形で算出された解の確率的特性値は, 以下のように容易に算出される.

まず, 期待値は第1項 u_0 として与えられる. また, 分散 $\langle(u - \langle u \rangle)^2\rangle$ は,

$$\langle(u - \langle u \rangle)^2\rangle = \sum_{i=1}^{N_{PC}} u_i^2 \langle \Psi_i^2 \rangle \quad (12)$$

として与えられる. 確率密度関数は, モンテカルロシミュレーションと同様に正規ガウス乱数 ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) を発生させて式(6)を評価し, その結果を統計的に整理することで得られる. 上記の例はスカラー量であるが, ベクトル量についても, その各要素について同様の処理をすることが可能である.

3. スペクトル確率境界要素法

本章では, 提案するスペクトル確率境界要素法 (Spectral Stochastic Boundary Element Method, 以下, SSBEM という.) の定式化について述べる.

(1) 基本解

本論文では, 静的問題として2次元平面ひずみ問題, また, 動的問題として2次元 P-SV 問題を考える. ここではこれらの問題の BEM による定式化に用いる基本解について簡単に述べる^{10), 11)}.

a) 静的問題

2次元平面ひずみ問題の基本解は, 支配方程式において y に k 方向の単位集中荷重が与えられたときの解として,

$$\sigma_{ij} + \delta(x-y)\delta_{ik} = 0 \quad (13)$$

($i, j, k = 1, 2$) を解くことで与えられる. ここで, 応力 σ_{ij} , ひずみ ε_{ij} は

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (15)$$

で与えられており, μ, ν は, それぞれせん断剛性及びポアソン比を表す. δ はデルタ関数を表す. また, 総和規約が用いられており, 添字の前のカンマは添字による偏微分をあらわす.

点 x における変位の i 成分を表す Kelvin による基本解 \bar{u}_i^k は (基本解の座標を表す引数は省略する.)

$$\bar{u}_i^k = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (16)$$

と与えられる. ここで, δ_{ki} はクロネッカーのデルタ記号を表し, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり, $r_{,k} = \frac{dx_k}{dx}$ である.

また, 表面力の基本解 \bar{p}_i^k は,

$$\bar{p}_i^k = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \cdot [r_{,n} \{ (1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k} \} - (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i})] \quad (17)$$

で与えられる. ここで, n は該当する点における境界の外向法線方向を示しており, 添字, n は n 方向への偏微分, そして n_k は n の k 方向成分を表している.

b) 動的問題

動的問題としては, 2次元 P-SV 波動伝播問題を考える. この場合の基礎方程式は, 式(13)に慣性項を加えて

$$-\rho \ddot{u}_i + \sigma_{ij,j} + \delta(x-y)\delta(t)\delta_{ik} = 0 \quad (18)$$

($i, j, k = 1, 2$) となる. なお, 応力, ひずみに関しては, 式(14)及び(15)の関係を用いている. 以下では, Fourier 変換を, i を虚数単位として,

$$\hat{u}_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t) \exp(i\omega t) dt \quad (19)$$

で定義して, 周波数領域で解く. この時, 式(18)は

$$-\rho \omega^2 \hat{u}_i(\omega) + \hat{\sigma}_{ij,j}(\omega) + \delta(x-y)\delta_{ik} = 0 \quad (20)$$

と書き変えられる. 同式を満たす周波数領域での基本解 $\hat{u}_j^k(\omega)$ は, 次式で与えられる.

$$\hat{u}_j^k(\omega) = \frac{i}{4\mu} (\hat{u}_1 \delta_{jk} - \hat{u}_2 r_{,j} r_{,k}) \quad (21)$$

ここで

$$\hat{u}_1 = H_0^{(1)}(k_T r) - \frac{1}{k_T r} H_1^{(1)}(k_T r) + \left(\frac{k_L}{k_T}\right)^2 \frac{1}{k_L r} H_1^{(1)}(k_L r) \quad (22)$$

$$\hat{u}_2 = -H_2^{(1)}(k_T r) + \left(\frac{k_L}{k_T}\right)^2 H_2^{(1)}(k_L r) \quad (23)$$

$$k_L = \frac{\omega}{V_p}, k_T = \frac{\omega}{V_s}, \quad (24)$$

であり, $H_n^{(1)}$ はそれぞれ第1種 n 次 Hankel 関数である. V_p, V_s はそれぞれ, P 波及び S 波の伝播速度であり,

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \left(\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \right) \quad (25)$$

