土木学会論文集 No. 751／IV-62, 39-54, 2004. 1

経済リスクを考慮した社会基盤投資プロジェクトの動学的財務評価

赤松 隆[1]・長江 剛志[2]

[1]正会員 工博 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)
[2]正会員 博士 (情報科学) 京都大学防災研究所 総合防災研究部門 (〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄)

多くの社会資本整備事業は，経済的活動と相関をもって不確実に変動するキャッシュ・フローを発生させる．本研究では，このような事業を“市場で取引されていない資産”と見なし，その合理的な取引価格を動学的な枠組みの下で評価する手法を提案する．本手法は，以下の2つの特徴をもつ：1) 市場で観測される証券・資産価格に整合的なリスク評価値を活用する; 2) 事業の売買を行う取引主体を導入し，そのリスク選好情報を明示的に考慮する．本研究では，まず，無裁定原理に基いて，Arrow-Debreu 状態価格に相当する Stochastic Discount Factor を，証券・資産価格から推定する動学モデルを定式化する．次に，この問題が，効用最大化原理に基づいたリスク・ヘッジ問題に帰着することを明らかにする．最後に，モデルの特性を活用した解法を開発する．

Key Words : *pricing of projects, incomplete markets, asset pricing theory, option pricing theory*

1. はじめに

(1) 背景と目的

本研究は，“経済リスク”を明示的に考慮した上で，社会基盤施設整備・運用事業の価値を定量的に“価格評価”するための方法を提案する．ここで，“経済リスク”とは，社会基盤施設をとりまく経済環境 (“景気”，資産や財の価格，金利，為替，等々) の予測不可能な変化を原因として事業価値が変動するリスクである[1]．また，“価格評価”とは，事業から生じるキャッシュ・フローのみに基づいた経済価値評価 (“財務的評価”)，あるいは，事業契約の売買を想定した場合の合理的な取引価格の算定である．

事業の経済リスクを考慮した“価格評価”は，社会基盤施設を効率的に整備・運用する仕組みを作ってゆくためには，本来，欠かすことのできないステップである．例えば，PFI 方式による社会基盤施設整備・運用事業のスキーム決定問題を考えてみよう．この場合，事業を複数のモジュールに分割した上で，関係主体間で各モジュールの分担関係を決定する．そして，その関係主体間でのモジュール分担によって，当該事業から生じる各種リスクをいかに上手く分担・管理できるかが，PFI 方式成功の鍵である．従って，最適な分担スキームを決定するためには，個々のモジュールの経済的リスクを考慮した財務的価値を正確に評価 (“価格評価”) できることが大前提となる．

このような必要性にも関わらず，社会基盤整備事業における経済リスクを考慮した“価格評価”の方法論は，未だ確立しているとは言い難い．実際，社会基盤整備事業における財務的評価と言えば，古典的な会計学の枠組での分析にとどまり，リスクの考慮と言えば，期待現在正味価値 (ENPV: *Expected Net Present Value*) 法，修正割引率法といった素朴な手法が用いられているのが現状である．これらは，アド・ホックな便法に過ぎず，事業が抱える動学的な経済リスクをシステマティックに評価しうる論理構造を備えていない．さらに，従来手法は，市場で観測される資産・証券価格に含まれている“リスクの市場価格”に関する情報を十分に活用していない．そのため，主観的・恣意的な評価に陥りやすいのみならず，例えば，事業契約に含まれるオプション価値の計量，あるいは金利の期間構造を踏まえた金利変動リスクの計量といった動学的な問題を，市場情報と矛盾無く扱うことは難しい．

上記のような従来手法の問題点を解消しうる有用な枠組として，ファイナンス分野で発達した金融オプション (派生証券) 理論，あるいは，これを実物投資問題 (事業) に転用したリアル・オプション理論が挙げられる．しかし，この理論を社会基盤整備事業の“価格評価”に，そのまま適用することにも問題が多い．なぜなら，金融オプション理論の適用による“価格評価”が意味を持つのは，完備市場，すなわち，評価対象となる資産 (証

[1] ここでの“経済リスク”とは，事業価値 (あるいは事業収益) が確率的に変動するリスクを，その変動の原因・要因に着目して分類した用語である (“災害リスク”や“政治リスク”といった用語と同様)．本稿で想定する“事業収益変動の原因となる変数”は，経済状態に関する変数全般を指す．従って，本稿における“経済リスク”は，金利，為替等の確率的変動による“金融リスク”を部分集合として含む．

券，事業) のペイ・オフを市場取引可能な資産・証券の動的な売買によって完全に replicate (i.e. キャッシュ・フローの確率的変動を完全にヘッジ) できる場合に限られるからである．言うまでもなく，多くの社会基盤整備事業におけるキャッシュ・フローの確率的変動は，経済状態変数と何らかの相関を持つものの，市場で取引されない経済リスク要因にも依存する．例えば，有料高速道路事業における料金収入の確率的変動は TOPIX とある程度の相関を持つが，それだけで完全に説明できるわけではない．従って，完備市場を仮定した金融オプション理論をそのまま適用することは，市場取引されないリスク要因 (の価値) を完全に無視するという非常に大胆な (“危ない”) 仮定をおいていることに等しい．

そこで，本研究では，社会基盤施設等の実物投資事業の価格評価を，“不完備市場” におけるオプション評価問題ととらえた新しいアプローチを提案する．すなわち，事業は，①確率的な “状態変数” の関数として定義されたペイ・オフを持つオプション (条件付請求権) であり，②その状態変数は，市場で取引可能な資産・証券の売買によってヘッジ可能なリスク要因とヘッジ不可能なリスク要因から構成されると考える．そして，オプション評価問題を，市場で観測される資産・証券価格情報と無裁定条件から上記リスク要因の価格 (ひいては，オプション価格) を推定する “逆問題” ととらえる．その上で，この逆問題に，不完備市場リスクの価格を推定する最小限の仮定を追加したモデルを定式化し，そのメカニズムおよび特性を明らかにする．

本稿の構成は以下の通りである．まず，続く (2) 節において，本研究の基本的考え方と不完備市場下でのオプション評価問題に関する従来研究をより詳しく説明する．第 2，3 章では，簡単な静学的設定下で，無裁定条件のみに基づく従来のオプション価格評価法と本研究の基本的考え方を対比する．続く第 4，5 章では，その概念的なモデルを現実的な動学モデルへと展開する．より具体的には，第 4 章では，連続時間-連続状態の枠組で任意数のリスク要因を扱える一般モデルを定式化し，その数理的特性を明らかにする．そして，第 5 章では，状態変数を簡略化した場合について，モデルの性質及びメカニズムを具体的に示す．最後に，第 6 章で，このモデルにより求められる価格の特性 (感度解析) を数値計算により明らかにする．

(2) 従来研究と本研究の位置付け

経済リスクを考慮した事業の “価格評価” が有用であるためには，いくつかの最低限の要件を備えた評価の枠組が必要である．本研究では，以下の条件を満たした枠組を提案したい：①動学的な経済リスクを明示的に考慮できること；②現実的な事業評価問題に対しても価格評価に必要な計算が実際に実行可能であること (そのためには，その手法の数理的特性が明快であることが必要である)；③市場でのリスク価格に関する情報を活用するために，無裁定価格理論と整合的であること；④不完備市場リスクを考慮するために，評価者のリスクに関する選好条件 (あるいは，それと等価な条件) をシステマテックに導入できること (e.g. 効用最大化アプローチと整合的であること)；⑤事業の売手・買手の契約条件から生じるリスクの非対称性を考慮しうること．

条件①，②は，(オプション契約等を含む) 様々な事業の経済リスク計量化に適用可能な枠組み構築には当然求められる要件である．また，これは，③〜⑤の条件を満たすための大前提でもある．条件③，④は，例えば，不完備市場リスク要因に対するリスク回避選好を導入しつつ，金利変動リスクを正確に計量するために，無裁定価格理論に基づいた金利の期間構造モデル (例えば，Cox-Ingersoll-Ross[5]), Heath-Jarrow-Morton[13])) を組み込むといった拡張が容易であることを意味する．条件⑤は，例えば，アメリカン・オプション的な性格を持つ (売手・買手の負うリスクが非対称な) 契約の価格評価問題への拡張が容易に可能な枠組みであることを意味する．

本研究では，この①〜⑤の条件を満たした方法を開発するために，1) 評価に関連する確率的な状態変数を連続時間-連続状態の枠組みで表現し，2) 無裁定条件を基礎とする “逆問題” の観点から確率的割引ファクタ (SDF: *Stochastic Discount Factor*) を推計するというアプローチを採用する．ここで，SDF とは Arrow-Debreu の “状態価格” の概念を連続時間-連続状態の枠組みに拡張した確率過程であり，オプション価格は，推定された SDF を乗じた期待現在価値として決定できる．このようなアプローチ (あるいは，上記条件を満たした手法) を実物投資事業の財務的評価に対して提案した研究は，著者らの知る限り存在せず[2]，本研究のオリジナリティの一つである．

このような本研究のアプローチは，事業の財務的価値あるいは市場価格の評価を，“資産価格評価問題”(もしくはオプション評価問題) の一種ととらえていることに相当する．そこで，一般的な資産価格理論に関する先行研究との関係から本研究の位置付けを見ておく．Cochrane[2]) に従えば，資産価格評価に関する研究は大きく分けて，2 つのアプローチ— 絶対価格評価と相対価格評価—に分けられる．

絶対価格評価アプローチ (あるいは均衡アプローチ) は，Arrow-Debreu の市場均衡概念に基づいて資産・証券

[2] 後述のように，SDF 推計に関連する研究は，比較的最近になって，ファイナンスあるいはマクロ経済学分野における証券・資産価格理論検証の文脈で発展してきた．従って，それら従来研究の対象は，市場取引されている証券・資産のみである．

価格を決定する方法である．このような研究の第１のカテゴリとして，完備市場における完全競争を前提として(あるいは，それとほぼ同義である代表的消費者による記述を用いて）構築された静学的均衡モデルを，連続時間-連続状態の枠組みに拡張したもの（例えば，*Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (ICAPM)[23], *Consumption* CAPM (CCAPM)[1], Intertemporal General Equilibrium Model[18),4)]）がある．しかし，これらのモデルは，"Equity Premium Puzzle[22]" や "Risk Free Rate Puzzle[29]" に代表されるように，実証的妥当性に関して多くの否定的な結果が指摘されている[3]．第２のカテゴリとして，静学的な枠組みの下で，一般均衡モデルを不完備市場へと拡張した研究（例えば，Magill and Quinzii[21]参照）がある．しかし，これらの研究は，いずれも抽象化された静学モデルを用いた分析にとどまっており，現実的な連続時間-連続状態の枠組に拡張しうる研究発展段階には無い．従って，これらの均衡アプローチは，現在の state of the art を前提とする限り，動学的な経済リスクの計量化を目的とする本研究のような課題に対しては，不適切である．

一方，相対価格評価アプローチは，市場で観測される資産・証券価格情報を与件として，それらに対する評価対象資産（オプション）の相対価値を決定する方法である．従来，このアプローチを採用した膨大な研究（例えば，Musiela and Rutkowski[24]参照）が行われている．これらの研究は，a) 金融オプション理論の基礎となる無裁定原理のみに基づくアプローチ（例えば，Naik[26], El Karoui and Quenez[8]）と b) 効用最大化原理に基づくアプローチ（例えば，Hodges and Neuberger[14], Karatzas and Shreve[17]）；の２つに分類できる．しかし，a) は，不完備市場におけるオプション価格が不定となり得ることが知られており，現実の事業評価に適用するのは無理がある．一方，b) についても，以下の３つの重要な問題点が指摘されている．第１に，オプション価格の定義そのものがいくつか考えられるため，その特定化において恣意性を排除できない[6]．第２に，効用関数の特定化が恣意的に行える[20]．第３に，不完備市場下で無裁定条件を明示的に考慮すると，問題が煩雑になり，解くことが困難となる．従って，いずれのアプローチも，本研究が対象とする事業価格評価にそのまま適用するには，残された問題が多い．

