

土の平面ひずみ供試体の変形挙動の 分岐メカニズムに基づく画像処理法

池田 清宏¹・市村 強²・高村 浩之³・須藤 良清⁴・堤 成一郎⁵

¹正会員 Ph.D 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

²正会員 工博 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

³東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

⁴正会員 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

⁵正会員 農博 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (同上)

本研究では、土の平面ひずみ供試体の変形挙動の画像処理法を提案する。この解析法は、PIV とブロック対角化原理とを組み合わせたものである。本手法により、左右対称性を持つ系に対して、PIV により得られる画像データは左右対称成分と反対称成分に分解される。このとき、ブロック対角化原理により、反対称成分の発現が分岐の発現に対応する。豊浦砂の平面ひずみ圧縮せん断試験を行い、せん断帯の発生過程を観察する。さらに、PIV を用いることにより、供試体の変位場の経時変化を求め、この変位場を対称成分と反対称成分とに分解し、局所化のメカニズムを調べる。この結果、反対称成分の向きや大きさが複雑に変化することにより、分岐の発生やせん断帯の発生方向や発生過程などの特徴的な挙動を支配していることを明らかにできた。

Key Words : *bifurcation, block-diagonalization, image processing, PIV, plane-strain compression test, sand, shear band*

1. はじめに

土の「要素試験」において、供試体の変形の局所化や、バルジ型やせん断帯などの様々な変形形態が観察されている^{1),2),3),4),5)}。土の変形形態の多様性に分岐が関与していることが、近年明らかにされてきている。土の分岐は、せん断線形成分岐と拡散型分岐とに大別される。せん断線形成分岐は、材料の不安定性が支配的な現象であり、拡散型分岐は、幾何学的な不安定性が支配的な現象である。せん断線形成分岐は、金属の塑性分岐の記述を通じて体系化され⁶⁾、土のせん断線の形成の記述にも適用されている⁷⁾。また、拡散型分岐の数値シミュレーションも行われており^{8),9),10),11),12)}、拡散型分岐による変形がせん断線形成を誘発するという仮説も提案されている¹³⁾。しかし、実験における分岐の発現を特定することは、現状では困難である。

土の供試体における局所化領域の目視による観察には困難を伴うために、色々な工夫がなされている。例えば、中瀬・龍岡¹⁴⁾は、ゴム膜に格子を描く格子点法を用いることにより、平面ひずみ圧縮試験におけるひずみの局所化を観察している。近年画像処理技術の導入が図られており、X線CT法による土のせん断面等の詳細な観察^{15),16),17)}、Matching method による軟岩の変位場の計測¹⁸⁾、画像解析による砂の変位場計測等が行われている^{19),20)}。しかし、物理的に有意な情報を、このようにして得られる画像データから、いかにして取り出すかということは課題として残されている。

本論文では、土の供試体の変形挙動の画像解析法を提案する。この解析法は、最新の画像解析技術である「PIV」(粒子画像流速計測法)と群論的分岐理論の「ブ

ロック対角化原理」とを組み合わせたものである。PIV は、粒子の微小な移動を可視化し、画像解析することにより、流速ベクトル分布を求める計測方法の総称である。一方、ブロック対角化原理は、対称性を持つ系の支配方程式(解空間)は、適当な座標変換により、複数の独立な支配方程式(解空間)に分解できる性質を表す²²⁾。

本手法を用いることにより、PIV により得られる画像データを、複数の画像データに分解する。このとき、分解された画像の内一つが、分岐を起さない場合の変形モードであり、その他の画像が、分岐モードに対応することが物理的に重要である。本論文で対象とする、左右対称性を持つ系の解空間はブロック対角化原理により、左右対称成分と反対称成分とに分解される。このとき、反対称成分が殆ど存在しない状態が、分岐を起す前の状態に対応する。一方、反対称成分が分岐モードに対応する。分岐の発現後、対称成分と反対称成分が混在することにより変形が非対称化する。

実験は、端面摩擦無し、載荷速度一定の条件の下で豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験を行う。最初に、せん断帯の発生や局所的なひずみの進行過程を目視により観察する。次に、PIV を用いることにより、供試体の変位場の経時変化を求める。さらに、この変位場を対称成分と反対称成分とに分解し、観察することにより、供試体内部で起きている局所化のメカニズムを調べる。拡散型分岐とせん断線形成分岐のどちらが先に起こっているかには特に注目する。これは、著者らが提案している拡散型分岐が先行する形でせん断線形成を引き起こしているという仮説を検証するものである。

2. 対称性を持つ系の分岐理論

幾何学的対称性を持つ系の分岐理論⁴⁾を簡単に紹介する。

(1) つり合い方程式の群同変性

ある離散系の全ポテンシャルエネルギーを $U(\mathbf{u}, f)$ とする¹。ここに、 \mathbf{u} は変位ベクトルを表す。この系のつり合い方程式は

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \equiv \mathbf{F}(\mathbf{u}, f) = \mathbf{0} \quad (1)$$

となる。つり合い方程式の対称性を記述するにあたり、(鏡映や回転等を表す) 変換写像 g から構成される群 G を想定する。例えば群 G の元 g が N 次元ベクトル \mathbf{u} (または \mathbf{F}) に作用すると、 \mathbf{u} が $g(\mathbf{u})$ (または \mathbf{F} が $g(\mathbf{F})$) に変換されるとする。この座標変換の仕組みを表す $N \times N$ の表現行列 $T(g)$ とは

$$T(g)\mathbf{u} = g(\mathbf{u}), \quad T(g)\mathbf{F} = g(\mathbf{F}), \quad g \in G \quad (2)$$

