

下水道システムの費用効率性評価法

小林潔司¹・北濃洋一²・渡辺晴彦³・石川美知郎⁴

¹フェロー会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科都市社会工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail:kkoba@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

²正会員 工修 (株) IBM ビジネスコンサルティング サービス(〒100-6318 東京都千代田区丸の内2-4-1)
E-mail:LC873340@jp.ibm.com

³正会員 工博 (株) 日水コン 環境事業部部長(〒163-1122 東京都新宿区西新宿6-22-1)
E-mail:watanabe_h@nissuicon.co.jp

⁴学生会員 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail:michiro@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

本研究では下水道事業体の費用構造に関するクロス・セクションデータを用いて下水道システムの費用効率性を評価する方法論を提案する。その際、下水道システムを処理施設、管渠等のサブシステムとそれを統括する上位システムで構成される階層的システムとしてモデル化する。さらに、階層的システムを対象とした確率費用フロンティアモデルを定式化し、下水道システムのサブシステム、上位システムの費用効率性を評価する方法論を提案する。さらに、わが国の下水道事業体を対象とした実証分析を通じて、提案した方法論の有効性を検討する。

Key Words : cost efficiency, stochastic frontier analysis, efficiency measurement, hierarchical systems

1. はじめに

多くの下水道事業体では、事業運営の効率化と経営基盤の強化が求められている。しかし、下水道システムの老朽化が進展している事業体も少なくなく、限られた財源の中で効率的に施設の修繕や機能更新を図ることが課題となっている。下水道システムの効率的な維持・更新を行うためには、現在運営されている下水道システムの効率性を客観的に評価する方法論の開発が不可欠である。しかし、下水道事業の効率性を定量的に評価する方法論が確立されておらず、明確な評価基準を持たないままシステムの維持管理や機能更新が行われているのが実情である。

下水道事業の効率性を評価する場合、下水道システムの特殊性を考慮する必要がある。第1に、下水道システムのうち管渠等の多くの施設が埋設施設であるため、その機能性や劣化水準を容易に調査することができない点があげられる。下水道システムの物理的機能水準を点検するためには多額の費用が必要となる。そのため、施設の物理的機能水準を表す指標よりも、機能水準と密接な関連があり、しかも簡単に計測できる指標を用いて施設の機能水準を評価できる方法を開発することが望ましい。このような問題意識より、本研究では下水道事業の費用データに基づいて、下水道システムの効率性を評価する方法論を開発する。

第2に、下水道システムは管渠・処理場など複数のサブシステムからなる複合的システムである点があげ

られる。下水道システムの効率性は単にそれを構成する個々の施設の効率性を評価するだけでは不十分である。多くの下水道事業体では、都市の成長に合わせて下水道システムを整備してきたため、サブシステムの機能水準の間に差異があり、全体として機能的不整合が生じている場合が少なくない。したがって、下水道システムの効率性を評価するためには、個々のサブシステムの効率性だけでなく、サブシステムの効率性がシステム全体の効率性に及ぼす影響を的確に評価しうる方法論が必要となる。

本研究では下水道事業体の費用構造に関するクロス・セクションデータを用いて下水道事業体の費用効率性を評価する方法論を提案する。その際、確率的フロンティア分析 (Stochastic Frontier Analysis: 以下、SFAと略す) 手法を用いて、下水道システムの各サブシステムとシステム全体の費用効率性を同時に評価する方法論を提案する。以下、2. では本研究の基本的な考え方を説明する。3. では、サブシステムの費用効率性に着目し、4. ではシステム全体の費用効率性を評価する指標を提案する。5. で適用事例を示す。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の研究概要

従来、下水道事業体の効率性評価は、貸借対照表や損益計算書等の会計情報に基づく経営分析が主体であつ

た¹⁾⁻⁵⁾。しかし、経営分析に基づく方法では、各サブシステムの効率性や、それが下水道システム全体の効率性に及ぼす影響を分析することができない。そのため、下水道システムの効率性を的確に評価することが不可能であり、分析結果に基づいて具体的な経営改善策を示唆することが困難であった。このような経営分析手法の限界を克服するためには、下水道事業体の費用データから事業体の経営効率性をきめ細かく分析できる手法の開発が望まれる。費用データから効率性フロンティアを推計し、各事業体の効率性を評価する手法としてデータ包絡分析法 (Data Envelopment Analysis: 以下、DEAと呼ぶ)⁶⁾ や SFA 手法が提案されている。しかし、DEA は効率性フロンティアの推定において、事業体が制御できない外的要因から生じる非効率性、もしくはノイズと技術効率性との分離が困難であるため、外的要因やノイズ、あるいは少数の異常値によって効率性フロンティアが左右されやすいという問題点が存在する。さらに、効率性フロンティアの推計結果の統計的性質も明らかではない。計量経済学手法による生産効率性評価に関しては、古典的な Koopmans⁷⁾、Debreu⁸⁾、Shepard⁹⁾をはじめとして数多くの研究が蓄積されている。中でも、Farell¹⁰⁾は生産効率性指標に関する研究の先鞭をつけ、その後 SFA に関する研究として体系化された¹¹⁾⁻¹⁴⁾。SFA に関してはすでに膨大な研究が蓄積されており参考文献^{15), 16)}において体系的に整理されている。SFA では、所与の投入量の組み合わせに対して最大の産出量を対応させる関数を生産フロンティアと定義する。その上で、現実に観測される生産投入・生産量の対応関係に確率誤差と非効率性の双方が同時に含まれることを想定し、生産フロンティア関数を計量経済学的に推計することにより生産システムの生産効率性を評価する方法論が提案されている。同様に、費用関数に関しても、所与の産出量に対して最小の費用を与える費用フロンティアを定義し、費用効率性を評価する方法論が開発されている。SFA では、DEA と同様にフロンティアからの乖離度をもって効率性を定義する。その際、生産（費用）フロンティアの推計において推計誤差と技術効率性を分離計測できるという利点がある。その結果、特異なサンプルデータによって効率性フロンティアが規定されるという DEA の問題点を軽減できる。また、SFA では、プロジェクトの効率性を技術効率性と投入量の配分効率性とに分離することができ、生産要素が費用を最小化するように配分されていないことによって生じる効率性を評価することが可能となる¹⁷⁾。費用フロンティアに基づいた SFA を用いて技術効率性や配分効率性を研究した事例は数多い¹⁵⁾⁻¹⁹⁾。本研究では下水道システムが下水道処理場、管渠といったサブシステムにより構成される複合的な

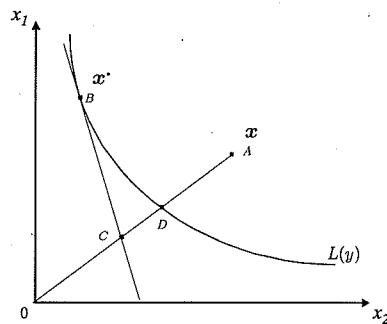


図-1 費用効率性の分解

システムであることに着目し、サブシステムの費用効率性を評価する SFA モデルと、それを包括するような上位システムの費用効率性を評価する SFA モデルで構成される階層的 SFA モデルを開発する。筆者らの知る限り、階層的 SFA モデルを用いて複合的なシステムの費用効率性を分析した研究事例は見当たらない。

(2) 技術効率性と配分効率性

伝統的な SFA では、対象とする生産システムの効率性を技術効率性と配分効率性に分解する。のちに述べるように、複数のサブシステムで構成されるシステム全体の効率性を議論する場合、個々のサブシステムの効率性がシステム全体の効率性に影響を及ぼすため伝統的な効率性に関する議論の枠組みを拡張する必要がある。ここでは、読者の便宜を図るために、費用フロンティアを用いた SFA における効率性分解の方法について簡単に説明する。図-1 は 2 種類の生産要素 (x_1, x_2) を用いる生産システムの費用フロンティアを示している。 $L(y)$ は生産量 y を所与としたときの等量曲線であり、生産量 y を最も効率的に産出するために必要となる 2 つの生産要素の組み合わせを表している。対象とする生産システムの実際の投入量列ベクトルを x (点 A) で表そう。生産要素価格列ベクトルを w と表せば、費用最小化を達成する投入量列ベクトルは x^* (点 B) で表せる。この時、生産システムの費用効率性は費用最小化を達成した時の生産費用と現実に要した生産費用との比 $CE = w^T x^*/w^T x$ として定義される。記号 T は転置を表す。費用効率性を図示するために、図-1 において点 A と原点 O を結ぶ半直線を考え、半直線と点 B を通る等価格線との交点を C と表そう。この時、費用効率性は線分 OC と線分 OA の比として表される。つぎに、半直線と等量曲線の交点を D と表し、その点における投入量列ベクトルを x' と表す。この時、技術効率性は $CT = w^T x'/w^T x$ 、配分効率性は $CA = w^T x^*/w^T x'$

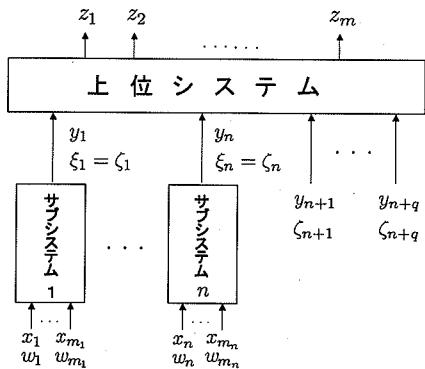


図-2 下水道システムの費用構造

と定義できる。図-1では技術効率性は \overline{OD} と \overline{OA} の比率 $\overline{OD}/\overline{OA}$ 、配分効率性は比率 $\overline{OC}/\overline{OD}$ で表される。技術効率性は、実際の投入量と等量曲線との乖離度で表現される。配分効率性は、生産要素の投入配分が価格比に関してどの程度かい離しているかにより評価される。生産技術が技術的に効率的であっても、所与の価格ベクトルに対して効率的な生産要素配分を達成していない場合には、配分的な非効率性が発生する。実際の投入量ベクトルが費用最小化を達成する場合（点Aと点Bが一致する場合）、対象とする生産システムは費用効率的である。

