

# 二次元重み付差分法の浅海流への適用

中村直史<sup>1</sup>・加納正道<sup>2</sup>・空閑幸雄<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 修(工) 九州産業大学大学院 工学研究科 (〒813-8503 福岡市東区松香台2-3-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 九州産業大学 工学部土木工学科 (〒813-8503 福岡市東区松香台2-3-1)

<sup>3</sup>正会員 東和大学 工学部建設工学科 (〒815-8510 福岡市南区筑紫丘1-1-1)

重み付差分法 (WFDM) は、領域内を不規則四辺形の格子網で覆うことで複雑な形状の閉鎖性水域を数少ない分割で表現できる。また、本法では、考える点上の関数值を、その周辺格子点の関数值の重み付加算式で表示し、次に、基礎式を満足する変数の有限個の多項式を重み付加算式に代入して得られる重み（数個）に関する連立一次方程式を求め、これを解いて重みを決定するものである。本報は、重み付差分法による数値解が、厳密解との比較により、精度が良いことを示し、また、幾何学的に複雑な地形かつ広大な干潟の出現する水理模型における浅海流方程式の潮流解析に適用可能な二次元重み付差分法を開発し、その解析方法および重み付差分法解が水理模型実験解の高い再現性を示すことについて述べたものである。

**Key Words :** numerical analysis, weighted finite difference method, irregular quadrilateral lattice, hydraulic model of tideland, shallow water flow

## 1. はじめに

浅海流方程式の数値解析は、数値流体力学の分野において、閉鎖性海域などの乱流領域における水質汚濁機構の解明や環境影響評価のためのツールとして、差分法、有限要素法、境界要素法、有限体積法などによって検討が行われている。これらの解析方法には、それぞれ境界条件の対応、精度、安定性などに特徴があり、このうち差分法は、数値流体力学において、複雑な流れ現象を取扱うことが便利であることからよく用いられている。この差分法の1つとして、加納らは、渡部が開発した熱伝導方程式の数値解析で差分式の係数を与えられた微分方程式を満足する有限個の多項式を用いて定める方法<sup>1)</sup>を発展させている。即ち、この方法の理論的根拠を明確にし、次いで一次元移流分散方程式を対象に、この方程式を満足し、収束性をもつ多項式を新たに求め、この多項式を用いて差分式の係数（重み）を求める方法を述べ、重み付差分式による一次元移流分散方程式の数値解について、その精度が四次オーダーであることを報告している<sup>2)</sup>。この方法は、二次元移流分散問題へ適用した場合に一次元と同等な精度をもち<sup>3), 4)</sup>、次に地下塩水くさび移流拡散などの解析において境界要素法との結合解法を用いた場合に室内実験値の再現性が高い結果を与えている<sup>5), 6)</sup>。ま

た、重み付差分法 (WFDM) は、次章、2. (1) に述べる特徴をもっている。そこで、本報では、これらの特徴を生かした WFDM が移流問題の数値解において、厳密解との比較により、精度が良いことを示す。次に、幾何学的に複雑な地形を有し、かつ干潮時に広大な干潟の出現する干潟水理模型の潮流解析に適用可能な二次元 WFDM を新たに開発し、その解が、実験実測値の高い再現性を示すことを述べる。このように WFDM は、複雑な地形をもつ水理模型の潮流解析を精度良く行うことができ、また、二次元移流分散問題へ適用した精度も良いので、閉鎖性水域における水質汚濁機構の解明や環境影響評価を行う手法として WFDM は有用であると考えるものである。

## 2. 移流方程式の重み付差分法による数値解

数値流体力学の分野では、移流項に起因する大きな分散誤差などの高波数成分による精度低下の問題が知られ、移流項の安定な計算を可能とする風上差分法においても、数値拡散を抑制する何らかの工夫が必要となる。本章では、まず WFDM の特徴を記述し、次いで、一次元線形移流方程式を取り上げ、WFDM による数値解を厳密解と比較し精度検証を行う。

## (1) WFDM の特徴

WFDM は、他の手法と比較して、次に述べる特徴をもつと思われる。

- a) WFDM は不規則四辺形の格子網を用いることができる、複雑な形状の対象水域を数少ない分割で、座標変換などの操作が不要な陽な形によって表現できる。
- b) 本法は、選点法(Collocation 法)<sup>7)</sup>の一種と位置づけられ、考える格子点における関数値をその周辺格子点の関数値の重み付加算式で表示している。WFDM では周辺格子点の数および位置を任意に選択できるので、流れを解析するに最適な数および位置を判断すれば、水陸境界近くで採用する周辺格子点の位置変更(次章 3.(4)g)で記述している)や風上差分など有利な差分モデルの採用が容易である。
- c) WFDM の重みを決定する連立一次方程式は、線形化した基礎方程式を厳密に満足する多項式を数個採用しこれを離散化して作成される。そこで、WFDM は、基礎方程式に含まれる流速、渦粘性などの重要な諸元および不規則四辺形の歪み率を導入でき、従って、これを用いた解析結果では、流れ領域が幾何学的、現象的に複雑であっても、これを忠実に表現できることが期待される。

## (2) 基礎式

極座標表示の一次元線形移流方程式を式(1)に示す。ここで、 $\omega$  (rad/s) は角速度であり、C は相対濃度(無次元)、t は時間(s)とする。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \omega \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1)$$

## (3) WFDM による解法

### a) 格子分割

WFDM は、不規則四辺形格子を用いることができるるので、極座標で表示した領域分割が通常の差分法よりも容易である。ここでは、一次元問題を取り扱うが、二次元領域分割を視野に入れて図-1 に示すような格子分割を行った。

### b) 解析条件

初期値は、 $\theta=0$ 、動径方向  $r=1$  の地点において最高値 1 となるような余弦波(図-1 に黒丸で示す部分)(式(2))を与えた。

$$C(\theta, P=0) = \begin{cases} \frac{1+\cos(9\theta)}{2}, & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{9}, \frac{17\pi}{9} \leq \theta < 2\pi\right) \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2)$$