を満たすものである。表現行列は元 g が引き起こす座標変換を、対応するベクトル空間に対して書き表したものである。 $T(g)$ は直交行列と仮定する。

この系の対称性は、元 g が引き起こす座標変換に対する全ポテンシャルエネルギー U の不変性により表される。群 G の全ての元 g に対して、

$$U(T(g)\mathbf{u}, f) = U(\mathbf{u}, f), \quad g \in G \quad (3)$$

が成立つとき、全ポテンシャルエネルギー U は群 G に対して不変であると呼ぶ。

不変条件 (3) が成り立つとき、つり合い方程式 $\mathbf{F}(\mathbf{u}, f)$ の群 G に対する同変性

$$T(g)\mathbf{F}(\mathbf{u}, f) = \mathbf{F}(T(g)\mathbf{u}, f), \quad g \in G \quad (4)$$

が成り立つ。ここに $T(g)$ は直交行列であることより、 $T(g)^T = T(g)^{-1}$ であることを用いている。なお、式 (4) より (\mathbf{u}, f) が解であれば、群 G の任意の元 g に対して $(T(g)\mathbf{u}, f)$ も解であること、すなわち、 \mathbf{u} が G 不変でなければ、解が多価であることが導かれる。

(2) ブロック対角化原理

群同変性 (4) を持つ系の支配方程式 (1) の解空間 X は、複数の部分空間の直和に分解 (isotypic decomposition) できることが知られている。すなわち、

$$X = \bigoplus_{\mu \in R(G)} X^\mu \quad (5)$$

が成り立つ。ここに、 μ は群 G の既約表現であり、 X^μ は既約表現 μ に対応する部分空間であり、 $R(G)$ は群 G

の既約表現の全体を表す。ここに、既約表現とは、群の変換を表す表現 (行列) 中の既約なものを表す²。支配方程式 (1) の解空間 X が、式 (5) のような直和構造を持つことが、対称性を持つ系の分岐の仕組みを支配している。

接線剛性行列 $K_t \equiv \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{u}$ は、

$$T(g)K_t = K_t T(g), \quad g \in G \quad (6)$$

という対称条件を満たすので、適当な座標変換によりブロック対角化可能である。すなわち、接線剛性行列は、

$$H^T K_t H = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \tilde{K}_t^\mu & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (7)$$

と既約表現 μ 毎のブロック \tilde{K}_t^μ にブロック対角化される。

具体的には、局所座標系 (対称座標系) への座標変換式

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu \in R(G)} H^\mu \mathbf{w}^\mu \quad (8)$$

を考え、座標変換行列 H を

$$H = (H^\mu \mid \mu \in R(G)) \quad (9)$$

と群 G の既約表現 $\mu \in R(G)$ に対応するブロックに分解する。このとき、変換式 (8) における $H^\mu \mathbf{w}^\mu$ は、式 (5) の部分空間 X^μ に対応する。

既約表現間の直交性により、各ブロック行列は

$$\tilde{K}_t^\mu = (H^\mu)^T K_t H^\mu, \quad \mu \in R(G) \quad (10)$$

により与えられる。

(3) 分岐解の対称性

支配方程式 (1) の増分形

$$K_t d\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} df + \text{高次項} = \mathbf{0} \quad (11)$$

を考える。局所座標系への変換式 (8) により、増分支配方程式 (11) は、

$$\tilde{K}_t^\mu d\mathbf{w}^\mu + (H^\mu)^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} df + \text{高次項} = \mathbf{0}, \quad \mu \in R(G) \quad (12)$$

とブロック毎に分解できる。 $\partial \mathbf{F} / \partial f$ は G 不変であるので、

$$\begin{cases} (H^\mu)^T \partial \mathbf{F} / \partial f \neq 0, & \mu = \mu^* \\ (H^\mu)^T \partial \mathbf{F} / \partial f = 0, & \mu \neq \mu^* \end{cases} \quad (13)$$

が成り立つ。ここに、 μ^* は単位既約表現であり、 G 不変な解に対応する。ゆえに、(12) は、

$$\tilde{K}_t^\mu d\mathbf{w}^\mu + (H^\mu)^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial f} df + \text{高次項} = \mathbf{0}, \quad \mu = \mu^* \quad (14a)$$

$$\tilde{K}_t^\mu d\mathbf{w}^\mu + \text{高次項} = \mathbf{0}, \quad \mu \neq \mu^* \quad (14b)$$

¹ ここでは読者の理解を助けるために全ポテンシャルエネルギーを用いるが、以下の議論はポテンシャルを持たない系に対しても成立つ。

² 既約表現に関する詳細については、文献²¹⁾を参照されたし。

と書き直される。この系の解は、

$$\begin{cases} \det \tilde{K}_t^\mu \neq 0, & \forall \mu \in G, & \text{通常点} \\ \det \tilde{K}_t^\mu = 0, & \mu = \mu^*, & f \text{ の極大・極小点} \\ \det \tilde{K}_t^\mu = 0, & \mu \neq \mu^*, & \text{分岐点} \end{cases} \quad (15)$$

と分類される。

群 G に関して不変なつり合い経路上の通常点では、式 (14) の解は、

$$d\omega^\mu = -(\tilde{K}_t^\mu)^{-1}(H^\mu)^T \frac{\partial F}{\partial f} df + \text{高次項}, \quad \mu = \mu^* \quad (16a)$$

$$d\omega^\mu = 0 + \text{高次項}, \quad \mu \neq \mu^* \quad (16b)$$

となり、 G 不変な解 $d\omega^{\mu^*}$ のみが非ゼロとなり、 G 不変性が保たれる。一方、分岐点では、 G 不変でない解 $d\omega^\mu$ ($\mu \neq \mu^*$) が非ゼロとなる。

