

粘着性の弱い細砂で構成された斜面上における水路形成の線形安定論

泉 典洋¹・藤井健司²

¹正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06)
²正会員 工学修士 林野庁東北森林管理局置賜森林管理署 (〒999-1362 山形県西置賜郡小国町大字緑町4-6-1)

粘土などの粘着性の強い土壌で構成された斜面上にはガリが形成され、それによって土壤侵食が促進されることが知られている。また粘着性が比較的弱い火山灰などで構成された斜面上にも同様のガリが形成され、土砂の流出が急激に進む現象が観察されている。粘着性が弱い場合、土砂の侵食抵抗が弱く侵食量が大きくなるため、流水中における浮遊砂濃度の上昇に伴って堆積が生じはじめる。本研究では、粘着性土砂で構成された斜面上における水路群形成の理論を、堆積が無視できないような粘着性の弱い土砂で構成された斜面上におけるガリ群の形成に拡張したものである。解析の結果によると、底面剪断力が大きく十分な巻上げが存在するような場合、フルード限界水深の600-1500倍の間隔でガリ群が形成されることが明らかとなった。

Key Words : noncohesive material, volcanic ash, gully, perturbation analysis, linear stability analysis

1. はじめに

地表面上の土砂は、降水によって発生した表面流や浸透流によって絶えず侵食を受け、標高の高いところから低いところへと移動を続けている。一方、地殻変動や火山活動は侵食によって平坦化した地表面に再び起伏を与え、高低差を生み出す。我々が目にすること地表面の形状は、それを不規則に変形させようとする地球内部の力と、一様にしようとする外部の力のせめぎ合いによって形作られたものと言えるだろう。

このような相反する二つの力によって、地表面上には変化に富んだ様々な地形が形成される。中でも流水侵食によって発生する水路網は、その特徴的な幾何形状から古くより多くの地質学者や地形学者の研究対象となってきた。また特に水路網の発達初期に見られる初期水路群（ガリ群）は、流れの集中を促し侵食量を劇的に増大させる。それによって表層の肥沃な土壌が流失し農業生産性が低下したり、急激な土砂流出が生じ河床上昇や泥流などの土砂災害が発生する。したがってガリの形成機構を明らかにすることは工学的にも重要な問題である。

泉¹⁾は、粘性土や岩盤など侵食が支配的な斜面での表面流によるガリ群の発生機構を線形安定解析の手法を用いて明らかにし、発生初期におけるガリの形成間隔が限界水深（フルード数が1となる水深）の1000倍程度となることを明らかにした。この理論では、侵食量を底面剪断力のべき乗で表し堆積の効果を無視している。粘性土や岩盤などの侵食は非常にゆっくりと進む

ため、流水は浮遊土砂によって飽和することなく堆積はほとんど生じない。したがって堆積の効果は無視することができる。ところが粘性が弱く侵食量が大きい斜面構成材料の場合、流水は大量の土砂を含むようになり堆積の効果を無視できなくなってしまう。そのような斜面構成材料の例として次に述べるような火山灰や火碎流堆積物が挙げられる。

図-1(a)はフィリピン、ピナツボ火山の噴火直後の様子である。大量に堆積した火山灰や火碎流堆積物が、降雨によって発生した表面流によって流れ急激な侵食を受けている。堆積層の表面には縦横無尽に発達した網の目状の水路網が見られる。流水侵食によって発生したガリが急速に発達し、写真のような複雑な水路網となつたのであろう。このように一旦ガリが形成されると、ガリは上流側からの流れを集め流れの集中する箇所を作る。この流れの集中によって底面剪断力が増大し土砂の侵食は急激に増加することになる。図-1(b)は(a)とほぼ同一の地点をより近くから撮った写真である。写真中央右よりに見られる人影からガリがかなり大きなスケールを持っていることがわかる。撮影者によれば(b)に見られるガリは小さい方であり、大きいガリでは幅50m程度であったという。

このような侵食地形は日本でも数多く見られる。環太平洋火山帯に位置する日本では、古くから火山活動が活発であり、多くの地域で火山灰・火碎流の堆積地形が形成されてきた。

図-2は北海道東部、中標津に見られるガリ地形である。ここは、ほぼ7000年前に摩周火山が噴出した火山



(a)



(b)

図-1 フィリピンのピナツボ火山噴火後に形成されたガリの様子。宇井忠英氏撮影。

灰や火碎流の堆積によって台地状の地形（火碎物台地、テフラ台地）が形成された地域である。図-2(a)を見ると、左側の台地の端部から侵食が進み樹枝上の水路網が発達しつつある様子が見られる。台地上に降った雨水が台地端部を流下する際、段差斜面を選択的に侵食するためガリが生じたものである。図-2(b)は、ガリの先端部付近の写真である。写真右側の低木が見られる付近がガリの谷頭部に当たる。写真左奥から谷頭部に向かって地表面に黒い部分が見られるが、これは侵食によって植生が剥離した部分であり周囲より若干標高が低くなっている。ガリ谷頭によって形成された集水地形であると考えられる。現在は図-2(b)に見られるように、台地上面および段差斜面は植生で覆われガリの成長は抑制されているが、7000年前の火山灰・火碎流の堆積直後は、図-1に見られるようなガリ地形が急速に形成されたであろう。

図-3(a)は鹿児島市武町付近に見られるシラス台地の写真である。シラスとは24000年程前に噴火を始めた姶良カルデラの火碎流堆積物（入戸火碎流堆積物）のことであり、シラスの堆積によってできた台地状の地



(a)



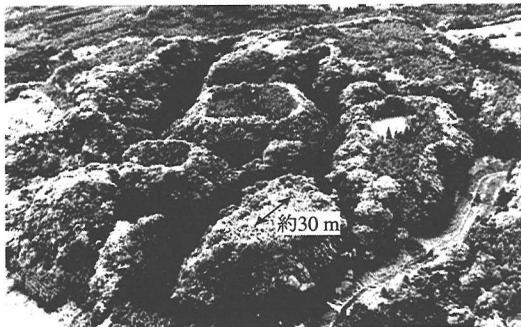
(b)

図-2 北海道標津川周辺に見られるガリ群。(a) 空中写真。左側が段丘面であり、右側の標高の低い領域との間の崖部に発達したガリ群が見られる。2002年10月著者撮影。(b) ガリ谷頭部。右側の植生の繁っているところが谷頭部である。写真左奥から谷頭部に向かってわずかに侵食された植生のない部分（水みち）が観察される。国土交通省北海道開発局釧路開発建設部撮影。

形は鹿児島県のみならず熊本県や宮崎県の南部にまで広く分布している。シラスは粒径が不揃いであり、大小さまざまな軽石や岩片と細かな火山灰との混合物である。また河川由来の沖積土の粒子が流送時の磨耗によって丸い形をしているのに対して、火碎流堆積物の粒子は磨耗の作用をほとんど受けないため角張った形をしている。これによりシラスで構成された斜面は、かなり急な勾配でも自立できるような強度を持つが、流水による侵食に対して弱いという特性を有している。そのためシラス台地では、図-3(a)のように比較的急な斜面上にガリ群が形成される様子が見られる。図-3(b)は鹿児島県知覧町の知覧城跡の空中写真である。シラス台地が雨水による侵食を受け、谷が入り組んだ複雑な地形に変化したものであり、中世にはこの複雑な地形が利用され城郭として用いられていた^{2),3)}。2万年あまりを経た現在では台地全体が植生で覆われているが、



(a)



(b)

図-3 シラス台地の侵食形状。(a) 鹿児島市武町付近。写真は岩松 暉氏に提供を受けた。(b) 知覧城跡。鹿児島県知覧町。写真は上田 耕氏に提供を受けた。

図-1(a)とよく似た幾何形状を有していることがわかる。このような火碎物台地(テフラ台地)は他にも富士東麓など日本中いたるところで見られるが、比較的若い年代の地形であるにもかかわらず、一見侵食の進んだ古い低山地の地形を呈しているのが共通の特徴である⁴⁾。

図-2(a)および図-3(a)を見るとガリの形成は台地端部の段差のところから始まることがわかる。しかもその際、ガリは端部に沿ってほぼ一定の間隔で形成される。本研究の目的は、侵食が卓越する粘着性土などで構成された斜面上での初期水路(ガリ)群発生の理論¹⁾を拡張し、堆積の効果を無視できないような耐侵食性の小さい火山灰や火碎物堆積物で構成された斜面上でのガリ群発生の理論モデルを構築することである。

2. 概念的モデル

本研究で提案されるモデルは、泉¹⁾がすでに提案している、侵食が卓越する斜面における水路群の形成理論を、堆積が生じるような状況下に拡張したものである。

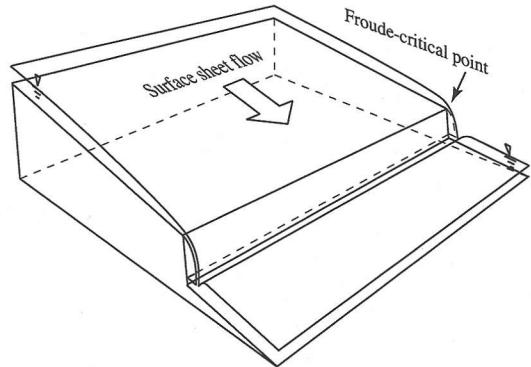


図-4 一様勾配斜面および下流端の段差部を流れる表面流。

流れのモデルはほぼ共通であるが、流水によって巻き上げられた底面上の土砂が移流によって輸送され堆積する機構が付加される。また、同じく泉⁵⁾によって提案された乱泥流による大陸棚端部に発生するガリ群の形成理論を弱粘着性細砂で構成された台地端部に形成されるガリ群に適用できるよう修正し発展させたものとなっている。