ここに、P は時間ステップ数を表わす。また、 $\theta=0$ 、動径方向  $r=1$  の地点において周期境界条件を採用して一次元循環流を表わし、10s 後、20s 後、30s 後の数値解と厳密解の比較を行うことにする。時間刻み幅  $\Delta t$  は 0.1s、空間格子間隔  $\Delta \theta$  は  $2\pi/N$ 、N は格子分割数であり、ここでは N=72, 144 の 2 種類とした。

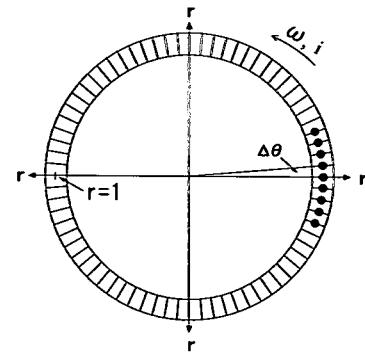
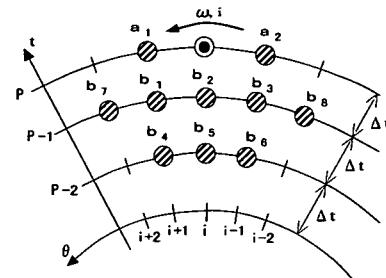


図-1 格子分割(分割数 N=72 の場合)



◎: 考る点 ◇: 周辺点

図-2 差分格子

### c) WFDM 差分モデル

WFDM では、前述のように、使用する周辺点の個数や位置を期待する解析精度を考慮して任意に選ぶことができる。従って、本解析の移流問題における差分モデルについても、図-2 に示す 10 個の格子から重みの計算に使用する周辺点を選ぶことができるが、本解析では、クーラン数( $C_h$ )が、0.1 から 1.0 の範囲全てに対応できるモデルとして、重み付差分式(3)および周辺点として  $b_3, b_2, b_6$  の箇所を用いた。

$$C(i, P) = b_3 \cdot C(i-1, P-1) + b_2 \cdot C(i, P-1) + b_6 \cdot C(i-1, P-2) \quad (3)$$

ここに、 $C(i, P)$  は点  $(i * \Delta \theta, P * \Delta t)$  における濃度を示し、重み  $b_3, b_2, b_6$  は、3 元連立一次方程式(4)を解くことにより決定される。また、連立一次方程式(4)は式(5)に示す 3 個の多項式  $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}$  を用いて作成できる<sup>1)</sup>。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ C_{N-1} & C_N & 2C_{N-1} \\ (C_{N-1})^2/2! & C_N^2/2! & (2C_{N-1})^2/2! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

表-1 各時間の濃度 C の最大値

経過時間 C <sub>N</sub>	10sec		20sec		30sec	
	分割数 N=72	N=144	N=72	N=144	N=72	N=144
0.1	0.959	0.998	0.937	0.998	0.882	1.007
0.2	0.965	0.996	0.906	1.003	0.835	1.007
0.3	0.965	0.999	0.927	0.999	0.862	1.006
0.4	0.992	1.000	0.988	0.997	0.948	0.996
0.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.6	0.988	0.999	0.966	0.998	0.952	0.995
0.7	0.982	0.999	0.938	0.998	0.866	1.007
0.8	0.965	0.996	0.909	1.003	0.836	1.007
0.9	0.959	0.999	0.938	0.998	0.883	1.006
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

表-2 重み付差分式の重み (b<sub>3</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>6</sub>)

C <sub>N</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>6</sub>
0.1	-0.800	0.800	1.000
0.2	-0.600	0.600	1.000
0.3	-0.400	0.400	1.000
0.4	-0.200	0.200	1.000
0.5	0.000	0.000	1.000
0.6	0.200	-0.200	1.000
0.7	0.400	-0.400	1.000
0.8	0.600	-0.600	1.000
0.9	0.800	-0.800	1.000
1.0	1.000	0.000	0.000

$$C^{(0)} = 1$$

$$C^{(1)} = \theta - \omega t$$

$$C^{(2)} = (\theta - \omega t)^2 / 2!$$

$$\dots$$

$$C^{(n)} = (\theta - \omega t)^n / n!$$

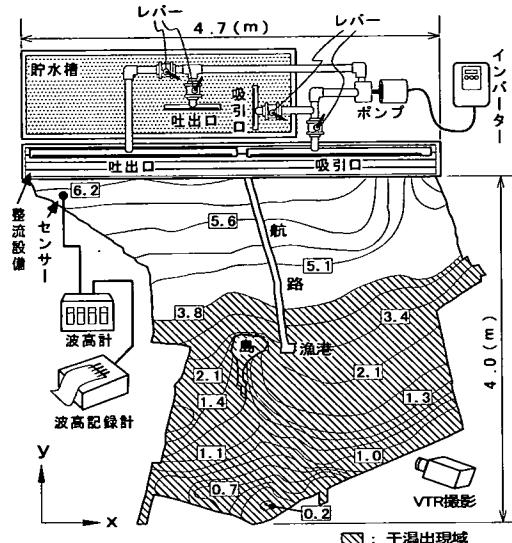
ここに、n は ( $\theta - \omega t$ ) の次数を表わす。  
(5)

#### d) 厳密解との比較

表-1 は、角速度  $\omega$  を変えることで、クーラン数条件の異なる 10 ケースの解析を行った結果であり、それぞれ WFDM による 10s 後、20s 後、30s 後の最大濃度（厳密解は、全て 1.0）を示す。計算開始から 30s 後（計算ステップ数 300 回）までの厳密解に対する相対誤差において、クーラン数 ( $C_N$ ) が 0.5, 1.0 で誤差が 0 と精度が良い。他の  $C_N$  では、空間格子間隔  $\Delta \theta$  が  $\pi/36$ ,  $\pi/72$  ( $N=72$ , 144 に相当) の場合でそれぞれ 0.2~17%, 0.1~0.7% 程度の誤差であり、特に  $N=144$  の場合には、比較的誤差が少なく安定した解を得た。また、表-2 に、式(5)より得られた各計算ケースにおける重みの値 ( $N=72, 144$  の場合で共通) を示す。