このように、分岐点において枝分かれしない限り G 不変な解の対称性は保存される。群同変性 (4) を持つ系の解の対称性を数学的に解析することによって、分岐現象において実際に観察される対称性の変化を明らかにすることができる。これが群論的分岐理論の一つの中心的な成果である。多段階の分岐現象には群の連鎖

$$G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots \quad (17)$$

が対応することが明らかにされている。ここに、 $G_i \rightarrow G_{i+1}$ は G_i 不変な解から G_{i+1} 不変な解が分岐することを示す (G_{i+1} は G_i の真部分群である)。式 (17) はこの系の対称性が G 不変な状態から、 G_1 不変、 G_2 不変と低下して行くことに対応している。群 G, G_1, G_2, \dots の部分群の構造を各々調べて行くことにより、群 G に同変な系の分岐階層構造が数値解析に先立ち先験的に求めることができるのである。

3. 左右対称性を持つ系の分岐

この章では、左右対称性を持つ系に対して、2. 章の理論を適用する。上下左右対称性などの、より対称性が高い場合については、文献^{(4), (22)}を参照されたし。

(1) 左右対称性を表す群

左右対称な系として、鏡映

$$s: x \mapsto -x \quad (18)$$

に関して不変な系を考える。この系の対称性は、1 次の二面体群

$$D_1 = \{e, s\} \quad (19)$$

に関する不変性として表される。ここに、 e は恒等変換であり、 $\{\cdot\}$ は括弧内の変換からなる群を表す。また、群 D_1 の真部分群は、非対称性を表す群

$$C_1 = \{e\} \quad (20)$$

だけである。

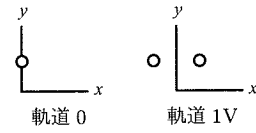


図-1 左右対称な離散系の軌道

群 D_1 に同変な系の支配方程式 (1) の解空間 X は、

$$X = X^{(+)} \oplus X^{(-)} \quad (21)$$

と、2つの空間の直和に分解 (isotypic decomposition) される。ここに、 $X^{(+)}$ は左右対称な解の空間に対応し、 $X^{(-)}$ は左右反対称な解の空間に対応する。

群 D_1 の既約表現は、

$$R(D_1) = \{(+), (-)\} \quad (22)$$

により与えられる。ここに、各既約表現は、

$$T^{(+)}(s) = 1, \quad T^{(-)}(s) = -1 \quad (23)$$

により定義される。すなわち、既約表現 (+) は、鏡映 s に関する対称性を、既約表現 (-) は、鏡映 s に関する反対称性をそれぞれ表す。

(2) 左右対称な系の分岐の仕組み

群 D_1 に同変な系に対して、式 (7) のブロック対角形は

$$H^T K_t H = \begin{pmatrix} \tilde{K}_t^{(+)} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_t^{(-)} \end{pmatrix} \quad (24)$$

となる。この系の解は、(15) より、

$$\begin{cases} \det \tilde{K}_t^{(+)} \neq 0, \det \tilde{K}_t^{(-)} \neq 0, & \text{通常点} \\ \det \tilde{K}_t^{(+)} = 0, & f \text{ の極大・極小点} \\ \det \tilde{K}_t^{(-)} = 0, & \text{分岐点} \end{cases} \quad (25)$$

と分類される。左右対称性を持つ系は、分岐するまでは、左右対称性、すなわち D_1 不変性を保つ。一方、分岐後は、対称性を持つ解と反対称性を持つ分岐解が混ざるために、解は非対称となる。ゆえに、この系の分岐の仕組みは、

$$D_1 \rightarrow C_1 \quad (26)$$

により表され、分岐は1回しか起こさない。

(3) 座標変換行列の組立

群 D_1 に対しては、局所座標系への座標変換行列 (9) は、

$$H = (H^{(+)}, H^{(-)}) \quad (27)$$

となる。図-1 に示すように、 D_1 不変な離散系の節点は、「0」と「1V」という2種類の軌道により構成される。軌道0は、鏡映軸である y 軸上の節点1個からなる。一方、軌道1Vは鏡映軸である y 軸を挟んで鏡映

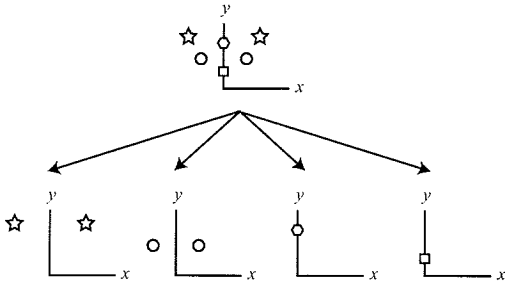


図-2 左右対称な離散系の軌道の分解の例

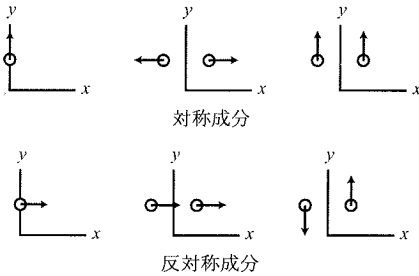


図-3 基底ベクトルの対称成分と反対称成分

の位置にある2個の節点からなる。例えば、図-2に示す左右対称な離散系は、2個の軌道0と2個の軌道1Vに分解できる。

以下、変位としては、 (x, y) 平面内の並進変位を考え、各軌道毎に座標変換行列を組み立てる。節点 i の (x, y) 方向の変位成分を $(u_i, v_i)^T$ ($i = 1, \dots, N$) とおく。

y 軸上のある1個の節点 $(u_i, v_i)^T$ からなる軌道0に関する座標変換行列は、

$$H^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 v_i が対称成分に、 u_i が反対称成分にそれぞれ相当する。図-3の左側に、この対称成分と反対称成分を図示する。

y 軸を挟んで鏡映の位置にある2個の節点 $(u_i, v_i)^T$ と $(u_j, v_j)^T$ からなる軌道1Vに関する座標変換行列は、

$$H^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。この対称成分と反対称成分を、図-3に図示する。