(3) 下水道システムの費用構造

下水道システムは処理場、管渠等といった相互作用を有するサブシステムにより構成される複合的システムである。本研究では下水道システムの費用構造を図-2に示すような階層的システムとしてモデル化する。下水道システムは n 個のサブシステムで構成されており、サブシステム i ($i = 1, \dots, n$) は m_i 個の生産要素(x_1, \dots, x_{m_i})を投入し生産物 y_i を生産する。一方、上位システムは、各サブシステムの生産物 y_i ($i = 1, \dots, n$) と独自の生産要素 y_i ($i = n + 1, \dots, n + q$) を投入し、システム全体としてのサービス(z_1, \dots, z_m)を生産する。サブシステム i の外部生産要素の価格(w_1, \dots, w_{m_i})、および上位システムの外部生産要素の価格($\xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+q}$)は観測可能である。しかし、サブシステムが生産するサービス価格 ζ_i ($i = 1, \dots, n$) は観測可能でない。本研究では、4.(1)で議論するように、サブシステムの限界費用 ξ_i ($i = 1, \dots, n$) を用いて、サブシステムのサービスの潜在価格を評価する。一般に、下水道システムの運営費用は、システムが対象とする処理人口等の社会・経済的条件や地理的な条件等により多様に異なる。したがって、上位システムが生

産するサービスは単に総処理量という単一の指標のみで評価できるのではなく、処理人口、カバー面積といった複数の属性ベクトルで表現した方が望ましい。すなわち、下水道システムを複数のサービスを生産する複数財生産技術として記述する。

下水道システムの非効率性は各サブシステム、および上位システムにおいて発生する。本研究では各サブシステムを単一のサービスを生産するシステムと考え、費用フロンティアに基づいたSFAを用いて各サブシステムの効率性を評価する。サブシステムの効率性評価に用いるSFAモデルは過去の研究においてすでに提案されたものであり、分析手法に新規性はない。しかし、土木計画学の領域でSFAモデルの適用した事例は極めて乏しく、本稿では読者の便宜を図るため簡単にSFAモデルの内容を紹介することとする。つぎに、上位システムの費用効率性を測定するために、本研究では複数サービスの生産を想定した費用フロンティアモデルを用いる。その際、各サブシステムが生産するサービスの潜在価格は各サブシステムの限界費用を用いて評価できることに着目する。サブシステムが費用効率的であれば、限界費用を用いてサービスの潜在価格を的確に把握することができる。このようにサブシステムの費用効率性を的確に反映した潜在価格を効率的価格と呼ぶ。しかし、サブシステムが費用効率的でない場合、サブシステムのサービス潜在価格は効率的価格と一致せず、上位システムが誤った価格情報に基づいて整備・運営される可能性がある。伝統的なSFAの文献では、市場価格を元件として費用効率性を分析しており、価格情報の効率性に関する議論が介在する余地はなかった。しかし、下水道システムのように階層的な構造をもつ生産システムでは、サブシステムの費用効率性が上位システムの費用効率性に及ぼす影響に関する議論が必要となる。このような問題意識より、4.では上位システムとサブシステムの関連性を考慮したような階層的システムの新しい費用効率性評価法を提案する。なお、本研究では下水道システムの階層的費用効率性の評価に焦点を絞るために、サブシステムの配分効率性に関する議論はとりあげない。

3. サブシステムの費用効率性評価

(1) 確率費用フロンティア

K 個の下水道事業体の費用構造に関するクロスセクションデータに基づいて各事業体の費用効率性を評価する問題を考えよう。事業体 k ($k = 1, \dots, K$) の下水道システムを n 個のサブシステムにより構成される複合的システムと考え、サブシステム i ($i = 1, \dots, n$) の費用効率性を評価する問題を考える。事業体 k のサブシ

システム*i*の費用フロンティアを

$$E_i^k \geq c(y_i^k, w_i^k; \beta_i) \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K)$$

と定式化する。ただし、 E_i^k は事業体*k*のサブシステム*i*の運用コスト、 y_i^k は事業体*k*のサブシステム*i*の生産物、 $w_i^k = (w_1^k, \dots, w_{m_i}^k)^T$ は事業体*k*のサブシステム*i*に対する生産要素の単位価格列ベクトルであり、 $w_{p_i}^k$ ($p_i = 1, \dots, m_i$) は第*p_i*番目の生産要素の単位価格を表す。ただし、記号 T は転置を、 m_i はサブシステム*i*に投入される生産要素の数を表す。また、 β_i はサブシステム*i*の費用パラメータベクトル、 $c(y_i^k, w_i^k, \beta_i)$ は費用関数であり、所与の価格ベクトル w_i^k と產出量 y_i^k の下で達成可能な生産費用の最小値を表わす。ここで、事業体*k*のサブシステム*i*の確定的費用効率性指標 DCE_i^k を

$$DCE_i^k = \frac{c(y_i^k, w_i^k; \beta_i)}{E_i^k} \quad (2)$$

と定義する。ただし、 $c(y_i^k, w_i^k, \beta_i)$ は確定的な費用関数であり、事業体*k*が制御できない外的要因による影響は含まれない。しかし、現実の下水道事業は施設固有の変動要因を含んでおり、費用フロンティアを单一の費用関数を用いて表現できない。そこで、事業体*k*のサブシステム*i*におけるランダムな外的要因による影響を表す確率項 $\exp(\nu_i^k)$ を用いて、確率費用フロンティアを

$$E_i^k \geq c(y_i^k, w_i^k; \beta_i) \exp(\nu_i^k) \quad (3)$$

と定式化しよう。この時、サブシステム*i*の確率的費用効率性 (Stochastic Cost Efficiency: 以下、SCEと略す) 指標 SCE_i^k は

$$SCE_i^k = \frac{c(y_i^k, w_i^k; \beta_i) \exp(\nu_i^k)}{E_i^k} \quad (4)$$

と表せる。ここで、 $SCE_i^k \leq 1$ が成立し、この値が1に近いほど当該サブシステムはより費用効率的である。

(2) 確率費用フロンティアモデルの推計方法

事業体*k*のサブシステム*i*の確率費用フロンティアモデルをCobb-Douglas型費用関数を用いて

$$\ln E_i^k = \ln c(y_i^k, w_i^k; \beta_i) + \nu_i^k + u_i^k$$

$$= \beta_{0i} + \beta_{y_i} \ln y_i^k + \sum_{p_i=1}^{m_i} \beta_{p_i} \ln w_{p_i}^k + \nu_i^k + u_i^k \quad (5)$$

と特定化しよう。ただし、 ν_i^k は事業体*k*のサブシステム*i*に固有な確率誤差項を、 $u_i^k \geq 0$ は事業体*k*のサブシステム*i*の費用効率性の程度を表すパラメータである（以下、効率性パラメータと呼ぶ）。効率性パラメータ u_i^k はSCE指標の定義(4)より非負の値のみをとる。Cobb-Douglas型費用関数は単純な関数構造を有しており実用性も高いが、生産要素間の価格代替性を分析できないという限界がある。サブシステムの配分効率

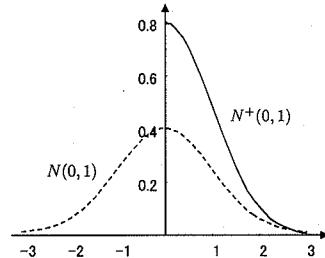


図-3 非負切断正規密度関数

性を分析するためには、Translog型費用関数等、生産要素の価格代替性を分析できる関数形を用いる必要がある。しかし、4.(1)で言及するようなGreene問題を解決するために、パネルデータ等を用いた方法論を開発することが必要となる。本研究ではクロスセクションデータに基づいた費用効率性の評価問題に限定しており、配分効率性の問題はとりあげない。したがって、サブシステムの費用フロンティアを、取り扱いが容易なCobb-Douglas型費用関数を用いて定式化する。

費用関数の1次同次性より、 $\beta_{m_i} = 1 - \sum_{p_i=1}^{m_i-1} \beta_{p_i}$ が成立する。このことを考慮すれば、式(5)を

$$\ln \left(\frac{E_i^k}{w_i^k} \right) = \beta_{0i} + \beta_{y_i} \ln y_i^k + \sum_{p_i=1}^{m_i-1} \beta_{p_i} \ln \left(\frac{w_{p_i}^k}{w_{m_i}^k} \right) + \nu_i^k + u_i^k \quad (6)$$

と書き換えることができる。式(5)を式(4)に代入すれば、事業体*k*のサブシステム*i*のSCE指標

$$SCE_i^k = \exp(-u_i^k) \quad (7)$$

を得る。確率誤差項 ν_i^k と効率性パラメータ u_i^k が

$$\nu_i^k \sim iid N(0, (\sigma_{\nu_i})^2) \quad (8a)$$

$$u_i^k \sim iid N^+(0, (\sigma_{u_i})^2) \quad (8b)$$

に従うと仮定しよう。ただし、 $N(0, (\sigma_{\nu_i})^2)$ は平均0、分散 $(\sigma_{\nu_i})^2$ の正規分布、 $N^+(0, (\sigma_{u_i})^2)$ は図-3に示すように平均0、分散 $(\sigma_{u_i})^2$ の正規分布に対して負の領域を切除して再定義された確率分布（非負切断正規分布）である。すなわち、 ν_i^k と $u_i^k \geq 0$ の確率密度関数は

$$f(\nu_i^k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\nu_i}} \exp \left\{ -\frac{(\nu_i^k)^2}{2(\sigma_{\nu_i})^2} \right\} \quad (9a)$$

$$f(u_i^k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_i}} \exp \left\{ -\frac{(u_i^k)^2}{2(\sigma_{u_i})^2} \right\} \quad (9b)$$

と表せる。 ν_i^k と u_i^k が互いに独立であることより、 ν_i^k と u_i^k の同時確率密度関数 $g(\nu_i^k, u_i^k)$ は

$$g(\nu_i^k, u_i^k) = \frac{2}{2\pi\sigma_{\nu_i}\sigma_{u_i}} \exp \left\{ -\frac{(\nu_i^k)^2}{2(\sigma_{\nu_i})^2} - \frac{(u_i^k)^2}{2(\sigma_{u_i})^2} \right\} \quad (10)$$

と表される。ここで、 $\varepsilon_i^k = \nu_i^k + u_i^k$ を定義すれば、 u_i^k と ε_i^k の同時確率密度関数 $g(u_i^k, \varepsilon_i^k)$ は

$$g(u_i^k, \varepsilon_i^k) = \frac{2}{2\pi\sigma_{u_i}\sigma_{\nu_i}} \exp \left\{ \frac{-(u_i^k)^2}{2(\sigma_{u_i})^2} - \frac{(\varepsilon_i^k - u_i^k)^2}{2(\sigma_{\nu_i})^2} \right\} \quad (11)$$