上記 a), b) の中間的な方法とも言える SDF アプローチは，Hansen-Jagannasan[9),10)]によって，資産価格モデルの実証的検証の枠組として導入された．不完備市場を前提として，この SDF アプローチを採用した研究には，Cochrane and Saa-Requejo[3]，Stutzer[27]がある．前者は，無裁定条件に加えて，SDF の分散に上限を設けたオプション評価問題を提案している．しかし，この研究では，効用最大化アプローチとの対応関係が明示されていないという問題がある．後者は，SDF の *Kullback-Leibler* (KL) 情報量に着目し，無裁定条件下で KL 情報量を最大化する SDF の推定法を提案している．しかし，この研究は静的枠組にとどまっている上に，オプションの取引主体 (i.e. 買手/売手) の行動を明示的に扱えないという難点がある．

本研究で提案する手法は，不完備市場でのオプション評価法として見たこれら２つの研究の難点を解消するものである．まず，第１に，本研究は，連続時間-連続状態の枠組で，無裁定条件と KL 情報量に関する制約を考慮した SDF 推定問題を定式化する．そして，その問題が，効用最大化アプローチに基づく動的リスク・ヘッジ問題と対応づけできることを明らかにしている．第２に，本研究は，事業の売手・買手の行動を明示的に扱ったモデルを示し，売手価格と買手価格の関係を明らかにしている．また，その定式化は，アメリカン・オプション等の非対称な契約条件の評価問題へ容易に拡張可能である．第３に，価格評価のための具体的かつ効率的な数値計算アルゴリズムを提案し，さらに，それを用いて，不完備市場でのオプション価格の特性も明らかにしている．これらの点は，事業評価に限らず一般的な資産価格評価に関する従来研究を含めた観点からも，本研究のオリジナルな貢献である．

2. 静学モデル—従来手法[26),8)]

本章では，静学的な枠組みの下で，無裁定原理のみに基づいた従来のオプション評価手法を解説する．まず，期首 ($t=0$) と期末 ($t=T$) の２期を考え，期末で取り得る状態集合を K(要素数 K) とする．各状態が生起する客観確率を $\mathcal{P} \equiv [\mathcal{P}(1) \cdots \mathcal{P}(\mathrm{K})]$ で表す．

次に，N 種類の資産が取引される市場を考える．ここで，一般性を損なうことなく，１番目の資産を安全資産とし，残りを危険資産とする．安全資産の期首および期末価格を，それぞれ，$1, R(>1)$ とする（R は所与の定数)．危険資産の期首価格を $\boldsymbol{s} \equiv [s_1 \cdots s_{\mathrm{N}}]'$ とし，その期末価格を安全資産の価格 R で正規化した "割引価格" を $\boldsymbol{S}(k) \equiv [S_1(k) \cdots S_{\mathrm{N}}(k)]'$，$\boldsymbol{S} \equiv [\boldsymbol{S}(1) \cdots \boldsymbol{S}(\mathrm{K})]$ で表す．

対象とする事業から，期末に得られるペイ・オフを，確率変数 $F \equiv [F(1) \cdots F(\mathrm{K})]$ で表す．このとき，対象事業はオプション（あるいは市場で取引されていない資

[3] これら完備均衡市場（代表的消費者）を仮定する標準的モデルでは，市場で観測される危険資産収益率の平均・分散，消費成長率の平均・分散および安全利子率の関係を矛盾無く説明できない．例えば，これらのモデルでは，様々な実証結果と比べて桁違いに大きなリスク回避度を想定しなければ，市場で現実に観測される高い市場リスク・プレミアムや低い安全利子率を説明できない．

産) の一つと見なせることに注意しよう．

(1) 主問題—等価マルチンゲール測度推定問題

市場に裁定機会は存在しない，すなわち，“元手 0 で正の期待利潤が得られるような投資戦略は存在しない”とする．この条件は無裁定条件と呼ばれ，以下の式を満たす $\mathcal{Q} \equiv [\mathcal{Q}(1) \cdots \mathcal{Q}(\mathrm{K})] > \mathbf{0}$ が存在することと等価であることが知られている[11]．

$$\mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}] \equiv \sum_{k \in K} \mathcal{Q}(k)\boldsymbol{S}(k) = \boldsymbol{s} \tag{1}$$

ここで，$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ に対する等価マルチンゲール測度 (EMM: *Equivalent Martingale Measure*) と呼ばれ，$\mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[\cdot]$ は確率測度 $\mathcal{Q}$ の下での期待値演算を表す．無裁定条件下では，任意の資産の期首価格は，EMM の下での期末価格の期待値に等しい．これより，無裁定条件を満足するような対象事業の価格 (以下，事業価格) は，$\mathcal{Q}$ の下でのペイ・オフ F の期待値 $C = \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[F]$ として求められる．従って，事業価格を求める問題は，式 (1) から $\mathcal{Q}$ を推定する逆問題に帰着する．

本研究が対象とする不完備市場とは，Arrow-Debreu の不確実性下での一般均衡理論の枠組において，期末に起こり得る全ての状態に対する条件付請求権 (contingent claim) の内，一部が市場で取引されていない状況を指す．これは，本研究の枠組においては，当該事業から発生するキャッシュ・フローを，市場資産の取引で replicate できないことを意味している．すなわち，市場が不完備であるとは，数学的には，独立な市場資産の数 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{S})$ が，期末に起こり得る状態の数 K よりも少ない場合として表現される．

この不完備市場においては，市場で取引される市場資産価格情報と無裁定条件を与えるのみでは，EMM $\mathcal{Q}$ ひいては事業価格が一意に決まらない．しかし，事業を取引する主体の合理的行動を導入する事で，事業価格の最小/最大値 (i.e. bid/ask 価格) を決めることはできる．この合理的行動とは，事業契約の売手 (買手) が，無裁定原理を満足する中で最も高い (安い) 価格で取引を行うことを指す．以下では，無裁定条件下での価格の最小値を “買手価格”，最大値を “売手価格” と呼び，それぞれ，$\underline{C}$, $\overline{C}$ と記述する．無裁定条件のみの下で，これらの価格を求める問題は，以下の EMM 推定問題として定式化される．

$$[\mathrm{P_B}\text{-}0] \qquad \underline{C} \equiv \min_{\mathcal{Q}}.\, \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[F], \qquad \text{s.t.(1)}$$

$$[\mathrm{P_S}\text{-}0] \qquad \overline{C} \equiv \max_{\mathcal{Q}}.\, \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[F], \qquad \text{s.t.(1).}$$

(2) 双対問題—Super-Hedging 問題

問題 [$\mathrm{P_B}$-0], [$\mathrm{P_S}$-0] について，それぞれ，無裁定条件式 (1) に対する Lagrange 乗数を $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}\times 1}$ とすれば，以下の双対問題を得る．

$$[\mathrm{D_B}\text{-}0] \qquad \max_{\boldsymbol{\theta}}.\, \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{s}, \qquad \text{s.t. } \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{S}(k) \le F(k),\ \forall k$$

$$[\mathrm{D_S}\text{-}0] \qquad \min_{\boldsymbol{\theta}}.\, \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{s}, \qquad \text{s.t. } \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{S}(k) \ge F(k),\ \forall k$$

この問題は，以下に示す最適ポートフォリオ戦略問題と解釈できる．まず，取引主体が期首で購入する n 番目資産の量を θ_n で表し，$\boldsymbol{\theta} \equiv [\theta_1 \cdots \theta_{\mathrm{N}}]'$ とすれば，このポートフォリオの期首価格 w および期末価格 $W \equiv [W(1) \cdots W(\mathrm{K})]$ は，それぞれ，

$$w \equiv \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{s}, \qquad W \equiv \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{S} \tag{2}$$

で表される．次に，事業契約の買手は，期首にポートフォリオを空売りして事業契約を購入し，期末に事業のペイ・オフからポートフォリオのペイ・オフを支払うとしよう．この取引により，買手が期首で得る富は w であり，期末の状態 k で得る富は $\mathcal{W}(k) \equiv F(k) - W(k)$ である．従って，問題 [$\mathrm{D_B}$-0] は，期末の任意の状態 k において $\mathcal{W}(k) < 0$ とならないようなポートフォリオの中で，期首でのポートフォリオ売却価格 w が最大のものを選択する super-hedging 問題と見なせる．

無裁定原理より，この最適ポートフォリオと対象事業契約の間の取引に裁定は存在しない．従って，最適ポートフォリオの価格と事業価格が一致することは明らかである．事業の売手についても，期末の富を $\mathcal{W}(k) \equiv W(k) - F(k)$ とし，期首の富 (ポートフォリオ購入費用) を w とすれば，同様に解釈できる．従って，事業の買手価格および売手価格は，それぞれ，問題 [$\mathrm{D_B}$-0], [$\mathrm{D_S}$-0] の解 (i.e. 目的関数) として得られる．

3. 静学モデル—提案手法

前章で示した，無裁定原理のみに基づいた手法では，その買手価格あるいは売手価格が発散し得るという問題がある．これは，無裁定条件のみの下での EMM 推定問題 [$\mathrm{P_B}$-0], [$\mathrm{P_S}$-0] の最適性条件が，特異 (singular) な線形逆問題となり得るからである．そこで，本章では，この価格の発散問題を回避した提案手法の概念的モデルを示す．具体的には，まず，問題 [$\mathrm{P_B}$-0], [$\mathrm{P_S}$-0] に，客観的確率測度 $\mathcal{P}$ から EMM $\mathcal{Q}$ への *Kullback-Leibler* (KL) 情報量に対する下限制約を追加した問題を定式化を行う．次に，こうして定式化された問題の最適性条件を導出し，それを利用した事業価格の計算方法を明らかにする．最後に，このように定式化した問題の双対問題に着目し，その最適性条件および事業価格の算出方法を議論する．これにより，KL 情報量の下限制約を追加した無裁定条件下での EMM 推定問題と，効用最大化原理に基づいた事業取引主体のリスク・ヘッジ行動との間の隠れた関係を明らかにする．以下では，買

手についての問題であることを明示する際には，内生変数を下線付きの記号 $\underline{X}$ で表す．売手については上線付きの記号 $\overline{X}$ を用いる．

(1) 主問題—状態価格推定問題

本節では，無裁定条件と KL 情報量制約下での EMM 推定問題をより見通し良く扱うため，Hansen and Jagannathan[9),10)]によって提案された SDF(*Stochastic Discount Factor*) アプローチを採用する．ここで SDF とは，Arrow-Debreu 状態価格に対応する確率変数であり，本研究の枠組においては以下のように定義される．

$$\Lambda(k) \equiv \mathcal{Q}(k)/\mathcal{P}(k), \qquad \Lambda \equiv \{\Lambda(k)|k \in K\}.$$

この SDF を用いれば，当該事業のペイ・オフの EMM $\mathcal{Q}$ 下での期待値 (i.e. 事業価格) は，以下の式：

$$\mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[F] \equiv \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda F] = \sum_{k \in K} \mathcal{P}(k)\Lambda(k)F(k) \qquad (3)$$

で表される．ここで，$\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[X] \equiv \sum_{k \in K} \mathcal{P}(k)X(k)$ は客観的確率測度 $\mathcal{P}$ の下での期待値演算を表す．また，確率測度 $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への KL 情報量は，この SDF を用いた以下の式で定義される．

$$H \equiv -\sum_{k \in K} \mathcal{Q}(k) \ln \frac{\mathcal{Q}(k)}{\mathcal{P}(k)} = -\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda \ln \Lambda]. \qquad (4)$$

以上より，無裁定原理のみに基づく事業価格最小化問題 $[\mathrm{P_B}\text{-}0]$ に対して，KL 情報量の下限を追加的に設けた問題は，SDF Λ を未知変数とする以下の問題として定式化できる．

$$\min_{\underline{\Lambda}} \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\underline{\Lambda} F], \qquad \text{s.t.(1), and } -\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\underline{\Lambda} \ln \underline{\Lambda}] \geq \hat{H}.$$