図-2や図-3に見られる台地上部の平坦面を流れる表面流を考える。台地上部は平坦であるが、わずかながら勾配を有しているため、流れはこの面上をどちらかの方向に流下することになる。ここで台地上部が勾配を有すること自体に大きな意味はない。当然のことながら勾配が0の極限が完全な平坦面に相当しており、このような場合も含んで図-4に示すような一様勾配斜面を考える。

本研究では斜面下流端から発生するガリ群を対象にしている。したがって斜面長に比較してガリの形成領域が十分短い場合、降雨による斜面流下方向の流量の増加は無視することができる⁶⁾。ここでも斜面上における流量を一定と仮定することにする。また後述するように、本研究ではガリ発生のメカニズムとして、斜面下流端に与えられた擾乱による斜面上の流れの集水効果を考えている。このような集水効果が働くためには斜面上の流れは常流でなければならない。したがって本研究では、斜面上の流れが常流となるよう斜面勾配は十分小さいと仮定する。この仮定は常に成立するものではないが、台地上面が平坦な図-2や図-3のような地形の場合は妥当な仮定であると考えられる。

斜面(台地上部)を流下する表面流は台地端部で段差を落とし滝状の流れを形成する(図-4参照)。その際、斜面下流端では水面形は背水曲線を描き、流れは加速される。このように流れが流下方向に加速されるような場合、浮遊砂の輸送量が流下方向に増加する(巻

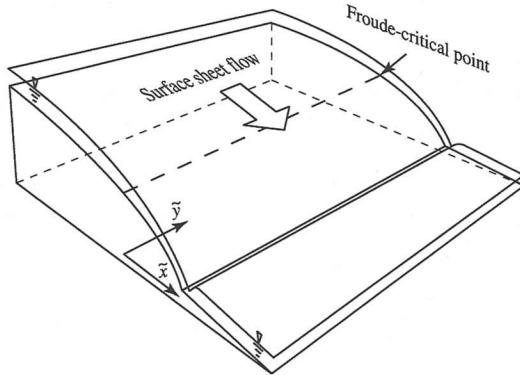


図-5 段差部に現れるフルード限界点と形状を維持しながら上流側へ移動する斜面形状。

上が堆積に卓越する)ため正味の侵食が発生する。しかも流速の増加率が十分に大きいような場合、正味の侵食量が流下方向に増大するためフルード限界点付近には上に凸の形状を有する侵食面が形成される。このとき、正味の侵食のために侵食面は上流側に後退することになる。その際、斜面下流端の形状としてある一定の形状を維持しながら上流側に後退していくような斜面形状が存在する(図-5参照)。後述するように適当な移動座標系を選べばこの斜面形状は定常解になることから、このような斜面形状を準定常な斜面形状と呼ぶことにする。またその形状は任意ではなく、後述するような特定の形状を有している。

侵食が卓越する場合の水路群形成の理論¹⁾や海底峡谷の形成理論⁵⁾で行ったように、この準定常な斜面形状を線形安定解析の基本解として用いることにする。これは、ガリ形成過程において実際に準定常解が現れるからというより、むしろ数学的な要請からである¹⁾。線形安定解析においては時間と空間座標の偏微分方程式系を成す擾動方程式を変数分離することによって、問題を Sturm-Liouville 型の固有値問題に帰着させる。ところが擾動を与える前の基本解が定常でなければ擾動方程式が変数分離できなくなり、正規の線形安定解析が不可能となるのである。

斜面下流端に擾乱が存在せず横断方向に完全に一直線であるような場合、下流端は一定の侵食面形状を維持しながら横断方向に一様な一定速度で上流側に後退する。ところが擾乱が与えられると、局所的に標高の低い部分に流れが集まり、そこで侵食が加速され、さらに標高が低くなる。これが下流端に多数形成される初期水路あるいはガリの発生である。図-6に示したような、波数 \tilde{k} のサイン型の擾乱を与える。表面流がフルード的に常流であるような場合、図中の局所的なト

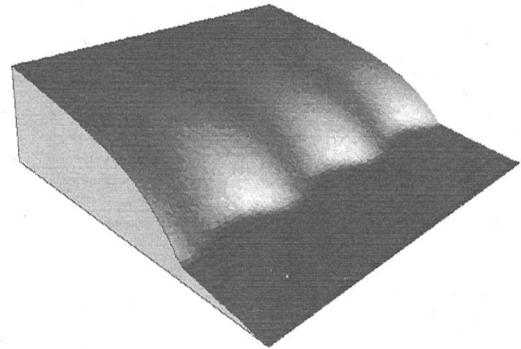


図-6 斜面下流端に与えられる横断方向の擾動。図-2(a)および図-3(a)との幾何学的相似性に注目。

ラフ部は流れを集め、流線が集中することになる。これによってトラフ部の底面剪断力が増幅され、そこでの侵食量も同時に増幅される。その結果トラフ部がさらに侵食され、ガリ群が発生する。この時、擾乱の増幅率が最大となる卓越波長 $\tilde{\lambda}_m (= 2\pi/\tilde{k}_m)$ が、実際の斜面下流端に発生するガリ群の形成間隔となる。

ただし本論文で行うのは線形安定解析であることに注意する必要がある。線形安定解析では擾乱の振幅が微小であることを用いて方程式を線形化することから、本理論で説明が可能となるのは擾乱の振幅が十分小さいガリの形成初期に限定される。後述するようにガリの発達にともなってガリの形成間隔は大きくなる可能性もあるが、その場合でも発達初期のスケールから大きくかけ離れたものにはならないと考えられる。

3. 定式化

(1) 支配方程式

図-5に示すような、勾配の緩やかな斜面上を流下する表面流を想定する。表面流の運動は、Reynolds 平均(乱流変動に関するアンサンブル平均)を取った Navier-Stokes 方程式を鉛直方向に積分した次の浅水流方程式で表される。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{\tau}_{bx}}{\rho \tilde{h}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} - g \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\tilde{\tau}_{by}}{\rho \tilde{h}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{u} \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v} \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (3)$$

ここで \tilde{x} より \tilde{y} はそれぞれ流下方向(斜面方向ではなく、水平方向であることに注意)および横断方向の座標であり、 \tilde{x} 座標の原点はフルード限界点とする。 \tilde{t} は

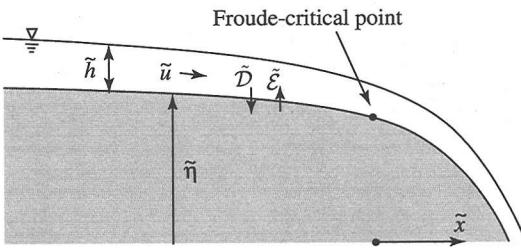


図-7 斜面上を流れる表面流と浮遊砂の巻上 \tilde{E} および堆積 \tilde{D} .

時間、 \tilde{u} および \tilde{v} はそれぞれ鉛直方向に平均した \tilde{x} および \tilde{y} 方向の流速成分、 \tilde{h} は水深、 $\tilde{\eta}$ は底面の高さ、 ρ は水の密度、 g は重力加速度 ($= 9.8 \text{ m/s}^2$) である。また τ_{bx} および τ_{by} はそれぞれ底面剪断力 τ_b の \tilde{x} および \tilde{y} 成分である。

鉛直方向に積分した浮遊砂の移流方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \tilde{C}\tilde{h}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{C}\tilde{h}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}\tilde{C}\tilde{h}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{E} - \tilde{D} \quad (4)$$

ここで \tilde{E} および \tilde{D} はそれぞれ斜面を構成する材料の巻上速度および堆積速度である（図-7 参照）。

泉¹⁾は粘着性の強い地表面の侵食速度として次式を用いている。

$$\tilde{E} = \begin{cases} 0, & \tilde{\tau} < \tilde{\tau}_{th} \\ \alpha_e \left(\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_{th}} - 1 \right)^\gamma, & \tilde{\tau} \geq \tilde{\tau}_{th} \end{cases} \quad (5)$$

ここで $\tilde{\tau}_{th}$ は限界底面剪断力であり、底面剪断力がこの値より小さいと侵食は生じない。また α_e は速度の次元を持つパラメータ、 γ は無次元パラメータであり、どちらも土砂の性質に応じて変化する。泉¹⁾はこれまでの研究を参考にして γ を 0.5–2 程度と仮定している。粘着性が強い粘土などでは、侵食されない間は非常に大きな耐侵食性を示すが、一旦侵食され再堆積した土砂はほとんど耐侵食性を持たない。このような不可逆的な性質は、初めて侵食を受ける土砂の侵食量を式(5)で表し再堆積を無視することによって表現される。

一方、非粘着性の細砂の巻上量は次のように近似的に表されることが多い。

$$\tilde{E} = v_s \tilde{E}, \quad \tilde{E} = K \left(\frac{u^*}{v_s} \right)^m \quad (6a, b)$$

ここで \tilde{E} は浮遊砂の無次元巻上速度であり、 u^* および v_s はそれぞれ底面摩擦速度および浮遊砂の沈降速度、 K および m は実験的に求められる無次元定数である。浮遊砂が生じ始めるのは u^*/v_s が 0.8–1 以上となる時であり、上式は十分に底面剪断力が大きい領域で成立式であることに注意する必要がある。河床上における浮遊砂の巻上量や乱泥流による底質の巻上量に関する多くの実験結果^{7), 8), 9), 10), 11)}によれば $m = 2–10$ と言われている。粘着性土砂の侵食量と異なり、式(6)は再堆積した土砂まで含んだ巻上量を表している。