と表される。したがって、 ε_i^k の周辺確率密度関数は

$$\begin{aligned} \hat{f}(\varepsilon_i^k) &= \int_0^\infty g(u_i^k, \varepsilon_i^k) du_i^k \\ &= \int_0^\infty \frac{2}{2\pi\sigma_{u_i}\sigma_{\nu_i}} \exp \left\{ \frac{-(u_i^k)^2}{2(\sigma_{u_i})^2} - \frac{(\varepsilon_i^k - u_i^k)^2}{2(\sigma_{\nu_i})^2} \right\} du_i^k \\ &= \frac{2}{\sigma_i} \phi \left(\frac{\varepsilon_i^k}{\sigma_i} \right) \Phi \left(\frac{\varepsilon_i^k \lambda_i}{\sigma_i} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

と表される。ただし、

$$\sigma_i = \{(\sigma_{u_i})^2 + (\sigma_{\nu_i})^2\}^{1/2} \quad (13a)$$

$$\lambda_i = \sigma_{u_i}/\sigma_{\nu_i} \quad (13b)$$

であり、 $\phi(\cdot), \Phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規確率密度関数、標準正規分布関数を表す。 $\hat{f}(\varepsilon_i^k)$ は平均、分散

$$E(\varepsilon_i^k) = \sigma_{u_i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (14a)$$

$$Var(\varepsilon_i^k) = \frac{\pi - 2}{\pi} (\sigma_{u_i})^2 + (\sigma_{\nu_i})^2 \quad (14b)$$

を持つ非対称的確率密度関数である¹⁴⁾。周辺確率密度関数(12)を用いて、対象となる事業体サンプルにおける平均的費用効率性を求めることができる。Lee and Tyler²⁰⁾は、母集団における平均的な費用効率性が、

$$E[\exp(-u_i^k)] = 2[1 - \Phi(\sigma_{u_i})] \exp \left\{ \frac{(\sigma_{u_i})^2}{2} \right\} \quad (15)$$

で表されることを示している。確率費用フロンティアモデル(6)において $\varepsilon_i^k = \nu_i^k + u_i^k$ で表せることに着目しよう。対数尤度関数

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}_i &= const. - K \ln \sigma_i + \sum_{k=1}^K \ln \Phi \left(-\frac{\varepsilon_i^k \lambda_i}{\sigma_i} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2(\sigma_i)^2} \sum_{k=1}^K (\varepsilon_i^k)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

を最大化することにより、最尤推定量 $\tilde{\beta}_i$ 、 $\tilde{\lambda}_i$ 、 $\tilde{\sigma}_i$ を求めることができる。最尤推定量 $\tilde{\lambda}_i$ 、 $\tilde{\sigma}_i$ が求まれば、式(13a)、(13b)を用いて $\tilde{\sigma}_{u_i}, \tilde{\sigma}_{\nu_i}$ を得る。なお、 $\lim K \rightarrow \infty$ の時、最尤推定量は一貫性を持つことが保証される。

(3) 費用効率性の推定

確率費用フロンティアモデル(5)の推計結果より、各サブシステムに対して推計残差 $\hat{\varepsilon}_i^k = \nu_i^k + u_i^k$ ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, K$) が求まる。各サブシステムのSCE指標 SCE_i^k を推計するためには、推計残差 $\hat{\varepsilon}_i^k$ を確率誤差項 ν_i^k と効率性パラメータ u_i^k に分解することが必要となる。そこで、推計残差 $\hat{\varepsilon}_i^k$ を与件とした時の u_i^k の条件付き確率密度関数を定義する。Jondrow *et al.*²¹⁾に

よれば、条件付き確率密度関数 $h(u_i^k | \varepsilon_i^k)$ は

$$\begin{aligned} h(u_i^k | \varepsilon_i^k) &= \frac{g(u_i^k, \varepsilon_i^k)}{\hat{f}(\varepsilon_i^k)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\sigma}_i} \left[1 - \Phi \left(\frac{-\bar{\mu}_i^k}{\bar{\sigma}_i} \right) \right]} \exp \left\{ -\frac{(u_i^k - \bar{\mu}_i^k)^2}{2(\bar{\sigma}_i)^2} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

と表される。ここで、 $\bar{\mu}_i^k = \varepsilon_i^k (\sigma_{u_i})^2 / (\sigma_i)^2, (\bar{\sigma}_i)^2 = (\sigma_{u_i})^2 \sigma_{\nu_i} / (\sigma_i)^2$ である。条件付き確率密度関数 $h(u_i^k | \varepsilon_i^k)$ は $N^+(\bar{\mu}_i, (\bar{\sigma}_i)^2)$ に従う。下水道事業体 k のサブシステム i の確率費用フロンティアモデル(5)の推計残差 $\hat{\varepsilon}_i^k$ が得られたとしよう。この時、 $\hat{\varepsilon}_i^k$ を与件とした効率性パラメータ u_i^k の条件付き期待値は

$$\begin{aligned} E(u_i^k | \hat{\varepsilon}_i^k) &= \hat{\mu}_i + \bar{\sigma}_i \left[\frac{\phi(-\hat{\mu}_i^k / \bar{\sigma}_i)}{1 - \Phi(-\hat{\mu}_i^k / \bar{\sigma}_i)} \right] \\ &= \bar{\sigma}_i \left[\frac{\phi(\hat{\varepsilon}_i^k \lambda_i / \sigma_i)}{1 - \Phi(-\hat{\varepsilon}_i^k \lambda_i / \sigma_i)} + \left(\frac{\hat{\varepsilon}_i^k \lambda_i}{\sigma_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

と表せる。ただし、 $\hat{\mu}_i^k = \hat{\varepsilon}_i^k (\sigma_{u_i})^2 / (\sigma_i)^2$ である。したがって、SCE指標 SCE_i^k のJLMS点推定量²¹⁾は

$$SCE_i^k = \exp [E(-u_i^k | \hat{\varepsilon}_i^k)] \quad (19)$$

と表される。あるいは、SCE指標のBattese and Coelli点推定量 \overline{SCE}_i^k は

$$\begin{aligned} \overline{SCE}_i^k &= E[\exp(-u_i^k) | \hat{\varepsilon}_i^k] \\ &= \left[\frac{1 - \Phi(\bar{\sigma}_i - \hat{\mu}_i^k / \bar{\sigma}_i)}{1 - \Phi(-\hat{\mu}_i^k / \bar{\sigma}_i)} \right] \exp \left\{ -\hat{\mu}_i^k + \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_i)^2 \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

と表される²³⁾。 $\exp[E(-u_i^k | \hat{\varepsilon}_i^k)] \neq E[\exp(-u_i^k) | \hat{\varepsilon}_i^k]$ であるためSCE指標のJLMS点推定量とBattese and Coelli点推定量は一致しない。 $\hat{\varepsilon}_i^k$ を与件とした u_i^k の条件付確率密度関数(17)が非対称的確率密度関数で表される。このため、効率性指標の信頼域を通常の方法で求めることは不可能である。しかし、最近になりHorrace and Schmidt²²⁾は $\hat{\varepsilon}_i^k$ を与件とした時の $\exp(-u_i^k)$ に関する $(1 - \alpha)\%$ 信頼区間 $[L_i^k, U_i^k]$ が

$$L_i^k = \exp(-\hat{\mu}_i^k - \rho_L^k \bar{\sigma}_i) \quad (21a)$$

$$U_i^k = \exp(-\hat{\mu}_i^k - \rho_U^k \bar{\sigma}_i) \quad (21b)$$

で与えられることを示した。ただし、

$$Pr(Z > \rho_L^k) = \frac{\alpha}{2} \left[1 - \Phi \left(-\frac{\hat{\mu}_i^k}{\bar{\sigma}_i} \right) \right] \quad (22a)$$

$$Pr(Z > \rho_U^k) = \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \left[1 - \Phi \left(-\frac{\hat{\mu}_i^k}{\bar{\sigma}_i} \right) \right] \quad (22b)$$

であり、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である。したがって、

$$\rho_L^k = \Phi^{-1} \left\{ \left[1 - \frac{\alpha}{2} \right] \left[1 - \Phi \left(-\frac{\hat{\mu}_i^k}{\bar{\sigma}_i} \right) \right] \right\} \quad (23a)$$

$$\rho_U^k = \Phi^{-1} \left\{ \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \left[1 - \Phi \left(-\frac{\hat{\mu}_i^k}{\sigma_i} \right) \right] \right\} \quad (23b)$$

で表される。JLMS推定量とBattese and Coelli点推定量のいずれを用いるべきかは分析目的による。SCE指標を推定することのみを目的とする場合、信頼区間の推定が容易なBattese and Coelli点推定量が望ましい。しかし、4.で議論するように、効率性指標をいくつかの要因に分解するためには、JLMS推定量を用いることが望ましい。

4. 階層的システムの費用効率性評価

(1) 階層的確率費用フロンティア

事業体 k の下水道システムが生産するサービスを属性列ベクトル $z^k = (z_1^k, \dots, z_m^k)^T$ を用いて表現しよう。一方、下水道システムは下水道処理場、管渠などのサブシステムで構成される複合的システムであり、これらサブシステムが一体となって下水道サービスを生産していると考えることができる。いま、事業体 k のサブシステム i が生産するサービスの潜在価格 ξ_i^k を、サブシステム i のサービス生産量に関する限界費用を用いて評価しよう。議論の見通しをよくするために、ひとまず各サブシステムが効率的に運営されていると仮定しよう。言い換えれば、サブシステムの潜在価格がサブシステムの効率的な費用構造に関する十分な情報を有していると仮定する。確率費用フロンティアモデルが式(5)で表される時、事業体 k のサブシステム i が生産するサービスの潜在価格 ξ_i^k は

$$\xi_i^k = \frac{\partial E_i^k}{\partial y_i^k} = \frac{\beta_{y_i} E_i^k}{y_i^k} \quad (24)$$

$$(i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, K)$$

と表される。上位システムの費用フロンティアを複数生産物を考慮した費用関数 $c(z^k, \zeta^k; \gamma)$ を用いて表わそう。ただし、 $\zeta^k = (\zeta_1^k, \dots, \zeta_n^k, \zeta_{n+1}^k, \dots, \zeta_{n+q}^k)^T$ は単位価格列ベクトルである。このうち、最初の n 個の価格部分列ベクトル $(\zeta_1^k, \dots, \zeta_n^k)^T$ は事業体 k のサブシステム i ($i = 1, \dots, n$) が生産するサービスの潜在価格を表しており、 $\zeta_1^k = \xi_1^k, \dots, \zeta_n^k = \xi_n^k$ が成立する。一方、残りの部分列ベクトル $(\zeta_{n+1}^k, \dots, \zeta_{n+q}^k)^T$ は上位システムを運営するために投入される外部生産要素の単位価格ベクトルを表している。 γ は上位システムの費用パラメータベクトルである。ここで、下水道事業体 k の上位システムの費用関数をTranslog型費用関数^{24), 25)}を用いて

$$\ln c(z^k, \zeta^k; \gamma) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \ln z_i^k + \sum_{i=1}^{n+q} \gamma_i \ln \zeta_i^k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \ln z_i^k \ln z_j^k$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+q} \sum_{j=1}^{n+q} \gamma_{ij} \ln \zeta_i^k \ln \zeta_j^k$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+q} \delta_{ij} \ln z_i^k \ln \zeta_j^k \quad (25)$$