4. 豊浦砂の平面ひずみ圧縮試験

平面ひずみ圧縮せん断試験法と豊浦砂の圧縮せん断試験結果についてまとめる。

(1) 試験法

実験では、土粒子密度 $\rho_s = 2.639(\text{g}/\text{cm}^3)$ の豊浦砂を用いた。土質工学会基準に準拠した試験により求めた最大間隙比は $e_{\max} = 0.978$ 、最小間隙比は $e_{\min} = 0.611$ である。図-4に粒度分布を示す。

豊浦砂を水で洗浄し、ほこりを取り除いた後に炉乾燥したものを試料として用いた。できるだけ均質な供試体とするために、試料は供試体の高さ方向に3層に分割し、各層で落下高さが一定となるように試料を詰めた。相対密度 $83 \pm 2\%$ の比較的密な供試体である。供試体は冷凍することによって作製した。

供試体形状としては、図-5に示すような直方体を用いた。幅 $W_0 = 5 \text{ cm}$ 、厚さ $T = 2 \text{ cm}$ で一定とし、異なる変形モードを観察するために $H_0 = 11.25 \text{ cm}$ と 13 cm という2通りの高さを用いた。用いた供試体の飽和度はいずれも約92%である。

図-6に示す、一面せん断試験機を改良したものを実験装置として用いた。実験は排水試験であり、両端部からの排水を行なっている。透明なアクリル板2枚を水平に設置し、これらに2cmの空間を常時保って、アクリル板の両側に金属棒を挟んで固定した。ラテックス製の極薄のゴム膜で供試体を包み、さらにグリースを利用して供試体上下の端面摩擦の影響をできる限り低減することにより、摩擦なしの境界条件とした。モーターを一定速度で稼働させてロードセルと載荷板を押し出すことにより供試体にせん断力を与えた。

まず、冷凍した供試体をセットし、加圧板が適度に可動する範囲でボルトを締め、アクリル板を固定する。側圧が供試体に等方に行き渡るように水圧を29.4 kPaに上げ、供試体が溶けるのを待つ。さらに側圧を49.0 kPaに上げ、以後一定に保つ。軸圧縮(せん断)を開始し、せん断ひずみ速度は0.15%/minと設定し、0.25%間隔で軸ひずみ20%まで写真を撮影する。撮影にはデジタルカメラを使用しており、画像の解像度は 640×480 (pixel) である。

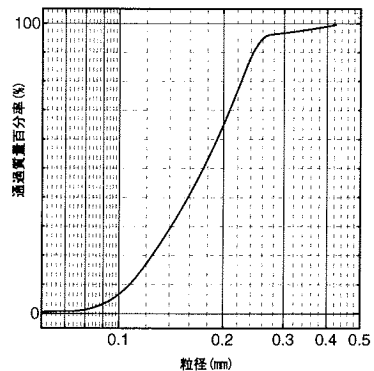


図-4 粒径加積曲線

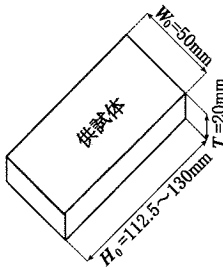


図-5 平面ひずみ供試体

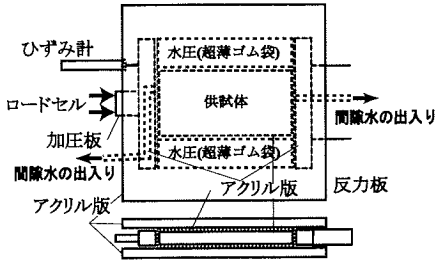


図-6 実験装置図

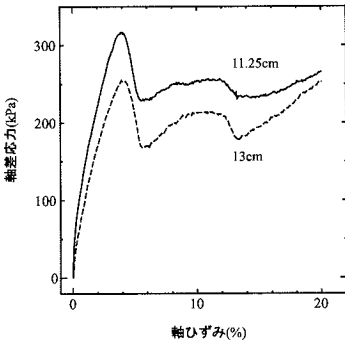


図-7 応力ひずみ曲線

(2) 実験結果

供試体の応力ひずみ曲線を図-7、体積ひずみ-軸ひずみ曲線を図-8に示す。また、図-9に供試体の写真とそのスケッチを示す。 $H_0 = 11.25\text{ cm}$ と 13 cm という、高さの異なる供試体に対する応力ひずみ曲線は殆ど同一であるが、供試体のせん断帯の進行に関しては有意な差が見られた。しかし、目視によって観察できる情報は、せん断帯の形状や太さなどの限られたものであり、内部のメカニズムを正確に把握することは困難である。

a) 高さ $H_0 = 11.25\text{ cm}$ の供試体

高さ $H_0 = 11.25\text{ cm}$ の供試体の応力ひずみ曲線は、図-7に示すように、軸ひずみ $\epsilon_a = 4\%$ 付近でピークをむかえ、その後に応力が減少し、 $\epsilon_a = 5.5\%$ 付近で限界状態に達し、 $\epsilon_a = 12\%$ 付近で再び応力が小さくなっている。

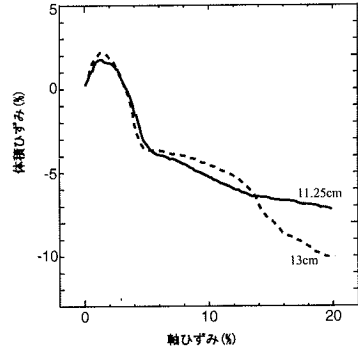


図-8 体積ひずみ-軸ひずみ曲線

図-9(a)に示すように、応力ひずみ曲線のピーク付近に対応する軸ひずみ $\epsilon_a = 4\%$ では、たる型に膨れはじめているが、せん断帯は目視では観察できなかった。 $\epsilon_a = 7\%$ では、右下部にせん断帯が発生している。 $\epsilon_a = 10\%$ では、右下部で発生したせん断帯がさらに進展し、また、交差する方向に別なせん断帯が発達している。 $\epsilon_a = 13\%$ では、せん断帯がさらに明瞭になった。

b) 高さ $H_0 = 13\text{ cm}$ の供試体

高さ $H_0 = 13\text{ cm}$ の供試体の応力ひずみ曲線は、図-7に示すように、高さ $H_0 = 11.25\text{ cm}$ の供試体よりも応力が全体に小さいが、応力ひずみ曲線の形状は殆ど同一であった。