この問題は，問題 $[\mathrm{P_B}\text{-}0]$ を KL 情報量によって正則化した以下の問題：

$$[\mathrm{P_B}] \quad \min_{\underline{\Lambda}} \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\underline{\Lambda} F + \frac{1}{\gamma}\underline{\Lambda} \ln \underline{\Lambda}\right], \qquad \text{s.t.(1)}.$$

と 1 対 1 対応関係にある．すなわち，問題 $[\mathrm{P_B}]$ のパラメタ $1/\gamma$ が，KL 情報量の下限制約 $\hat{H}$ に対応した Lagrange 乗数として与えられるならば，上記 2 つの問題は等価である (この関係は，後述するように，KL 情報量の下限 $\hat{H}$ の意味を議論する上で鍵となる)．

問題 $[\mathrm{P_B}]$ に対しては，以下の 3 通りの解釈が行える．第 1 に，式 (4) で定義される KL 情報量は，2 つの確率測度 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ 間の乖離の指標として一般に用いられる指標である．従って，問題 $[\mathrm{P_B}]$ は，客観的確率測度からの乖離を，自然な指標で測った EMM 推定問題と見なせる．第 2 に，無裁定条件のみの下では不定逆問題となる EMM 推定問題を正則化した問題と見なせる．本研究で採用した KL 情報量は，線形逆問題の正則化手法において，二次関数と同じく頻繁に用いられる．最後に，無裁定条件 (1) の下で，客観的確率を事前確率，EMM $\mathcal{Q}$ を事後確率とした Bayes 推定問題として解釈できる (例えば，Stutzer[27)]，Kapur[16)]を参照)．

問題 $[\mathrm{P_B}]$ の最適性条件より，買手にとっての最適 SDF $\underline{\Lambda}^*$ が従う以下の Logit 式を導出できる．

$$\underline{\Lambda}^*(k) = \frac{\exp\left[-\gamma\left\{F(k) - \underline{\boldsymbol{\theta}}'\boldsymbol{S}(k)\right\}\right]}{\mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\left\{F - \underline{\boldsymbol{\theta}}'\boldsymbol{S}\right\}\right]\right]}, \quad \forall k. \qquad (5)$$

ここで，$\underline{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}\times 1}$ は無裁定条件式 (1) に対する Lagrange 乗数である．売手についても同様に，KL 情報量制約付き事業価格最大化問題の最適性条件から，売手にとっての最適 SDF $\overline{\Lambda}^*$ が導出できる．

事業価格の最小値 (買手価格)，最大値 (売手価格) は，各取引主体の最適 SDF を用いた以下の式で計算できる

$$\underline{C} = \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\underline{\Lambda}^* F], \qquad \overline{C} = \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\overline{\Lambda}^* F\right]. \qquad (6)$$

(2) 双対問題—拡張 Super-Hedging 問題

買手の SDF(5) を問題 $[\mathrm{P_B}]$ の Lagrangian に代入して整理すれば，以下の双対問題が得られる．

$$[\mathrm{D_B}] \quad \max_{\underline{\boldsymbol{\theta}}} -\frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\exp[-\gamma \mathcal{W}]]$$
$$\text{s.t. } \mathcal{W}(k) \equiv F(k) - [\underline{W}(k) - \underline{w}] \quad \forall k, \qquad (7)$$
$$\text{and (2)}.$$

問題 $[\mathrm{D_B}]$ に対しては，以下のような経済学的解釈を与えられる．まず，取引主体が富 $\mathcal{W}$ に対して，絶対危険回避度一定 (CARA: *Constant Absolute Risk Aversion*) 型の効用関数 $\mathcal{U}(\mathcal{W}) \equiv -\exp[-\gamma \mathcal{W}]$ を持つと仮定し，確率的な富 $\mathcal{W} \equiv [\mathcal{W}(1) \cdots \mathcal{W}(\mathrm{K})]$ に対する確実性等価 (CE: *Certainty Equivalent*) $\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}$ を $\mathcal{U}(\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}) \equiv \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\mathcal{U}[\mathcal{W}]]$ として定義する．これを $\mathcal{W}^{\mathrm{CE}}$ について解けば，以下の式を得る．

$$\mathcal{W}^{\mathrm{CE}} = -\frac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\exp[-\gamma \mathcal{W}]]. \qquad (8)$$

式 (8) は，双対問題 $[\mathrm{D_B}]$ の目的関数が，期末の富 $\mathcal{W}(k)$ に対する CE であることを表している．ここで，事業の買手が取引によって期末に得る利潤は，事業のペイ・オフ $F(k)$ から，ポートフォリオに対する支払い $\underline{W}(k) - \underline{w}$ を引いたものである．つまり，双対問題 $[\mathrm{D_B}]$ は，期末での利潤に対する CE を最大化するポートフォリオ問題と解釈できる．なお，式 (7) は初期の富 w の値に依存しない[19)]ことに注意しよう．これは，取引主体ごとに富の初期保有量が異なっていても，robust な分析が行えることを意味している．

ここで，本手法は前章で示した super-hedging 問題の，より一般的な拡張であることを示そう．まず，事業の取引主体の絶対危険回避度を $\gamma \to \infty$ としたとき，問題 $[\mathrm{D_B}]$ は以下のマックス・ミニ問題に帰着する．

$$\max_{\underline{\boldsymbol{\theta}}} \underline{\boldsymbol{\theta}}'\boldsymbol{s} + \min_{k} \{F(k) - \underline{\boldsymbol{\theta}}'\boldsymbol{S}(k)\}. \qquad (9)$$

この問題の解 (i.e. 最適ポートフォリオ戦略 $\underline{\theta}^*$) は，super-hedging 問題 [$\mathrm{D_B}$-0] の解に一致する．これより，双対問題 [$\mathrm{D_B}$] は，super-hedging 問題 [$\mathrm{D_B}$-0] を，$\gamma \to \infty$ の特殊ケースとして含む拡張 super-hedging 問題であることが示された．

事業に対する買手価格 (i.e. 事業の下限価格) は，① 双対問題 [$\mathrm{D_B}$] を解き，②その解を事業価格の式 (6) に代入するという 2 段階の手続きによって求められる．より具体的には，まず，問題 [$\mathrm{D_B}$] の制約条件式 (2) に対する Lagrange 乗数の最適値を $\underline{\Lambda}^* \in \mathcal{R}^{1\times\mathrm{K}}$ とし，式 (5) と等価な最適性条件を得る．次に，こうして求めた $\underline{\Lambda}^*$ を式 (6) に代入し，事業価格の下限を計算する．売手についても，事業契約の売買が期末にもたらす富を $\mathcal{W}(k) \equiv [W(k) - w] - F(k)$ とした双対問題が定式化でき，同様の操作によって事業価格の上限が求められる．

以上より，KL 情報量の下限を付加した無裁定条件下での SDF 推定問題 [$\mathrm{P_B}$] は，ヘッジ・エラーを CARA 型効用関数で評価した事業取引主体のヘッジ・ポートフォリオ運用問題 [$\mathrm{D_B}$] に帰着することが判った．ここで，前節で述べたように，双対問題 [$\mathrm{D_B}$] における事業取引主体の絶対危険回避度 γ は，KL 情報量の下限 $\hat{H}$ と 1 対 1 の関係にあることに注意されたい．これより，$\hat{H}$ は，事業の買手が引き受けられる不完備市場リスクの限度を表すと解釈できる．

4. 連続時間-連続状態モデル：一般モデル

前章で議論した概念的モデルに対する分析を，より現実的な連続時間-連続状態の枠組みへ一般化しよう．本章では，まず，第 1 に，連続時間-連続状態の枠組を示した上で，事業価格評価問題を "リスクの市場価格" 推定問題 (後述) として定式化する．第 2 に，この問題の最適性条件を導出し，それを用いた事業価格の計算方法を明らかにする．第 3 に，前章と同様，問題の双対性に着目する事で，リスクの市場価格推定問題が効用最大化原理に基づくヘッジ・ポートフォリオ問題に帰着することを明らかにする．最後に，この動的ヘッジ問題に対する最適性条件を導出し，双対問題のみからも事業価格を計算できることを明示化する．以下では，オプション買手の行動を扱い，オプション価格の下限値を求める問題の定式化および解析を示す．売手 (およびオプションの上限価格) については，ほぼ同様の分析が行えるため，ここでは省略する．

(1) モデルの枠組

対象時間帯 $[0,T]$ および満期 T における事象集合 Ω を考える．Ω に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega) | \omega \in \Omega\}$ とし，Ω のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t) | t \in [0,T]\}$ を定義する．これらの 3 つ組 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ で定義される確率空間上で，K 次元 $\mathcal{P}$-Wiener 過程 $\boldsymbol{Z}(t) \equiv [Z_1(t) \cdots Z_{\mathrm{K}}(t)]'$ を仮定し，その増分 $\mathrm{d}Z_k(t)$ が互いに独立であるとする．以下では，任意の確率測度 $\mathcal{P}$ の下での期待演算であることを明示するために，$\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\cdot]$ なる記号を用いる．また，条件付期待値を $\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}[\cdot] \equiv \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\cdot | \mathcal{F}(t)]$ と定義する．

次に，1 種類の安全資産と N 種類の危険資産が取引される資産取引市場を考える．時刻 t での安全資産価格，および n 番目の危険資産の価格を $B(t), \hat{S}_n(t)$ で表し，それぞれ，以下の確率微分方程式に従うと仮定する．

$$\mathrm{d}B(t)/B(t) = r(t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\mathrm{d}\hat{S}_n(t)/\hat{S}_n(t) = \hat{\alpha}_n(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}_n(t)\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t), \tag{11}$$

$$= \hat{\alpha}_n(t)\mathrm{d}t + \sum_k \sigma_{n,k}(t)\mathrm{d}Z_k(t). \tag{12}$$

以降では，表記の簡便化のため，安全資産をニューメレール資産とし，任意の資産価格 ($\hat{X}(t)$ と表記) を安全資産の価格で基準化した "割引価格" ($X(t) \equiv \hat{X}(t)/B(t)$ と表記) を適宜用いる．また，割引済み危険資産価格を $\boldsymbol{S}(t) \equiv [S_1(t) \cdots S_{\mathrm{N}}(t)]'$ とベクトル表記し，以下の確率過程で表す．

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)/\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t). \tag{13}$$

ここで，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)/\boldsymbol{S}(t) \equiv \left[\frac{\mathrm{d}S_1(t)}{S_1(t)} \cdots \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{N}}(t)}{S_{\mathrm{N}}(t)}\right]'$ とし，$\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\sigma}(t)$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1(t) - r(t) \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_{\mathrm{N}}(t) - r(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{N}}(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}(t) & \dots & \sigma_{1,\mathrm{K}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\mathrm{N},1}(t) & \dots & \sigma_{\mathrm{N},\mathrm{K}}(t) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

この枠組みの下で，事象 $\omega \in \Omega$ に応じた任意のキャッシュ・フローを発生させる事業 ("オプション") の価格評価法を議論する[4]．本稿で議論するオプションのキャッシュ・フローは，その満期 (事業の場合，契約の終了時点) T に発生する終端ペイ・オフのみとする．これは，単に理論展開を簡潔に示すための便宜であり，本手法の本質的な仮定 (あるいは限界) を意味するものではない．例えば，期間 $[0,T]$ 中に毎時刻 (連続的に) キャッシュ・フロー ("配当") が発生する場合は，本モデルの分析に僅かな修正を加えるだけで容易に対応できる．また，期間 $[0,T]$ 中の適当な離散的時点に確率的キャッシュ・フローを発生する事業については，(終端ペイ・オフのみ

[4] ここで提案する枠組みは，一般的な資産や条件付請求権等の評価にも適用可能であるため，以降では，評価対象とする "事業" を単に "オプション" と呼ぶ．

を持つ) 満期の異なった複数のオプションのポートフォリオとみなせば良い.