と特定化する。ただし、Youngの定理より $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ が成立する。費用関数の1次同次性より $\sum_{i=1}^{n+q} \gamma_i = 1$ と、任意の j に対して $\sum_{i=1}^{n+q} \gamma_{ij} = 0$, 任意の i に対して $\sum_{j=1}^{n+q} \delta_{ij} = 0$ が成立する。事業体 k の上位システムの生産要素 i ($i = 1, \dots, n+q$) の投入量列ベクトルを $y^k = (y_1^k, \dots, y_{n+q}^k)^T$ と表そう。最初の n 個の要素による部分ベクトル (y_1^k, \dots, y_n^k) の各要素は n 個のサブシステムが生産したサービスの投入量である。生産要素 i ($i = 1, \dots, n+q$) に対する支払い額が占めるシェア $S_i^k = \zeta_i^k y_i^k / E^k$ はシェバードのレンマより

$$S_i^k = S_i(z^k, \zeta^k; \gamma) = \frac{\partial \ln c(z^k, \zeta^k; \gamma)}{\partial \ln \zeta_i^k}$$

$$= \gamma_i + \sum_{j=1}^{n+q} \gamma_{ij} \ln \zeta_j^k + \sum_{j=1}^m \delta_{ji} \ln z_j^k \quad (26)$$

$$(i = 1, \dots, n+q)$$

と表される。シェア S_i^k の定義より、 $\sum_{i=1}^{n+q} S_i^k = 1$ が成立する。ここで、確率費用フロンティアモデルを

$$\ln E^k = \ln c(z^k, \zeta^k; \gamma) + \mu^k + v^k \quad (27)$$

と表そう。ただし、 μ^k は事業体 k に固有な確率誤差項、 v^k ($v^k \geq 0$) は事業体 k の上位システムの効率性を表すパラメータであり、 μ^k, v^k は互いに独立である。式(27)より事業体 k の上位システムのSCE指標は

$$SCE^k = \exp(-v^k) \quad (28)$$

と表せる。以上の議論は、サービス価格 ζ^k が効率的である場合に成立する。しかし、サブシステムが費用効率的でない場合には、上位システムの効率性を式(28)を用いて評価できず、サブシステムの非効率性を考慮した費用効率性指標を開発することが必要となる。この問題は次節でとりあげる。さらに、確率費用フロンティアモデル(27)の効率性パラメータ v^k の中に技術効率性と配分効率性の影響の双方が同時に含まれ、効率性パラメータ v^k が異質分散性の問題を持つ。この問題はSFAの文献においてGreene問題²⁶⁾として知られる難問である。最近、効率性パラメータの異質分散性を考慮した確率費用フロンティアモデルが提案された²⁷⁾⁻³¹⁾が、確率構造に極めて特殊な仮定を置いており、異質分散性の問題が解決されたわけではない。さらに、本研究で取り上げた階層的確率費用フロンティアモデルの場合、配分効率性パラメータの確率的取り扱いは極めて煩雑な内容となることが予想される。モデルの実用性の観点より、本研究では効率性パラメータの異質分散性の問題を取りあげない。

(2) 階層システムの費用効率性

上位システムのSCE指標(28)は、サブシステムのサービスの潜在価格が効率的価格と一致する場合にのみ成立する。しかし、サブシステムが費用効率的でない場合、サービスの潜在価格は資源配分に関する適切な情報を表現しえず、潜在価格に含まれる非効率性バイアスを考慮した階層システム全体のSCE指標が必要となる。階層システム全体の費用効率性を定義するためには、まずサブシステムが効率的に運営されている場合に評価されるサービスの潜在価格（効率的価格）を定式化しよう。事業体 k のサブシステム i が効率的に運営されており、確率費用フロンティア(5)において $u_i^k = 0$ が成立すると仮定しよう。この時、当該サブシステムの潜在価格 ξ_i^{k*} は

$$\xi_i^{k*} = \xi_i^k \exp(-u_i^k) \quad (29)$$

と表される。以下、潜在価格 ξ_i^{k*} をサブシステム i の効率的潜在価格と呼ぶ。また、効率的潜在価格 ζ_i^{k*} ($i = 1, \dots, n$) を用いて定義される上位システムの効率的価格列ベクトルを $\zeta^{k*} = (\zeta_1^{k*}, \dots, \zeta_{n+q}^{k*})^T$ と定義する。ただし、 $\zeta_1^{k*} = \xi_1^{k*}, \dots, \zeta_n^{k*} = \xi_n^{k*}, \zeta_{n+1}^{k*} = \zeta_{n+1}^k, \dots, \zeta_{n+q}^{k*} = \zeta_{n+q}^k$ が成立する。ここで、効率的価格ベクトル ζ^{k*} を用いて確率費用フロンティアモデル(27)を表現すれば

$$\ln E^k = \ln c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) + \theta^k + \mu^k + v^k \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \theta^k &= \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i^k + \sum_{i=1}^{n+q} \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \ln \zeta_i^k u_j^k \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \ln z_i^k u_j^k - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} u_i^k u_j^k \end{aligned} \quad (30b)$$

となる。効率的価格ベクトルの下で事業体が費用最小化行動を採用した場合、生産要素 i ($i = 1, \dots, n+q$) の投入量はシェパードのレンマより

$$y_i^{k*} = \frac{\partial c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\mu^k)}{\partial \zeta_i^{k*}} \quad (31)$$

と表される。費用関数 $c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma)$ が効率的価格ベクトルを用いて定義されていることに留意して欲しい。以下、効率的価格ベクトルの下における要素投入量 y_i^{k*} を効率的投入量と呼び、効率的投入量列ベクトルを $y^{k*} = (y_1^{k*}, \dots, y_{n+q}^{k*})^T$ と表す。この時、事業体の費用最小化行動により達成される総費用は $\zeta^{k*} y^{k*} = c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\mu^k)$ で表される。一方、実際に要する生産費用が $\zeta^{k*} y^k = c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\theta^k + \mu^k + v^k)$ で表現されるため、階層システム全体のSCE指標は

$$\begin{aligned} SCE^k &= \frac{\zeta^{k*} y^{k*}}{\zeta^{k*} y^k} \\ &= \frac{c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\mu^k)}{c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\theta^k + \mu^k + v^k)} \\ &= \exp(-\theta^k - v^k) \end{aligned} \quad (32)$$

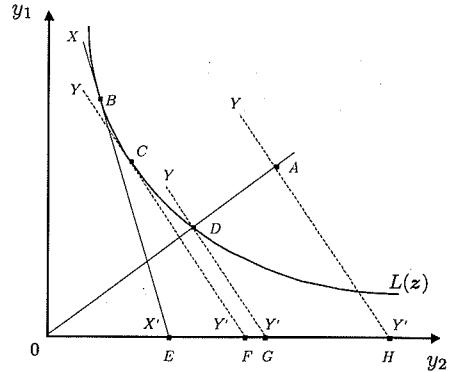


図-4 階層システムの費用効率性

と表される。ここで、図-4を用いて階層システムの費用効率性を説明しよう。簡単のため1種類のサブシステムのサービス投入量 y_1 と1種類の外部生産要素（ニューメレール財）の投入量 y_2 のみに着目する。点Aは実際に観察される投入量ベクトル y^k に対応している。価格ベクトル ζ^k に対応する等費用線を線分 $Y-Y'$ で表せば、ニューメレール財で評価した生産費用は線分 \overline{OH} で評価される。つぎに、効率的要素価格ベクトル ζ^{k*} の等費用線を線分 $X-X'$ で表せば、階層システム全体の費用最小化が達成される投入量ベクトル y^{k*} は点Bで表せる。この時、ニューメレール財で評価した生産費用は線分 \overline{OE} で評価される。この時、階層システム全体の費用効率性は $SCE^k = \overline{OE}/\overline{OH}$ で評価される。

階層システム全体の費用効率性を1) サブシステムの価格の非効率性がもたらす効果を現す価格効率性、2) 上位システムの技術効率性、3) 上位システムの配分効率性に分解しよう。いま、価格ベクトル ζ^k に対して費用最小化を図った場合の投入量ベクトルを y^{ko} （図-4の点Cに該当する）と表そう。この時、生産費用は $\zeta^{k*} y^{ko} = c(z^{k*}, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\theta^k + \mu^k)$ と表される。図中では線分 \overline{OF} に該当する。ここで、価格効率性を線分比率 $\overline{OE}/\overline{OF}$ で定義しよう。価格効率性は価格ベクトルの非効率性により生じる上位システムにおける配分効率性の損失を表している。価格効率性 SP^k は

$$\begin{aligned} SP^k &= \frac{\zeta^{k*} y^{k*}}{\zeta^{k*} y^{ko}} \\ &= \frac{c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\mu^k)}{c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\theta^k + \mu^k)} \\ &= \exp(-\theta^k) \end{aligned} \quad (33)$$

と定義される。つぎに、原点と点Aを結ぶ半直線が等量曲線 $L(z)$ と交差する点Dに着目しよう。点Dでは上

位システムの投入量ベクトルを比例的に減少させることにより効率的生産が可能となる。このように投入量比を維持しながら技術効率性が達成されるような投入量ベクトル（以下、技術効率的投入ベクトルと呼ぶ）を y^{koo} と表そう (y^{koo} の算出方法は付録に譲る)。価格ベクトル ζ^k に準拠する技術効率性を比率 $\overline{OG}/\overline{OH}$ で評価しよう。すなわち、技術効率性 ST^k は

$$ST^k = \frac{\zeta^{kT} y^{koo}}{\zeta^{kT} y^k} = \frac{\zeta^{kT} y^{koo}}{c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\theta^k + \mu^k + v^k)} \quad (34)$$

と表される。さらに、価格ベクトル ζ^k の下で発生している上位システムの配分の歪みを表す配分効率性を $\overline{OF}/\overline{OG}$ で評価しよう。配分効率性 SA^k は

$$SA^k = \frac{\zeta^{kT} y^{koo}}{\zeta^{kT} y^k} = \frac{c(z^k, \zeta^{k*}; \gamma) \exp(\theta^k + \mu^k)}{\zeta^{kT} y^{koo}} \quad (35)$$