### 3. 二次元重み付差分法の浅海流への適用

地下塩水くさび拡散など移流解析においては、WFDM の安定性、精度は優れている<sup>4), 5)</sup>。本章では不規則な四辺形格子を用いた二次元 WFDM を二次元浅海流方程式に適用する手法などを示す。即ち、解析の対象として潮位変動により解析領域の大部分に干潟海域が交互に出現する水域を取り扱い、潮流解析



※等深線は、実海域満潮時 (単位 : m)

図-3 干潟海域水理模型実験装置

における WFDM 解の模型実験値再現性を検証することで二次元 WFDM の有効性を示す。そこでまず、WFDM の正解値を与える干潟模型実験を説明し、次にそれに関する WFDM の適用について述べる。

#### (1) 干潟水理模型実験装置

干潟海域模型実験装置の概要図を図-3 に示す。実験装置は、開口部 1ヶ所にポンプ式潮汐発生装置が付設され、ある干潟海域を想定した水深変化をもつ、x, y 方向がそれぞれ約 5.2m, 4.0m の領域で、鉛直縮尺 1/20, 水平縮尺 1/893 の歪模型である。

図-3 に示した十数本の等深線(実海域深さを四角柱内に示す: 単位 m)にみられるように遠浅の海域であり、干潮時には領域の半分以上が干潟となっている。実験室のスペース上の制約から、歪率を海域模型としては大きくとっている。そこで、歪模型で得られた結果であるから、現地スケールに換算せず、模型スケールで計算した。潮汐 1 周期あたり 20 パターンに分割したポンプの回転数をインバーターで制御することによって、また、ポンプによる吐出し吸い込みの方向を 4 個のレバー操作で切り替えて、模型装置の水位に正弦波の潮位変動を再現できることを容量式波高計で確認している。尚、配管中のポンプ吐出口側では、吐出流に起因する脈動流れを抑制する目的で、不織布マット、スポンジなどを複数段挿入し整流している。

## (2) 実験条件および実験方法

実海域での1潮時周期を12時間と想定すれば、歪模型の相似率より算定した模型の1潮時3分36秒を得る。この1潮時について20パターンの異なる回転数をポンプに与えるように、モーター電源周波数を制御することで模型装置の水位に正弦波の潮位変動を再現している。また、水面に浮かべたフロートの動きおよび汀線の移動をデジタルVTR撮影し、静止画像を連ねて流跡図を作成してこれらから流速ベクトル、汀線移動距離を求めて実験実測値とした。

## (3) 基礎式

潮流の基礎方程式として二次元浅海流方程式(式(6), (7))および連続の式(8)を用いる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{M}{h+\zeta} \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{N}{h+\zeta} \frac{\partial M}{\partial y} - \epsilon \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) = -g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2} M \sqrt{M^2 + N^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{M}{h+\zeta} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{N}{h+\zeta} \frac{\partial N}{\partial y} - \epsilon \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) = -g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2} N \sqrt{M^2 + N^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

ここに、 $M, N$ は $x, y$ 方向の線流量、 $t$ は時間、 $\zeta$ は潮位変動量、 $\epsilon$ は水平方向の渦動粘性係数、 $\gamma_b^2$ は海底摩擦係数、 $h$ は地盤高、 $g$ は重力加速度を表わす。尚、コリオリの力および水面摩擦の項(吹送流)は、室内実験を対象とするため無視している。

## (4) 浅海流方程式の二次元WFDMによる解法

### a) 格子分割

WFDM解析用格子分割を図-4に示す。不規則な四辺形格子を用いているため空間格子間隔は変動するが、平均0.1m程度で格子分割を行い、水域の分割格子数を約 $54 \times 41$ 格子とした。同図に示すように、比較的数少ない格子で複雑な幾何学的形状を表現することができる。また、WFDMでは、複雑な幾何学的形状を表わす場合に、境界適合座標法<sup>8)</sup>で用いていくる座標変換の必要がない。そこで、WFDMにおいては陽な形で流れや汀線の変動などを取り扱うことが可能となる。

### b) 解析条件

時間格子間隔 $\Delta t$ は、Courant-Friedrichs-Lowy条件(CFL条件)を考慮して、模型時間で0.01secとし、模型装置の開口部における潮位変化に対応した強制潮位( $\zeta^*$ )は、次式(9)に示す余弦波で与えた。

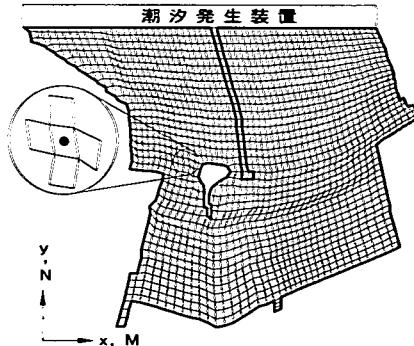


図-4 解析領域格子分割

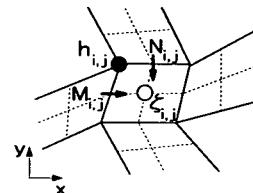


図-5 格子と諸量の配置

ここに、 $P$ は計算ステップ数、 $T$ は潮汐周期であり、式(9)中の定数は、模型の地盤高、水深と潮位を合わせるために挿入し、また満潮時を位相差0で表現している。

$$\begin{aligned}\zeta^* &= 0.08625 \times \cos \theta + 0.09675 \text{ (m)} \\ \theta &= 2\pi \cdot \Delta t \cdot P/T\end{aligned}\quad (9)$$

また、 $x, y$ 方向の線流量 $M, N$ 、地盤高 $h$ および潮位 $\zeta$ の諸量は、連続の式における水量保存則などを考慮し、図-5のように配置した。

### c) 二次元WFDMモデル

二次元浅海流方程式および連続の式を用い、線流量 $M, N$ および潮位 $\zeta$ を未知量としてWFDMにより解析する方法を以下に示す。

$M$ を計算するための多段階陽形式WFDMモデルは式(10)および図-6で表わされる。ここに、 $M(i, j, P)$ は点 $(i * \Delta x, j * \Delta y, P * \Delta t)$ における $x$ 方向の未知な線流量を示し、また、 $\alpha, \beta$ は格子の歪率、 $S$ は平均格子幅である。

$$\begin{aligned}M(i, j, P) &= a_1 \cdot M(i, j, P-2) + a_2 \cdot M(i+1, j, P-2) \\ &\quad + a_3 \cdot M(i-1, j, P-2) + b_1 \cdot F(i, j, P-1) \\ &\quad + b_2 \cdot F(i+1, j, P-1) + b_3 \cdot F(i-1, j, P-1)\end{aligned}\quad (10)$$