図-9(b)に示すように、軸ひずみ $\epsilon_a = 4\%$ では、たる型に膨れはじめているが、せん断帯は目視では観察できなかった。 $\epsilon_a = 7\%$ では、左上部にせん断帯が発生している。 $\epsilon_a = 10\%$ では、左上部で発生したせん断帯がさらに進展し、右下部に発生したせん断帯とつながりそうになっている。 $\epsilon_a = 13\%$ では、せん断帯が完全につながり、さらに、このせん断帯と交差する方向に別なせん断帯が発達している。

5. 画像処理

PIVを用いて、供試体の変形の画像処理を行い、その画像を左右対称成分と左右反対称成分とに分解することにより、せん断帯の発生過程を調べる。画像処理に際しては、PIVから出力される粒子の流速ベクトルの速度場を利用し、供試体の変位場の経時変化を求めている。今回用いた高さ 13 cm の供試体においては、供試体は 566×218 (pixel)で表されており、1 (pixel)は、 0.230 mm に相当する。今回用いた豊浦砂の粒径平均は約 0.175 mm であり、PIVでは、 31×31 (pixel)程度で表される粒子の集合体の色むらパターンを認識し、流速ベクトルを出力している。今回用いた画像の解像度においては、比較する色むらパターンを 11×11 (pixel)程度まで小さくしてしまうと、粒子の集合体の色むらパターンの認識が非常に困難になることを確認している。

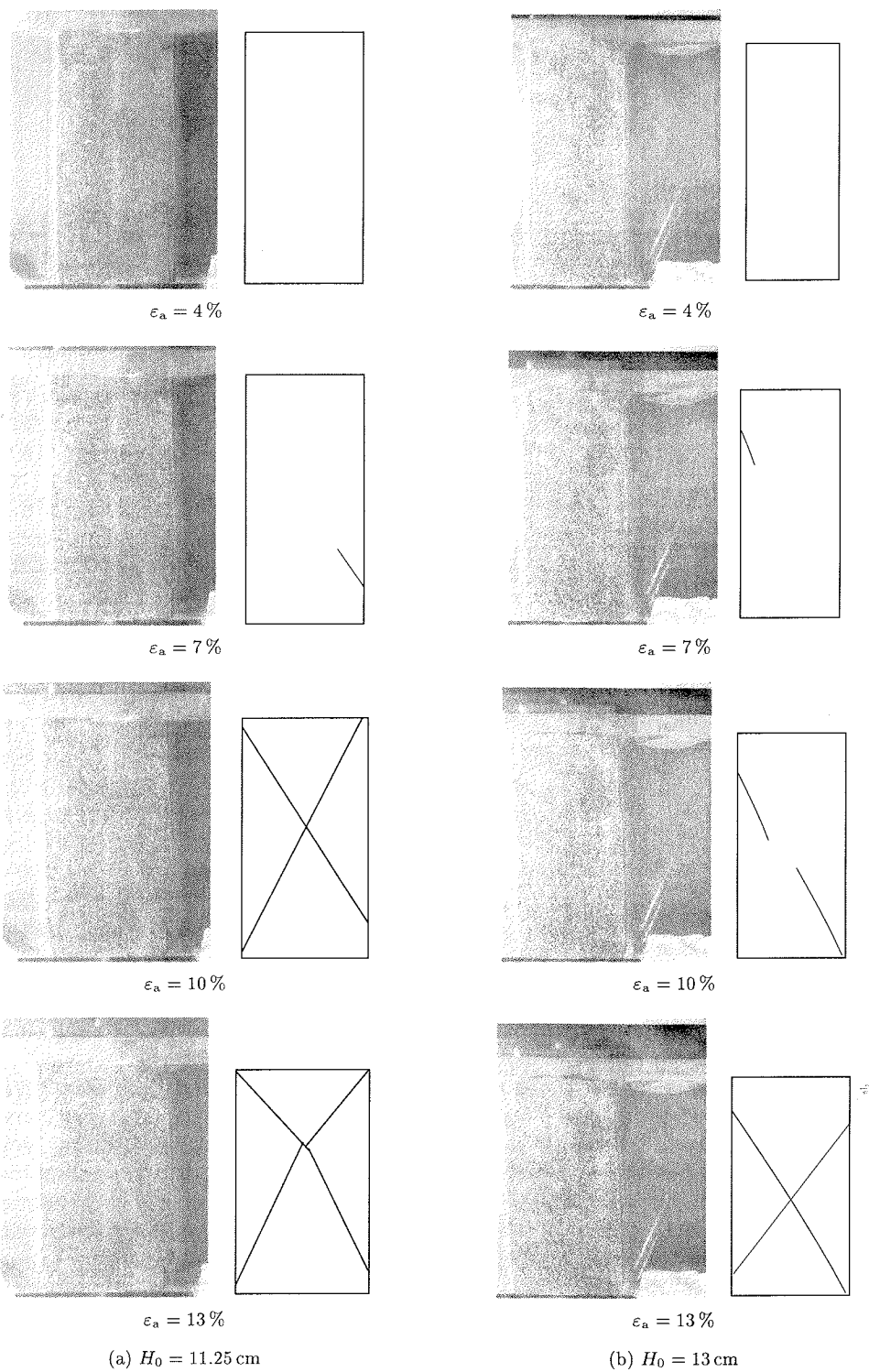


図-9 供試体の写真とそのスケッチ

(1) PIVによる画像処理

PIVにより求めた変位場を図-10に示す。

a) 高さ $H_0 = 11.25$ cm の供試体

応力ひずみ曲線のピーク付近に対応する軸ひずみ $\varepsilon_a = 4\%$ では、図-10(a)に示すPIVにより求めた速度分布図からは、X状のせん断帯が観察できている。このように、目視では観察できなかったせん断帯の形成過程が、PIVを用いることにより観察できている。