で与えられる. $\hat{\sigma}_{ij}$ は, 式(14),(15)を周波数領域で表記して得られる応力を表す. 一方, 表面力の基本解 $\hat{p}_j^k(\omega)$ は,

$$\begin{aligned} \hat{p}_j^k(\omega) = & \mu \frac{i}{4\mu} \left\{ \left(\delta_{jk} r_{,n} + n_j r_{,k} \right) + \frac{\lambda}{\mu} n_k r_{,j} \right\} \frac{d\hat{u}_1}{dr} \\ & - \left\{ \left(\delta_{jk} r_{,n} + n_j r_{,k} \right) + 2(n_k r_{,j} - 2r_{,j} r_{,k,r}) + \frac{\lambda}{\mu} n_k r_{,j} \right\} \frac{\hat{u}_2}{r} \\ & - \left\{ 2r_{,j} r_{,k,r} + \frac{\lambda}{\mu} n_k r_{,j} \right\} \frac{d\hat{u}_2}{dr} \end{aligned} \quad (26)$$

と与えられる。

(2) SSBEM の定式化

境界要素法の基礎的な定式化に基づき、SSBEM の定式化を示す。以下の例では、物体力は考慮しない。また、境界は不確定性を有するがなめらかであると仮定する。

境界要素法では、境界の幾何条件や外力等の条件に基づき、例えば、任意の内点における変位 u^i は、

$$u^i = \int_{\Gamma} q\bar{u} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{q}u d\Gamma \quad (27)$$

と与えられる。ここで Γ は境界を表す。

いま、境界の期待値として得られる形状に沿って曲線座標 s を設ける。不確定性を有する幾何形状の、期待値からの座標軸直交方向のずれを s の関数とすると、この関数は s 軸上の確率過程とみなせる。この確率過程の s 軸上の 2 点 s_1, s_2 の相関関数が、 $C(s_1, s_2)$ と与えられているとする。この時、境界の幾何形状は式 (2) の解 f_i, λ_i を用いて、式 (1) と同様に

$$\Gamma(s, \omega) = \Gamma_0(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \Gamma_i(s) \quad (28)$$

と Karhunen-Loève 展開することができる。ここで、 Γ_0 は幾何形状の期待値であり、 $\Gamma_i(s) = \sqrt{\lambda_i} f_i(s)$ である。実際の解析においては、式 (28) の和をとる範囲は有限の KL 展開次数 N_{KL} で打ち切る。

今、 ξ_i を不確定性を有するパラメータ τ_i とおき、パラメータ τ_i の変化による影響を定量的に評価する。パラメータ τ_i が変化することにより、積分領域である境界の幾何形状 Γ が変化し、その変化分は式 (28) から

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma = \Gamma_i \quad (29)$$

となることが分かる。これは、対象とする空間と同じ次元のベクトルとなる。仮に τ_i を時間と見なせば速度に相当する。これは形状最適化問題等¹²⁾でも用いられているものと同様の手法である。

τ_i が $\bar{\tau}_i$ から $\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i$ だけ変化するのに伴う式 (27) の変化について考える。

τ_i の変化に伴う式 (27) 右辺第 1 項の被積分関数 $q\bar{u}$ の変化は、 $\frac{\partial}{\partial \tau_i}(q\bar{u})$ と与えられ、その勾配は $\nabla(q\bar{u})$ と与えられる。したがって、パラメータ τ_i の関数として与えられる境界 $\Gamma(\tau_i)$ が $\Gamma(\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i)$ に変化するとき式 (27) の第 1 項の積分値は、一次近似として、

$$\int_{\Gamma(\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i)} q\bar{u} d\Gamma \doteq \int_{\Gamma(\bar{\tau}_i)} \left\{ 1 + \Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} \right\} q\bar{u} d\Gamma \quad (30)$$

と得られる。ここで、 $\frac{D}{D\tau_i}$ は Lagrange 微分であり、

$$\frac{D}{D\tau_i} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_i} + \Gamma_i \cdot \nabla \right) \quad (31)$$

である。式 (27) 右辺第 2 項についても同様に考えることができる。したがって、 $\tau_i = \bar{\tau}_i + \Delta\tau_i$ の時、式 (27) の左辺を $u_{\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i}^i$ と書くと、これは

$$\begin{aligned} u_{\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i}^i &= \int_{\Gamma(\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i)} q\bar{u} d\Gamma - \int_{\Gamma(\bar{\tau}_i + \Delta\tau_i)} \bar{q}u d\Gamma \quad (32) \\ &\doteq \int_{\Gamma(\bar{\tau}_i)} \left\{ 1 + \Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} \right\} q\bar{u} d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma(\bar{\tau}_i)} \left\{ 1 + \Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} \right\} \bar{q}u d\Gamma \quad (33) \end{aligned}$$