竹本ら¹²⁾および金高ら¹³⁾によれば、火山灰砂を特徴付けるのは広い粒度分布（中央粒径 0.1–0.3 mm、最大粒径 40–50 mm）であり、粒径の大きいものほど小さな比重を持つ傾向があるという。また竹本ら¹²⁾および金高ら¹³⁾の行った火山灰流路の側岸侵食実験を基に長谷川ら¹⁴⁾は側岸侵食による河道拡幅の過程を数値シミュレーションによって再現し、実験と良好な一致をみていている。シミュレーションでは、火山灰を非粘着性の砂とみなし、粒度分布の効果を考慮した横断方向の掃流砂量式を適用している。これは火山灰の粘着性が十分弱く、非粘着性砂として取り扱えることを意味している。また側岸侵食によって河道拡幅が進み平衡状態に至る過程では、広い粒度分布によって発生するアーマリングの効果を考慮することが重要となる。それに対して、本研究では侵食が始まって間もないガリ発生の初期段階を扱っている。したがって広い粒度分布によるアーマリングの影響については無視することとする。

例ええば前述したシラスの場合、かなり急な勾配でも自立できることが知られている。これは粒度分布が広く、粒子の形状が角張っているために静止摩擦角が大きくなり、見かけの粘性が生じることを示している¹⁵⁾。静止摩擦角の増加は剪断抵抗の増大を意味しており、底面剪断力に対する抵抗力も大きくなる。したがって一般の非粘着性細砂と比較して、限界剪断力が増加することが予想される。以上のことから限界剪断力の影響をより簡便で一般的な形で取り入れ、底面剪断力が十分大きな領域で式(6b)に漸近する巻上量式として次式を用いることとする。

$$\tilde{E} = \begin{cases} 0, & u^* < u_{th}^* \\ K \left[\left(\frac{u^*}{v_s} \right)^2 - \left(\frac{u_{th}^*}{v_s} \right)^2 \right]^n, & u^* \geq u_{th}^* \end{cases} \quad (7)$$

ここで u_{th}^* は巻上の生じる限界摩擦速度である。前述したように通常の非粘着性細砂では $u_{th}^*/v_s \approx 1$ である（図-8 参照）。 $K = 2 \times 10^{-5}$ および $n = 2$ 、 $u_{th}^*/v_s = 1$ としたときの式(7)を、非粘着性細砂に関する従来の実験結果^{16), 17), 18), 19)}と比較してある。一方、見かけの粘着性によって限界剪断力が増加する場合、 $u_{th}^*/v_s > 1$ である。また K や n についても土砂の性質によって変化する。本研究では、これらの係数を適切に選ぶことによって巻上量が式(7)で表現できるような、不可逆性の小さい弱粘着性土砂を取り扱うこととする。

浮遊砂の堆積量は底面近傍の浮遊砂濃度 \tilde{c}_b に沈降速度 v_s をかけることによって次式で表される。

$$\tilde{D} = v_s \tilde{c}_b \quad (8)$$

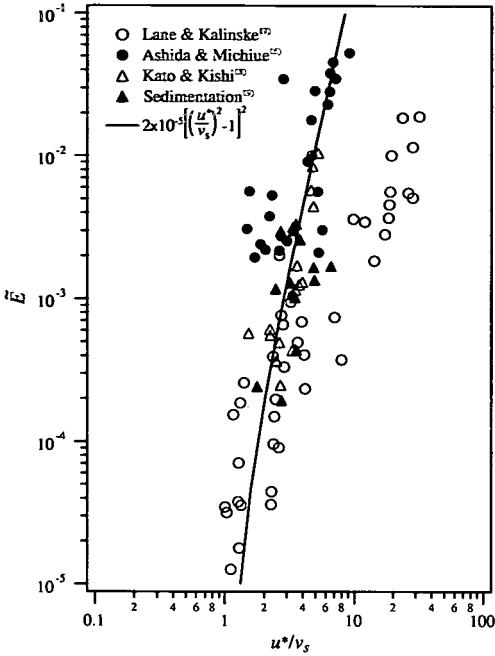


図-8 非粘着性細砂の無次元巻上量 \bar{E} .

Parker, Fukushima and Pantin²⁰⁾は乱泥流による底質の巻上量と堆積量に関する実験の結果から、 \bar{c}_b と水深平均浮遊砂濃度 \bar{C} の比がほぼ一定の値 1.6 となることを見出した。そのとき \bar{c}_b は次式で表される。

$$\bar{c}_b = r_0 \bar{C} \quad (9)$$

ここで r_0 は 1.6 である。泉ら²¹⁾は河口噴流による浮遊砂の巻上量と堆積量の実験結果から河口噴流の場合にも乱泥流と同様、 \bar{c}_b と \bar{C} の間に式(9)の関係が成立することを明らかにした。ここで考えている斜面上の表面流は、乱泥流や河口噴流と比較しても水平スケールに対して、水深スケールの小さな流れである。したがって浮遊砂濃度の水深方向分布もより一様化することが予想される。したがって本研究でも式(9)を用い、 $r_0 = 1.0\text{--}1.6$ とする。

底面上における土砂の連続式は次式で表される。

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \tilde{D} - \tilde{\mathcal{E}} \quad (10)$$

ここで λ_p は空隙率である。

底面剪断力 τ_{bx} および τ_{by} は次のように表されるとする。

$$(\tau_{bx}, \tau_{by}) = \bar{c}_b (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{-1/2} (\bar{u}, \bar{v}) \quad (11a)$$

$$\bar{c}_b = \rho C_f (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \quad (11b)$$

上式中、底面における摩擦係数 C_f は通常、水深の弱い関数であるが、ここでは問題を簡単にするために定数

と仮定する。

(2) 正規化

流速および水深、底面高さ、水平方向の座標、時間についてフルード限界点における流速および水深を用いて次のように正規化する。

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{U}_c (u, v), \quad (\bar{h}, \bar{\eta}) = \bar{H}_c (h, \eta) \quad (12a, b)$$

$$\bar{C} = \frac{\bar{E}_c}{r_0} C, \quad (\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{H}_c}{C_f} (x, y) \quad (12c, d)$$

$$\bar{t} = \left[\frac{(1 - \lambda_p) \bar{H}_c}{v_s \bar{E}_c} \right] t \quad (12e)$$

ここで \bar{U}_c および \bar{H}_c はそれぞれフルード的な限界流速および限界水深であり、次の関係が成立する。

$$\frac{\bar{U}_c^2}{g \bar{H}_c} = 1 \quad (13)$$

また \bar{E}_c はフルード限界点における土砂の無次元巻上量であり、次式で表される。

$$\bar{E}_c = K \left[\left(\frac{u_c^*}{v_s} \right)^2 - \left(\frac{u_{th}^*}{v_s} \right)^2 \right]^n \quad (14)$$

ここで u_c^* はフルード限界流速に対応する摩擦速度である。巻上量および堆積量については次のように正規化を行う。

$$\tilde{\mathcal{E}} = v_s \bar{E}_c E(u^2 + v^2), \quad \tilde{D} = v_s \bar{E}_c C \quad (15a, b)$$

ここで

$$E(u^2 + v^2) = \begin{cases} 0, & u^2 + v^2 < \psi \\ \left(\frac{u^2 + v^2 - \psi}{1 - \psi} \right)^n, & u^2 + v^2 > \psi \end{cases} \quad (15c)$$

また

$$\psi = \left(\frac{u_{th}^*}{u_c^*} \right)^2 \quad (15d)$$

式(12)–(15)の正規化を用いて式(1)–(4)、(10)は次のように書き直される。

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} \quad (16)$$

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} \quad (17)$$

$$\alpha \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

$$\alpha \beta h \frac{\partial C}{\partial t} + \beta h \left(u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = E(u^2 + v^2) - C \quad (19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = C - E(u^2 + v^2) \quad (20)$$

ここで

$$\alpha = \frac{v_s \bar{E}_c}{(1 - \lambda_p) C_f \bar{U}_c} = \frac{\bar{E}_c}{(1 - \lambda_p) C_f^{1/2}} \frac{v_s}{u_c^*} \quad (21a)$$

$$\beta = \frac{C_f \tilde{U}_c \tilde{E}_c}{r_0 v_s \tilde{E}_c} = \frac{C_f^{\frac{1}{2}} u_c^*}{r_0} \frac{u_c^*}{v_s}, \quad (21b)$$