ここに示した WFDM では、考える点即ち点( $i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, P \cdot \Delta t$ )における未知量  $M$  が、  $(P-1) \cdot \Delta t$  時刻における 3 周辺点の既知な非同次項 ( $F_L$  で示す) および  $(P-2) \cdot \Delta t$  時刻における 3 周辺点の既知な線流量  $M$  に重みを付け加算した値として計算される。WFDM では、周辺格子点の数およびそれらの点の位置は自由に選ぶことができるので多くの WFDM 差分モデルを用いることができる訳であるが、この線流量解析用のモデルでは、周辺格子点の数は 3 個とし、3 個の点の位置としては流れ方向に中央差分をとることとした。但し、陸域に近接する境界条件を与える場合には、次項 g) で述べるように、周辺格子点の位置を変更した風上型 WFDM モデルで取り扱った解析を行っている。線流量  $M$  と非同次項  $F_L$  を与える時刻に  $\Delta t$  の差があるのは、多段階差分モデルを導入して陽形式型 WFDM モデルの安定性向上を目指したためである。

#### d) 線形化と WFDM モデルの決定

WFDM モデルを決定するために、浅海流方程式に線形化を施す。ここで、式(6)に示す  $x$  方向浅海流方程式について、線形化と WFDM モデルの決定方法を述べよう。式(6)左辺の非線形項について、式(11)のように  $m, n$  を定義し、前の時間の  $M, N, \zeta$  を与える既知項とする。式(6)右辺については、求めようとする  $M$  を含んでいるが、上述と同様に前の時間の  $M, N, \zeta$  を与えると現在の時間の  $M$  とは独立に求めら

れる非同次項で既知となるから、この項を  $F_L$  と記している(式(12))。以上から、式(6)を線形化すれば式(13)で表わされる。

$$\frac{M}{h+\zeta} = m, \quad \frac{N}{h+\zeta} = n \quad (11)$$

$$-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2} M \sqrt{M^2 + N^2} = F_L \quad (12)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + m \frac{\partial M}{\partial x} + n \frac{\partial M}{\partial y} - \varepsilon \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) = F_L \quad (13)$$

ここで、WFDM の定式化および重みの定め方を述べよう。まず、3 個の重み  $a_1, a_2, a_3$  を定めるためには、非同次項  $F_L$  による影響は重み  $b_1, b_2, b_3$  へ盛り込むことができるから、 $a_1, a_2, a_3$  については式(13)右辺(即ち  $F_L$ )をゼロとおいた同次方程式(14)を取り扱って、次の操作を行う。即ち、同次方程式(14)に関し、図-6において  $a_1, a_2, a_3$  がついた 3 個の既知な線流量の重み付加算式から考える点の未知な線流量を決定するための表現として式(15)が与えられる。このとき、重み  $a_1, a_2, a_3$  は、3 元連立一次方程式(16)を解くことにより決定される。尚、式(14)を満足する 3 個の多項式(式(17)<sub>1</sub>～式(17)<sub>3</sub>、一般に式(17)<sub>r</sub> で表わされる)を離散化し、式(15)に代入すれば連立一次方程式(16)が得られる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + m \frac{\partial M}{\partial x} + n \frac{\partial M}{\partial y} - \varepsilon \left( \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (14)$$

$$M(i, j, P) = a_1 \cdot M(i, j, P-2) + a_2 \cdot M(i+1, j, P-2) + a_3 \cdot M(i-1, j, P-2) \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2C' & \alpha_{i+1} + 2C' & \alpha_{i-1} + 2C' \\ (C')^2 - 2D' & (\alpha_{i+1} + 2C')^2 / 2 - 2D' & (\alpha_{i-1} + 2C')^2 / 2 - 2D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここに、  $C' = m \Delta t / (\alpha S + n \Delta t) / \beta S$  : 二次元クーラン数  
 $D' = \varepsilon \Delta t \{ 1 / (\alpha S)^2 + 1 / (\beta S)^2 \}$  : 二次元拡散数

$$(16)$$

$$M^{(0)}(x, y, t) = 1 \quad (17)_1$$

$$M^{(1)}(x, y, t) = X + Y \quad (17)_2$$

$$M^{(2)}(x, y, t) = \frac{(X+Y)^2}{2!} + 2\varepsilon t \quad (17)_3$$

$$M^{(r)}(x, y, t) = \sum_{i=0}^{(r/2)} \left\{ \frac{(X+Y)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(2\varepsilon t)^i}{i!} \right\} \quad (17)_r$$

ここに、 $X = x - mt$ ,  $Y = y - nt$ ,  $r$  は  $X, Y$  の次数であり、 $I(r/2)$  は  $(r/2)$  の整数部分をとることとする。

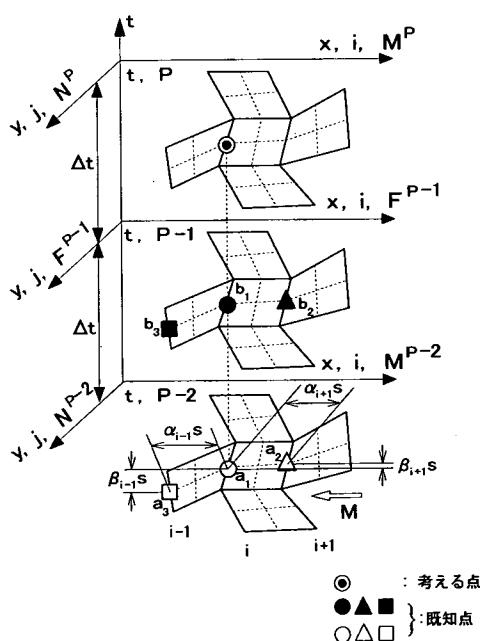


図-6 多段階陽形式 WFDM モデル

次に、 $b_1, b_2, b_3$ を下記の手順で定める。即ち、式(13)に関し、図-6において $a_1 \sim a_3$ の付いた6個の既知点の重み付加算式から考える点の未知量Mを計算する式として前掲の式(10)が与えられる。重み $b_1, b_2, b_3$ を決定するための3元連立一次方程式(18)を得るには、式(13)を満足する多項式群(式(19)<sub>M</sub>～式(19)<sub>F</sub>)の3組( $r=0, 2, 4$ の組み合せ)を離散化し、式(10)へ代入すればよい。