と近似される。

同様に、 N_{KL} 個 (N_{KL} は KL 展開次数) のパラメータ τ_i ($i = 1, 2, \dots, N_{KL}$) が変化するときの式 (27) の値は、

$$\Delta\tau \frac{D}{D\tau} = \sum_{i=1}^{N_{KL}} \Delta\tau_i \frac{D}{D\tau_i} \quad (34)$$

を用いて、

$$u_{\bar{\tau} + \Delta\tau}^i \doteq \int_{\Gamma(\bar{\tau})} \left\{ 1 + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right\} q\bar{u} d\Gamma - \int_{\Gamma(\bar{\tau})} \left\{ 1 + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \right\} \bar{q}u d\Gamma \quad (35)$$

と表すことができる。

ここで、積分と微分の順序を交換すれば、

$$\begin{aligned} u_{\bar{\tau} + \Delta\tau}^i &\doteq \int_{\Gamma(\bar{\tau})} q\bar{u} d\Gamma + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \int_{\Gamma(\bar{\tau})} q\bar{u} d\Gamma \\ &\quad - \left\{ \int_{\Gamma(\bar{\tau})} \bar{q}u d\Gamma + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \int_{\Gamma(\bar{\tau})} \bar{q}u d\Gamma \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

と得られる。(これは高次の項を無視した近似であるが以下では等号で表す。)

式 (27) において、内点を境界に近づける極限をとり、それを離散化された境界要素の節点における変位と表面力について、Galerkin 法などを用いて定式化する。これにより、節点上の変位と応力を要素に持つベクトル u, q についての境界要素法の定式化が次式のように得られる。

$$Hu = Gq \quad (37)$$

ここで、 H, G は

$$H_{IJ} = \int_{\Gamma_J} \Phi_J \bar{q}_I d\Gamma + \frac{1}{2} \delta_{IJ} E \quad (38)$$

$$G_{IJ} = \int_{\Gamma_J} \Phi_J \bar{u}_I d\Gamma \quad (39)$$

を (I, J) 成分ブロックに有するマトリクスである。ここで、 Φ_J は、変位や表面力の補間関数を表し、 Γ_J は、節点 J の関係する補間関数のサポート区間の全体を表す。また、 \bar{u}_I, \bar{q}_I はいずれも、節点 I における変位や表面力を与える基本解を表している。 E は単位行列である。こ

ここでは境界は滑らかであるとしているので、式(38)の右辺第2項の係数は定数1/2をとる。

式(36)を同様に離散化することで、パラメタ τ_i ($i=1, 2, \dots$)が変化する際のマトリクス $\mathbf{H}(\bar{\tau}_1 + \Delta\tau_1, \bar{\tau}_2 + \Delta\tau_2, \dots)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\bar{\tau}_1 + \Delta\tau_1, \bar{\tau}_2 + \Delta\tau_2, \dots) &= \mathbf{H} + \Delta\tau \frac{D}{D\tau} \mathbf{H} \\ &= \mathbf{H}^0 + \sum_{i=1}^{N_{KL}} \Delta\tau_i \mathbf{H}^i \end{aligned} \quad (40)$$

と得られる。ただし、

$$\mathbf{H}^i = \frac{D}{D\tau_i} \mathbf{H} \quad (41)$$

である。期待値からの偏差を表すパラメタ $\Delta\tau_i$ をKL展開における確率変数 ξ_i とすることにより、境界の幾何形状をKL展開した場合のマトリクス \mathbf{H} の表現が得られる。このとき、各 τ_i について、

$$\tau_i = \bar{\tau}_i + \xi_i \quad (42)$$

と置くことになる。また、全く同様にしてマトリクス \mathbf{G} も展開できる。なお、式(41)のマトリクス \mathbf{H}, \mathbf{G} の τ によるLagrange微分については、有限差分で評価するものとした。

次に、スペクトル確率有限要素法と同様の考え方にに基づき、表面力ベクトル \mathbf{q} や変位ベクトル \mathbf{u} を、PC展開した形で評価するため、これらを式(6)のように展開する。ただし、和をとる範囲は考慮するHC空間の次数に対応するPC展開の項数 N_{PC} で打ちきられ

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^{N_{PC}} \mathbf{u}_i \Psi_i(\xi) \quad (43)$$

となる。 ξ は、KL展開で用いた N_{KL} 個の確率変数から構成される式(5)に示されるベクトルである。なお、表面力ベクトル \mathbf{q} も式(43)と同様に展開できる。