ここで α は流れの変化の時間スケールと地形変化の時間スケールの比を表し、 β は浮遊砂の巻上に対する移流の大きさを表す無次元パラメータである。従来の非粘着性の浮遊砂に関する実験結果によれば u_c^*/v_s が 1 より大きくなると浮遊が生じはじめ、およそ 50 以上になると浮遊砂濃度は 0.3 程度の一定値に漸近する。したがって u_c^*/v_s および \tilde{E}_c は最大でもそれぞれ 50 および 0.3 程度の値をとる。底面摩擦係数 C_f は、相対水深（水深/粗度高さ）および底面の状態に依存するが、代表的な値は 0.005 から 0.05 程度である。これらの値を用い、 λ_p を 0.5 とすると α は最大でも 0.05 ~ 0.17 程度となる。 α の付いた項を小さいとして無視すると運動方程式および連続式、浮遊粒子の移流方程式における非定常項が落ちて、底面上における土砂の連続式のみに非定常項が現れる。これは底面高さの時間変化に比較して流れの変化が非常に早く、流れ自体は定常とみなして差し支えないことを示している（準定常の仮定）。ただしここでいう準定常は、前述の一定形状を維持しながら前進する斜面形状の準定常性とは別な意味で用いられていることに注意）。ここでも準定常の仮定を用い、以降土砂の連続式のみで非定常項を考慮することにする。また r_0 は 1~1.6 の値を取ることから、 β は沈降速度に対する相対摩擦速度 u_c^*/v_s の 1/20 から 1/5 程度の値を取る。すなわち u_c^*/v_s が大きくなればなるほど巻上に対して移流の影響が卓越することがわかる。式(7)の適用範囲を考えれば u_c^*/v_s は 1~50 となる。したがって β は 0.05 から 10 程度の値を取る。通常の非粘着性細砂の場合、 $u_{th}^* \approx v_s$ であるから、正規化された限界剪断力 ψ は $(v_s/u_c^*)^2$ にはほぼ等しくなる。そのとき ψ は $0.0025\beta^{-2} - 0.04\beta^{-2}$ となり、通常の非粘着性細砂では ψ はかなり小さくなる。もちろん見かけの粘着性などで限界剪断力が大きくなるとこの限りではなくなる。

4. 一次元基本解

(1) 支配方程式

流れが横断方向に一様であると仮定すると支配方程式は次のようになる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{u^2}{h} \quad (22)$$

$$uh = 1 \quad (23)$$

$$\beta \frac{\partial C}{\partial x} = E(u^2) - C \quad (24)$$

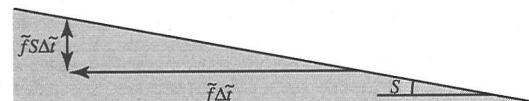


図-9 底面高さの見かけの上昇量 $fS\Delta t̃$.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = C - E(u^2) \quad (25)$$

形状を維持しながら上流方向に一定速度 f で移動する解を求めるためには、つぎのような座標変換を用いると便利である。

$$x^* = x + ft, \quad t^* = t, \quad \eta^* = \eta - bt \quad (26a, b, c)$$

ここで f は侵食面の移動速度であり、座標系の移動速度に対応している。また b は上流側無限遠点において斜面が勾配を有するために必要となる定数である。 f および b を適切に定めることによって、形状が時間的に変化しない座標系上で斜面形状を記述することが可能となる。適切な f および b を選ぶために、しばらく次元量に戻って考えることにする。

上流側無限遠点において斜面は一定勾配 S を有しており、そこでの流れは等流となっている。強粘着性土などで侵食が卓越するような場合、上流側無限遠点における底面剪断力が侵食限界を超えていれば底面剪断力に対応した一定速度の侵食、そしてそれによる底面高さの低下が生じる¹⁾。しかし、現在考えているような浮遊砂による侵食・堆積が同時に生じている場合、たとえ底面剪断力が限界剪断力を上回っても等流状態では巻上と堆積がつりあつた平衡状態にあり、見かけ上侵食が生じないことになる。ただし斜面が勾配を有することから見かけ上、底面高さが上昇することを考慮しなければならない。前述したように x 軸を水平方向に取っているため \tilde{f} の速度で上流側に座標系を移動させると、一様勾配 S の斜面表面の高さ $\tilde{\eta}$ は見かけ上 $\tilde{f}S$ の速度で上昇することになる（図-9 参照）。この見かけ上の底面高さの上昇を相殺するために次のような座標変換を導入する必要がある。

$$\tilde{\eta}^* = \tilde{\eta} - \tilde{f}S\tilde{t} \quad (27)$$

ここで $\tilde{f}\tilde{t}$ は \tilde{H}_c/C_f で無次元化されることから、無次元化された b は次のように表される。

$$b = f\sigma \quad (28)$$

ここで σ は正規化された斜面勾配であり、次式で表される。

$$\sigma = \frac{S}{C_f} \quad (29)$$

座標変換 (26) を導入し、時間 t^* に依存する項を落とし、さらに簡略化のために * を落とすと、式 (22)~(24)

の偏微分は常微分で置き換えられ、式(25)は次のようになる。

$$f \frac{d\eta}{dx} = -f\sigma + C - E(u^2) \quad (30)$$

さらに計算すると式(22)～(24)および(30)は次の二つの常微分方程式に帰着される。

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^5 - (\sigma + f^{-1}[E(u^2) - C])u^2}{1 - u^3} \quad (31)$$

$$\frac{dC}{dx} = \beta^{-1} [E(u^2) - C] \quad (32)$$

(2) 境界条件と移動速度

上流側無限遠点 ($x \rightarrow -\infty$)においては等流状態が実現されており、そこでは流速および浮遊砂濃度が流下 (x) 方向に変化しない。また斜面勾配 $d\eta/dx$ は σ の一定値をとる。そのとき式(22)および(23)から等流流速が次のように得られる。

$$u_n = \sigma^{1/3} \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (33)$$

ここで添え字 n は等流状態での値を表している。等流状態では浮遊砂の巻上量と堆積量が釣り合う平衡状態となっている。そのとき式(24)から次の関係が導かれる。

$$C_n = E(u_n^{2/3}) = \begin{cases} 0, & \sigma^{2/3} < \psi \\ \left(\frac{\sigma^{2/3} - \psi}{1 - \psi}\right)^n, & \sigma^{2/3} \geq \psi \end{cases}$$

as $x \rightarrow -\infty$ (34)

前述したようにフルード限界点を原点にとるので、正規化の定義から次式が成り立つ。

$$u = 1 \quad \text{at } x = 0 \quad (35)$$

したがってフルード限界点では、式(31)は分母がゼロとなり特異性を持つことになる。ここで想定しているような勾配が緩やかに変化する斜面上において表面流が実在するためには、限界点において分子も同時にゼロとならなければならない¹⁾。したがって次式が要求される。

$$f = \frac{E(1) - \chi}{1 - \sigma} \quad (36)$$

ここで χ は正規化された水深平均浮遊砂濃度（あるいは正規化された堆積量） C のフルード限界点における値である。式(12c)では、水深平均浮遊砂濃度 \bar{C} は \bar{E}_c/r_0 で正規化されている。移流の影響がない平衡状態（巻上量と堆積量が釣り合う状態）を仮定すると、 \bar{C} は無次元巻上量 \bar{E} はそこでの底面近傍の浮遊砂濃度 \bar{c}_b と一致するから、式(9)より、 \bar{E}/r_0 は平衡状態における水深平均浮遊砂濃度を表している。いま考えているような正味の侵食を受ける斜面上では堆積に対し巻上が卓越しているはずであるから、浮遊砂濃度は平衡状態での値よりも小さくなっているはずである。したがってフルード限界点での水深平均浮遊砂濃度は \bar{E}_c/r_0 より小さくなり、 χ は 1 より小さい値をとる。この χ の値は陽に

与えられるものではなく、式(31)および(32)を境界条件の下で解くことによって決まる未知数である。

式(31)および(32)に L'hopital の法則を適用すると、 $u = 1$ が成立するフルード限界点において次式が満足されなければならないことがわかる。

$$3p^2 + \{5 - 2[\sigma - f^{-1}(E(1) - \chi)] - f^{-1}E_u(1)\}p - f^{-1}\beta^{-1}[E(1) - \chi] = 0 \quad (37a)$$

ここで

$$p = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} \quad (37b)$$

また E_u は E の u による偏微分を表し、 $E_u(1)$ は次式で表される。

$$E_u(1) = \left. \frac{\partial E(u^2)}{\partial u} \right|_{u=1} = \frac{2n}{1 - \psi} \quad (37c)$$

式(24)および(30)を組み合わせて次式を得る。

$$f \frac{d\eta}{dx} + f\sigma + \beta \frac{dC}{dx} = 0 \quad (38)$$

もし底面高さ η の原点をフルード限界点 $x = 0$ における底面高さとすると、式(38)は次のように積分できる。

$$\eta = -f^{-1}\beta(C - \chi) - \sigma x \quad (39)$$

(3) 無限遠点における漸近解

フルード限界点より上流無限遠点における式(31)および(32)の漸近解を求めてみる。無限遠点での漸近解を次のように表す。

$$u = u_n + \hat{u}, \quad C = C_n + \hat{C} \quad (40a, b)$$

ここで下付添字 n は無限遠点での等流状態での諸量を表し、式(33)および(34)に対応している。また $\hat{\cdot}$ をつけた量は等流状態からのずれであり、したがって微小であるとする。上式を式(31)および(32)に代入し $\hat{\cdot}$ の高次の項を無視すると次式が得られる。

$$\frac{d\hat{u}}{dx} = \frac{5u_n^4 - 2\sigma u_n - f^{-1}E_u(u_n^2)u_n^2}{1 - u_n^3} \hat{u} + \frac{f^{-1}u_n^2}{1 - u_n^3} \hat{C} \quad (41)$$

$$\frac{d\hat{C}}{dx} = \beta^{-1}E_u(u_n^2)\hat{u} - \beta^{-1}\hat{C} \quad (42)$$

上式に(33)および(34)を代入し、マトリックスに書き直すと次式が得られる。

$$\frac{du}{dx} = Lu \quad (43a)$$

$$u = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{C} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \quad (43b, c)$$

ここで

$$L_{11} = \frac{3\sigma^{4/3}}{1 - \sigma} - \frac{E_u(\sigma^{2/3})\sigma^{2/3}}{E(1) - \chi}, \quad L_{12} = \frac{\sigma^{2/3}}{E(1) - \chi}$$

$$L_{21} = \beta^{-1}E_u(\sigma^{2/3}), \quad L_{22} = -\beta^{-1} \quad (43d-g)$$