$$\begin{bmatrix} B(1,1) & B(1,2) & B(1,3) \\ B(2,1) & B(2,2) & B(2,3) \\ B(3,1) & B(3,2) & B(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = -\frac{S^2}{\varepsilon} \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$M^{(r)}(x, y, t) = -\sum_{i=0}^{(r/2)} \left\{ \frac{(X+Y)^{r-2i}}{(r-2i)!} \cdot \frac{(\varepsilon t)^i}{i!} \right\} \quad (19)_M$$

$$F^{(r)}(x, y, t) = \varepsilon \sum_{i=0}^{(r/2)-1} \left\{ \frac{(X+Y)^{r-2-2i}}{(r-2-2i)!} \cdot \frac{(\varepsilon t)^i}{i!} \right\} \quad (19)_F$$

ここに、式(18)の係数は下記に示される。

$$\begin{aligned} B(1,1) &= 1 \\ B(2,1) &= \{(C')^2 - D'\}/2 \\ B(3,1) &= \{(C')^4 - D'(C')^2\}/4 + (D')^2/8 \\ B(1,2) &= 1 \\ B(2,2) &= \{(\alpha_{i+1} + C')^2 - D'\}/2 \\ B(3,2) &= \{(\alpha_{i+1} + C')^4 - D'(\alpha_{i+1} + C')^2\}/4 + (D')^2/8 \\ B(1,3) &= 1 \\ B(2,3) &= \{(-\alpha_{i+1} + C')^2 - D'\}/2 \\ B(3,3) &= \{(-\alpha_{i+1} + C')^4 - D'(-\alpha_{i+1} + C')^2\}/4 + (D')^2/8 \\ A(1,1) &= 2(C')^2 - D' \\ A(2,1) &= 2(C')^3/3 \\ &\quad - C'D' + (D')^2/2 \\ A(3,1) &= (2C')^6/6! - (2C')^4/4! \\ &\quad + (D')^2(2C')^2/4 - (D')^3/6 \\ A(1,2) &= (\alpha_{i+1} + 2C')^2/2 - D' \\ A(2,2) &= (\alpha_{i+1} + 2C')^4/4! \\ &\quad - (\alpha_{i+1} + 2C')^2D'/2 + (D')^2/2 \\ A(3,2) &= (\alpha_{i+1} + 2C')^6/6! - D'(\alpha_{i+1} + 2C')^4/4! \\ &\quad - (D')^2(\alpha_{i+1} + 2C')^2/4 - (D')^3/6 \\ A(1,3) &= (\alpha_{i+1} + 2C')^2/2 - D' \\ A(2,3) &= (\alpha_{i+1} + 2C')^4/4! \\ &\quad - (\alpha_{i+1} + 2C')^2D'/2 + (D')^2/2 \\ A(3,3) &= (\alpha_{i+1} + 2C')^6/6! - D'(\alpha_{i+1} + 2C')^4/4! \\ &\quad - (D')^2(\alpha_{i+1} + 2C')^2/4 - (D')^3/6 \end{aligned} \quad (20)$$

式(18)では、 $b_1, b_2, b_3$ 以外の値は $a_1, a_2, a_3$ の値を含めて全て既知なので、この3元連立一次方程式を解くことより $b_1, b_2, b_3$ の値が求まる訳である。ここに、必要な $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ の重み全てが得られ、非同次型重み付差分式(10)が決定され、WFDMを用いた浅海流解析が可能となった。重みを決定する連立一次方程式(18)の各項は、式(20)に記すように、二次元

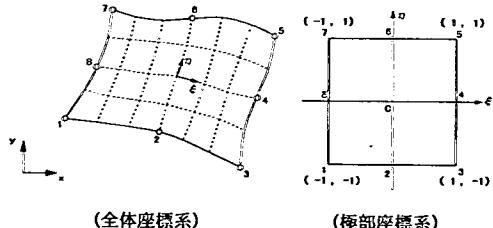


図-7 8節点アイソパラメトリック要素

のクーラン数( $C'$ )、拡散数( $D'$ )、格子の歪率( $\alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}$ )を含んでいる( $\beta_{i-1}, \beta_{i+1}$ は $C', D'$ の中に含まれる)。このように、重みを決定する際に、流速、渦粘性係数および不規則四辺形の歪率を取り入れることができることが、流れが複雑な場へ適切に対応したWFDMの設定を可能とする根拠である。尚、非同次項 $F_L$ に含まれる微分項および連続式の計算結果はWFDM解析値に大きく影響を与えるから、これらの計算方法と精度は充分に検討する必要があろう。そこで、不規則四辺形を用いる場合に、精度良く非同次項などを計算する方法について次に述べる。

#### e) 非同次項および連続式の計算方法

不規則四辺形を用いる場合に、運動方程式の左辺に含まれる項についてはWFDMモデルで取り扱うことができるが、右辺の非同次項や連続の式の中で $\partial u / \partial x, \partial M / \partial x, \partial N / \partial y$ などの微分項を陽的に求めるために以下に述べる工夫を行う。即ち、これらを不規則四辺形において陽的に微分を行った際に、全体座標系( $x, y$ )から極部座標系( $\xi, \eta$ )への座標変換を用いる8節点アイソパラメトリック要素に基づいた解析を行っている。

$u, M, N$ などの未知量を $u$ で代表すると、未知関数 $u(x, \xi, \eta), y(x, \xi, \eta)$ の $x, y$ による微分は、次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^8 \left( \frac{\partial S_k}{\partial x} u_k \right) \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=1}^8 \left( \frac{\partial S_k}{\partial y} u_k \right) \quad (22)$$

ここで、 $S_k (S_1 \sim S_8)$ は形状関数であり、形状関数の微分は、ヤコビアン行列 $J$ の逆行列を用いて、次式で求められる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial S_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial S_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここに、 $i = 1 \sim 8$