$\varepsilon_a = 7\%$ では、X状のせん断帯の内、左上部から右下部へ向かうせん断帯が卓越してきている。 $\varepsilon_a = 10 \sim 16\%$ では、このせん断帯がさらに進行しており、このせん断帯と交差する方向の別なせん断帯が発達している。

b) 高さ $H_0 = 13$ cm の供試体

図-10(b)に示すPIVにより求めた速度分布図では、軸ひずみ $\varepsilon_a = 4\%$ において、せん断帯の形成過程が観察された。これは目視では観察できなかったものである。 $\varepsilon_a = 7 \sim 10\%$ では、左上部から右下部に向かうせん断帯が発生している。 $\varepsilon_a = 13 \sim 16\%$ では、このせん断帯と交差する方向に別なせん断帯が発達している。

(2) 画像の分解

3.(3)節で紹介した方法により、速度ベクトルを対称成分と反対称成分に分解した。図-7の応力ひずみ曲線において、応力が減少した軸ひずみ $\varepsilon_a = 4\%$ 付近と $\varepsilon_a = 12\%$ 付近において、特徴的な結果が得られた。以下、 $\varepsilon_a = 4\%$ と $\varepsilon_a = 12\%$ 付近における画像処理結果をまとめる。

a) 高さ $H_0 = 11.25$ cm の供試体

供試体高さ $H_0 = 11.25$ cm の供試体に対する画像処理結果を図-11に示す。軸ひずみ $\varepsilon_a = 3 \sim 4\%$ において、反対称成分が発生しはじめている。このベクトルが分岐モードであり、これは分岐が起こったことを表している。この分岐モードは、上部左右2対の半時計回りの渦と下部の時計回りの渦からなり、ひずみを増す毎に、渦の強さが増し、せん断帯を誘発しようとしている。対称成分は常に逆V字型を形成するような下向きのベクトルであるから、せん断帯が発生する方向は、対称成分と反対称成分のベクトルの向きが同じである右方向であり、その共役な方向は対称成分と反対称成分が打ち消しあっている。

ひずみ 11% 付近になると、供試体上部で卓越していた反対称成分のベクトルは連鎖的に下部に移行していく。供試体下部の反対称成分が卓越しはじめ、右側のせん断帯を誘発していたベクトルは反対称成分ベクトルに打ち消される。その結果初期のせん断帯の発生過程とは反対に、反対称成分が左方向のせん断帯を誘発する形を取りはじめる。それによってくさび型を形成し、より安定な形へと推移する。このように、せん断帯の発生においては、対称成分は常に逆V字型を形成するような下向きのベクトルである。一方、反対称成分ベクトルの向きや大きさが変化することにより、せん断帯の発生方向や発生過程などの特徴的な挙動を支配している。

b) 高さ $H_0 = 13$ cm の供試体

供試体高さ $H_0 = 13$ cm の供試体に対する画像処理結果を図-12に示す。軸ひずみ $\varepsilon_a = 4\%$ において、中央部の左右2対の逆向きの渦からなる反対称成分、すなわち分岐モードが発生し、分岐が起こっている。その分岐モードが強まることにより、せん断帯を誘発している。 $\varepsilon_a = 4 \sim 5\%$ において、対称成分は上下からくさびを押し込む上下対称なモードである。 $\varepsilon_a = 11\%$ において、変形ベクトルは大きくなるが、依然として、反対称成分は中央部の左右2対の逆向きの渦からなるモードであり、対称成分も上下からくさびを押し込む上下対称なモードである。

$\varepsilon_a = 12\%$ において、対称成分は、上下対称性を失っている。一方、反対称成分は、渦の向きが逆になっており、最初に発生したせん断帯と別な方向のせん断帯を形成している。

c) 考察

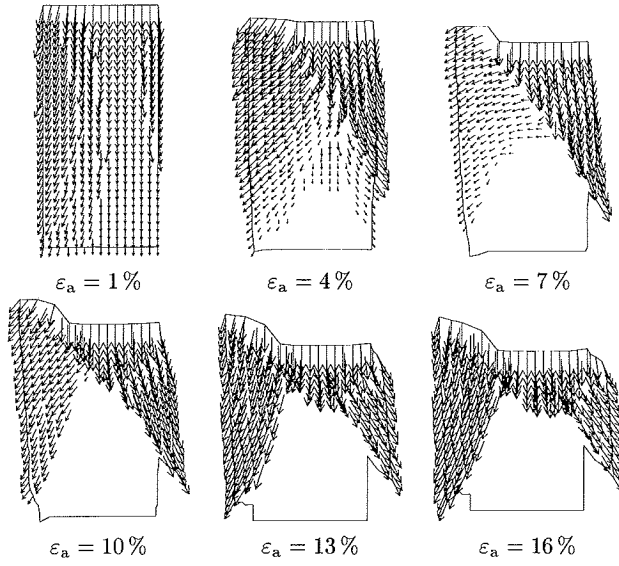
ここで取り扱った2ケースともに、分岐モードは、渦を描く典型的な Harmonic mode、すなわち、拡散型であった。この分岐の発生後にせん断帯は発生している。このように、拡散型分岐が先行する形で起こり、せん断帯の生成を誘発している。