上式の解は次のように表される。

$$u = Au_a e^{\lambda_a x} + Bu_b e^{\lambda_b x} \quad (44)$$

ここで λ_a および λ_b は L の二つの固有値であり、 u_a および u_b はそれぞれ固有値 λ_a および λ_b に対応する固有ベクトルである。ここで固有ベクトルはそれぞれ一つずつ未定定数を因数として含むのでそれらを A および B と表している。

解 (44) が満たすべき境界条件は無限遠点において等流からのずれがゼロとなることである。したがって次式で表される。

$$\hat{U} \rightarrow 0, \quad \hat{C} \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (45)$$

境界条件 (45) を満足するためには (44) 中の係数は次のうちのいずれかでなければならない。

- a) λ_a および λ_b のうちのどちらか一方が正、もう一方が負であり、負の解に対応する固有ベクトルの未定定数がゼロとなる。
- b) λ_a および λ_b がいずれも正である。

このうち、b) では二つの未定定数がいずれも特定できない。これは境界条件が一つ失われることを意味しており、後述の二点境界値問題は解けないことになってしまう。したがって式 (31) および (32) が解を持つためには a) のように二つの固有値はそれぞれ正と負でなければならない。そのためには次に述べるような条件を満たす必要がある。

二つの固有値 λ_a および λ_b は次式の二つの解となっている。

$$\lambda^2 - (L_{11} + L_{22})\lambda + (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) = 0 \quad (46)$$

上式が正と負の解をそれぞれ一つづつ持つためには次式が成立しなければならない。

$$L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} < 0 \quad (47)$$

式 (43d-g) を用いると上式は次のようになる。

$$L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} = -\frac{3\beta^{-1}\sigma^{4/3}}{1-\sigma} < 0 \quad (48)$$

上式中 β および σ はいずれも正の値をとる。またここで想定しているような常流の場合、フルード数は 1 より小さく、 σ は 1 より小さい。したがって上式は常に成立することがわかる。乱泥流による海底峡谷の形成理論⁵⁾において、底質の巻上量を式 (6) の形で表し、上記と同様の解析を行うと準定常の斜面形状（形状を維持しながら上流側に移動する斜面形状）が存在するためには n は 3 より小さくなくてはならなかった。それに對して、本研究で考えているような表面流によって形成される斜面では、巻上量式のべき指数や限界剪断力にかかわらず準定常な斜面形状が存在することを意味している。

(4) 解法

微分方程式 (31) および (32) は二つの未知数に関する二つの一階常微分方程式であり、二つの境界条件があれ

ば解ける。一方、境界条件は (33) および (34)、(35) である。このうち (33) および (34) は一方が与えられると他方は自動的に成立してしまう。したがって式 (33) あるいは (34) の内の一つと (35) の二つの境界条件の下、式 (31) および (32) を解く。解法には 2 点境界値問題の数値解法の一つである緩和法を用いる²²⁾。

(5) 結果と考察

図-10 は β および σ , ψ , n による χ の変化を表した図である。いずれの図にも共通するのは β が大きくなるにしたがって χ が小さくなることである。前述したように χ は、フルード限界点における浮遊砂濃度の平衡浮遊砂濃度 \bar{E}_c/r_0 に対する相対値である。一方 β は浮遊砂の巻上に対する移流の影響を表すパラメータであり、この値が大きいほど移流の影響が大きくなる。 β が小さく移流の影響が小さいと浮遊砂濃度は局所的な巻上の影響を強く受けたため、フルード限界点での浮遊砂濃度もそこでの平衡浮遊砂濃度に近くなり χ は 1 に近い値となる。逆に β が大きく移流の影響が大きくなるとフルード限界点の浮遊砂濃度は上流側の小さい濃度の影響を強く受けたため、平衡浮遊砂濃度を大きく下回り χ は小さな値となる。

図-10 (a) は相対勾配 σ による χ の変化である。 σ が減少するにつれて χ も小さくなることがわかる。勾配が小さくなるにつれて背水の効果が大きくなると、流速の空間変化が大きくなり流れの非平衡性も大きくなる。すると浮遊砂濃度は巻上量に追随できなくなり、平衡浮遊砂濃度から大きくなれるようになる。すなわち流れの非平衡性が大きくなると浮遊砂濃度の非平衡性も大きくなり χ は小さくなる。また $\sigma = 0.01$ と 0.001 の線がほぼ重なっていることから、 χ は σ が小さくなるにつれてある値に収束し、 $\sigma = 0.01$ を超えるとほとんど変化しなくなることがわかる。

図-10 (b) は正規化された限界剪断力 ψ の変化による χ の変化である。図によると、 ψ の増加に伴って χ が減少することがわかる。これは次のように考えられる。限界剪断力が増加すると巻上量が生じる領域がフルード限界点近傍に限定され、狭い領域で巻上量が急激に増加するようになる。それによって浮遊砂濃度の非平衡性が増加し、平衡浮遊砂濃度からのずれが大きくなるため χ が減少するのである。

図-10 (c) は巻上量式のべき指数 n が増加すると χ が減少することを示している。 n が大きくなると流下方向への巻上量の増加率も大きくなる。したがって ψ の増加と同様、非平衡性が増加するために χ が小さくなるものと考えられる。

図-11 には一次基本解 u および C , η , $\eta + h$ の流下方向分布を示す。図-11 (a) は $n = 2$ および $\sigma = 0.1$,

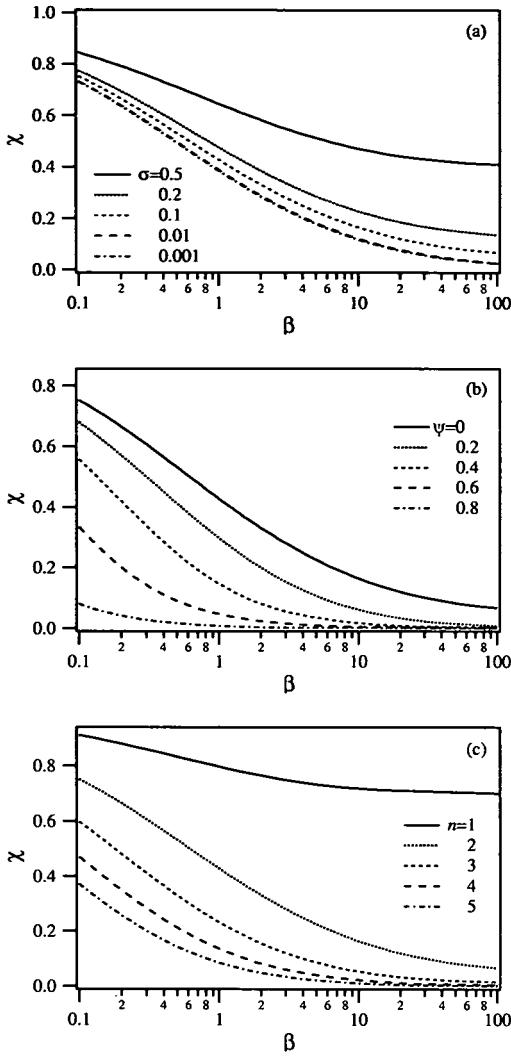


図-10 (a) β および σ による χ の変化. $n = 2, \psi = 0$. (b) β および ψ による χ の変化. $n = 2, \sigma = 0.1$. (c) β および n による χ の変化. $\sigma = 0.1, \psi = 0$.

$\beta = 1, \psi = 0$ の時の結果である. それに対し (b) は β の値のみ 10 に増加させた場合の結果である. (a) では原点近傍で u に追随して C も大きくなるのに対して, (b) では u の増加に追随できず C はあまり増加していない. これは、前述したように β が大きくなると移流の効果が大きくなり、局所的な巻上量には追随しなくなるためである. また (b) では底面高さ η の原点近傍における低下量が (a) と比較して増加していることがわかる. 式 (39) からわかるように原点近傍における η の低下量 ($-\sigma x$ からのずれ) は C と線形の関係がある. (b) で η の低下量が大きくなったのは式 (39) 中で C の

係数となっている β の増加が支配的となっているためであろう.

図-11 (c) は σ の値を 0.01 に低下させたものである. (a) と比べると u の上流域における値が小さくなっているのがわかる. 前述したように勾配が小さくなると背水の影響が大きくなつて、原点付近とその上流側での流速差が大きくなる様子がわかる.

図-11 (d) は ψ を 0.4 に増加させた場合である. 図中黒丸は摩擦速度が限界摩擦速度となる点を表している. 卷上の影響が原点近傍に限定されており、浮遊砂濃度が巻上量に追随できずに完全には上昇しきれていない様子がわかる.

図-11 (e) は n を 4 に増加させた場合である. n が増加すると流速の増加に伴う巻上量の増加が急激になり、巻上が活発に生じる領域が原点近傍に限定されるようになる. したがって ψ が増加する場合と同様の効果があるのであろう. (d) の図とよく似た傾向を示しているのがわかる.

5. 二次元擾動問題

(1) 線形化

二次元の支配方程式は次式で表される.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} u}{h} \quad (49)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{(u^2 + v^2)^{1/2} v}{h} \quad (50)$$

$$\frac{\partial u h}{\partial x} + \frac{\partial v h}{\partial y} = 0 \quad (51)$$

$$\beta h \left(u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = E(u^2 + v^2) - C \quad (52)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + f \frac{\partial \eta}{\partial x} = C - E(u^2 + v^2) \quad (53)$$

ここで座標変換 (26) における * は、表記を簡単にするために落としてある.