(2) 主問題—リスクの市場価格推定問題

a) 定式化

本項では，連続時間-連続状態の枠組下での分析を容易にするため，オプション評価問題を"リスクの市場価格"推定問題として定式化する．具体的には，まず，前章と同様，オプション評価問題をKL情報量制約と無裁定条件下でのEMM推定問題として定式化する．次に，Girsanovの定理を適用することでこの問題がリスクの市場価格推定問題に帰着することを明らかにする．

市場に裁定機会が存在しなければ，任意の時刻 $\{(t,s)|t,s \in [0,T]; t < s\}$ に対して，以下の性質を満たすような，$\mathcal{P}$ と等価なマルチンゲール測度 (EMM) $\mathcal{Q}$ が存在する[12]).

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] = \boldsymbol{S}(t), \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t)] = \boldsymbol{0}. \qquad (16)$$

確率測度 $\mathcal{P}$ に対する $\mathcal{Q}$ の Radon-Nikodym 微分[5]を $\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}(\omega)}{\mathrm{d}\mathcal{P}(\omega)}$ で表せば，式 (16) は，以下の式で書きなおせる．

$$\mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}[\boldsymbol{S}(s)] \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\Lambda(s)}{\Lambda(t)}\boldsymbol{S}(s)\right] = \boldsymbol{S}(t). \qquad (17)$$

ここで，$\{\Lambda(t) \equiv \Lambda(t, \boldsymbol{Z}(t))\}$ は，SDFを連続時間-状態の枠組みに拡張したものであり，以下の式で定義される．

$$\Lambda(t) \equiv \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\frac{\mathrm{d}\mathcal{Q}}{\mathrm{d}\mathcal{P}}\right] = \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\left.\frac{\mathcal{Q}(\mathrm{d}\omega)}{\mathcal{P}(\mathrm{d}\omega)}\right|\mathcal{F}(t)\right]. \qquad (18)$$

$\mathcal{P}$ に対する $\mathcal{Q}$ のKL情報量は，このSDFを用いて，

$$H \equiv -\mathrm{E}^{\mathcal{Q}}[\ln\Lambda(T)] = \mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\Lambda(T)\ln\Lambda(T)] \qquad (19)$$

と定義される．

$[\mathrm{P_B}]$ を連続時間-状態に拡張した問題は，SDF $\Lambda(T)$ を制御変数とした以下の問題として定式化できる．

$$[\text{P-0}] \quad \min_{\Lambda(T)} \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\Lambda(T)F(T) + \frac{1}{\gamma}\Lambda(T)\ln\Lambda(T)\right], \quad \text{s.t.}(16).$$

ここで，$F(T) \equiv F(\boldsymbol{Z}(T))$ は対象オプションから発生する終端ペイ・オフを表し，$1/\gamma > 0$ はKL情報量の下限より決定される所与の定数である．

この問題は，リスクの市場価格 (MPR: *Market Price of Risk*) $\boldsymbol{\lambda}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv [\lambda_1(t,\boldsymbol{Z})\cdots\lambda_{\mathrm{K}}(t,\boldsymbol{Z})]'$ を制御変数とした確率制御問題に帰着させられる．ここで，MPRとは，各リスク要因に対する"プレミアム"を表すもので，それ自身が確率過程である．より具体的には，MPR $\lambda_k(t) \equiv \lambda_k(t,\boldsymbol{Z}(t))$ は，"第 k 番目のリスク要因 $z_k(t)$ を1単位請け負う事に対する報酬"を，各資産 n の期待超過収益率 α_n で測ったものである．ただし，ここで

[5] これら確率論の基本的な用語の解説については，現代ファイナンス理論の標準的な教科書 (例えば，Cochrane[2]), Duffie[7]), Musiela and Rutkowski[24])など) を参照されたい．

投資家が n 番目の危険資産を保有することで請け負う k 番目リスクの"大きさ"は，当該資産の分散 $\sigma_{n,k}$ で計測されるものとする．このMPRは，資産取引に裁定機会が存在しないならば，以下の条件を満たさなければならない．

$$\alpha_n(t) = \sum_{k\in\mathrm{K}}\sigma_{n,k}(t)\lambda_k(t), \ \text{i.e.}\ \boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\lambda}(t). \qquad (20)$$

ここで，完備市場 (i.e. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathrm{K}$) ならば $\boldsymbol{\lambda}(t) \equiv \boldsymbol{\sigma}^{-1}(t)\boldsymbol{\alpha}(t)$ よりMPRは一意に決まるが，不完備市場 (i.e. $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\sigma}) < \mathrm{K}$) の場合，無裁定条件式 (20) のみではMPRが不定となることに注意しよう．

ここで，$\boldsymbol{\lambda}(t)$ と $\Lambda(t)$ の間には，Girsanovの定理により以下の関係が成立する．

$$\Lambda(t) = \exp\left[\sum_{k\in K}\int_0^t\left\{-\lambda_k(s)\mathrm{d}Z_k(s) - \frac{1}{2}\lambda_k^2(s)\mathrm{d}s\right\}\right] \qquad (21)$$

$$= \exp\left[\sum_{k\in K}\int_0^t\left\{-\lambda_k(s)\mathrm{d}\tilde{Z}_k(s) + \frac{1}{2}\lambda_k^2(s)\mathrm{d}s\right\}\right]. \qquad (22)$$

ただし，$\tilde{\boldsymbol{Z}}(t) \equiv [\tilde{Z}_1(t)\cdots\tilde{Z}_{\mathrm{K}}(t)]$ は，独立な増分を持つK次元 $\mathcal{Q}$-Wiener過程であり，$\tilde{\boldsymbol{Z}}(t) \equiv \boldsymbol{Z}(t) + \int_0^t\boldsymbol{\lambda}(s)\mathrm{d}s$ なる関係を満たす．従って，問題 [P-0] は，式 (22) を適用することにより，制御変数を $\{\boldsymbol{\lambda}(t)\}$ とした以下の確率制御問題に帰着する．

$$[\mathrm{P}] \quad \min_{\{\boldsymbol{\lambda}(t)\}} \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}\left[F(T) + \frac{1}{2\gamma}\sum_{k\in K}\int_0^T\lambda_k^2(t)\mathrm{d}t\right], \quad \text{s.t.}(20).$$

b) 最適性条件

問題 [P] の最適値関数を以下のように定義する．

$$\mathcal{I}(t,\boldsymbol{Z}) \equiv \min_{\{\boldsymbol{\lambda}(\cdot)\}} \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[F(T) + \frac{1}{2\gamma}\sum_k\int_t^T\lambda_k^2(s)\mathrm{d}s\right], \qquad (23)$$
$$\text{s.t.}(20)$$

これをDP (*Dynamic Programming*) 原理によって分解し，伊藤の補題を適用すれば，各時点 t において成立すべき最適性条件，すなわち，以下のHJB (*Hamilton-Jacobi-Bellman*) 方程式を得る．

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}(t)}\left\{\frac{\partial}{\partial t} - \sum_k\lambda_k(t)\frac{\partial}{\partial Z_k} + \frac{1}{2}\sum_k\frac{\partial^2}{\partial {Z_k}^2}\right\}\mathcal{I}(t) + \frac{1}{2\gamma}\sum_k\lambda_k^2(t) = 0. \quad \text{s.t.}(20). \qquad (24)$$

以降では，表記の簡便のため，時刻と状態に関する表記 (i.e. $(t,\boldsymbol{Z})$) を適宜省略する．無裁定条件式 (20) に対するLagrange乗数を $\boldsymbol{\beta}(t) \equiv [\beta_1(t),\cdots,\beta_{\mathrm{N}}(t)]'$ とし，問題 (24) のLagrangianを以下のように定義する．

$$L \equiv \mathcal{I}_t + \frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}'\mathcal{I}_{\boldsymbol{Z}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\mathcal{I}_{\boldsymbol{ZZ}}] + \boldsymbol{\beta}'\{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\lambda}\}$$

ここで，下付添え字は当該変数での偏微分を表し，tr [] は行列のトレースを表す．

HJB 方程式 (24) の $\boldsymbol{\lambda}(t)$ に関する最適性条件より，

$$\boldsymbol{\beta}^*(t) = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)\left\{-\boldsymbol{\alpha}(t)/\gamma + \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{Z}}(t)\right\}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^*(t) &= -\gamma\Theta(t)\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{Z}}(t) + \boldsymbol{\sigma}'(t)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)\boldsymbol{\alpha}(t) && (26)\\ &= \gamma\left\{\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{Z}}(t) + \boldsymbol{\sigma}'(t)\boldsymbol{\beta}^*(t)\right\}. && (27)\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Theta}$ は以下の式：

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) \equiv \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\sigma}'(t), \quad \Theta(t) \equiv \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\sigma}'(t)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)$$

で定義される $(t, \boldsymbol{Z})$ についての既知関数である．式 (25)〜(27) を元の HJB 方程式 (24) に代入すれば，以下の非線形 2 階偏微分方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}_t + \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{Z}} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{ZZ}}\right]\\ &\qquad - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{Z}}{}'\Theta\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{Z}} + \frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (28)\end{aligned}$$

式 (28) を終端条件 $\mathcal{I}(T, \boldsymbol{Z}) = F(\boldsymbol{Z})$ の下で解けば，最適値関数 $\{\mathcal{I}(t)\}$ が得られる．

c) オプション価格

時点 t における買手のオプション価格 (下限値) $\underline{C}(t, \boldsymbol{Z})$ は，問題 [P] の解に対応する EMM $\underline{\mathcal{Q}}$ の下でのペイ・オフ $F(T)$ の期待値である．

$$\underline{C}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \mathrm{E}_t^{\underline{\mathcal{Q}}}\left[F(T)\right]. \tag{29}$$

これと [P] の最適値関数 $\{\underline{\mathcal{I}}(t)\}$ の定義式 (23) より，オプション価格 $\underline{C}(t)$ は，$\{\underline{\mathcal{I}}(t)\}$ から KL 情報量による正則化項を引いたものに等しい．さらに，Girsanov の定理 (21) を用いれば，オプション価格は，最適値関数と MPR を用いた以下の式で表されることがわかる．

$$\underline{C}(t, \boldsymbol{Z}) = \underline{\mathcal{I}}(t, \boldsymbol{Z}) + \frac{1}{2\gamma}\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\sum_k \int_t^T \underline{\lambda}_k^{*2}(s)\mathrm{d}s\right]. \tag{30}$$

従って，オプション価格計算のためには，まず，式 (28) を解いて $\{\underline{\mathcal{I}}(t)\}$ を求める．そして，それを式 (26) に代入し，MPR $\{\underline{\lambda}^*(t)\}$ を導出する．最後に，それらを式 (30) に代入すればオプション価格が得られる．

(3) 双対問題—拡張 Super-Hedging 問題

a) 定式化

静学モデルと同様，[P] の双対問題は，無裁定条件式 (20) に対する Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta}(t) \equiv [\beta_1(t) \cdots \beta_{\mathrm{N}}(t)]'$ を制御変数とした以下の問題として定式化される．

$$\begin{aligned}[\mathrm{D}] \quad & \max_{\{\boldsymbol{\beta}(t)\}}. -\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\mathcal{W}(0, T)\right]\right],\\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{d}w(t) = \boldsymbol{\beta}(t)'\left\{\boldsymbol{\alpha}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{Z}(t)\right\}, && (31)\\ & \mathcal{W}(t, T) \equiv F(T) - w(T) + w(t) && (32)\end{aligned}$$

この問題に対しても，事業の取引主体が CARA 型効用関数を持つとすれば，静学モデルと同様の経済学的解釈を与えることができる．まず，時点 t で，安全資産および n 番目危険資産を，それぞれ，$\theta_0(t)$ 円，$\theta_n(t)$ 枚持つときのポートフォリオの割引価格を $w(t) \equiv \theta_0(t) + \sum_n \theta_n(t)S_n(t)$ とする．ここで，ポートフォリオ戦略は自己資金充足 (self-financing) 的— 各瞬間で資金の追加的投入や引出しがない—とする．このとき，$w(t)$ は以下の確率微分方程式に従う．

$$\mathrm{d}w(t) = \sum_n \theta_n \mathrm{d}S_n(t). \tag{33}$$

ここで，式 (31) における Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\beta}(t)$ が，各資産への投資金額を意味している (i.e. $\beta_n(t) \equiv \theta_n(t)S_n(t)$) と考えれば，式 (31) は，式 (33) に一致する．すなわち，式 (31) は自己資金充足条件を意味している．