6. 結論

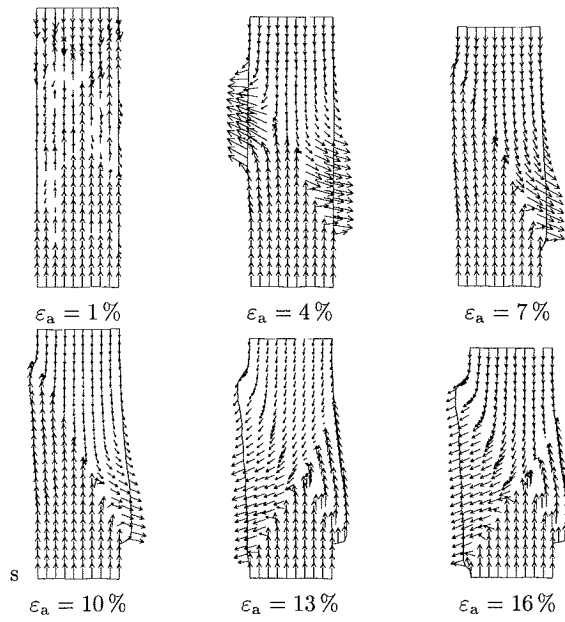
土の供試体のせん断帯形成には、対称性の喪失が関与していることを明らかにできた。PIVによる出力をそのまま用いる代わりに、対称成分と反対称成分に分けることにより、せん断帯形成のメカニズムの一端を示すことに成功した。対称成分は一貫してくさびを形成する働きをしているのに対し、反対称成分の向きや大きさが複雑に変化することにより、せん断帯の発生方向や発生過程などの特徴的な挙動を支配している。ここで取り扱った2ケースともに、分岐モードは、渦を描く典型的な Harmonic mode であり、拡散型分岐が先行する形で起こり、せん断帯の生成を誘発している。ちなみに、均質状態からの分岐モードは、渦を描く Harmonic mode に限定されるが、非均質状態からの分岐モードは Harmonic mode とはならない。

本論文では、左右対称性という、最も簡単な対称性を考えるが、本手法は、もっと対称性が高い系に対しても拡張可能である。例えば、上下対称性も考慮すると、画像は4個に分解されることになる。ちなみに、円柱供試体は、軸対称性を持つために、さらに数多くの画像に分解されることになる。今後、左右対称性以外の対称性を持つ系に本手法を適用すること、また、粘土などへの適用も今後の課題である。本論文は、2,3章で紹介している理論を4章の実験で検証しているが、この種の研究としては、先駆的である一方、実験方法に関しては、まだまだ改良の余地があると考えられたため、より精度のよい実験方法を検討する必要がある。