斜面形状に対して、次のような擾動を与える.

$$\eta = \eta_0(x) + a\eta_1(x)e^{\Omega t} \cos ky \quad (54a)$$

これに対応して、他の変数も次のように展開する.

$$u = u_0(x) + a u_1(x) e^{\Omega t} \cos ky \quad (54b)$$

$$v = a v_1(x) e^{\Omega t} \sin ky \quad (54c)$$

$$h = h_0(x) + a h_1(x) e^{\Omega t} \cos ky \quad (54d)$$

$$C = C_0(x) + a C_1(x) e^{\Omega t} \cos ky \quad (54e)$$

上式を式 (49)–(53) に代入すると $O(a)$ において次式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{2u_0^4 + (u_0^2 + u_0^{-1})u'_0 - f^{-1}E_u(u_0^2)u_0^2}{1-u_0^3}u_1 \\ &\quad - \frac{k}{1-u_0^3}v_1 - \frac{u_0^6 + u_0u'_0}{1-u_0^3}h_1 \end{aligned}$$

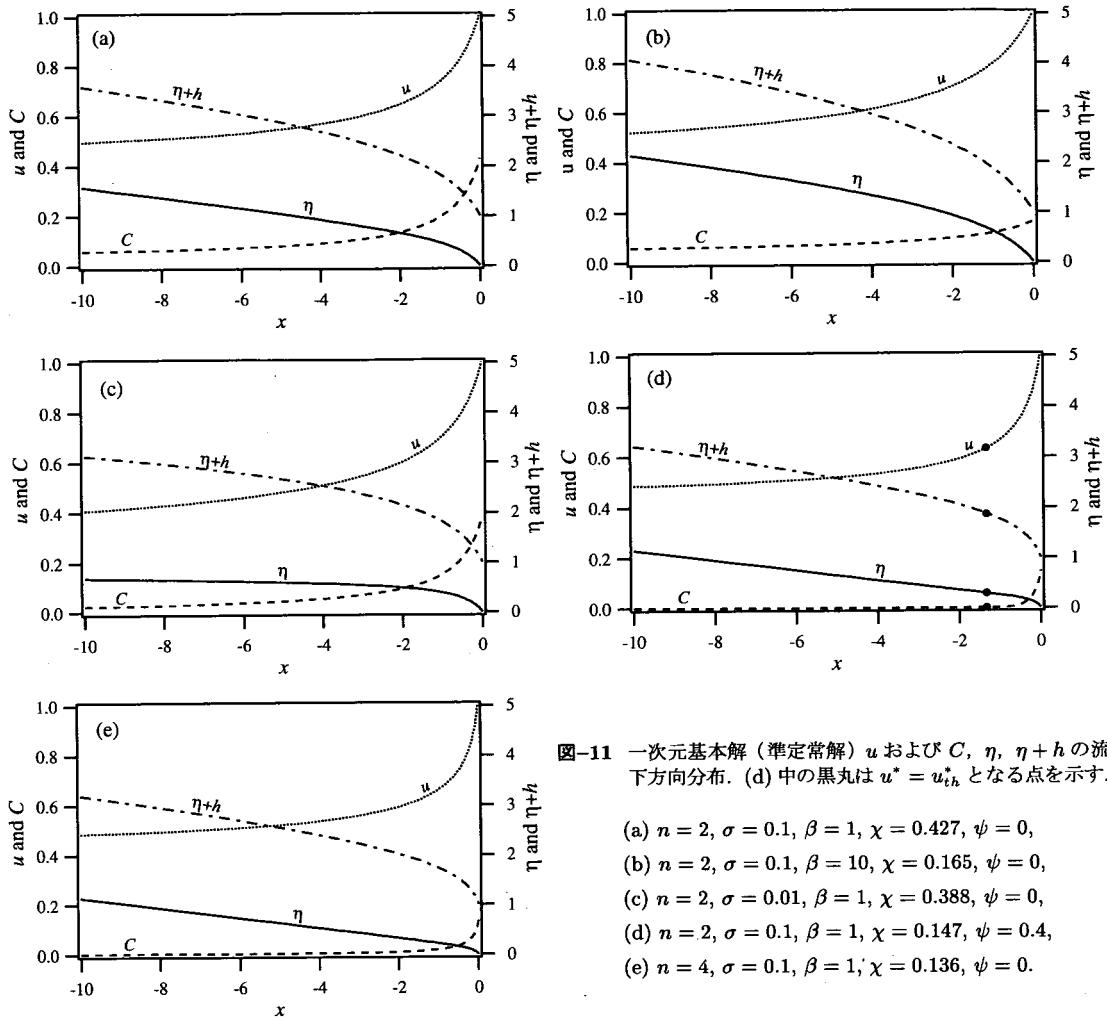


図-11 一次元基本解（準定常解） u および C , η , $\eta + h$ の流下方向分布. (d) 中の黒丸は $u^* = u_{th}^*$ となる点を示す.

- (a) $n = 2, \sigma = 0.1, \beta = 1, \chi = 0.427, \psi = 0$,
- (b) $n = 2, \sigma = 0.1, \beta = 10, \chi = 0.165, \psi = 0$,
- (c) $n = 2, \sigma = 0.01, \beta = 1, \chi = 0.388, \psi = 0$,
- (d) $n = 2, \sigma = 0.1, \beta = 1, \chi = 0.147, \psi = 0.4$,
- (e) $n = 4, \sigma = 0.1, \beta = 1, \chi = 0.136, \psi = 0$.

$$+ \frac{f^{-1}u_0^2}{1-u_0^3}C_1 - \frac{f^{-1}\Omega u_0^2}{1-u_0^3}\eta_1 \quad (55)$$

$$\frac{dv_1}{dx} = -u_0v_1 + \frac{k}{u_0}h_1 + \frac{k}{u_0}\eta_1 \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} = & -\frac{2u_0^2 + 2u_0' - f^{-1}E_u(u_0^2)}{1-u_0^3}u_1 + \frac{ku_0}{1-u_0^3}v_1 \\ & + \frac{u_0^4 + u_0^2u_0'}{1-u_0^3}h_1 - \frac{f^{-1}}{1-u_0^3}C_1 + \frac{f^{-1}\Omega}{1-u_0^3}\eta_1 \end{aligned} \quad (57)$$

$$\frac{dC_1}{dx} = [\beta^{-1}E_u(u_0^2) - u_0^{-1}C_0']u_1 - u_0C_0'h_1 - \beta^{-1}C_1 \quad (58)$$

$$\frac{d\eta_1}{dx} = -f^{-1}E_u(u_0^2)u_1 + f^{-1}C_1 - f^{-1}\Omega\eta_1 \quad (59)$$

ここで ' は x による全微分 d/dx を表している.

(2) 境界条件と正則条件

フルード限界点から無限上流においては、流れは等流状態に漸近し擾動の影響は消滅する。すなわち次式

が成り立つ。

$$u_1 = v_1 = h_1 = C_1 = \eta_1 = 0 \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (60)$$

上式は五つの境界条件を含んでいるように見えるが、式(55)–(59)からもわかるように、いずれか四つの条件が満足されると残りの一つも自動的に成立する。したがって実際は四つの境界条件しか含んでいない。

フルード限界点では式(55)および(57)の右辺において分母がゼロとなり、再び特異性が現れる。これを避けるための正則条件は分子も同様にゼロとなる条件である。式(55)の両辺に $1-u_0^3$ をかけてフルード限界点において両辺の値を評価すると、 du_1/dx が有限であるためには次式が要求されることがわかる。

$$\begin{aligned} [2 + 2p - f^{-1}E_u(1)]u_1 - kv_1 - (1+p)h_1 \\ + f^{-1}C_1 - f^{-1}\Omega\eta_1 = 0 \quad \text{at } x = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

式(57)に対して同じ操作をすると上式と全く同一の式

が得られることがわかる。

式(55)–(59)は、五つの未知数 u_1 および v_1 , h_1 , C_1 , η_1 を含む、五つの一階の常微分方程式であり、五つの境界条件(60)および(61)とともに、 Ω を固有値とする Sturm-Liouville 型の固有値問題を構成している。ただし、ここでは緩和法を適用し易くするために原点における底面高さに対する擾動の振幅を 1 と正規化し、非線形の二点境界値問題として解くことにする。

原点において η に対する擾動の振幅を次のように正規化する。

$$\eta_1 = 1 \text{ at } x = 0 \quad (62)$$

すると、式(60)および(61)に加えて式(62)の計六つの境界条件の下で、 u_1 から η_1 に Ω を加えた六つの未知数を含む式(55)–(59)を解く問題に帰着できる。ここでは再び緩和法を用いることによって解く²²⁾。

6. 結果と考察

(1) 卓越波数と擾動量の流下方向分布

図-12 は解析より得られた k による Ω の変化を示したものである。図によると Ω は一般に次のような特徴を有することがわかる。波数 k が小さくなると Ω はある一定値に漸近する。逆に k が大きくなると Ω は急激に減少し、ほとんどの場合、 $k = 1\text{--}4$ 以下で Ω は負の値をとる。これはある程度以上波長の小さい擾乱は発達できないことを意味している。また多くの場合、 $k = 0.4\text{--}1.1$ 付近に擾乱の増幅率を最大とする卓越波数が存在しており、この波数に対応する波長の擾乱が卓越して発達することを意味している。次に他のパラメータによる Ω の変化を見てみる。