式(40)及び式(43)を式(37)に代入することで不確定性を考慮した定式化が得られる。そして同式を、 \mathbf{u} 等を展開したHC空間の直交基底であるPC汎関数 Ψ_k ($k=0, 1, \dots, N_{PC}$)に射影する。すなわち、これらの汎関数との内積をとる。なお、ここで内積は期待値をとることと定義され、 $\langle \cdot \rangle$ と表記するものとする。PC汎関数へ射影して得られる方程式を満たす解は、このHC空間における最良近似を与える。したがって、これらの方程式を解くことにより、SSBEMの解を得ることができる。以下に手順を示す。

式(40)及び(43)を用いることで、式(37)をPC汎関

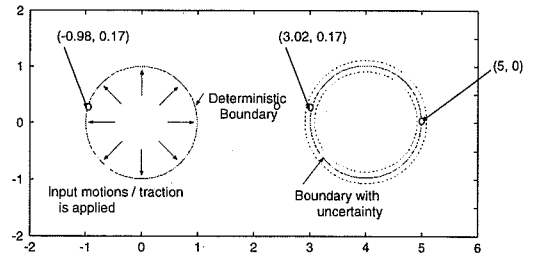


図-1 対象とする問題設定。図中には本文中で変位を検討する点も示してある。

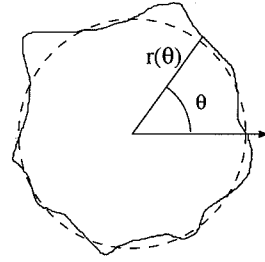


図-2 不確定性を有する円孔の形状を示すための座標 θ

数 $\Psi_k(\xi)$ に射影したものは次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi_k(\xi) \left\{ \mathbf{H}^0 + \sum_{i=1}^{N_{KL}} \xi_i \mathbf{H}^i \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{N_{PC}} \mathbf{u}_i \Psi_i(\xi) \right\} \right\rangle \\ = \left\langle \Psi_k(\xi) \left\{ \mathbf{G}^0 + \sum_{i=1}^{N_{KL}} \xi_i \mathbf{G}^i \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{N_{PC}} \mathbf{q}_i \Psi_i(\xi) \right\} \right\rangle \end{aligned} \quad (44)$$

式(44)を、 $\xi_0 = 1$ とにおいて、式(9)にも注意して整理すると

$$\sum_{i=0}^{N_{KL}} \sum_{j=0}^{N_{PC}} \langle \xi_i \Psi_k \Psi_j \rangle \mathbf{H}^i \mathbf{u}_j = \sum_{i=0}^{N_{KL}} \sum_{j=0}^{N_{PC}} \langle \xi_i \Psi_k \Psi_j \rangle \mathbf{G}^i \mathbf{q}_j \quad (45)$$

が得られる。なお、表記を簡単にするため Ψ_j の引数は省略した。

式(45)を $k=0, 1, \dots, N_{PC}$ について解くことで、例えば変位が未知数の場合は \mathbf{u}_i ($i=0, 1, \dots, N_{PC}$)が得られる。この解を式(43)に代入することで不確定性を考慮した解が得られる。なお、表面力が未知数の場合は \mathbf{q}_i ($i=0, 1, \dots, N_{PC}$)を算出し、式(43)と同様にして解を得ることができる。

4. 数値シミュレーション

提案するSSBEMを静的及び動的な弾性問題に適用し、モンテカルロシミュレーション(MCS)との比較により、その有効性を検証する。

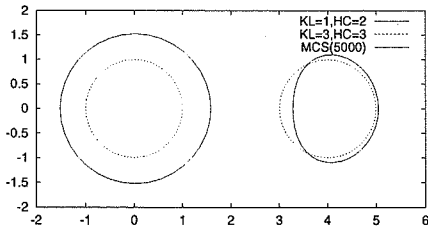


図-3 MCS と SSFEM により得られた変位の期待値。(変位量は 10 倍に増幅させてある。) 破線は初期状態を表わす。

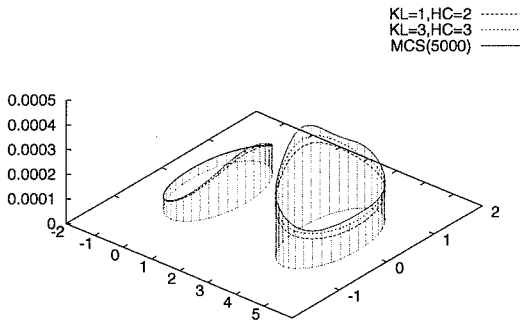


図-4 MCS と SSFEM により得られた変位の標準偏差の比較。(標準偏差は x 成分と y 成分の二乗和として与えている。)