謝辞： 徳島大学工学部基礎工学研究室の先生方には、PIV技術の導入において大変お世話になりました。



(a) $H_0 = 11.25$ cm



(b) $H_0 = 13$ cm

図-10 PIVにより求めた速度分布図

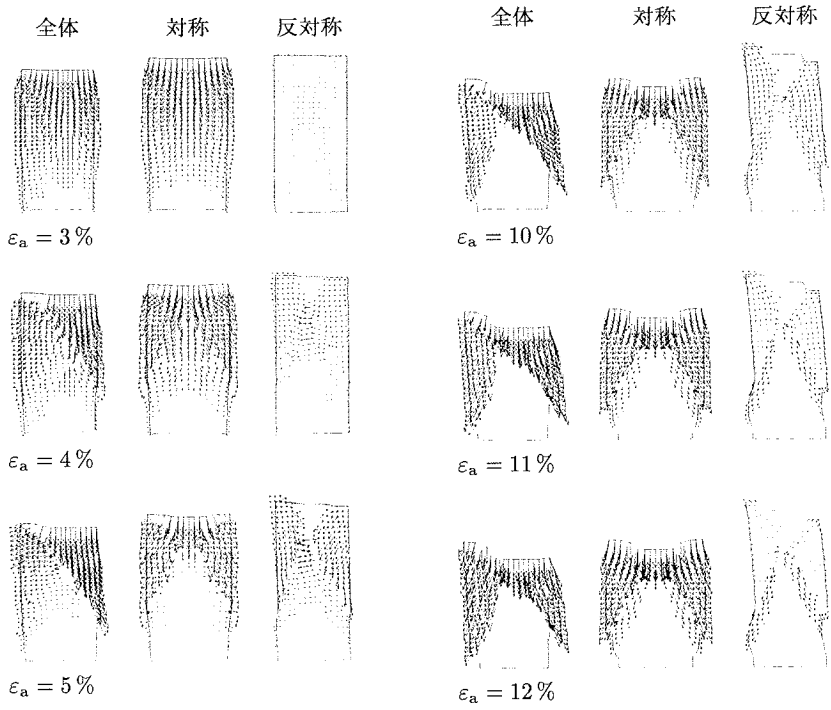


図-11 高さ $H_0 = 11.25$ cm の供試体の PIV 画像の分解

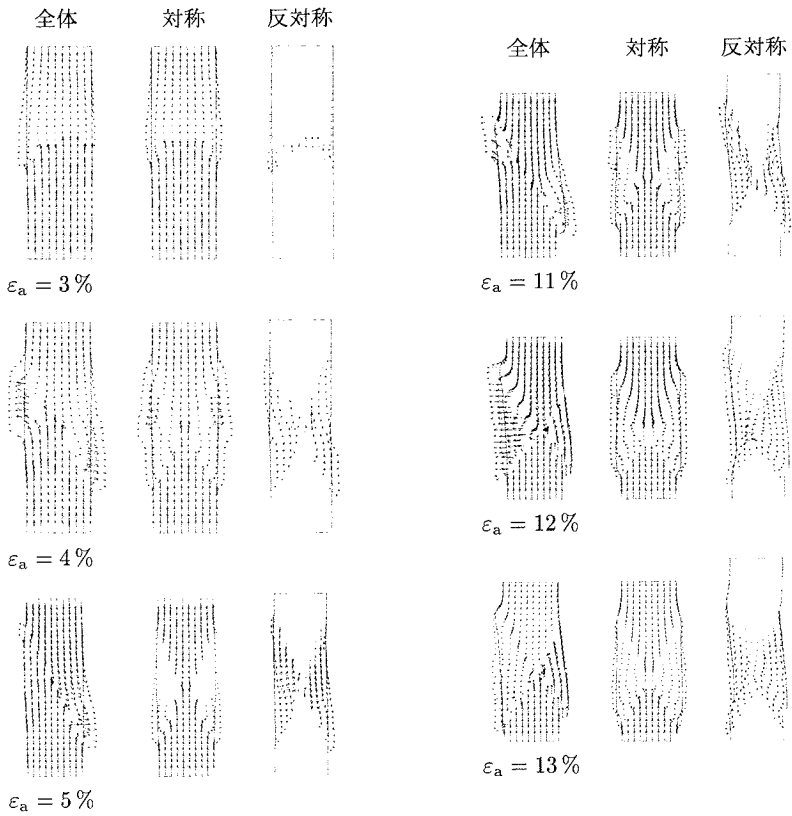


図-12 高さ $H_0 = 13$ cm の供試体の PIV 画像の分解

参考文献

- 1) Tatsuoka, F., Nakamura, S., Huang, C., and Tani, K.: Strength anisotropy and shear direction in plane strain tests of sand, *Soils and Foundations*, Vol. 30, No. 1, pp. 35-54, 1990.
- 2) Han, C. and Vardoulakis, L.: Plane-strain compression experiments on water-saturated fine-grained sand, *Géotechnique*, Vol. 41, pp. 49-78, 1991.
- 3) Ikeda, K., Murota, K., Yamakawa, Y., and Yanagisawa, E.: Mode switching and recursive bifurcation in granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 11/12, pp. 1929-1953, 1997.
- 4) Ikeda, K. and Murota, K.: Imperfect Bifurcation in Structures and Materials, Springer, New York, 2002.
- 5) 山川 優樹, 池田 清宏, 須藤 良清, 寺井 信夫, 鳥居 邦夫: 砂の三軸試験供試体の分岐変形モードと寸法・形状効果, 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 357-371, 2002.
- 6) Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 7) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- 8) de Borst, R.: Numerical methods for bifurcation analysis in geomechanics, *Ingenieur-Archiv*, Vol. 59, pp. 160-174, 1989.
- 9) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
- 10) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, in: Asaoka, A., Adachi, T., and Oka, F. (eds.), *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Proc. IS-NAGOYA '97, pp. 9-14, 1997.
- 11) 小林 一三, 飯塚 敦, 太田 秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 12) 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動, 土木学会論文集, No. 701/III-58, pp. 73-86, 2002.
- 13) Ikeda, K., Yamakawa, Y., and Tsutsumi, S.: Simulation and interpretation of diffuse mode bifurcation of elastoplastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 2003.
- 14) 中瀬 仁, 龍岡 文夫: 平面ひずみ圧縮試験におけるひずみの局所化とせん断帯の形成, 「地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム」発表論文集, pp. 155-162, 1992.
- 15) Desrues, J., Chambon, R., Monki, M., and Mazzerolle, F.: Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computer tomography, *Géotechnique*, Vol. 46, No. 3, pp. 529-546, 1996.
- 16) Tani, K.: X-ray computed tomography technique to observe shear banding in dense sands, *Proc. of Int. Symop. on Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Nagoya, pp. 315-320, 1997.
- 17) Otani, J., Mukunoki, T., and Obara, Y.: Application of X-ray CT method for characterization of failure in soils, *Soils and Foundations*, Vol. 40, No. 2, pp. 111-118, 2000.
- 18) Horii, H., Takamatsu, K., Inoue, J., and Sasaki, N.: Measurement of displacement field by "Matching method" and observation of strain localization in soft rock, *Imaging Technologies: Techniques and Applications in Civil Engineering*, ASCE, pp. 1-19, 1997.
- 19) 上野 勝利, 高島 伸哉, 望月 秋利, 馬 険峰: 画像解析による簡便な砂の変位場計測法, 土木学会論文集, No. 666, III-53, pp. 339-344, 2000.
- 20) 財団法人災害科学研究所, 徳島大学工学部基礎工学研究室, 画像解析による地盤の変位場解析の模型実験への適用に関する研究, 西松建設株式会社受託研究平成13年度報告書, 2002.
- 21) 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝: 応用群論-群表現と物理学, 東京裳華房発行, 1983.
- 22) Murota, K. and Ikeda, K.: Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 12, No. 2, pp. 273-297, 1991.

(2003. 3.25 受付)

IMAGE PROCESSING OF DEFORMATION BEHAVIOR OF PLANE STRAIN COMPRESSION SPECIMENS BASED ON BIFURCATION MECHANISM

Kiyohiro IKEDA, Tsuyoshi ICHIMURA, Hiroyuki TAKAMURA, Yoshikiyo SUDO and Seiichiro TSUTSUMI

An image processing procedure of soil deformation behavior is presented by combining PIV (particle image velocimetry) and block-diagonalization method. Plane strain compression tests of sand specimens are conducted to observe localized deformation modes. The time variation of the velocity field of deformation is observed by PIV to make clear the formation of shear band at an early state. This velocity field is decomposed into a symmetric component and antisymmetric one, which corresponds to a bifurcation mode. The symmetric one is forming wedge(s) from the beginning to the end, while the antisymmetric one changes greatly to show the occurrence of bifurcation and the formation of shear bands.