図-12(a) は、 $n = 2$ および $\sigma = 0.1$, $\psi = 0$ の場合の k および β による Ω の変化である。図によると $\beta = 1$ の場合、 $k \rightarrow 0$ において Ω はゼロに漸近しないことがわかる。 $k = 0$ に対応する Ω は基本解の安定性を示しており¹⁾、これは $\beta = 1$ のとき基本解は不安定であることを意味している。しかも $k < 1$ の領域で Ω の値はほぼ一定となり明確なピークを持たない。これは、無次元波数 k が 1 より小さい擾乱が全てほぼ同一の速度で成長することを意味しており、このとき明確な間隔を有するガリ群は発生しないと考えられる。 β が大きくなると $k \rightarrow 0$ における Ω はゼロに漸近するようになり、明確なピークが現れるようになる。また β の増加に伴って、ピークにおける Ω の値は若干小さくなり、 Ω がピークをとる k の値(卓越波数)も 0.6 から 0.4 へと若干小さくなることがわかる。

図-12(b) は $n = 2$ および $\beta = 1$, $\psi = 0$ の下で、正規化された斜面勾配 σ を変化させた図である。勾配の大きい $\sigma = 0.5$ の場合、 Ω は常に負となり、全ての波

長の擾乱に対して斜面は安定となることがわかる。また $\sigma = 0.1$ 以下になると斜面は擾乱に対して不安定となるが、明確な卓越波数が現れるのは σ がさらに小さくなっているからである。さらに $\sigma = 0.01$ と $\sigma = 0.001$ の線が重なっていることから、基本解でも見られたように $\sigma = 0.01$ 以下では Ω の値も一定値に収束することがわかる。この解析では完全な平坦床は計算できないが、平坦床の結果は $\sigma = 0.01$ の結果とほぼ同一であることが推測される。

図-12(c) は $n = 2$ および $\sigma = 0.1$, $\beta = 1$ の下で ψ を変化させたものである。 $\psi = 0$ の時はっきりとしなかった Ω のピークは ψ が増加すると明瞭になってくる。また $\psi = 0.2\text{--}0.6$ でピークにおける Ω の値自体があまり変化せず、 $\psi = 0.8$ で急に大きくなる様子がわかる。 ψ が大きくなると式(14)で表される \bar{E}_c が小さくなり、時間の正規化(12e)で用いた代表時間スケール自体が長くなってしまう。このことに起因する見かけ上の変化が含まれていることに注意する必要がある。したがって実質上は $\psi = 0.2\text{--}0.6$ の範囲で ψ の増加に伴って Ω は減少していることになる。卓越波数は $\psi = 0.2\text{--}0.6$ で $k = 0.7\text{--}0.8$ のほぼ一定値をとるが、 $\psi = 0.8$ では $k = 1.1$ 程度の若干大きな値をとることがわかる。

図-12(d) は $\sigma = 0.1$ および $\beta = 1$, $\psi = 0$ の下で n による Ω の変化を示したものである。 $n = 1$ の時、全波数において Ω は負の値をとり、斜面は擾乱に対して安定となることがわかる。また $n = 3$ 以上では明確なピークが現れ、卓越波数は $k = 0.7\text{--}0.8$ のほぼ一定値をとる。

以上の結果をまとめると次のように要約できる。ガリは、 β がある値より大きく、移流の効果が巻上の効果に対してある程度大きい領域でのみ発生する。また σ が小さく、 ψ および n が大きいほど明瞭な卓越波数が現れる(もちろん $\psi < 1$ の範囲で)。図-10を見ればわかるように、上記の条件は χ が小さくなる条件にはかならない。つまり χ が大きく堆積の影響が大きいとガリの発生は抑制され、堆積の影響が小さくなるほどガリは発生し易くなることがわかる。

図-13 は、 $n = 2$ および $\sigma = 0.1$, $\beta = 2$, $\chi = 0.331$, $\psi = 0$ における擾動量 u_1 および v_1 , h_1 , C_1 , η_1 と斜面形状の基本解 η_0 の流下方向分布を図示したものである。(a) は増幅率の最大値 $\Omega = 0.189$ をとる $k = 0.6$ の場合であり、ガリが発生するケースである。一方(b) は $\Omega = -2.64$ となる $k = 6$ の場合に対応しており、ガリが発生しないケースである。ガリ発生に重要な流速の擾動量 u_1 をみると、原点における絶対値はガリ非発生の(b)の方が大きくなっている。それに対し(a)では擾動量が上流域広範囲にわたって値を持っており、擾動の影響がより上流まで及んでいることがわかる。原点

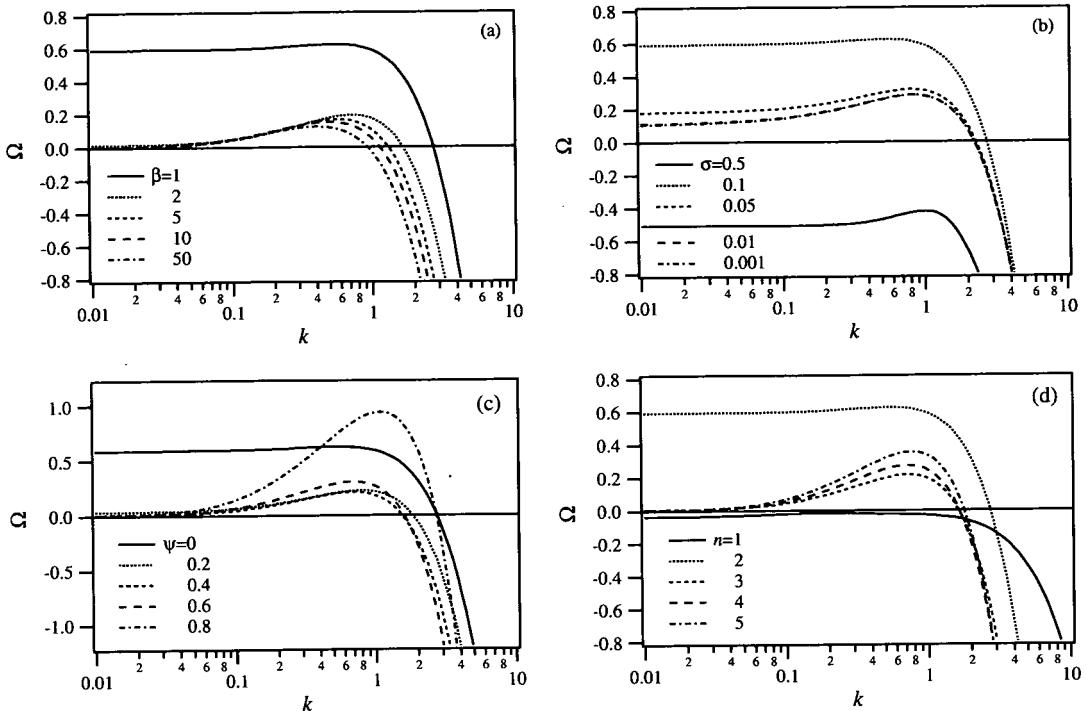


図-12 摘乱の増幅率 Ω の k および β, σ, ψ, n による変化. (a) $n = 2, \sigma = 0.1, \psi = 0$. (b) $n = 2, \beta = 1, \psi = 0$. (c) $n = 2, \sigma = 0.1, \beta = 1$. (d) $\sigma = 0.1, \beta = 1, \psi = 0$.

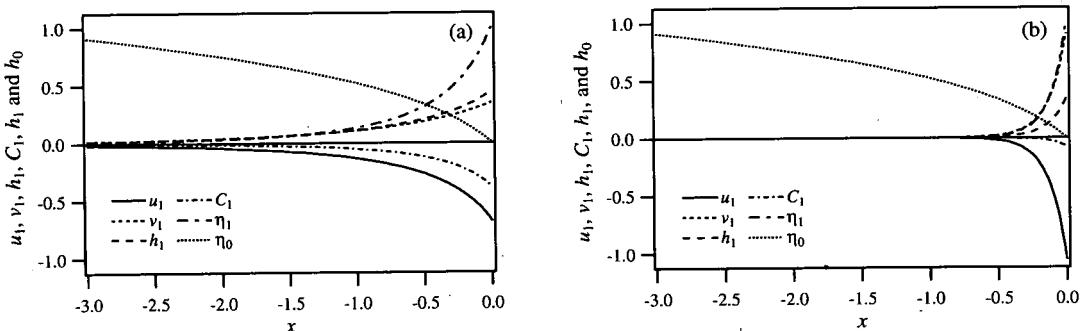


図-13 摆動量の流下方向分布. $n = 2, \sigma = 0.1, \beta = 2, \chi = 0.331, \psi = 0$, (a) $k = 0.6, \Omega = 0.189$, (b) $k = 6, \Omega = -2.64$.