次に，満期 T において，取引による事業の買手の利潤 $\mathcal{W}(0, T)$ は，当該オプションの終端ペイ・オフ $F(T)$ から，期末におけるポートフォリオ運用収益 $w(T) - w(0) \equiv \int_0^t \mathrm{d}w(t)$ を引いたものである (買手はポートフォリオを空売りするため)．従って，問題 [D] は，自己資金充足条件式 (31) の下で，満期での利潤の確実性等価を最大化するポートフォリオ運用 (リスク・ヘッジ) 問題と見なせる．

b) 最適性条件

問題 [D] の最適値関数を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(t, \boldsymbol{Z}) \equiv \max_{\{\boldsymbol{\beta}(\cdot)\}}. -\frac{1}{\gamma}\ln \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\mathcal{W}(t, T)\right]\right], \quad (34)\\ \text{s.t. (31) and (32).}\end{aligned}$$

この式を DP 分解し，伊藤の補題を適用すれば，時点 t において成立すべき，以下の HJB 方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\max_{\boldsymbol{\beta}(t)}. -\sum_n \beta_n(t)\alpha_n(t) - \frac{\gamma}{2}\sum_k\Big(\sum_n \beta_n(t)\sigma_{n,k}(t)\Big)^2\\ &\quad + \Big\{\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\sum_n \beta_n(t)\sum_k \sigma_{n,k}(t)\frac{\partial}{\partial Z_k}\Big\}\mathcal{J}(t)\\ &\qquad - \frac{\gamma}{2}\sum_k\Big(\frac{\partial\mathcal{J}}{\partial Z_k}\Big)^2 = 0. \quad (35)\end{aligned}$$

式 (35) の $\boldsymbol{\beta}(t)$ についての最適性条件より，最適ポートフォリオ戦略は，以下の式で表される．

$$\boldsymbol{\beta}^*(t) \equiv \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left\{-\boldsymbol{\alpha}(t)/\gamma + \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\mathcal{J}}_{\boldsymbol{Z}}(t)\right\}. \tag{36}$$

この式は，最適ポートフォリオ戦略が，以下の 2 つのファンドから構成されることを意味している．第 1 項は，時刻 t における (瞬間的な) 平均-分散フロンティア・ポートフォリオである．第 2 項は，状態変数 $\boldsymbol{Z}$ の変化 (i.e. それに伴う投資機会の変化) がもたらすリスクをヘッジするためのポートフォリオと見なせる．最適ポートフォリオ戦略は，この 2 つのファンドを取引主体の絶対危険回避度 γ に応じて持ち合わせたものである．

式 (36) を元の HJB 方程式 (35) に代入すれば，以下

の偏微分方程式を得る．

$$\mathcal{J}_t+\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathcal{J}_{\boldsymbol{Z}}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\mathcal{J}_{\boldsymbol{ZZ}}\right] -\frac{\gamma}{2}\mathcal{J}_{\boldsymbol{Z}}{}'\boldsymbol{\Theta}\mathcal{J}_{\boldsymbol{Z}}+\frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=0. \quad (37)$$

終端条件は $\mathcal{J}(T,\boldsymbol{Z})=F(\boldsymbol{Z})$ である．ここで，式 (37) は，主問題で導出した偏微分方程式 (28) と全く同型であることに注意しよう．

c) オプション価格

本稿では，最適リスク・ヘッジ問題である双対問題からもオプション価格を求められることを示す．まず，主問題 [P] と双対問題 [D] の最適値関数は，それぞれ，同じ終端条件 $\mathcal{I}(T,\boldsymbol{Z})=\mathcal{J}(T,\boldsymbol{Z})=F(\boldsymbol{Z})$ の下で，等価な偏微分方程式 (28)(i.e. (37)) に従う．よって，[P] と [D] の最適値関数は一致する．次に，式 (27) より，MPR $\{\boldsymbol{\lambda}(t)\}$ は最適ポートフォリオ戦略 $\{\beta(t)\}$ を用いて導出できる．上記の 2 点より，オプション価格は式 (30) に式 (27) を代入して整理した，以下の式で計算できる．

$$\underline{C}(t,\boldsymbol{Z})=\underline{\mathcal{J}}(t,\boldsymbol{Z})+\frac{\gamma}{2}\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\sum_k\int_t^T\left\{\frac{\partial\underline{\mathcal{J}}(s)}{\partial Z_k}+\sum_n\underline{\beta}_n^*(s)\sigma_{n,k}(s)\right\}^2\mathrm{d}s\right]. \quad (38)$$

この式より，オプション価格は，満期における利潤 $\mathcal{W}(0,T)$ の確実性等価に，ある種のヘッジ費用を加えたものに等しいことがわかる．

5. 2 リスク要因モデルによる分析例

本章では，提案モデルの数学的性質およびメカニズムをより明らかにする簡単な例として，以下の条件を満たす場合を分析する：a) リスク要因が 2 つしか存在しない (i.e. K = 2); b) 資産市場で取引される危険資産が，1 種類の“代表的資産”のみであり，その価格が幾何 Brown 運動に従う．この枠組みの下で，まず，主問題，双対問題を定式化し，各問題に対する分析を行う．次に，これらの問題が，1 リスク要因問題に帰着し得る場合を議論する．最後に，いくつかのケースでは解析解が求められることを示し，その解析解を用いて，本手法と従来手法の関係を明らかにする．

(1) モデルの枠組み

1 種類の危険資産が取引される資産市場 (i.e. N = 1) を考え，その割引済み価格 $S(t)$ が，幾何 Brown 運動：

$$\mathrm{d}S(t)/S(t)=\alpha\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}Z_1(t)+\sigma_2\mathrm{d}Z_2(t). \quad (39)$$

に従うとする．ここで，α,σ_1,σ_2 は所与の定数とする．

問題の性質をより明らかにするために，リスク要因を，資産取引によって完全にヘッジできるものと，全くヘッジできないものとに分解しよう．まず，$Z_1(t),Z_2(t)$ を合成した，以下の 2 つの確率過程 $z(t),\bar{z}(t)$ を定義する．

$$z(t)\equiv\frac{\sigma_1Z_1(t)+\sigma_2Z_2(t)}{\sigma},\ \bar{z}(t)\equiv\frac{\sigma_2Z_1(t)-\sigma_1Z_2(t)}{\sigma} \quad (40)$$

ただし，$\sigma\equiv\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ である．ここで，$\mathrm{d}z,\mathrm{d}\bar{z}\sim\mathcal{N}(0,\mathrm{d}t)$，かつ $\mathrm{E}^{\mathcal{P}}[\{\mathrm{d}z\}\{\mathrm{d}\bar{z}\}]=0$ より，$z(t),\bar{z}(t)$ は，互いに独立な増分を持つ $\mathcal{P}$-Wiener 過程である．次に，資産価格過程を，$\mathrm{d}z$ を用いて

$$\mathrm{d}S(t)/S(t)=\alpha\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z(t) \quad (41)$$

と書き直す．これより，$z(t)$ は資産取引によって完全にヘッジ可能なリスク要因，$\bar{z}(t)$ は，全くヘッジ不可能なリスク要因と見なせる．以下では，$z(t),\bar{z}(t)$ を，それぞれ，市場リスク要因，固有リスク要因と呼び，$\boldsymbol{z}(t)\equiv\{z(t),\bar{z}(t)\}$ とまとめて表記する．この新たなリスク要因を用いて，対象とするオプションの終端ペイ・オフを $F(T)\equiv F(\boldsymbol{z}(T))$ と表す．

(2) 定式化と最適性条件

a) 定式化

$z(t),\bar{z}(t)$ の MPR を，それぞれ $\lambda(t),\bar{\lambda}(t)$ とすれば，MPR が満たすべき無裁定条件式 (20) は以下の式：

$$\alpha=\sigma\lambda(t)+0\cdot\bar{\lambda}(t). \quad (42)$$

で表される．これより，$\lambda(t)=\alpha/\sigma$ となる．従って，問題 [P] は $\bar{\lambda}(t)$ のみを制御変数とした，以下の制約無し確率制御問題に帰着する．

$$\text{[P-2]}\quad \min_{\{\bar{\lambda}(t)\}}.\ \mathrm{E}^{\mathcal{Q}}\left[F(T)+\frac{1}{2\gamma}\int_0^T\bar{\lambda}^2(t)\mathrm{d}t\right]+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}T.$$

一方，問題 [P-2] の双対問題は，第 4 章と同様，以下のように定式化される．

$$\text{[D-2]}\quad \max_{\{\beta(t)\}}.\ -\frac{1}{\gamma}\ln\mathrm{E}^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[-\gamma\mathcal{W}(0,T)\right]\right],$$

$$\text{s.t. (32) and } \mathrm{d}w(t)=\beta(t)\left\{\alpha\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z(t)\right\}.$$

b) 最適性条件

問題 [P-2] の最適値関数を以下のように定義する．

$$\mathcal{I}(t,\boldsymbol{z})\equiv\min_{\{\bar{\lambda}(s)\}}.\ \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[F(T)+\frac{1}{2\gamma}\int_t^T\bar{\lambda}^2(s)\mathrm{d}s\right] +\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}(T-t). \quad (43)$$

DP 分解を行って整理すれば，時点 t において成立するべき，以下の HJB 方程式を得る．

$$\min_{\bar{\lambda}(t)}.\left\{\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\alpha}{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}-\bar{\lambda}(t)\frac{\partial}{\partial\bar{z}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}^2}\right\}\mathcal{I}(t) +\frac{1}{2\gamma}\bar{\lambda}^2(t)+\frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}=0. \quad (44)$$

$\bar{\lambda}(t)$ についての最適性条件より，最適な固有リスク要因の MPR は以下の式で求められる．

$$\bar{\lambda}^*(t) = \gamma \frac{\partial \mathcal{I}(t)}{\partial \bar{z}}. \tag{45}$$

これを元の HJB 方程式 (44) に代入すれば，以下の非線形偏微分方程式を得る．

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} - \frac{\alpha}{\sigma}\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial \bar{z}}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2} = 0. \tag{46}$$

これを終端条件 $\mathcal{I}(T,z) \equiv F(z)$ の下で解けば，$\{\mathcal{I}(t)\}$ を得る．

オプション価格は，一般モデルと同様の手順で求められる．すなわち，最適値関数 $\{\mathcal{I}(t)\}$ を用いて固有リスクの MPR$\{\bar{\lambda}^*(t)\}$ を導出し，これらを式 (30) に対応する以下の式：

$$C(t,z) = \mathcal{I}(t,z) - \frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2}(T-t) + \frac{1}{2\gamma}\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\int_t^T \bar{\lambda}^{*2}(s)\mathrm{d}s\right].$$

に代入すれば，オプション価格 $\{C(t)\}$ を計算できる．

なお，双対問題からも，同様にオプション価格を求めることが可能である．まず，双対問題 [D-2] の最適性条件より，最適ポートフォリオ戦略は以下の式：

$$\beta^*(t) = -\frac{\alpha}{\gamma\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \mathcal{J}(t)}{\partial z}. \tag{47}$$

で求められる．ここで，$\mathcal{J}(t)$ は双対問題 [D-2] の最適値関数である．次に，オプション価格は，この最適ポートフォリオ戦略 $\{\beta^*(t)\}$ および最適値関数 $\{\mathcal{J}(t)\}$ を，式 (38) に対応する以下の式に代入することで計算できる．

$$C(t,z) = \mathcal{J}(t,z) + \frac{\gamma}{2}\mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\int_t^T \left\{\frac{\partial \mathcal{J}(s)}{\partial z} + \beta^*(s)\sigma\right\}^2 \mathrm{d}s\right].$$