尚、ヤコビアン行列 $J$ は、次式のように陽的な形で計算可能である。

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{L=1}^8 \frac{\partial S_L}{\partial \xi} x_L & \sum_{L=1}^8 \frac{\partial S_L}{\partial \xi} y_L \\ \sum_{L=1}^8 \frac{\partial S_L}{\partial \eta} x_L & \sum_{L=1}^8 \frac{\partial S_L}{\partial \eta} y_L \end{bmatrix} \quad (24)$$

以上により、不規則四辺形を用いる場合にも、WFDM 解析上必要となる微分項を求めることができる。さて、前掲の図-5 で示したように、 $\zeta$ , M, N の諸量を配置した格子点が異なることから、これらの微分計算もそれぞれ異なる点で行うことにしている。即ち、 $\partial \zeta / \partial x$  および  $\partial \zeta / \partial y$  の計算には、図-8 および図-9 に示す 8 点要素を用い、 $\partial M / \partial x$  および  $\partial N / \partial y$  を求める場合に図-10 に示す 8 点要素を用いるものである。これら 3 種類の 8 点要素の各格子点座標値は、時刻によって変わらないので、一度求めただけでよいから丸め誤差の累積がなく、周囲の不規則四辺形から容易にかつ精度良く算出される。一方、元の四辺形の 4 格子点だけを用いて  $\partial \zeta / \partial x$ ,  $\partial \zeta / \partial y$ ,  $\partial M / \partial x$ ,  $\partial N / \partial y$  を計算する場合には、計算を行う毎に、 $\zeta$ , M, N の諸量を補間により四辺形の 4 格子点へ割り付ける必要が生じる。そこで、別々の 8 点要素の異なる点で微分項の計算を行うことで、補間に割り付ける計算時間および補間誤差の累積を小さくすることができる訳である。また、要素の中心点（極部座標系で  $\xi=0, \eta=0$  の点）で微分を行うことで、 $\partial \zeta / \partial x \sim \partial N / \partial y$  の 4 個について極部座標系において差分近似した場合と同じ定義で計算することに一致させることができる。例えば、 $\partial \zeta / \partial x$  を計算する場合には、図-8 に関する極部座標系で  $(\zeta_8 - \zeta_4)/2$  を求めた後これを全体座標系に換算したものとしている（格子点 8 および 4 における  $\zeta$  の値を  $\zeta_8$  および  $\zeta_4$  と記す）。

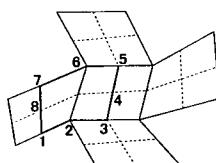


図-8  $\partial \zeta / \partial x$  の算出に用いる 8 点要素

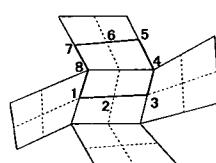


図-9  $\partial \zeta / \partial y$  の算出に用いる 8 点要素

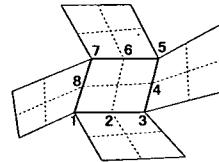


図-10  $\partial M / \partial x$ ,  $\partial N / \partial y$  の算出に用いる 8 点要素

#### f) 干潟域における海水浸入と汀線移動判定

解析対象内の干潟域は潮位変動に伴って水没と干出を繰り返し、汀線の移動は顕著なものがある。そこで、計算時刻毎に、考える点が現時刻において水没しているか干出であるかを判断する必要がある。また、干潟域にあった考える点では、現時刻に海水浸入が起きたか否かを判定する基準が求められる。これらの基準や判定に用いる地盤高  $h(x, y)$ 、潮位変動  $\zeta(x, y, t)$  を鉛直面で図-11 に示している。

これら  $h$  および次式(25), (26)を用いれば干潟出現と海水浸入の判定を行うことができる。この判定に用いる水位  $H$  および 4 隣接点の  $H$  の平均値  $\bar{H}$  について式(27), (28)に記述し、水平面での位置などを図-12 に示している。海水浸入を判定した後に、連続の式を用いて質量保存則を満たすように、新しく得た線流量  $M, N$  を使って潮位  $\zeta$  を計算している。また、干潟が出現した四辺形では潮位  $\zeta$  および線流量  $M, N$  はゼロ値とする。

$$H(x, y, t) \leq 0.5 \text{ mm} : \text{干潟出現} \quad (25)$$

$$\bar{H}(x, y, t) > 0.5 \text{ mm} : \text{干潟へ海水浸入} \quad (26)$$

$$H(x, y, t) = h(x, y) + \zeta(x, y, t) \quad (27)$$

$$\bar{H}(x, y, t) = (H_1 + H_2 + H_3 + H_4)/4 \quad (28)$$

ここに、0.5 mm は、模型スケールで示す。

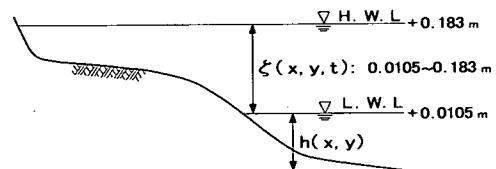


図-11 地盤高と潮位（模型スケール表示）

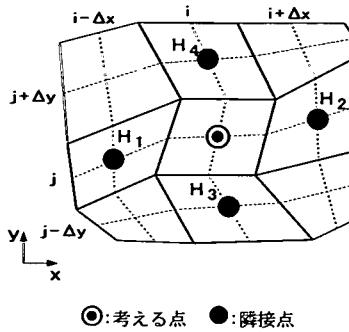


図-12 汀線移動のための平均水位の算出

これらの判定方法を適用することで、WFDM 解は、後述するように、実測した汀線移動を精度良く再現できる。

#### g) 水陸境界付近における境界条件の取り扱い

考える点が図-13 で示すように水陸境界付近にある場合には以下に記述する境界条件の検討を行っている。この場合に、図-6 で示した中央差分型 WFDM モデルをそのまま用いると、周辺陸点の線流量  $M(i-1, j, P-2)$  がゼロ値であるために、また、重み  $a_1, a_2, a_3$  の和が 1 であることから、式(15)から得られる線流量が過大または過小となってしまう。即ち、ゼロ値である周辺陸点の線流量  $M(i-1, j, P-2)$  に関する係数  $a_3$ (この係数値は非ゼロ)の分だけ減少ないし増加し、水量収支に過不足が生じる。そこで、このような場合は、式(15)の右辺第3項を式(29)で示すように周辺陸点を周辺沖点と置き換える。

$$\begin{aligned} M(i, j, P) = & a'_1 \cdot M(i, j, P-2) + a'_2 \cdot M(i+1, j, P-2) \\ & + a'_3 \cdot M(i+2, j, P-2) + b'_1 \cdot F(i, j, P-1) \\ & + b'_2 \cdot F(i+1, j, P-1) + b'_3 \cdot F(i-1, j, P-1) \end{aligned}$$