(1) 問題設定

解析の対象として、2次元の全無限媒体内に隣接する円孔があるモデルを考える。円孔の配置は図-1に示されている。円孔のひとつには内側から圧力が作用しているものとする。この円孔は半径 $\bar{R} = 1$ であり、その形状には不確実性はないものとする。

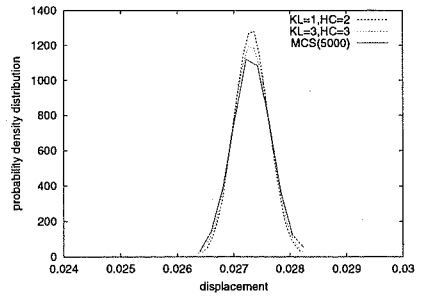
もう一つの円孔は自由境界となっている。ただし、この円孔の幾何形状には不確実性があるものとする。円孔の形状の期待値は半径 $\bar{R} = 1$ の円とする。ここでは、図-2に示すように、円孔の形状を、円の中心からの距離 r (以下、単に「半径」という) を仰角 (θ) の関数とすることにより表す。境界上の2点 θ_1, θ_2 における半径 r の相関関数は、

$$C(\theta_1, \theta_2) = (\gamma \bar{R})^2 \exp \left\{ -\frac{d(\theta_1, \theta_2)}{b} \right\} \quad (46)$$

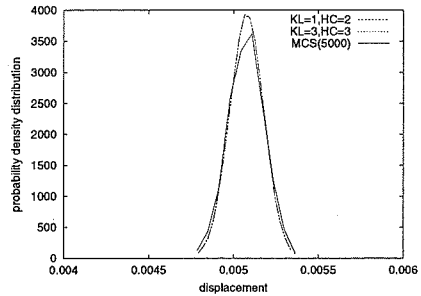
ただし

$$d(\theta_1, \theta_2) = \min\{|\theta_1 - \theta_2|, 2\pi - |\theta_1 - \theta_2|\} \quad (47)$$

である。ここで γ は不確定の程度を表すパラメタであり、本検討ではばらつきの標準偏差が期待値の2%とな



(a) 点 (3.02, 0.17) における変位の x -成分



(b) 点 (5, 0) における変位の x -成分

図-5 MCS と SSFEM により得られた変位確率密度関数の比較。

るよう $\gamma = 0.02$ とした。また、 $b = 1/2\pi$ は相関距離に相当するパラメタである。前述したように、本解析では境界の幾何形状は不確実性を有するがなめらかであるものとする。

(2) SSFEM による解析

本検討で想定する問題では、外力及び外力が作用する境界は不確実性を有しないので、式 (45) の右辺は $i = j = 0$ の項のみが残り、 $\langle \Psi_k \rangle G^0 q_0$ となる。したがって、式 (45) は

$$\sum_{i=0}^{N_{KL}} \sum_{l=0}^{N_{PC}} \langle \xi_i \Psi_k \Psi_l \rangle H^l u_l = \delta_{k0} G^0 q_0 \quad (48)$$

となる。式 (48) を解くことで SSFEM による解が得られる。動的問題の場合、周波数成分ごとに同様の方程式を解くことで、解が得られる。

本解析ではそれぞれの円孔を均等に 36 要素に分割し、解析には一定要素を用いる。式 (48) は、静的問題、動的問題ともに、双共役勾配法により解く。

(3) モンテカルロシミュレーションによる解析

比較のため、同一の問題をモンテカルロシミュレーション (MCS) によっても解析する。MCS においても、要素分割数や用いる要素 (一定要素) 等の解析条件は SSFEM と同様に設定する。MCS では、乱数を用いて

パラメタ	値
せん断剛性	96000
ポアソン比	0.2
不確定境界の半径の標準偏差	2%

境界を多数作成し、それぞれを対象として通常の境界要素法で解析を行なう。

式(46)に示される自己相関関数を有する不確定場の作成方法には、Karhunen-Loève展開を含め、種々考えられる¹³⁾。ここでは、広く用いられている手法として、共分散マトリクスのコレスキー分解に基づく方法を用いた。これは、共分散マトリクスをコレスキー分解したものの各列ベクトルに、直交する正規確率変数(乱数)を乗じて和をとるものである。MCSでは、想定された確率場を忠実に再現するため、SSBEMにおけるKL展開のように低い展開次数で打ちきめるのではなく、全ての項について和をとるものとする。

(4) 静的問題

静的問題では、一つめの円孔の内側に、一定値 1.0×10^4 とする表面力を、境界に直交する遠心方向に一樣に与える。静的問題において設定した物性値は表-1に示す通りである。