(3) 1 リスク要因モデルへの帰着

本節では，2 リスク要因モデルが，以下の 2 つの条件を満たす場合を扱う：a) オプションのペイ・オフが 1 つの "代表的状態変数" の関数として表される; b) この状態変数が幾何 Brown 運動に従う．このとき，問題 [P-2] が，明示的な状態変数を 1 つとした問題として再定式化できることを示す．さらに，その問題に対して，非線形偏微分方程式の理論を適用すれば，オプション価格評価が 2 段階の線形偏微分方程式問題に帰着することを明らかにする．

a) 非市場資産の導入

オプションの終端ペイ・オフが，1 種類の状態変数 (e.g, 交通量) のみに依存するとし，この状態変数の値 $P(t)$ が以下の幾何 Brown 運動に従うとする．

$$\mathrm{d}P(t)/P(t) = \mu\mathrm{d}t + v_1\mathrm{d}Z_1(t) + v_2\mathrm{d}Z_2(t). \tag{48}$$

ただし，μ, v_1, v_2 は所与の定数とする．ここで，オプションのペイ・オフが，この状態変数 $P(t) \equiv P(t, Z(t))$ の関数 $F(T) = F[P(T,Z)]$ として表されるとする．以降では，この状態変数を "非市場資産" と呼び，その値 $P(t)$ を "非市場資産価値" と呼ぶ．式 (48) は，式 (40) で定義した $z(t), \bar{z}(t)$ を用いて，

$$\mathrm{d}P(t)/P(t) = \mu\mathrm{d}t + v\left\{\rho\mathrm{d}z(t) + \bar{\rho}\mathrm{d}\bar{z}(t)\right\} \tag{49}$$

$$= \mu\mathrm{d}t + v\mathrm{d}Z(t). \tag{50}$$

と書き直すこともできる．ただし，$v \equiv \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ とする．$\rho, \bar{\rho}$ は，それぞれ，以下の式で定義される．

$$\rho \equiv \frac{\sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2}{\sigma v}, \qquad \bar{\rho} \equiv \sqrt{1-\rho^2}. \tag{51}$$

また，$Z(t) \equiv \rho z(t) + \bar{\rho}\bar{z}(t)$ は 1 次元 $\mathcal{P}$-Wiener である．

b) 1 リスク要因モデルへの帰着

式 (50) より，時刻 t における非市場資産の価値は，以下の式で表される．

$$P(t) = P_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}v^2\right)t + v\rho z(t) + v\bar{\rho}\bar{z}(t)\right] \tag{52}$$

これより，P に関する $t, z, \bar{z}$ についての各偏微分が得られる．微分の連鎖則を用いて偏微分方程式 (46) を書き直せば，P と t に関する偏微分のみからなる非線形偏微分方程式を得る．

$$\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial t} + \left(\mu - \frac{v}{\sigma}\rho\alpha\right)P\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial P} + \frac{1}{2}v^2P^2\frac{\partial^2 \mathcal{I}}{\partial P^2} + \left(\bar{\rho}vP\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial P}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{2\gamma\sigma^2} = 0. \tag{53}$$

終端条件も，P のみの関数 $\mathcal{I}(T,z) \equiv F[P(T,z)]$ で表される．従って，[P-2] は，明示的な状態変数を P のみとした問題に帰着する．

c) Cole-Hopf 変換による線形偏微分方程式の導出

式 (53) は非線形偏微分方程式であり，そのままでは，必ずしも扱いやすい問題ではない．そこで，より解きやすい問題に変換しよう．まず，最適値関数 $\{\mathcal{I}(t)\}$ に Cole-Hopf 変換を施した新たな関数 Φ を導入する．

$$\Phi(t,P) \equiv \exp\left[\xi\mathcal{I}(t,P)\right]. \tag{54}$$

次に，$\xi = -\gamma\bar{\rho}^2$ と選んだ上で，式 (53) に対して未知関数の変換を実行すれば，Φ に関する以下の線形偏微分方程式が得られる．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\mu - \frac{v}{\sigma}\rho\alpha\right)P\frac{\partial \Phi}{\partial P} + \frac{1}{2}v^2P^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} = 0. \tag{55}$$

また，この未知関数の変換にともない，終端条件は，$\Phi(T,P) \equiv \exp\left[\xi F(P)\right]$ となる．式 (55) は，その特性がよく知られている 2 階線形偏微分方程式である．実際，その形式的な解は，以下に示す Feynman-Kac 解により与えられる．

$$\Phi(t,P) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{P}}\left[\exp\left[\xi F(P(T))\right]\right], \tag{56}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathrm{d}P(t)/P(t) = (\mu - \rho\alpha v/\sigma)\,\mathrm{d}t + v\mathrm{d}Z(t). \tag{57}$$

ここで，$Z(t)$ は 1 次元 $\mathcal{P}$-Wiener 過程である．

d) オプション価格

こうして求めた $\{\Phi(t)\}$ を用いれば，固有リスク要因の MPR $\bar{\lambda}$ を得ることができる．すなわち，$\bar{\lambda}$ と $\{\mathcal{I}(t)\}$ の関係式 (45) に Cole-Hopf 変換式 (54) を組合わせて得られる以下の式によって，$\{\bar{\lambda}(t)^*\}$ を計算できる．

$$\bar{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \Phi(t)}{\partial P} \Big/ \frac{\Phi(t)}{P(t)} v. \tag{58}$$

この式は，固有リスク要因の MPR が，Φ の P に対する弾力性に比例することを意味している．

式 (58) により固有リスク要因の MPR が求まれば，EMM $\mathcal{Q}$ が一意に決まる．すなわち，オプション価格は EMM $\mathcal{Q}$ の下でのペイ・オフの期待現在価値

$$C(t,P) = \mathrm{E}_t^{\mathcal{Q}}\left[F(P(T))\right], \tag{59}$$

$$\text{s.t.}\quad \mathrm{d}P(t)/P(t) = (\mu - v\pi(t))\,\mathrm{d}t + v\mathrm{d}\tilde{Z}(t). \tag{60}$$

$$\pi(t) \equiv \rho\alpha/\sigma + \bar{\rho}\bar{\lambda}^*(t)$$

として求められる[6]．ここで，式 (59) は以下の線形偏微分方程式の Feynman-Kac 解である．

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mu - v\pi)\,P\frac{\partial C}{\partial P} + \frac{1}{2}v^2P^2\frac{\partial^2 C}{\partial P^2} = 0. \tag{61}$$

ただし，終端条件は $C(T,P) = F(P)$ である．従って，オプション価格 $\{C(t)\}$ は，この微分方程式問題を解くことによって計算できることがわかる．

以上の解析を要約すると，2 要因モデルでのオプション価格評価は，式 (56), (59) という 2 段階の期待値演算に帰着する．そして，その各期待値演算は，対応する 2 階線形偏微分方程式 (55), (61) を解くことで実現できる．線形偏微分方程式問題には，効率的かつ安定的な解法が従来から提案されており，式 (55), (61) の求解が容易であることは言うまでも無い．

(4) 解析解の例と従来手法との比較

以上の考察を活用すれば，いくつかのケースについては，簡単に解析解を導出できる．本項では，その解析解の例を用いて，従来手法による評価 (i.e. 完備市場下でのオプション価格，もしくは ENPV) との関係を明らかにする．具体的には，$\gamma \to 0$ あるいは $\rho = \pm 1$ のケースについて，以下のようなプット型のペイ・オフを持つオプション価格を解析的に導出する．

$$F(P) \equiv \max\{K - P, 0\}. \tag{62}$$

まず，$\gamma \to 0$ のとき，固有リスク要因の MPR についての式 (45) より，$\bar{\lambda}^*(t) = 0$ となる．従って，式 (59) より，オプション価格は以下の式で求められる．

$$C(t,P) = K\mathcal{N}(d_2) - P\exp\left[\left(\mu - \frac{v}{\sigma}\rho\alpha\right)\tau\right]\mathcal{N}(d_1), \tag{63}$$

ここで，$\mathcal{N}(\cdot)$ は標準正規分布関数であり，$\tau \equiv T - t$ とする．また，d_1, d_2 は以下のように定義される．

$$d_1 \equiv v\sqrt{\tau} + d_2, \quad d_2 \equiv \frac{\ln\frac{K}{P} - \left(\mu - \frac{1}{2}v^2 - \frac{v}{\sigma}\rho\alpha\right)\tau}{v\sqrt{\tau}}.$$

一方，$\bar{\rho} = 0$ (i.e. $\rho = \pm 1$) の場合，オプション価格の定義式 (59) より，$\bar{\lambda}(t)$ はオプション価格に影響を与えない．この場合も，$\bar{\lambda}^*(t) = 0$ となるため，オプション価格は，式 (63) に $\rho = 1$ もしくは -1 を代入して求められる．

上述の各ケースと，従来手法との対応関係を整理しておこう．まず，$\gamma \to 0$ の場合，無裁定条件の下で，最も客観的確率測度 $\mathcal{P}$ に "近い" EMM が選ばれる．これは，Stutzer [27),28)] の提案手法を，連続時間-状態モデルに拡張したものと見なせる．さらに，$\gamma \to 0$ かつ $\rho = 0$ の場合，EMM として客観的確率測度 $\mathcal{P}$ が選ばれるため，オプション価格は ENPV に一致する．一方，$\rho = \pm 1$ の場合，オプションからのキャッシュ・フローの変動 (i.e. 非市場資産の変動) を，資産取引によって完全にヘッジ可能である．従って，このときのオプション価格は完備市場下でのそれ (i.e. Black-Scholes 価格) に等しい．

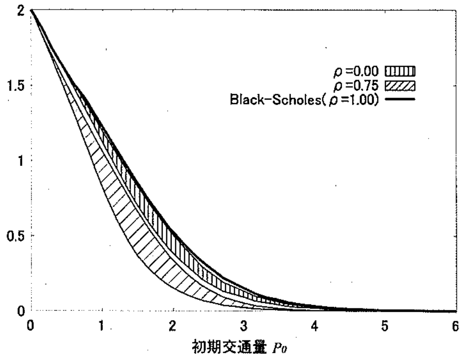
6. 数値計算と感度分析

本章では，2 リスク要因モデルで表される事業契約例に対して提案手法を適用し，数値計算によって，評価価格のより具体的な特性を示す．その評価対象として想定する事業契約は，ある有料道路事業を期間 T 後に一定額 K で売却できる権利 (事業のプット・オプション) である．このオプション評価のためには，事業収益 (あるいは事業自体の価格) 過程を記述する必要がある．提案手法により事業自体の価格を計算することも可能ではあるが，本章では，計算例を簡潔に示し，完備市場下でのプット・オプションとの価格を比較するために，無限の将来にわたる当該事業からの料金収入フローの ENPV を，事業価格と見なす．ここで，時刻 t に発生する料金収入は，所与の料金と当該時刻の交通量 $P(t)$ の積で表されるとする．さらに，その交通量が式 (49) の幾何 Brown 運動に従うとする．ここで，ρ は危険資産価格 $S(t)$ と交通量 $P(t)$ の相関係数を表す．このとき，時点 t で交通量 $P(t)$ が観測された下での事業価格は，

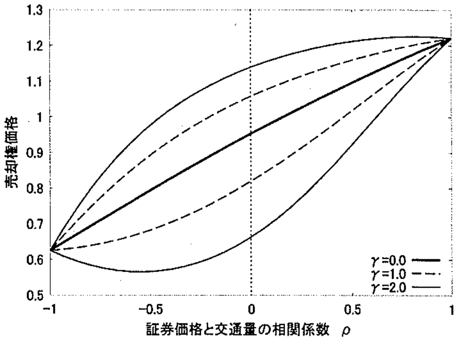
$$\mathrm{E}\left[\int_t^{\infty} e^{-r(s-t)}P(s)\mathrm{d}s \,\middle|\, P(t) = P\right] = AP(t) \tag{64}$$