ここに、 $a'_1 \sim a'_3, b'_1 \sim b'_3$  は新しく決定した重みを表わす。

(29)

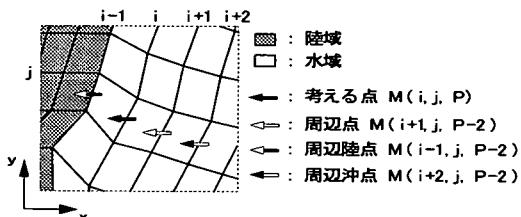


図-13 境界付近における重み付差分式の変形

即ち、水陸境界付近では、WFDM の特徴である「周辺点の位置を任意に選ぶことができる」ことを活用し、重みをとる位置を変更することで水陸境界付近の線流量が過小ないし過大になる欠点を改善した。この置き換えは、図-13 の場合には風上差分をとることになり、流れ場の物理性をより良く表現することにも通じると思われる。

#### (5) 実験結果および WFDM 解、FDM 解の比較

WFDM による汀線移動を図-14 に示し、模型実験による汀線移動を図-15 に示す。これらの図は、1 潮時 3 分 36 秒を時間的に 10 等分した 21.6 s 毎の汀線変化を示している。干潟域における水の浸入および陸地の出現を考慮した WFDM 解析結果は、模型実験の汀線変化を精度良く再現できている。また、WFDM による上げ潮時における流速ベクトルおよび模型実験値を図-16、図-17 に示し、下げ潮時における流速ベクトルおよび模型実験実測値を図-18、図-19 に示す(模型実験値の流速で表わす)。これらの WFDM 解は、模型実験の流況を流れ方向、流速ともに良好に再現できている。

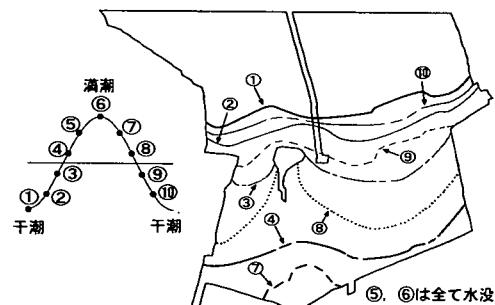


図-14 汀線移動 (WFDM 解)

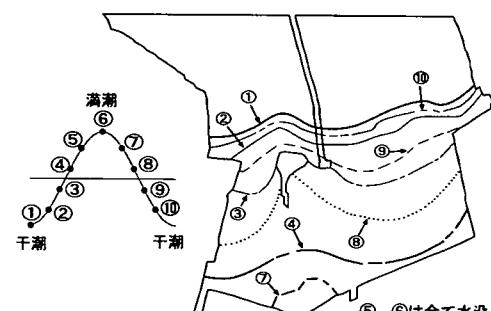


図-15 汀線移動 (模型実測値)

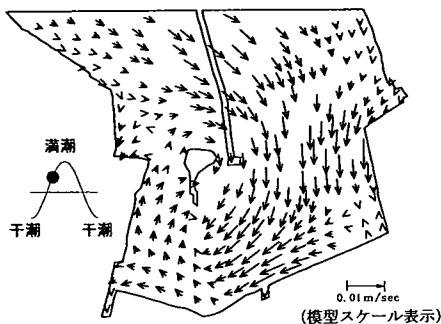


図-16 干潮→満潮 (WFDM 解)

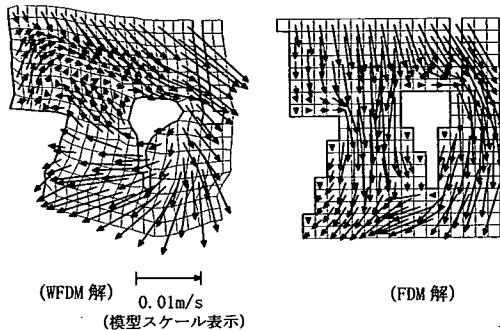


図-20 差分法解との比較 (島周辺)

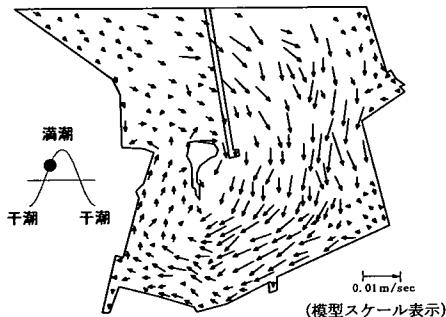


図-17 干潮→満潮 (模型実測値)

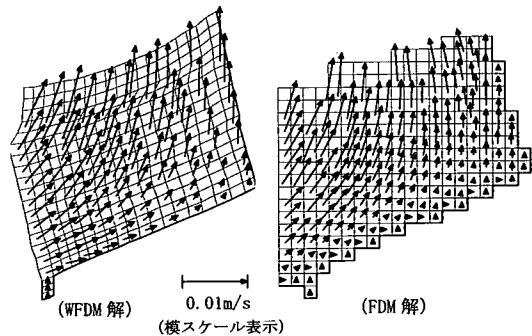


図-21 差分法解との比較 (海岸部周辺)

次に、図-20、図-21 に WFDM によって得られた流速ベクトルについて通常の二次精度差分法との比較を示す。通常の差分法では、水陸境界付近において流速成分が小さくなり、これが、これらの周辺の流速値に影響を与え、実験実測値よりも過小に算出され流向の再現性も悪い結果であった。一方、WFDMにおいては、同程度の格子数でも海岸部や島周辺の境界における沿岸流がよく表わされており、また、流速成分が過小になることもなく、実験実測値の再現が良好となった。