SSBEMでは、KL展開の固有値等を参考に、KL展開次数1、HC展開次数2、(以下KL=1、HC=2のように表わす。)とした場合とKL=3、HC=3とした場合を検討する。MCSでは5,000回のシミュレーションを行い、その結果を統計的に処理して確率特性を検討する。

以下に、MCSにより得られた結果とSSBEMにより得られた結果の比較を示す。

2ケースのSSBEMによる変位の期待値と、MCSによる変位の平均値(以下では単にMCSによる期待値という)の分布を図-3に示す。同図において三者はよく一致していることが分かる。ここで、境界上のある特定の位置における変位量としては、位置の期待値がその点に一致する節点の変位量を採用している。例えば、(5,0)の点は、不確定性を考慮して実現した境界においては(5,0)には位置しない。しかし、期待値が(5,0)に位置する節点の変位量を点(5,0)における変位量としている。また、境界の幾何形状の変動にともなう節点の位置の変動は変位量には含まれていない。

変位量の分散(x成分とy成分の二乗和)の分布の計算結果を図-4に示す。SSBEMにより評価された分散の値は、MCSの値よりも若干低めの値を与えているが、良い近似を与えている。SSBEMがMCSよりも低い分散値を与えている理由はいくつかあるが、その一つとして、KL展開を有限次数で打ちきっている

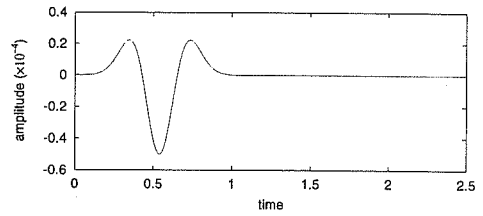


図-6 動的解析で用いた入力波

パラメタ	値
単位質量	1.0
P波速度	327/s
S波速度	200/s
不確定境界の半径の標準偏差	2%

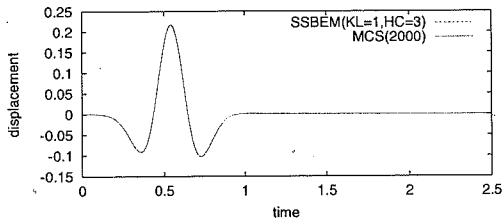
ため不確定性の程度が実際(MCS)よりも小さめに評価されているということがあげられる。これは、必要に応じてKL展開の次数をあげることで改善できる。SSBEM(KL=1, HC=2)とSSBEM(KL=3, HC=3)の結果を比較すると、高い次数までの展開を考慮している後の方がMCSに近い値を与えている。ただし、両者の差は小さい。図-5は、不確定性を有する円孔上の左端に近い点(-0.98, 0.17)及び右端(5.0, 0)(これらの点は図-1に図示されている。)における変位のx成分の確率密度分布を示す。SSBEMはいずれもMCSの結果により得られた確率密度関数を良く近似する結果となっている。

計算効率の比較のため、計算時間について検討する。数値計算はPentium III(600MHz)上で行なった。MCSは5,000回の試行を行なうために約900秒のCPU時間を要した。一方、SSBEMは、KL=1、HC=2とした場合は0.37秒であり、高い次数までを考慮したKL=3、HC=3の場合でも2.53秒であった。これらの結果より、SSBEMを用いることにより効率的な計算が可能となることが分かる。

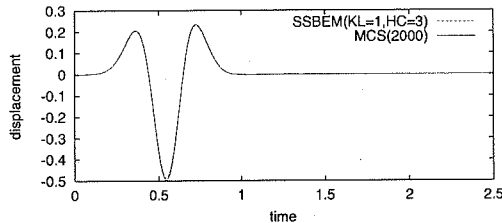
(5) 動的問題(波動伝播)

動的問題においても、境界の幾何形状に関しては、静的問題の場合と同様の条件を考え、要素分割等も同様とする。形状が不確定性を有しない円孔には、境界に垂直な方向の成分のみを有する表面力を一樣に与えるものとし、その時刻歴は図-6に示されるRicker波とする。もう一つの円孔の境界は自由境界である。動的問題において設定した物性値は表-2に示す通りである。時間間隔は $\Delta t = 0.01[\text{sec}]$ とし、5.12秒間を対象として解析を行なう。