と表される。効率性指標 SP^k , ST^k , SA^k の定義より、階層システム全体の費用効率性指標 SCE^k との間に

$$SCE^k = SP^k \cdot ST^k \cdot SA^k \quad (36)$$

が成立する。以上の 3 つの効率性指標の内、指標 ST^k , SA^k は上位システムのみに関わる効率性を表している。これら 2 つの効率性指標を合成した上位システム費用効率性 SU^k を次式のように定義する。

$$SU^k = ST^k \cdot SA^k \quad (37)$$

(3) 確率誤差構造の定式化

確率費用フロンティアモデル(30a)には 2 種類の効率性パラメータ θ^k , v^k が含まれている。一方、式(36)に示すように、SCE 指標 SCE^k は SP^k , ST^k , SA^k 指標に分解できる。ここで、3 つの指標は

$$\ln SP^k = -\theta^k \quad (38a)$$

$$\begin{aligned} \ln ST^k &= \ln \zeta^{kT} y^{koo} - \ln c(z^k, \zeta^k, \gamma) \\ &\quad - \mu^k - v^k \end{aligned} \quad (38b)$$

$$\begin{aligned} \ln SA^k &= \ln c(z^k, \zeta^k; \gamma) - \ln \zeta^{kT} y^{koo} \\ &\quad + \mu^k \end{aligned} \quad (38c)$$

と表される。なお、上式では価格ベクトル ζ^k を用いて 3 つの指標を定義していることに注意して欲しい。式(38a)より効率性パラメータ θ^k は技術効率性 $-\ln SP^k$ を表現していることが理解できる。式(30a)に含まれる効率性パラメータ v^k には技術効率性 $-\ln ST^k$ と配分効率性 $-\ln SA^k$ の双方の成分が含まれている。そこで、効率性パラメータ v^k を $v^k = v_T^k + v_A^k$ に分解しよう。ただ

し、 $v_T^k = -\ln ST^k$, $v_A^k = -\ln SA^k$ である。確率費用フロンティアモデル(27)を

$$\ln E^k = \ln c(z^k, \zeta^k; \gamma) + \mu^k + v_T^k + v_A^k \quad (39)$$

と書き直そう。ここで、技術効率的投入ベクトル y^{koo} (図-4 の点 D に該当する) が、効率的技術の下で費用最小化行動の結果として実現するような仮想的価格ベクトルを ζ^{koo} と表そう。仮想的価格ベクトル ζ^{koo} と実際の価格ベクトルの関係を、補正係数 η_i^k を用いて

$$\zeta_i^k \exp(\eta_i^k) = \zeta_i^{koo} \quad (40)$$

と表現しよう。仮想的価格ベクトル ζ^{koo} の下で費用最小化配分が達成された場合の生産要素 i の費用シェアを

$$S_i^{koo} = \frac{\zeta_i^{koo} y_i^{koo}}{\zeta^{kooT} y^{koo}} \quad (41)$$

と定義しよう。この時、式(40)より

$$S_i^{koo} \exp(-\eta_i^k) = \frac{\zeta_i^k y_i^{koo}}{\zeta^{kooT} y^{koo}} \quad (42)$$

が成立する。 $\zeta^{kooT} y^{koo} = c(z^k, \zeta^{koo}; \gamma) \exp(\mu^k)$ が成立することに留意すれば、式(38c)の右辺第 2 項は

$$\begin{aligned} \ln \zeta^{kT} y^{koo} &= \ln \left\{ \frac{\zeta^{kT} y^{koo}}{\zeta^{kooT} y^{koo}} \right\} + \ln \zeta^{kooT} y^{koo} \\ &= \ln \Xi^k + \ln c(z^k, \zeta^{koo}; \gamma) + \mu^k \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\Xi^k = \sum_{i=1}^{n+q} S_i^{koo} \exp(-\eta_i^k) \quad (43b)$$

と表される。式(38c)より次式を得る。

$$v_A^k = \ln c(z^k, \zeta^{koo}; \gamma) - \ln c(z^k, \zeta^k; \gamma) + \ln \Xi^k \quad (44)$$

費用関数 $c(z^k, \zeta^{koo}; \gamma)$ を Translog 型費用関数(25)に特徴化しよう。式(44)に式(25)を代入することより、

$$\begin{aligned} v_A^k &= \ln \Xi^k + \sum_{i=1}^{n+q} \gamma_i \eta_i^k + \sum_{i=1}^{n+q} \sum_{j=1}^{n+q} \gamma_{ij} \ln \zeta_j^k \eta_j^k \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+q} \delta_{ij} \ln z_i^k \eta_j^k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+q} \sum_{j=1}^{n+q} \gamma_{ij} \eta_i^k \eta_j^k \end{aligned} \quad (45)$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} \Xi^k &= \sum_{i=1}^{n+q} \left\{ \gamma_i + \sum_{j=1}^{n+q} \gamma_{ij} \ln \zeta_j^k \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \delta_{ji} \ln z_j^k \right\} \exp(-\eta_i^k) \end{aligned} \quad (46)$$

である。最後に、各生産要素の配分効率性を検討するために、価格ベクトル ζ^k と技術効率的投入ベクトル y^{koo} を用いて定義された生産要素 i の技術効率的シェア S_i^{kooo} を定義しよう。技術効率的シェアは

$$S_i^{kooo} = \frac{\zeta_i^k y_i^{koo}}{\zeta^{kT} y^{koo}} = \frac{\zeta_i^k y_i}{\zeta^{kT} y^k} \quad (47)$$

と表せる（付録参照）。ここで、生産要素*i*の配分効率性を示す要素配分効率パラメータ ψ_i^k を技術効率的シェア $S_i^{k\text{ooo}}$ と費用効率的シェア $S_i^k(z^k, \zeta^{k*}, \gamma)$ の差

$$\psi_i^k = S_i^{k\text{ooo}} - S_i^k(z^k, \zeta^{k*}, \gamma) \quad (48)$$

で定義する。要素配分効率パラメータ ψ_i^k は価格ベクトル ζ^k の下での生産要素（サブシステム）*i*の配分効率性を評価する指標であり、 $\psi_i^k > 0$ の場合は生産要素（サブシステム）*i*に過大に費用が費やされ、 $\psi_i^k < 0$ の場合は過小に投入されていることを意味する。

（4）確率費用フロンティアモデルの推定方法

確率費用フロンティアモデル（27）には2つの確率パラメータ μ^k と v^k が含まれる。いま、確率誤差項 μ^k と費用効率性パラメータ v^k ($v^k \geq 0$) が、

$$\mu^k \sim iid N(0, (\sigma_\mu)^2) \quad (49a)$$

$$v^k \sim iid N^+(0, (\sigma_v)^2) \quad (49b)$$

に従い、かつ互いに独立であると仮定する。この時、3.(3)で示したように確率変数 $\epsilon^k = \mu^k + v^k$ は非対称の確率密度関数

$$\hat{f}(\epsilon^k) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{\epsilon^k}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\epsilon^k \lambda}{\sigma}\right) \quad (50)$$

に従う。ただし、

$$\sigma = \{\sigma_v\}^2 + \{\sigma_\mu\}^2 \quad (51a)$$

$$\lambda = \sigma_v / \sigma_\mu \quad (51b)$$

である。したがって、対数尤度関数

$$\ln L_i = const. - K \ln \sigma + \sum_{k=1}^K \ln \Phi\left(-\frac{\epsilon^k \lambda}{\sigma}\right) - \frac{1}{2(\sigma)^2} \sum_{k=1}^K (\epsilon^k)^2 \quad (52)$$

を最大にすることにより確率費用フロンティアモデル（27）のパラメータ γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}$ を求めることができる。確率費用フロンティアモデル（27）の推計結果より、各事業体に対して推計残差 $\hat{\epsilon}^k = \mu^k + v^k$ ($k = 1, \dots, K$) が求まる。上位システム費用効率性 SU^k を推計するためには、推計残差 $\hat{\epsilon}^k$ を確率誤差項 μ^k と効率性パラメータ v^k に分解することが必要となる。さらに、効率性パラメータ v^k を2つのパラメータ v_T^k と v_A^k に分解するためには推計残差 $\hat{\epsilon}^k$ の下で v^k の条件付期待値 $E(v^k|\hat{\epsilon})$ （JLMS推定量）を求める必要がある。3.(3)と同様の議論により、上位システム費用効率性 SU^k のJLMS推定量は

$$SU^k = \exp[-E(v^k|\hat{\epsilon}^k)] \quad (53)$$

と表される。ただし、

$$E(v^k|\hat{\epsilon}^k) = \bar{\sigma} \left[\frac{\phi(\hat{\epsilon}^k \lambda / \sigma)}{1 - \Phi(-\hat{\epsilon}^k \lambda / \sigma)} + \left(\frac{\hat{\epsilon}^k \lambda}{\sigma} \right) \right] \quad (54)$$

と表せる。なお、 $(\bar{\sigma})^2 = (\sigma_v)^2 \sigma_\mu / \sigma^2$ である。以上で求めた上位システム費用効率性 SU^k は、式(37)に示す

ように技術効率性 ST^k 、配分効率性 SA^k に分解できる。

4.(3)で議論したように技術効率的投入ベクトル $y^{k\text{ooo}}$ を求ることにより、式(45)を用いて ST^k と SA^k を求めることが可能である。