と表される．ここで A は料金，利子率 r および交通量のドリフト μ から決定される定数である．以下では，表現を簡潔にするため，$A = 1$ となるような適当な単位変換によって，事業価格を交通量 $P(t)$ そのもので表現する．従って，価格評価したい権利のペイ・オフは，式 (62) で表される．また，市場で取引される危険資産の価格

[6] $\tilde{Z}(t)$ は 1 次元 $\mathcal{Q}$-Wiener 過程である．そのため，$P(t)$ の従う確率微分方程式 (60) が，客観的確率測度 $\mathcal{P}$ の下での過程 (50) と比べて，ドリフトが $v\pi(t)$ だけずれていることに注意しよう



図–1　初期交通量 P_0 と事業売却権価格



図–2　相関係数 ρ と事業売却権価格

$S(t)$ は式 (41) の幾何 Brown 運動に従うとする．

以下では，この権利の価格の上下限 (売手価格と，買手価格) を提案手法によって求め，各パラメタに対する権利価格の感度分析結果を示す．なお，その価格計算には，第 5 章での解析に基づく以下の解法を採用した：i) 式 (54) の Cole-Hopf 変換を用い，式 (55) を解いて Φ を求める; ii) Φ を式 (58) に代入して固有リスク要因の MPR $\{\bar{\lambda}^*\}$ を求める; iii) こうして求めた $\{\bar{\lambda}^*\}$ を式 (61) に代入し，その解としてオプション価格を求める．また，感度解析のベース・ケースとして使用したパラメタは，以下の通りである．

$$\begin{array}{llll} T=5, & \gamma=1, & K=2, & P_0=1 \\ \alpha=8\%, & \sigma=20\%, & \mu=1\%, & v=15\%, \end{array} \tag{65}$$

ただし，第 4 章 (1) 節で示したのと同様に，ここでは，安全資産をニューメレール資産にとっており，その利子率を $r=2\%$ とした．従って，式 (65) のパラメタの内，α, μ は，本来の (観測される) 値から利子率 r を引いたものであり，K は満期での値を割引したもの (i.e. $K=\hat{K}e^{-rT}$) である．

(1)　売却権価格

図–1 は，完備市場を仮定した Black-Scholes 価格，および本手法で得られる価格の上下限を比較したものである．この図では，横軸に初期 (i.e. $t=0$ での) 交通量 P_0 を，縦軸に売却権の価格をプロットしている．ここでは，P_0 以外のパラメタとして式 (65) を用い，$\rho=0.0, 0.75, 1.0$ の場合について計算を行った．

この図より，ρ が 1 に近づくほど価格幅は狭くなり，価格そのものが上昇することが判る．前者は，買手と売手のヘッジ・エラーが小さくなり，それに対するヘッジ費用の差が減少するためである．後者は，相関が強くなることで，ヘッジに必要な危険資産が多くなり，結果としてヘッジ費用が増加することを意味している．また，この図では，完備市場 (i.e. $\rho=1$) を仮定したリアル・オプション理論による評価は過大評価となり，相関を完全に無視 (i.e. $\rho=0$) した評価は過小評価となり得ることが判る．従って，経済活動と相関をもって変動する収益をもたらす事業を評価する場合は，その相関を正しく考慮する必要があると言える．

(2)　相関係数 ρ に対する感度分析

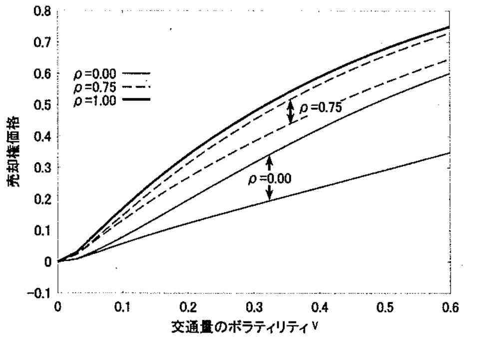
資産価格と交通量の相関係数 ρ に対する売却権価格の感度分析結果を**図–2** に示す．この図は，横軸に相関係数 ρ を，縦軸に売却権価格を，それぞれプロットしている．ここでは，γ 以外のパラメタとして式 (65) を用い，$\gamma=0.0, 1.0, 2.0$ の各ケースについて計算を行った．

この図から，以下の 2 つのことが判る．第 1 に，$\gamma\to 0$ の場合，取引主体はヘッジ・エラーを全く評価しないため，売却権価格は一意に決まる．ここで，$\rho=0$ での価格 (ENPV) と $\rho=1$ での価格 (完備市場下での Black-Scholes 価格) は大きく違っている．従って，相関を無視した従来の評価手法は，リスク選好を考慮しない場合でも不適切であると言える．第 2 に，γ が大きいほど，主体間でのヘッジ・エラーの評価に差が生じるため，価格幅が大きくなる．また，γ が同じ場合，ρ が 0 に近いほど価格幅は大きくなる．これは，ヘッジが十分行えないためにヘッジ・エラーが増加することを意味している．

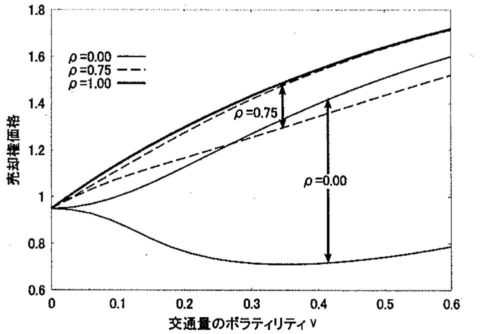
(3)　ボラティリティ v, σ に対する感度分析

図–3, 4 は，交通量のボラティリティに対する売却権価格の変化を，それぞれ，$K=1, K=2$ のケースについて示したものである．各ケースについて，$\rho=0.0, 0.75, 1.0$ とし，他のパラメタには式 (65) を採用した．

図–3 ($K=1$) では，交通量のボラティリティ v に対して，売却権価格の上下限が共に単調増加している．一方，**図–4** ($K=2$) では，v に対して価格の下限が減少する区間が存在する．これは，以下のように説明でき



図–3 交通量のボラティリティvと事業売却権価格 ($K=1$)

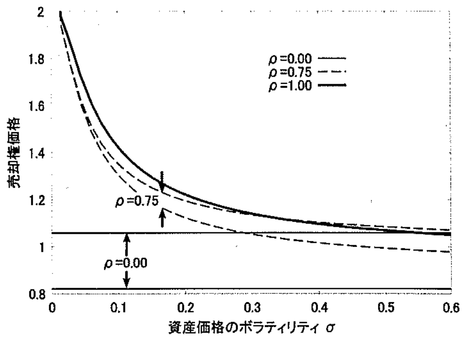


図–4 交通量のボラティリティvと事業売却権価格 ($K=2$)

る．まず，売手については，Kによらず，ボラティリティが増加するほどヘッジ費用が高くなるため，売却権価格は増加する．一方，買手価格については，2つの相反する効果が生じる．第1の効果は，売手と同じくボラティリティの増加によるヘッジ費用の増加である．これに加え，売却時の受取金額Kが高い場合，第2の効果が生じる．すなわち，ボラティリティの増加が，より高い利潤を獲得する確率の上昇をもたらすためヘッジ費用が減少する．この2つの効果のトレード・オフにより，買手価格は図–4のように変曲点を持つ．

次に，市場資産価格のボラティリティσと売却権価格の関係を図–5に示す．ここでは式(65)のパラメタを用い，$\rho=0.0, 0.75, 1.0$についてそれぞれ計算した．

この図より，売却権価格はσに対して単調減少となることが判る．また，σがある程度大きい場合，その変化は売却権の価格に殆ど影響を与えない．これは，σが大きいほど，わずかな市場資産でヘッジが可能となり，その費用が権利価格に反映されなくなることを意味している．このことは，式(47)において，σに対して$\beta^*(t)$が減少することからも明らかである．



図–5 資産価格のボラティリティσと事業売却権価格

(4) 複数の権利の価格評価

ここまでの事業価格に対する分析は，いずれも，多くのモジュール(あるいはサブ事業)から構成される事業契約を，一括して売買できる場合のみを対象としてきた．しかし，一般に，不完備市場においては，事業価格の線形性が必ずしも成立しない．すなわち，1) 事業全体をポートフォリオとして一括評価して得られる事業価格と，2) 事業を構成するサブ事業ごとに分割し，それぞれに対する価格を合計した事業価格，の2つが異なり得る．そこで，本節では，1) 2) それぞれの評価方法(スキーム)で求めた事業価格の関係を明らかにする．

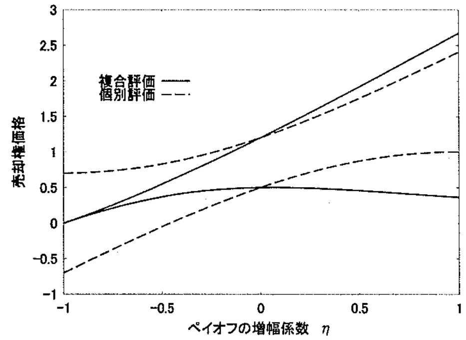
a) 評価スキームによる価格幅の比較

まず，複数の事業のペイ・オフが互いに増幅し合う場合と，相殺し合う場合について，各評価スキームで求めた価格幅の関係を検証しよう．2つの権利A, Bを考え，それぞれのペイ・オフ関数$F_A(P), F_B(P)$が以下の関係を満たすとする．

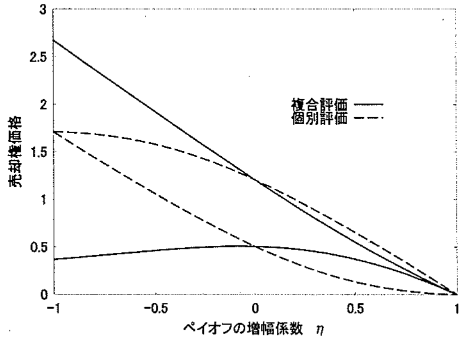
$$F_B(P) \equiv \eta F_A(P) \tag{66}$$

ここで，$\eta \in [-1, 1]$は所与の定数とし，ペイ・オフ増幅係数と呼ぶ．次に，A, Bそれぞれ1単位づつからなる権利のポートフォリオCを考える．このポートフォリオCのペイ・オフは$F_C(P) \equiv (1+\eta)F_A(P)$で表される．このとき，$\eta < 0$は，AとBのペイ・オフが相殺するケース，$\eta > 0$は，AとBのペイ・オフが増幅するケース，$\eta = 0$は，AとCが等しくなるケースを表す．この状況下で，以下の2つの評価スキームによる価格を比較する．1) ポートフォリオCの価格を評価値とする(以下，複合評価)；2) AとBの価格を個別に評価し，それぞれの価格の和を評価値とする(以下，個別評価)．

図–6は，各スキームによって得られた権利価格をηについてプロットしたものである．ここでは$\rho=0.0$とし，それ以外のパラメタには式(65)を用いた．この図より，ペイ・オフが相殺する場合 (i.e. $\eta < 0$) には，個



図–6 $A+B$ と C に対する，各スキーム間の価格比較



図–7 $A-B$ と D に対する，各スキーム間の価格比較

別評価の方がより広い価格幅を持ち，ペイ・オフが増幅する場合 (i.e. $\eta > 0$) には，複合評価の方がより広い価格幅を持つ．これより，複数の権利に対する評価スキームとしては，それぞれのペイ・オフが増幅し合うものについては複合評価の方が，相殺し合うものについては個別評価の方が望ましいと言える．

b) 権利の売買による裁定可能性

次に，権利を売買することによる裁定可能性について検証する．本手法では，市場で取引されている資産についての無裁定条件を明示的に考慮している．従って，本手法で評価した価格の下では，当該オプション (権利) と市場資産の取引による裁定機会が存在しないことは自明である．そこで，以下では，A, B を組み合わせることによる裁定可能性について検証する．