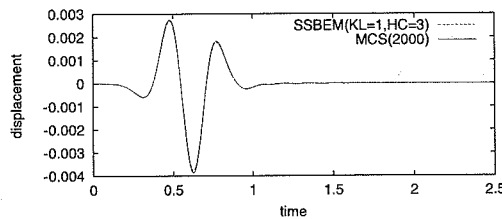
SSBEMでは、静的解析で1次までのKL展開で、間



(a) 点 (-0.98, 0.17) における変位の x 成分



(b) 点 (3.02, 0.17) における変位の x 成分



(c) 点 (0, 10) における変位の x 成分

図-7 変位の期待値の時刻歴 (MCS と SSBEM の結果の比較)

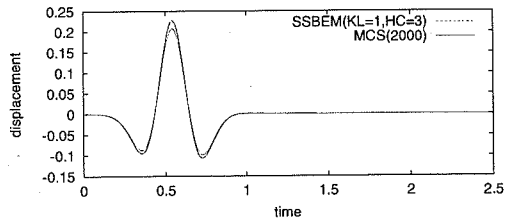
題の不確定性を概ね評価できていたことを考慮し、KL 展開次数を 1 とした。一方、解の PC 展開については動的解析においては高い次元までを考慮することが好ましいと考え、HC 展開次数を 3 とした。ただし、これらが最適な展開次数ということではなく、問題に応じた適切な展開次数についてはさらに検討が必要である。

SSBEM の精度を検査するため、同手法の計算結果を、2,000 回の試行を行ったモンテカルロシミュレーション (MCS) と比較する。

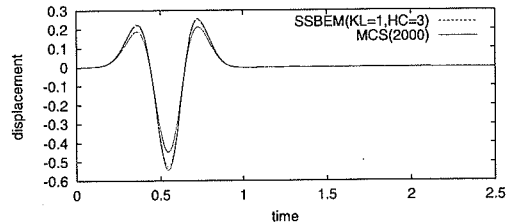
MCS により得られた結果と SSBEM により得られた結果の比較を以下に示す。図-1 に示されている境界上の 2 点 (-0.98, 0.17) と (3.02, 0.17)、及び境界から離れた点 (0, 10) における変位の x 成分について比較を行なう。

SSBEM と MCS により得られる期待値の時刻歴の比較を図-7 に示す。対象とした 3 点のいずれにおいても、MCS と SSBEM により与えられた結果はよく一致しており、期待値は高い精度で評価されていることが分かる。

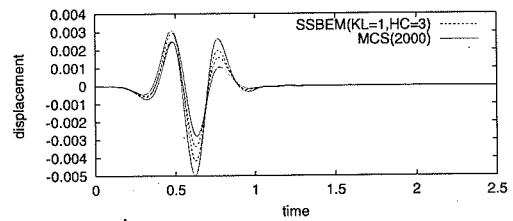
また、ばらつきの程度の評価について検討するため、(期待値 ± 標準偏差) の値の時刻歴について、両者を比較したものを図-8 に示す。点 (0, 10) における変位は若干精度が低い、その他の 2 点については高い精度で



(a) 点 (-0.98, 0.17) における変位の x 成分



(b) 点 (3.02, 0.17) における変位の x 成分



(c) 点 (0, 10) における変位の x 成分

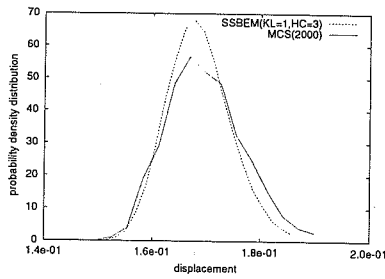
図-8 変位のばらつき (± 標準偏差) の時刻歴 (MCS と SSBEM の結果の比較)

評価できている。3 点のいずれにおいても、SSBEM はばらつきを MCS よりも小さめに評価しているが、これは静的な問題と同様の理由によるものである。

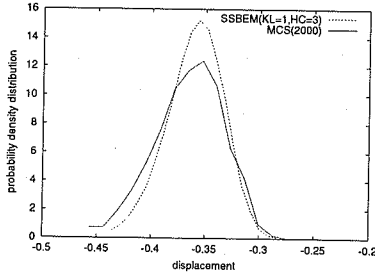
時刻 $t = 0.5$ [sec] におけるこれら点の変位量の x 成分の確率密度分布についても検討した。比較結果を図-9 に示す。SSBEM による結果は、MCS により得られた確率密度分布をよく近似できている。

以上の比較から、SSBEM により得られた結果は、MCS の結果をおおむね評価できていることが分かる。ただし、点 (0, 10) における変位の分散のように精度が落ちる場合もあることは留意しておく必要がある。