#### 4. むすび

本報では、まず一次元線形移流方程式を取り上げ、WFDMによる数値解を厳密解と比較し検証を行った。その結果、クーラン数が0.1から1.0の全範囲に対応する重み付差分モデルは、厳密解との比較において、クーラン数が1.0および0.5の場合に誤差ゼロの解析ができ、その他のクーラン数においても比較的誤差が少なく安定した解を与える。次に、複雑な形状の水域における浅海流を解析するために、不規則な四辺形格子を用いた二次元WFDMを提案した。陽な形で

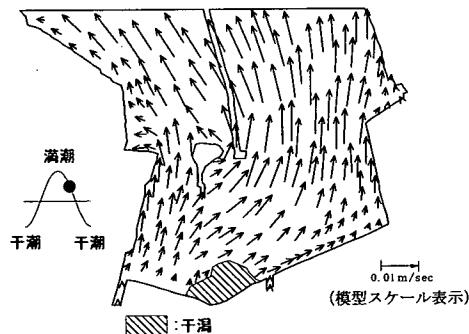


図-18 満潮→干潮 (WFDM 解)

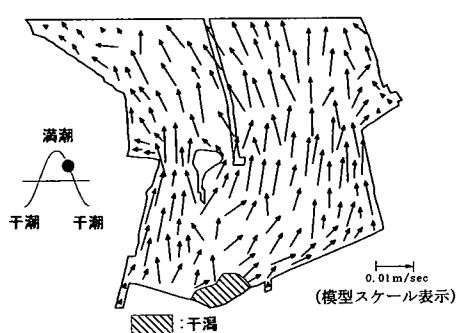


図-19 満潮→干潮 (模型実測値)

不規則四辺形を使用するWFDMが必要となる微分計算、水陸境界処理および解析精度など種々の問題点について検討し以下に示す。

(1) 不規則な四辺形格子を用いるWFDMでは、島、海岸線などの曲線状で複雑な境界を原型に近い形状で陽的に表現し得る。これを表現する上で、WFDMは境界適合座標法<sup>8)</sup>が必要とする座標変換を行わない。即ち、WFDMでは、解析領域の原型をそのまま用いて水陸境界付近における周辺点の移動や流れと汀線の変動などを取扱うことができる。更に、WFDMでは、各格子での線流量や流速に関する計算点の位置や物理性などを考慮して周辺点の位置を選び、また、その重みの決定の際には、不規則四辺形の歪率および流速や渦動粘性係数を取り入れることで幾何学的に、また現象的に複雑な流れに対応した差分モデルの設定が可能となる。

(2) 運動方程式中の非同次項および連続式の計算については、不規則な四辺形格子を用いる場合にアイソパラメトリック要素を応用することで陽的に精度良く行うことができた。このアイソパラメトリック要素の応用に際し、未知数(M, N,  $\zeta$ )に応じた3種類の8点アイソパラメトリック要素を使い分けてそれらの微分をすることによりこれらの計算精度を向上させている。また、この要素の座標中心点で微分を行うことで、連続式の質量保存性を合理的に表わすことができた。

(3) 以上に検討した内容を盛り込んだ二次元WFDMは、広大な干潟をもつ水域の浅海流解析に関し、水理模型実験実測値をよく再現できることを示した。

本研究によって、潮流解析に適用する場合に、幾何学的に、また流れ現象上、精度良く水陸の境界処

理を容易に行うことのできる二次元WFDMを提示することができたものと考える。

**謝辞：**本研究の実験、解析の遂行にあたり九州産業大学工学部土木工学科副手 赤坂頃三氏の多大な協力を頂いた。ここに記して深甚の謝意を表わします。

## 参考文献

- 1) 渡部信夫：線形微分方程式に近似な階差方程式を得る一つの方法(I), 九州大学工学報, 第21巻4号, 1949.
- 2) 加納正道, 上田年比古：重み付差分式による一次元移流分散方程式の数值解について, 土木学会論文集, 第357号／II-3, pp. 97-104, 1985.
- 3) Kanoh, M., and Ueda, T.: Application of Weighted Finite Difference Method To One- or Two-Dimensional Convective Diffusion Problem, *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, Vol. 4, No. 1, April, pp. 17-29, 1986.
- 4) Kanoh, M., Kuga, Y., and Ueda, T.: Weighted Finite Difference Method for Diffusive Transport. *Proc. Int. Sym. On Sediment Transport Modeling*, pp. 209-214, 1989.
- 5) Kanoh, M., Kuroki, T., Fujino, K., and Ueda T.: Weighted Finite Difference and Boundary Element Methods Applied To Groundwater Pollution Problems, *Wat. Sci. Tech.*, Vol. 23, Kyoto, pp. 517-524, 1991.
- 6) Kanoh, M., Kuroki, T.: BEM-WFDM Coupled Analysis for Groundwater Resources, *LABEM*, pp. 149-158, 1991.
- 7) Carey, G. F., Finlayson, B. A.: Orthogonal collocation on finite elements, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 30, pp. 587-596, 1975.
- 8) 山田文彦, 滝川清: 界面適合座標法を用いた自由表面流れおよび波変形過程の解析, 応用力学論文集, Vol. 2, pp. 191-200, 1999.

(2003. 2. 24 受付)

## APPLICATION OF TWO-DIMENSIONAL WEIGHTED FINITE DIFFERENCE METHOD TO SHALLOW WATER FLOW

Naofumi NAKAMURA, Masamichi KANOH and Yukio KUGA

Using a rather small number of irregular quadrilateral lattices, the weighted finite difference method (WFDM) may represent the geometrically complicated shape of a closed water area. In WFDM, an unknown value of the point under consideration can be calculated as the weighted sum of the known values of the neighboring points. These weights of the neighboring points are obtained from the several polynomials that satisfy the governing equation. In this paper, we developed the two-dimensional WFDM for calculating the tidal flow of the hydraulic model simulation, which has the geometrically complicated shape of a closed water area. The numerical solutions of WFDM show good agreement with the results of the hydraulic model simulation in our laboratory.