5. 実証分析

（1）分析対象

わが国の下水道事業体の事業内容、維持運営費用に関わる平成12年度のクロスセクションデータ^{32),33)}を用いて実証分析を行った。下水道は下水道法により、公共下水道、流域下水道、都市下水路に区別される。公共下水道は「主として市街地における下水を排除し又は処理するために、地方公共団体が管理する下水道で、終末処理場を有するもの又は流域下水道に接続するものであり、かつ、汚水を排除すべき排水施設の相当部分が暗渠である構造のもの」を言う³⁴⁾。公共下水道のうち、終末処理場を有するものを単独公共下水道、流域を流域下水道に接続するものを流域関連公共下水道と呼ぶ。単独公共下水道と流域関連公共下水道では費用構造が異なるため、同一の費用フロンティアモデルを適用することができない。本研究では、可能な限り同質な費用構造を持つサンプルを対象として費用フロンティアを推定するために単独単独公共下水道のみを実証分析の対象としてとりあげる。分析対象とする単独公共下水道事業体の中には、1) 処理場、管渠、ポンプ場の3つのサブシステムで構成される事業体（タイプ1）が265、2) 下水道施設が処理場、管渠の2つのサブシステムで構成される事業体（タイプ2）が142ある。上位システムの確率費用フロンティアモデルの推計にあたっては、事業体をこれら2つのタイプに分類するとともに、それぞれのタイプごとにフロンティア（27）を推計することとした。ただし、以上の分析結果は膨大な量に及ぶため、本稿ではタイプ1の事業体に関する分析結果のみとりあげる。一方、サブシステム（処理場、管渠、ポンプ場）に関しては、事業体により利用可能なデータの種類が異なるためデータ数を確保することが必要となる。そこで、タイプ1とタイプ2の事業体に関するデータをプールし確率費用フロンティア（5）を推計した。モデルの推計にあたっては、最終的に表-1に示すような説明変数を採用することになった。これら説明変数に関するデータが利用可能な事業体を対象として確率費用フロンティアを推計したが、最終的に選ばれたサンプル数は、処理場に関して378、管渠に関して181、ポンプ場に関して98となっている。ポンプ場に関するデータを欠いている事業体数が多いため、ポンプ場に関するフロンティア推計のためのサンプル数がもっとも少ない結果となっている。な

表-1 推計結果（処理場）

処理場	パラメータ	t値
定数項	E_0^k	1.039
年間総処理量	β_y	16.938
人件費/年間総処理量	β_1	228.112
電力費/年間使用量	β_2	0.596
汚泥処分費/年間総処理量	β_3	45.777
検査・物品費/年間総処理量	β_4	5.695
修繕改築費/年間総処理量	β_5	14.655
その他費用/年間総処理量	β_6	0.100
	σ^2	10.357
	γ	11.703
	σ_u	0.057
	σ_v	0.115
効率性平均	$E(\exp(-u_0^k))$	9.206
尤度比		0.958
相関係数		0.148
F値		0.031
		181.643
		0.891
		63.543

表-2 推計結果（管渠）

管渠	パラメータ	t値
定数項	E_0^k	1.436
管渠総延長	β_y	11.191
人件費/管渠総延長	β_1	0.990
清掃費/管渠総延長	β_2	20.578
調査・修繕費/管渠総延長	β_3	9.412
その他/管渠総延長	β_4	19.037
	σ^2	0.168
	γ	0.152
	σ_u	10.813
	σ_v	0.999
効率性平均	$E(\exp(-u_0^k))$	786.374
尤度比		0.999
相関係数		0.390
F値		0.010
		0.770
		90.247
		0.815
		72.676

表-3 推計結果（ポンプ場）

ポンプ場	パラメータ	t値
定数項	E_0^k	0.131
年間揚水総量	β_y	0.520
人件費/年間揚水総量	β_1	0.983
電力費/年間使用量	β_2	63.578
修繕改築費/揚水能力	β_3	0.617
その他/年間揚水総量	β_4	18.799
	σ^2	0.099
	γ	4.349
	σ_u	0.050
	σ_v	3.565
効率性平均	$E(\exp(-u_0^k))$	0.234
尤度比		0.128
相関係数		4.802
F値		0.900
		14.125
		0.339
		0.113
		0.777
		10.056
		0.850
		42.346

お、処理場、管渠の全事業体における総運営費用が総運営費用に占めるシェアはそれぞれ0.61、0.09であり、処理場のコストが総運営費用の60%程度を占めている。ポンプ場運営費用が占める割合は1%未満である。

(2) サブシステムの費用効率性評価

各サブシステムの生産量を表す変数として、処理場は汚水と雨水を含めた年間総処理量、管渠は污水管、雨水管、合流管を合計した管渠総延長、ポンプ場は年間揚水総量をとりあげた。分析に用いたデータベースには、各サブシステムの生産要素として、1) 処理場施設は人件費、電力費、運転管理委託費、汚泥処理費、修

繕費、薬品費、燃料費、水質測定費、その他費用の9項目、2) 管渠施設は人件費、清掃費、調査費、修繕費、その他費用の5項目、3) ポンプ場施設は人件費、電力費、運転管理委託費、修繕費、その他費用の5項目をとりあげた。しかし、事業体により直営業務と委託業務の仕訳が異なったり、データそのものの欠損があるため、これらすべての費用項目に関してデータが整備されている事業体の数は極めて少ない。そこで、確率費用フロンティアの推計にあたって生産要素項目を最終的に表-1～表-3に示すようにグループ化した。すなわち、事業体により処理場、ポンプ場の運転管理を直轄、あるいは委託で実施している場合がある。これらの施設の運営管理を委託している場合には運転管理委託費が計上されている。しかし、運転管理委託費のほとんどが人件費で構成されているために、推計にあたっては人件費と運転管理委託費を人件費として一括計上することとした。また、処理場生産要素の薬品費、水質測定費、燃料費を検査・物品費として一括計上した。また、ポンプ場生産要素の燃料費はその他費用に組み込んでいる。管渠生産要素の調査費、修繕費は調査と修繕が一連の作業であることから調査・修繕費という同一項目として取り扱った。また、確率費用フロンティアの推計のためのデータベース^{32),33)}には、各生産要素に関する支出額に関するデータが利用可能であるものの要素価格(単価)に関する記載はない。また、各個別生産要素の投入量に関するデータも記載されていない。そこで、各生産要素の投入量と関係の深い代理変数をとりあげるとともに、代理変数1単位当たりの支出額を用いて生産要素価格を定義した。このようにして算定した生産要素価格は平均費用を意味しており、厳密には限界費用ではない。しかし、サブシステムの生産技術が近似的に規模に関して収穫一定であれば、平均費用を用いて確率費用フロンティアを推計しうるを考える。本研究では、実証分析の結果、各サブシステムの生産技術が近似的に規模に関して収益一定であり、最終的に平均費用を用いても差し支えない判断した。なお、生産技術が規模に関して収益一定でない場合、代理的な市場価格情報を用いたり、生産要素の投入構造に関する追加的データを獲得する努力が必要となる。

代替的な代理変数の中で、最終的にはフロンティアの推計精度がよくなる代理変数を選択した。その結果、処理場、ポンプ場の電力費は使用量(kw)当たりの単価、ポンプ場のその他の生産要素価格はポンプ場揚水能力(m³/h)当たりの単価が選ばれた。その他の生産要素に関しては、それぞれ該当するサブシステムの生産量である年間総処理量(m³/年)、管渠総延長(m)、年間揚水総量(m³/年)を用いて生産要素価格を算定してい

る。以上のデータを用いて Cobb-Douglas 型確率費用フロンティアモデル(5)を推計したが、処理場の推計結果を表-1に、管渠を表-2に、ポンプ場は表-3に示している。推計結果に示すように、各システムの β_y が近似的に1に近い値をとっており、単独公共下水道のサブシステムの生産技術はほぼ規模に関して収穫一定であるということができる。処理場施設の σ_u は他のサブシステムに比べて小さな値を示しており、費用効率性のばらつきが少ない。事業体全体における平均的な費用効率性 $E[\exp(-u^k)]$ は 0.885 であり、他のサブシステムと比較して相対的に効率的な運営が行われている。一方、管渠、ポンプ場の平均的な費用効率性はそれぞれ 0.770, 0.777 であり、処理場よりかなり低い水準になっている。中でも、ポンプ場に関しては σ_u, σ_v の値が大きく、平均的な費用効率性の値も小さくなっている。ポンプ場に関しては、地形条件のように事業体が制御できないランダムな外的要因による影響が他のサブシステムに比べて大きい。このため、分散 σ_u, σ_v の値が大きくなっていると推察できる。

(3) 上位システムの費用効率性評価

上位システムの確率費用フロンティアの推計にはサブシステムの潜在価格 ξ_i^k に関する情報が必要となる。ある事業体に関して、サブシステムの確率費用フロンティアを推計するデータが揃っていないくとも、潜在価格に関する情報が入手可能であれば潜在価格を算定することが可能である。タイプ1の事業体の内、各サブシステムの費用シェアが著しく異なる事業体を除いた合計 244 の事業体サンプルを対象として、上位システムの確率費用フロンティアを推計した。

上位システムの生産を複数財生産技術と考え、生産量を示す変数として、年間総処理量と処理人口を考えた。一方、生産要素としては処理場施設、管渠施設、ポンプ場施設、その他費用がある。しかし、ポンプ場運営費用が下水道システムの総運営費用に占める割合が他の生産要素の投入費用と比較して非常に小さく、ポンプ場を单一の生産要素として取り扱った場合、符号条件を満足するような確率費用フロンティアの推計が困難であることが判明した。そこで、上位システムの確率費用フロンティアの推計にあたって、ポンプ場費用と外部生産費用であるその他の費用と一括して取り扱うこととした。ポンプ場運営費用も含めた確率費用フロンティアを推計するためには、シェア方程式(26)も含めた方程式体系を同時推計する方法を開発する必要がある。この場合、4.(1)で言及した Greene 問題を克服する必要があり今後の課題としたい。式(24)を用いて年間総処理量 ($m^3/\text{年}$)、管渠総延長 (m) 当たりの処理場システム、管渠システムの潜在価格 ξ_i^k を算定

表-4 推計結果（上位システム）

定数項		パラメータ	t値
年間総処理量	z_1	α_0	1.7835
処理人口	z_2	α_1	0.4958
処理場費/年間総処理量	ζ_1	α_2	0.3494
管渠費/管渠総延長	ζ_2	γ_1	0.3959
その他費用/処理人口	ζ_3	γ_2	4.0218
	$(\ln z_1)^2$	γ_3	0.1909
		α_{11}	4.5186
	$\ln z_1 \ln z_2$	α_{12}	0.4132
	$(\ln z_2)^2$	α_{22}	7.6988
	$(\ln \zeta_1)^2$	γ_{11}	-0.1649
	$\ln \zeta_1 \ln \zeta_2$	γ_{12}	7.7586
	$(\ln \zeta_2)^2$	γ_{22}	-3.4919
	$\ln \zeta_1 \ln \zeta_3$	γ_{13}	18.3594
	$(\ln \zeta_3)^2$	γ_{23}	-0.0205
	$\ln z_1 \ln \zeta_1$	γ_{33}	-0.1774
	$\ln z_1 \ln \zeta_2$	δ_{11}	12.3298
	$\ln z_1 \ln \zeta_3$	δ_{12}	-0.0002
	$\ln z_2 \ln \zeta_1$	δ_{13}	-2.0251
	$\ln z_2 \ln \zeta_2$	δ_{21}	-0.1723
	$\ln z_2 \ln \zeta_3$	δ_{22}	-0.1803
	$\ln z_3 \ln \zeta_1$	δ_{23}	0.0067
	$\ln z_3 \ln \zeta_2$	δ_{31}	-11.7308
	$\ln z_3 \ln \zeta_3$	δ_{32}	0.1772
	σ^2	δ_{33}	0.1735
	γ	$E[\exp(-v_T)]$	7.5611
	σ_μ		32.0909
	σ_v		0.9493
効率性平均			0.0607
尤度比			0.0140
重相関係数	R		0.9565
F値	F		31.7392
			0.9525
			159.9249