権利 A, B からなるポートフォリオの組み合わせには $A+B, A-B, -A+B, -A-B$ の4つがあり，本来，これらの全てについて検証を行う必要がある．しかし，本手法の性質を用いれば，検証するべき組み合わせを限定できる．ここで，任意のペイ・オフ F について，以下の関係が成り立つことに注意しよう．

$$\underline{f}(F) = -\overline{f}(-F), \qquad \overline{f}(F) = -\underline{f}(-F). \tag{67}$$

ただし，$\underline{f}(F), \overline{f}(F)$ は，それぞれ，ペイ・オフ F を持つ資産に対する買手価格，売手価格を表す．この関係は，それぞれのペイ・オフを双対問題 [D] の目的関数に代入すれば容易に導出できる．これより，検証する必要のあるポートフォリオの組み合わせは $A+B$ と $A-B$ の2つだけで良いことが判る．

各ポートフォリオについて，それぞれ，以下の検証を行う：ポートフォリオを売って個々の権利を購入する場合と，その逆の場合を行う場合について，一方の買手価格が他方の売手価格を上回らないことを確認する．まず，$A+B$ と，それに対応するポートフォリオ C については，**図–6** より，一方のスキームによる買手価格が他方のスキームによる売手価格を常に下回っているため，裁定機会が存在しないことが判る．次に，A を1単位買い持ち，B を1単位空売りするポートフォリオ D と，$A-B$ との裁定可能性を検証しよう．**図–7** は $A-B$ と D に関して，それぞれ個別評価，複合評価で求めた権利価格を η についてプロットしたものである．この図においても，一方のスキームによる買手価格が他方のスキームによる売手価格を常に下回っているため，$A-B$ と D の間に裁定機会は存在しない．以上のことから，A と B の組み合わせに対して裁定機会は存在しないことがわかる．

7. おわりに

(1) まとめ

本研究では，不確実な収益をもたらす社会資本整備事業を，不完備市場におけるオプションと見なし，その財務的評価 (“価格評価”) 問題に対して，以下のような特徴をもつ新たな評価手法を提案した：①動学的な経済リスクを明示的に考慮でき，かつ，現実的な事業評価問題に対しても価格評価に必要な計算が実際に実行可能である；②市場でのリスク価格に関する情報を活用できる無裁定価格理論と整合的であると同時に，効用最大化アプローチとも整合的で不完備市場リスクを考慮できる；③事業の売手・買手の契約条件から生じるリスクの非対称性を考慮しうる．

より具体的には，連続時間-連続状態の枠組みにおいて，無裁定条件，資産価格情報および KL 情報量に関する制約から，SDF (Stochastic Discount Factor) を推計するモデルを提案した．そして，その手法に関して以下の点を明らかにした．第1に，この問題が，CARA 型効用関数下での動的リスク・ヘッジ問題と双対関係にあることを明らかにし，その最適戦略とオプション価格の具体的な対応関係を導いた．第2に，2リスク要因モデルを用いて，従来の ENPV 法や完備市場を仮定したリアル・オプション理論による手法が，本手法の

特殊ケースであることを示した．また，我々のオプション評価問題が，(ある条件のもとでは) 取り扱いの容易な線形偏微分方程式問題に帰着できることを明らかにし，価格評価のための具体的かつ効率的な数値計算法を提案した．最後に，そのアルゴリズムを用いた数値解析によって，不完備市場でのオプション価格の性質を明らかにした．

(2) 本手法の適用上の注意と応用範囲

本文では述べなかったが，本手法を実際に利用するために注意するべき点がいくつかある．まず，本手法を適用する際に必要となる以下の 3 つの外生変数の決定方法を示す：① 証券価格などの資産価格情報；② 事業がもたらすキャッシュ・フローと経済変数の確率変動の間の相関の度合い (i.e. 第 6 章における資産価格と交通量の相関係数 ρ)；③ 事業の売買を行う取引主体が持つリスク選好 (i.e. 双対問題における絶対危険回避度 γ)．この内，①, ②は情報そのものが観測できるか，観測情報を元にした推計が行える．一方，③は，様々な実証研究の結果，妥当とされるオーダーが確認されており，これに基づいて評価者が決定する．

次に，本手法は，事業を売買する主体がつける価格の “上下限” のみを求める方法であることにも注意が必要である．これは，事業の売買によって各取引主体が負うリスクの非対称性と，それに対する主体のリスク回避性向を明示的に導入したためである．もちろん，本研究の枠組みに，事業の実態に応じた追加的な条件を付加することで，事業価格を一意に決めることもできる．例えば，事業の売手が独占的かつ買手が競争的ならば，当該事業の価格は売手価格に一致するだろう．

これらの点に注意すれば，本手法は以下のような用途に幅広く応用できる．まず，本手法は，従来評価されてきた事業の “財務的” 価値の妥当性を，観測情報や過去の実証結果から得られる外生情報①～③に基づいて検証するツールとして利用できる．具体的には，従来手法による評価が本手法で求めた価格の上下限を越える場合，実証結果から大きく外れたリスク回避性向を仮定しなければならない事から，従来評価が不適切である，と判断できる．また，本手法は複数の事業の優劣を客観的に判断する指標をもたらす．具体的には，複数の事業に対して，共通の危険回避度を用いた評価を行うことによって，事業別の恣意的な価値基準に基づいた評価を避けることができる．

また，本手法の評価対象は，社会資本整備事業に限定されない．具体的には，対象から発生するキャッシュ・フローの確率的変動によるリスクが，証券または資産の運用によってある程度ヘッジ可能であれば，任意の対象に応用可能である．例えば，社会資本整備事業と密接な関係にある不動産の評価を考えよう．多くの場合，不動産から発生するキャッシュ・フロー (e.g. 地代収入) の確率的変動は，経済活動と相関を持つ．従って，当該不動産の価値の評価や，キャッシュ・フロー変動リスクに対するヘッジ戦略の決定に本手法がそのまま適用できる．

(3) 今後の課題

本稿では扱わなかったが，本研究のアプローチを活用した今後の研究課題の内，重要と思われるものをいくつか挙げておこう．第 1 に，社会資本整備事業に関わる意思決定の多くは，“実行するかどうか” だけではなく，“いつ行うか” も選択可能である．このような選択権 (契約) は，権利行使時刻を決定可能なオプション (i.e. アメリカン・オプション) と見なせる．このようなオプションを取り扱うには，買手/売手の立場が非対称なモデルを扱う必要がある．本研究は，買手/売手を明示的に区別しているため，このようなモデルへも拡張が可能である．その詳細については，長江・赤松[25] を参照されたい．第 2 に，事業の財務的価値に大きな影響を与える “金利リスク” や “為替リスク” といった金融リスクをより明示的かつ正確に計量するための拡張も重要である．このような拡張は，基本的には，本研究で一般的な状態変数 (取引可能資産価格) として表現した変数を具体化するだけで対応可能である．例えば，金利リスクであれば，状態変数を瞬間 spot rate や forward rate におきかえた金利期間構造モデル (例えば，Jarrow[15], Duffie[7]等の解説を参照) を組み込めばよい．

これらとは別に，本研究でのアプローチを，“財務的” 評価だけではなく，“社会経済的” 評価問題へと発展させることも重要である．ここで “社会経済的” 評価とは，財務的キャッシュ・フローではなく，社会便益フローに基づき，その変動リスクを明示的に考慮した経済価値評価である．このような方法論を開発するには，従来の便益評価理論を，本研究のように，動学的枠組の下で市場資産情報を活用できる理論へと再構築する必要がある．しかし，そのための理論は未だ十分に整備されているとは言い難く，今後の研究の発展が待たれる．

参考文献

1) Breeden, D. T.: An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, pp. 265–296, 1979.
2) Cochrane, J. H.: *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, 2001.
3) Cochrane, J. H. and Saá-Requejo, J.: Beyond arbitrage: Good-deal asset price bounds in incomplete markets, *Journal of Political Economy*, Vol. 108, No. 1, pp. 79–119, 2000.
4) Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A.: An in-

tertemporal general equilibrium model of asset prices, *Econometrica*, Vol. 53, pp. 363–384, 1985.
5) Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A.: A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, Vol. 53, pp. 385–407, 1985.
6) Davis, M. H., Panas, V. G. and Zariphopoulou, T.: European option pricing with transaction costs, *SIAM Journal on Contrtol and Optimization*, Vol. 31, No. 2, pp. 470–493, 1993.
7) Duffie, D.: *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, Princeton, 2nd edition, 1996.
8) El Karoui, N. and Quenez, M. C.: Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 33, No. 1, pp. 29–66, 1995.
9) Hansen, L. P. and Jagannathan, R.: Implications of security market data for models of dynamic economies, *Journal of Political Economy*, Vol. 99, pp. 225–262, 1991.
10) Hansen, L. P. and Jagannathan, R.: Assessing specification errors in stochastic discount factor models, *The Journal of Finance*, Vol. 52, No. 2, 1997.
11) Harrison, J. M. and Kreps, D.: Martingale and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 20, pp. 381–408, 1979.
12) Harrison, J. M. and Pliska, S. R.: Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Process and Their Applications*, Vol. 11, pp. 215–260, 1981.
13) Heath, D., Jarrow, R. A. and Morton, A.: Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation, *Econometrica*, Vol. 60, pp. 77–106, 1992.
14) Hodges, S. D. and Neuberger, A.: Optimal replication of contingent claims under transaction costs, *Review of Futures Markets*, Vol. 8, pp. 223–238, 1989.
15) Jarrow, R. A.: *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, McGraw-Hill, 1997.
16) Kapur, J. N. and Kesavan, H. K.: *Entropy Optimization Principles with Applications*, Academic Press, 1992.
17) Karatzas, I. and Shreve, S. E.: *Methods of Mathematical Finance*, Springer-Verlag, New York, 1991.
18) Lucas Jr., R. E.: Asset prices in an exchange economy, *Econometrica*, Vol. 46, pp. 1429–1445, 1978.
19) Luenberger, D. G.: *Investment Science*, Oxford University Press, NY, 1998.
20) Luenberger, D. G.: Arbitrage and universal pricing, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol. 26, pp. 1613–1628, 2002.
21) Magill, M. and Quinzii, M.: *Theory of Incomplete Markets*, MIT Press, 1996.
22) Mehra, R. and Prescott, E.: The equity premium puzzle, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 15, pp. 145–161, 1985.
23) Merton, R. C.: An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*, Vol. 41, pp. 867–887, 1973.
24) Musiela, M. and Rutkowski, M.: *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.
25) 長江剛志, 赤松隆：不完備市場リスク要因を考慮したリアル・オプション評価, 応用地域学研究, Vol. 8, No. 2, 2003, 印刷中.
26) Naik, V.: Finite state securities market models and arbitrage, in Jarrow, R. A., Maksimovic, V. and Ziemba, W. T. eds., *Finance*, Vol. 9 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, chapter 2, pp. 31–64, Elsevier Science, 1995.
27) Stutzer, M.: A Bayesian approach to diagnosis of asset pricing models, *Journal of Econometrics*, Vol. 68, pp. 367–397, 1995.
28) Stutzer, M.: A simple nonparametric approach to derivative security valuation, *The Journal of Finance*, Vol. 51, No. 5, pp. 1633–1651, 1996.
29) Weil, P.: The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 24, No. 2, pp. 401–421, 1989.

(2003.1.6 受付)

DYNAMIC PRICING OF INFRASTRUCTURE PROJECTS WITH STOCHASTIC CASH FLOW STREAMS

Takashi AKAMATSU and Takeshi NAGAE

We present a new approach for dynamic pricing of infrastructure investment projects with stochastic cash flow streams. In our framework, projects are viewed as options in an incomplete market, whose prices are determined by a stochastic discount factor (SDF) reflecting an option writer/buyer's aversion to "basis risks". We first formulate a "regularized inverse problem" that estimates a unique arbitrage-free SDF from observed asset prices. We then show that the problem is equivalent to a dynamic risk control (hedging) problem with CARA utility. Our analysis further reveals that ask/bid price of an option significantly depends on the correlation between option pay-off and asset prices traded in security markets.