近傍に限れば波長の短い擾乱の方が流れの集中は大きいが、波長の長い擾乱の方がより広範囲に影響を及ぼすことができる。すなわち波長があまり長くなると流れの集中が小さくなってしまい、逆にあまり短くなると擾乱の影響が広範囲に及ばなくなってしまう。したがって流れの集中と影響範囲の大きさがどちらもある程度大きい適度な波長の擾乱が最大の発達速度を有するのであろう。

(2) 卓越波長とガリ群の形成間隔

前節の結果から、ガリが発生する場合、 k が 1–4 の値を越えるガリ群は発生せず、卓越波数は $k = 0.4\text{--}1.1$ となることが明らかとなった。波長の次元量 $\tilde{\lambda}$ と無次元波数 k の関係は次式で表される。

$$\tilde{\lambda} = \frac{2\pi \tilde{H}_c}{C_f k} \quad (63)$$

また前述したように底面摩擦係数 C_f は平均して 0.01 程度の値をとるとすると、波数に関する前述の結果は、

波長がフルード限界水深 \tilde{H}_c の 150–600 倍より大きい擾乱のみが成長し、卓越波長は限界水深の 600–1500 倍であることを意味している。そしてこの卓越波長が水路群の初期形成間隔（ガリ間隔）に対応している。

泉¹⁾は、侵食が卓越する強粘着性土など場合の水路群形成の理論において卓越波数が 0.4–0.8 となり、ガリの形成間隔の平均値はフルード限界水深の 1000 倍程度となることを見出している。本解析の結果もこれとほぼ同一の値となっている。

強粘着性土の理論¹⁾と比べると、本理論では堆積の影響を考慮した点が大きく異なっており、前節で述べたように堆積の影響が大きいほどガリの発生は全般的に抑制されることが明らかとなった。上述の結果は、堆積の影響によってガリの発生が抑制されるような場合でもガリの形成間隔自体はほとんど変化しないことを意味している。

(3) 実際に見られるガリ間隔との比較

図-1 に見られる形成初期のガリでは、大きいもので幅が 50 m 程度であった。図から推定するとガリの間隔を代表するスケールも 50 m 前後であることがうかがわれる。図-2 および図-3 では長さスケールが明瞭ではないが、現地の地形図から読み取るとガリの間隔を代表する長さスケールは 50–100 m である。ただし図-2 および図-3 ではガリ形成されてから 7000–24000 年が経過しており、発生初期の形状については不明である。

一方、本理論の結果によれば、ガリの間隔はフルード限界水深の 600 倍から 1500 倍程度となる。したがって台地上に発生する表面流のフルード限界水深が得られれば、ガリ間隔の理論値が計算できる。しかしガリ形成時に実際に生じた流量や水深に関する測定例は著者の知る限り皆無であり、フルード限界水深の正確な値を知ることは現状では困難と言わざるを得ない。

またどの程度の流量がガリの形成間隔を決める際、支配的となっているのかについても未だ不明な点が多い。たとえば流量の大きい表面流は低い頻度でしか発生しないが、一旦発生するとガリを急激に発達させる。一方、流量の小さい表面流は高い頻度で発生するものの、ガリを大きく発達させることはない。したがって実際のガリ間隔を決めるのは、ある程度流量が大きく、それほど頻度の小さくない流量であることが予想される。

泉¹⁾は、侵食が卓越する強粘着性土などの場合、ガリが発達するのは頻度が少なく雨量が極端に大きい極値的なイベントであると仮定し、ガリ間隔を決定するフルード限界水深を 10 cm と見積もっている。ここで考えている粘着性の弱い細砂の場合、耐侵食性が小さいため、ガリの発達を決めるのはそれほど極端に大きな降雨量ではないことが予想されるが、やはり正確な値

を決めるためには更なる研究が必要となろう。今後の課題である。

ここではフルード限界水深を合理的に見積もる方法がないので、実際に見られるガリ間隔に合うような水深を見積もってみよう。例えば限界水深を 5 cm とするガリ間隔は 30–75 m と求められ、その平均値はピナツボ火山において発生直後に観察されたガリのスケール 50 m とほぼ一致することがわかる。

本理論は線形安定理論であり、求められたガリ間隔は未だ十分に発達していない発生直後のガリ間隔に相当している。一旦形成されたガリが成長していく段階では、先に発達したガリが他のガリの集水域を奪う流域争奪の作用によって、ガリ間隔が大きくなることが考えられる。それを考慮すると、あるいは 5 cm より小さい水深 1–3 cm で生じた 6–45 m のガリ間隔が、発達に伴って大きくなつた可能性も否定できない。いずれの場合でも実際に見られるガリ群の間隔は本理論によって説明可能な範囲にあると言えるのではないだろうか。

7. 結論

線形安定解析の手法を用いて、火碎物台地端部に形成されるガリ群の形成機構を説明する理論を提案した。理論によれば、浮遊砂の沈降速度に対する相対摩擦速度が大きくなり移流の影響が巻上の影響に卓越したり、勾配が小さく非平衡性が大きくなると、堆積に対して巻上が支配的となり、ガリが発生する。このとき台地端部に形成されるガリ群の間隔はフルード限界水深の 600 倍から 1500 倍程度となることが明らかとなった。フルード限界水深が 5 cm とすると、ガリの形成間隔は 30–75 m となり、観察されている発生直後のガリ間隔、約 50 m を合理的に説明できる。

謝辞: 本論文を書くにあたって、鹿児島大学、岩松 崇教授からはシラスに関する詳しい情報とシラス台地に形成されたガリの写真をいただいた。北海道大学、宇井忠英教授からはピナツボ火山噴火直後のガリ侵食の写真をいただいた。知覧町教育委員会の上田 耕氏からは知覧城に関する調査報告書（参考文献 2), 3) をいただき、知覧城跡の写真の掲載を許可していただいた。北海道中標津町でのガリの現地調査では、国土交通省北海道開発局釧路開発建設部に現地の案内や情報収集、ガリの写真提供等、便宜を図っていただいた。また本研究は、北海道河川防災センターから研究助成を受けて行われた。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 泉 典洋: 水路群発生の線形安定論—斜面下流端からの発生理論—、土木学会論文集, No. 614/II-46, pp. 66–75,

- 1999.
- 2) 上田 耕: 知覧城跡 (一), 鹿児島県知覧町教育委員会, 1992.
 - 3) 上田 耕: 知覧城跡 (二), 鹿児島県知覧町教育委員会, 1994.
 - 4) 貝塚爽平, 太田洋子, 小嶋 尚, 小池一之: 写真と図でみる地形学, 東京大学出版会, 1985.
 - 5) 泉 典洋: 亂泥流による海底峡谷の形成理論, 土木学会論文集, No. 712/II-6, pp. 45-56, 2002.
 - 6) 泉 典洋, Gary Parker: 侵食によって下流側から形成される水路網の初期形成機構, 土木学会論文集, No. 521/II-32, pp. 79-91, 1995.
 - 7) Ikeda, S., Izumi, N. and Ito, R.: Effects of pile dikes on flow retardation and sediment transport, *J. Hydraulic Eng.*, Vol. 117, HY11, pp. 1459-1478, 1992.
 - 8) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *J. Fluid Mech.*, Vol. 42, pp. 225-244, 1970.
 - 9) Smith, J. D. and McLean, S. R.: Spatially averaged flow over a wavy surface, *J. Geophys. Res.*, Vol. 82, No. 12, pp. 1735-1746, 1977.
 - 10) Akiyama, J. and Fukushima, Y.: Entrainment of non cohesive sediment into suspension, *Proc. 3rd Int. Symp. on River Sedimentation*, S. Y. Wang, H. W. Shen, and L. Z. Ding, eds., Univ. of Mississippi, pp. 804-813, 1986.
 - 11) Garcia, M. and Parker, G.: Entrainment of bed sediment into suspension, *J. Hydraulic Eng.*, Vol. 117, HY4, pp. 414-435, 1991.
 - 12) 竹本成行, 渡邊康玄, 長谷川和義, 亀田裕二: 火山灰流路の側岸浸食過程に関する研究, 平成3年度土木学会北海道支部論文報告集, pp. 255-258, 1992.
 - 13) 金高州吾, 渡邊康玄, 長谷川和義, 亀田裕二: 大型火山灰流路を用いた側岸浸食実験, 水工学論文集, 第37巻, pp. 631-636, 1993.
 - 14) 長谷川和義, 亀田裕二, 渡邊康玄, 金高州吾: 火山灰流路の側岸浸食時に現れる直線状平衡斜面の形成過程, 平成4年度土木学会北海道支部論文報告集, pp. 237-242, 1993.
 - 15) 河村三郎: 土砂水理学1, 森北出版, 1982.
 - 16) 芦田和男, 道上正規: 浮遊砂に関する研究(1) —河床付近の濃度—, 京都大学防災研究所年報, 第13号B, pp. 233-242, 1970.
 - 17) Lane, E. W. and Kalinske A. A.: The relation of suspended to bed material in river, *Trans., AGU*, pp. 637-640, 1939.
 - 18) 加藤正進, 岸 力: 浮流砂に関する研究, 土木学会第24回年次学術講演会講演集, 第2部, pp. 223-226, 1969.
 - 19) *Sedimentation engineering: Manuals and reports on engineering practice No. 54*, V. A. Vanoni, ed., ASCE, 1975.
 - 20) Parker, G., Fukushima, Y. and Pantin, H. M.: Self-accelerating turbidity currents, *J. Fluid Mech.*, Vol. 171, pp. 145-181, 1986.
 - 21) 泉 典洋, 田中 仁, 坪井宏介, 伊達政直: 河川流が卓越する河口テラスの初期堆積形状に関する実験, 土木学会論文集, No. 740/II-64, pp. 109-120.
 - 22) Press, H. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in FORTRAN*, 2nd Ed, Cambridge, 1992.

(2003. 4. 8 受付)

LINEAR STABILITY ANALYSIS OF THE CHANNELIZATION ON SLOPES COMPOSED OF WEAKLY COHESIVE FINE MATERIAL

Norihiro IZUMI and Kenji FUJII

This paper presents a mathematical model of the formation of gullies on slopes composed of material with relatively weak cohesivity such as freshly deposited volcanic ash. A linear stability analysis is performed with the use of the momentum equations of flow, the dispersion equation of suspended sediment, and the Exner equation extended for beds subject to erosion and deposition of sediment. The analysis shows that the dominant gully spacing is 600-1500 times the Froude-critical depth of the sheet flow on the slope. Evaluating the critical depth to be 5 cm, the spacing of gullies is 30-75 m, which is consistent with observations.