した。その他費用（ポンプ費用も含む）の潜在価格は処理人口 1 単位当たりの支出額を用いて定義した。以上の考え方で推計した上位システムの確率費用フロンティアを表-4 に示す。費用関数の 1 次同次性的制約により、残りのパラメータ値が決定されると自動的に決定されるパラメータ値に関しては t 値は定義されない。このため同表において該当するパラメータに関しては t 値が記載されていない。サブシステムの確率費用フロンティアの推計結果と比較して分散 σ_μ, σ_v の値が相対的に小さくなっている。さらに、事業体全体における平均的な上位システムの技術効率性 $E[\exp(-v^k)]$ は 0.957 となっている。

(4) 効率性指標の分解

各事業体の費用効率性指標の推計とその分解にあたっては、各事業体ごとの効率的潜在価格 ξ_i^{k*} に関する情報が必要となる。各事業体の効率的潜在価格を求めるためには、サブシステムに関する生産要素価格データが必要となる。しかし、事業体のサンプルの中で生産費用価格に関するデータがすべて入手可能な事業体はわずかに 45 のみである。そこで、単位価格データが欠落しているような生産要素に関しては、類似規模の事業体の生産要素価格の平均値を求め、当該生産要素の価格として用いることとした。この時、効率的潜在価格は式

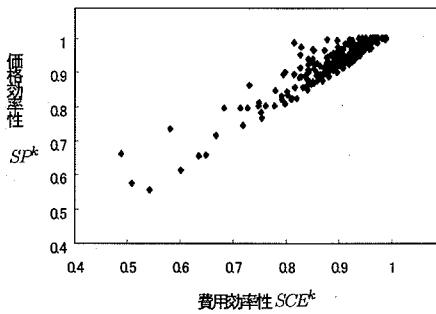


図-6 SCE^k と SP^k の関係

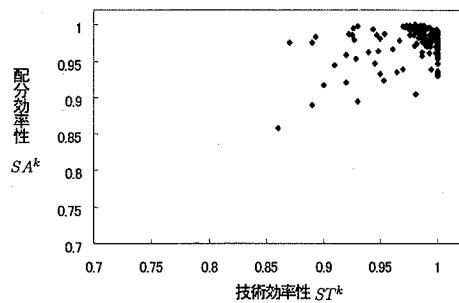


図-8 ST^k と SA^k の関係

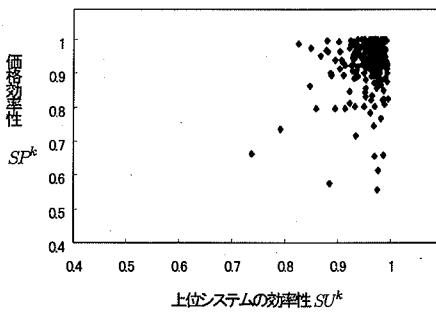


図-7 SP^k と SU^k の関係

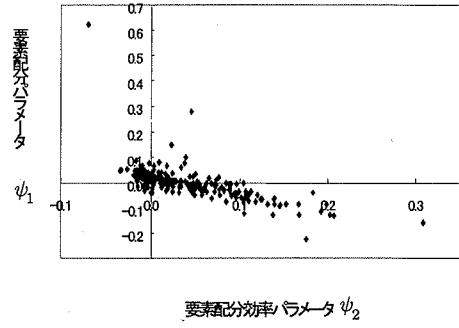


図-9 要素配分効率パラメータ ψ_1^k と ψ_2^k の関係

(29)により求めることができる。式(38a)-(38c)に示すように、SCE指標 SCE^k は SP^k , ST^k , SA^k 指標に分解できる。各事業体の費用データに基づいて、事業体ごとの効率性指標を推定した。その結果、事業体全体におけるSCE指標 SCE^k の平均値は0.887となることが判明した。さらに、下位システムの潜在価格の歪みに起因するシステムの効率性を表す価格効率性を事業体全体の平均値で評価すれば0.926となる。一方、技術効率性と配分効率性により定義される上位システム費用効率性 $SU^k = ST^k \cdot SA^k$ の平均値は0.957となる。すなわち、サブシステムに起因する平均的費用効率性の方が、上位システムの平均的費用効率性よりも小さくなっている。上位システムの非効率性は、サブシステムの能力や技術がシステム全体として整合がとれていないことに起因して生じる。上位システムの非効率性が存在する場合、システム全体としての効率性を再検討することが必要となる。しかし、サブシステムの平均的費用効率性は上位システムの平均的費用効率性よりも小さい値をとっており、処理場施設、管渠施設、ポンプ場施設というサブシステム自体が効率的に運営されていない可能性が大きい。特に、サブシステムの費用効率性が小さい値をとっている事業体では、早急にサブシステムの効率性を精査することが必要である。さらに、上位システムの非効率性の中で技術効率性 ST^k の平均値は

0.981、配分効率性 SA^k の平均値は0.974となる。事業所全体として評価すれば、配分効率性の方が技術効率性より悪い結果となっている。図-6は対象とする事業体における SCE^k と価格効率性 SP^k の関係を示している。効率性の定義より、 $SCE^k < SP^k$ が成立する。同図に示すように、下水道事業体によって効率性 SCE^k , SP^k の値が大きく散らばっている。もっとも費用効率性の悪い事業体では $SCE^k = 0.5$ 程度の値をとっている。仮に、 $SCE^k = 0.5$ と仮定すれば、SCE効率性の定義(33)より、実際の運営費用が効率的な運営費用の2倍に達していることになる。図-7はサブシステムの非効率性を表す価格効率性 SP^k と上位システム費用効率性 SU^k の関係を示している。上述したように、階層システム全体としてはサブシステムの平均的費用効率性の方が上位システムの平均的費用効率性よりも小さい。しかし、個々の事業体に着目すれば、サブシステムの費用効率性が小さい場合もあれば、上位システムの費用効率性の方が小さい場合も存在する。図-8は技術効率性 ST^k と配分効率性 SA^k の関係を示している。事業体により、これら効率性指標の値は多様に分布している。このことより、下水道事業体の費用効率性の低下は多様な要因で発生していることが理解できる。最後に、図-9は要素配分効率性を表すパラメータ ψ_1^k と ψ_2^k の関係を示している。 ψ_1^k と ψ_2^k の間には強い負の相関が読み

取れる。要素配分効率性は式(48)に示すように、技術効率的シェア S_i^{k000} と費用効率的シェア $S_i^k(z^k, \zeta^{k*}, \gamma)$ の差で定義される。上位システムでは処理場、管渠という2つのサブシステム、その他の生産要素のシェアの和が1になるため、 ψ_1^k と ψ_2^k の間に負の相関関係が成立する。同図に示すように、 $\psi_1^k < 0$, $\psi_2^k > 0$ が成立する事業体が多いことが読み取れる。このような事業体では管渠の機能低下が進んでおり、管渠の維持運営費に必要以上の費用が費やされている。

(5) 今後の課題と実用化への示唆

本研究では、下水道システムを処理場施設、管渠施設、ポンプ施設というサブシステムで構成される階層的システムとして定式化した。下水道システムはネットワーク特性を持つシステムである。本研究で定式化した確率費用フロンティアモデルはネットワーク構造を明示的に考慮した内容にはなっていない。一般に、ネットワーク型産業は費用逓減構造を持つとされるが、実証分析の結果、下水道事業にネットワーク規模の経済性に伴う費用低減構造は見出せず、むしろ規模に関して収益一定の技術を有することが判明した。しかし、下水道システムの費用効率性は、ネットワークがカバーする空間的範囲、標高差等、地理的特性の影響を受けやすいことは容易に予想される。本研究で提案した確率費用フロンティアモデルではネットワーク特性等、下水道事業体に固有な特性は確率誤差項で表現されると考えている。しかし、事業体に固有な特性と費用効率性の識別性をより高めるためには、今後事業体の特性を表す外生変数を導入した確率費用フロンティアモデルや、パネルデータを用いた固定効果モデル等を開発することが必要であると考える。

一般に、下水道システムが所与の下水道計画に基づいて整備された場合でも、下水道システムの整備にかなりの時間を要し、当初のシナリオ通りに都市開発やシステムの整備が進展しない場合も少なくない。さらに、下水道事業体は地域独占的にサービスを提供していることもあり、システムの非効率性が価格情報として経営努力にフィードバックしにくいという問題を有している。その結果、各事業体が有する下水道施設が必ずしも費用効率的なシステムにならない可能性が存在する。事実、本研究の実証分析の結果、下水道事業体の平均的SCE指標(SCE^k)は0.887という値を示している。言い換えれば、事業体全体として、平均的に費用効率的な状態より約1割以上の費用増加となっている。さらに、事業体個別のSCE指標に着目すれば、SCE指標が0.5程度（処理費用が費用効率的な場合の2倍程度）になっている事業体も存在する。このように下水道事業体により費用効率性が多様に異なっており、費用効

率性が低いと評価された事業体においては、少なくとも費用効率性が低くなっている原因に関して精査する必要がある。本研究で提案した各種の効率性指標は、費用効率性を精査する戦略を検討するための基礎的情報となりうるものと考える。

6. おわりに

本研究では階層的特性を考慮した下水道システムの費用効率性を評価するための方法論を提案した。その際、下水道システムを処理場、管渠等のサブシステムとそれを統括する上位システムで構成される階層的システムとしてモデル化し、サブシステムの費用効率性を評価するためのCobb-Douglas型確率費用フロンティアモデルと、上位システムの費用効率性を評価するためのTranslog型確率費用フロンティアモデルを定式化した。その上で、サブシステムと上位システムの費用効率性の評価指標を定式化し、システム全体の費用効率性を価格効率性、技術効率性、配分効率性に分解する方法論を提案した。さらに、わが国の下水道事業体を対象とした実証分析を通じて、提案した方法論の有効性を検証した。