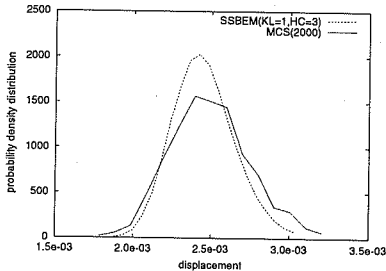
また、計算効率についても検討するため、計算に要した CPU 時間を比較する。計算は静的解析と同様に Pentium III (600MHz) 上で行なった。2,000 回の試行を行なった MCS では、278,706 秒の CPU 時間を要したのに対し、SSBEM は 2,990 秒であった。この結果から、動的解析においても SSBEM による検討が効率的であるということが分かる。



(a) 点 (-0.98, 0.17) における変位の x 成分



(b) 点 (3.02, 0.17) における変位の x 成分



(c) 点 (0, 10) x 成分

図-9 時刻 $t = 0.5$ における変位の確率密度関数 (MCS と SSBEM の結果の比較)

5. まとめ

本論文では、スペクトル確率有限要素法の Spectral Stochastic Approach に基づき、境界の幾何形状が不確定性を有する問題に対する数値解析手法として、スペクトル確率境界要素法 (SSBEM) を提案した。

提案した SSBEM では、境界の不確定性による影響を基本解の Taylor 展開を用いて評価し、それを Spectral Stochastic Approach を用いて定式化した。

数値シミュレーションとして、提案する SSBEM を、境界の幾何条件が不確定性を有する問題に適用した。対象としたのは、2次元静的弾性解析及び2次元動的弾性解析 (波動伝播問題) である。比較的単純なモデルを対象とした数値計算を行なうとともに、同様の問題をモンテカルロシミュレーションによっても検討した。両者の解析結果を比較したところ、よい一致が見られ、SSBEM の精度の高さが示された。また、SSBEM は MCS に比較して非常に少ない計算時間しか要しないことも示された。これらの検討により、提案する SSBEM の有用性が示されたといえる。

参考文献

- 1) Nakagaki, S., Suzuki, K., and Hisada, T.: Stochastic boundary element method applied to stress analysis, In Brevia, C. A., Futagami, T., and Tanaka, M., editors, *Boundary Elements: Proceedings of the Fifth International Conference*, pp. 439-448, 1983.
- 2) Kaminski, M.: Stochastic second-order BEM perturbation formulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 23, pp. 123-129, 1999.
- 3) Manolis, G. D. and Karakostas, C. Z.: A Green's function method to SH-wave motion in a random continuum, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 27, pp. 93-100, 2003.
- 4) Ghanem, R. G. and Spanos, P. D.: *Stochastic Finite Elements - A Spectral Approach*, Springer-Verlag NY, 1991.
- 5) 本田利器: スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析, 土木学会論文集, No. 689/I-57, pp. 321-331, 2001.
- 6) Ghanem, R. G. and Kruger, R. M.: Numerical solution of spectral stochastic finite element analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 129, pp. 289-303, 1996.
- 7) Ghanem, R.: Stochastic finite elements with multiple random non-gaussian properties, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 125, No. 1, 1999.
- 8) Ghanem, R. and Brzakala, W.: Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 122, No. 4, 1996.
- 9) Spanos, P. and Ghanem, R.: Stochastic finite element expansion for random media, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053, 1989.
- 10) Brebbia, C. A.: *The Boundary Element Method for Engineers*, Wiley & Sons, Inc, 1978.
- 11) 境界要素法研究会編: 境界要素法の理論と応用, コロナ社, 1986.
- 12) Choi, J. H. and Kwak, B. M.: Shape design sensitivity analysis of elliptic problems in boundary integral equation formulation, *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 16, No. 2, 1988.
- 13) 立川康人, 椎葉充晴: 共分散行列の平方根分解をもとにした正規確率場および対数正規確率場の発生法, 土木学会論文集, No. 656/II-52, pp. 39-46, 2000.

(2003. 2. 21 受付)

SPECTRAL STOCHASTIC BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ELASTIC PROBLEMS WITH GEOMETRICAL UNCERTAINTY

Riki HONDA

Quantitative evaluation of the effect of the uncertainty is essential in various aspects of engineering problems. This paper proposes an efficient method to consider the uncertainty of boundary conditions, Spectral Stochastic Boundary Element Method (SSBEM). In SSBEM, Karhunen-Loève representation of uncertain boundary conditions and approximation of the solution in the finitely truncated homogeneous chaos enable efficient computation of problems with uncertain boundary conditions. Numerical examples including comparison with Monte Carlo Simulation reveal the applicability of SSBEM to both elasto-static and elasto-dynamic problems with uncertain boundary geometry.