本研究で提案した方法論は実用性の高いものであるが、今後にいくつかの課題が残されている。第1に、本研究では下位のサブシステムにおける配分効率性の問題をとりあげていない。サブシステムの機能更新戦略を議論するためには、配分効率性の推定、評価問題が重要となる。この問題に関しては、すでに既往研究で分析手法が提案されている¹⁶⁾。しかし、下水道システムの費用効率性に関する知見を増やすために、今後実証分析を蓄積することが必要となる。第2に、本研究では下水道事業体のクロスセクションデータを用いた費用効率性の評価問題をとりあげた。推計結果の効率性を高めるためにはパネルデータを用いた費用効率性評価の方法論を開発する必要がある。また、施設劣化の過程や機能更新の影響を検討するためには、生産性変化の動学的過程を分析することが必要となる。最後に、効率性パラメータの異質分散性の問題が強く発生する（いわゆる Greene 問題が発生する）場合、費用フロンティア推計において配分効率性パラメータ ψ_A^k と技術効率性 v_T^k を識別するような推計方法を開発することが必要となる。既往文献でも、クロスセクションデータで発生する Greene 問題は未解決であり、その抜本的の解決に対して否定的な見解すら見出せる¹⁶⁾。この問題に対処するためには、確率費用フロンティアモデルの確率構造を識別可能な形式に特定化するなど、実際的な対応をせざるを得ないだろう。したがって、今後は異なる確率構造、確率費用フロンティアモデルの特定

化を試み、実証的な知見を蓄積していく必要がある。

なお、本研究で提案した方法論は、下水道事業に限らず、システム全体がいくつかのサブシステムに分解できるような公益事業体の費用効率性の評価問題に適用可能である。しかし、費用効率性をクロスセクションデータに基づいて評価するためには、分析対象とする事業体数が十分に大きいこと、各サブシステムの生産物、および生産費用に関するデータが入手可能であることが前提となる。鉄道企業、ガス・電気等の多くのネットワーク型の公益事業では、少数の事業体が地域独占的にサービスを提供しており、クロスセクションデータのみに基づいて費用効率性を分析することには限界がある。この場合、各事業体の費用構造に関する時系列データやパネルデータを用いた評価方法を開発することが必要となることは言うまでもない。

付録 技術効率的投入量 y^{koo} の推定

図-4の点Dが費用効率的となるような仮想的な価格ベクトル ζ^{koo} を定義しよう。さらに、価格ベクトル ζ^{koo} に対して費用関数 $c(z^k, \zeta^{koo}; \gamma)$ を定義すれば、シェバードのレンマより

$$y_i^{koo} = \frac{\partial c(z^k, \zeta^{koo}; \gamma) \exp(\mu^k)}{\partial \zeta_i^{koo}} \quad (55)$$

$$(i = 1, \dots, n+q)$$

が成立する。さらに、 y_i^{koo} ($i = 1, \dots, n+q$) が技術効率的であることより、

$$\frac{y_i^{koo}}{y_1^{koo}} = \frac{y_i^k}{y_1^k} \quad (i = 2, \dots, n+q) \quad (56)$$

が成立する。以上の方程式系において相対的な価格比のみが問題となるため、一般性を損なうことなく $\zeta_1^{koo} = 1$ と仮定しよう。このとき、式(55)、(56)を同時に満足するような ζ^{koo}, y^{koo} を求ることにより、目的とする技術効率的投入量ベクトル y^{koo} と仮想的価格ベクトル ζ^{koo} を求めることができる。式(56)を S_i^{koo} の定義式に代入すれば式(47)を得る。なお、連立非線形方程式(55)、(56)には複数の解が存在する。したがって、意味のある技術効率的投入ベクトル y^{koo} を求めることが必要となる。本研究では価格ベクトル ζ^k の下で費用最小化行動を採用した場合の投入量ベクトル y^k を初期点として、逐次費用フロンティア上を移動しながら技術効率的投入ベクトル y^{koo} を以下の手順で求めることとした。1) y^k, y^{koo} を単位ベクトル化した初期ベクトル y_0^k, \hat{y}_0^{koo} を定義する。2) 新しい投入量単位ベクトル $\hat{y}_{t+1}^k = \eta(\hat{y}^{koo} - \hat{y}_t^k) + \hat{y}_t^k$ を定義する。 η は微少な正数である。3) 新しい単位投入量ベクトル \hat{y}_{t+1}^k を用いて、式(55)を満足する仮想価格ベクトル ζ_{t+1}^k を求める。4) 新しい価格ベクトル ζ_{t+1}^k を用いて投入量ベクトル $y_{t+1}^k = \delta c(z^k, \zeta_{t+1}^k; \gamma) \exp(\mu^k) / \partial \zeta_{t+1}^k$

を求める。5) y_{t+1}^k を単位ベクトル化し \hat{y}_{t+1}^k を求める。 \hat{y}^{koo} と \hat{y}_{t+1}^k が十分に一致していればアルゴリズムを終了する。そうでなければ、 $t = t + 1$ として2)へ戻る。

参考文献

- 1) 下水道協会：下水道収支分析モデル，1995。
- 2) 建設省：経営診断の手引き（案），1999。
- 3) 総務省：下水道事業経営指標、下水道使用料の概要，1999。
- 4) 下水道事業団：下水道収支分析モデルシミュレーションシステム，1999。
- 5) 下水道協会：下水道事業経営指標，2000。
- 6) Charnes, A., Cooper, W.W., and Rhodes, E.: Measuring the efficiency of decision-making units, *European Journal of Operational Research*, Vol.2, pp.429-444, 1978.
- 7) Koopmans, T.C.: An analysis of production as an efficient combination of activities, in: Koopmans, T. C. (ed.): *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, 1951.
- 8) Debreu, G.: The coefficient of resource utilization, *Econometrica*, Vol.19, pp.273-292, 1951.
- 9) Shepard, R. W.: *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, 1953.
- 10) Farell, M. J.: The measurement of productive efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, General*, 120, Part 3, pp.253-281, 1957.
- 11) Aigner, D.J. and Chu, S.F.: On estimating the industry production function, *American Economic Review*, Vol.58, pp.826-839, 1968.
- 12) Seitz, W.D.: Productive efficiency in the steam-electric generating industry, *Journal of Political Economy*, Vol.79, pp.878-886, 1971.
- 13) Meeusen, W. and van den Broeck, J.: Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error, *International Economic Review*, Vol.18, pp.435-444, 1977.
- 14) Aigner, D.J., Lovell, C.A.K. and Schmidt, P.: Formulation and estimation of stochastic frontier production function models, *Journal of Econometrics*, Vol.6, pp.21-37, 1977.
- 15) Bauer, W.: Recent developments in econometric estimation of frontiers, *Journal of Econometrics*, Vol.46, pp.39-56, 1990.
- 16) Kumbhakar, S. C. and Lovell, C.A.K.: *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- 17) Schmidt, P. and Lovell, C.A.K.: Estimating technical and allocative inefficiency relative to stochastic production and cost frontiers, *Journal of Econometrics*, Vol.9, pp.343-366, 1979.
- 18) Greene, W.H.: Frontier Production Functions, in: Pesaran, M. H. and Schmidt, P. (eds.): *Handbook of Applied Econometrics*, Vol.2, Microeconomics, Blackwell, 1997.
- 19) Cornwell, C. and Schmidt, P.: Production Frontiers and Efficiency Measurement, in: Mátyás, L. and Sevestre, P. (eds.): *The Econometrics of Panel Data, Handbook of the Theory with Applications*, Kluwer Academic, 1996.
- 20) Lee, L.-F. and Tyler, W.G.: The stochastic frontier production function and average efficiency, *Journal of Econometrics*, Vol.22, pp.245-267, 1978.
- 21) Jondrow, J., Lovell, C.A.K., Materov, I. S., and Schmidt, P.: On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production model,

- Journal of Econometrics*, Vol.19, pp.233-238, 1982.
- 22) Horrace, W.C. and Schmidt, P.: Confidence statements for efficiency estimates from stochastic frontier models, *Journal of Productivity Analysis* Vol.7, pp.257-282, 1996.
 - 23) Battese, G.E. and Coelli, T.J.: Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalized frontier production function and panel data, *Journal of Productivity Analysis*, Vol.3, pp.387-399, 1988.
 - 24) Christensen, L.R., Jorgenson, D.W., and Lau, L.J.: Conjugate duality and the transcendental logarithmic production function, *Econometrica*, Vol.39, pp.255-256, 1971.
 - 25) Christensen, L.R., Jorgenson, D.W., and Lau, L.J.: Transcendental logarithmic production frontiers, *Review of Economics and Statistics*, Vol.55, pp.28-45, 1973.
 - 26) Greene, W.H.: On the estimation of a flexible frontier product model, *Journal of Econometrics*, Vol.13, pp.101-115, 1980.
 - 27) Kumbhakar, S.C.: The measurement and decomposition of costefficiency; The translog cost system, *Oxford Economics Papers*, Vol.43, pp.667-683, 1991.
 - 28) Kopp, R.J. and Diewert, W.E.: The decompostion of frontier cost function deviations into measures of technical and allocative efficiency, *Journal of Econometrics*, Vol.19, pp.319-331, 1982.
 - 29) Ferrier, G.D. and Lovell, C.A.K.: Measuring cost efficiency in banking: Economic and linear programming evidence, *Journal of Econometrics*, Vol.46, pp.229-245, 1990.
 - 30) Mensah, Y.M.: A simplification of the Kopp-Diewert method of decomposing cost efficiency and some implication, *Journal of Econometrics*, Vol.60, pp.133-144, 1994.
 - 31) Kumbhakar, S.C.: Modeling allocative inefficiency in a translog cost function and cost share equations, An exact relationship, *Journal of Econometrics*, Vol.76, pp.351-356, 1997.
 - 32) 下水道協会：下水道統計，財政編，平成12年。
 - 33) 下水道協会：下水道統計，行政編，平成12年。
 - 34) 建設省都市局下水道部監修：日本の下水道，平成12年。

(2003.4.7 受付)

COST EFFICIENCY EVALUATION OF WASTE WATER DISPOSAL SYSTEMS

Kiyoshi KOBAYASHI, Youichi KITANO, Haruhiko WATANABE and Michiro ISHIKAWA

In this paper, a methodology to evaluate cost efficiencies of waste water disposal systems is presented. The waste water disposal systems are modeled as two-level hierarchical systems. The stochastic frontier models hybridizing cost frontiers both of lower subsystems and upper systems are formulated to evaluate cost efficiencies of hierarchical systems as a whole. The case studies are carried out based upon Japanese data set to elucidate the cost efficiencies of the waste water disposal systems operated by local jurisdictions.