

フラックス制御を利用する 移流方程式の5次精度保存形スキーム

牛島省¹・吉田圭介²・竹村雅樹³・禰津家久⁴

¹ 正会員 工博 京都大学大学院 助教授 社会基盤工学専攻(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

² 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻 博士課程

³ 学生員 京都大学大学院 環境地球工学専攻 修士課程

⁴ フェローメンバー 工博 京都大学大学院 教授 社会基盤工学専攻

有限体積法により離散化された移流方程式に対する高次精度スキームについて考察した。計算セル境界のフラックスを5次スプライン関数により空間内挿するFVM-QSIスキームを示すとともに、保存性を損なわずに数値振動を抑制するためのフラックス制御法(DC法とFP法)を提案した。移流方程式へ適用した結果、DC法を用いたFVM-QSIスキームにより精度の高い安定な計算が行えること、またFP法ではDC法よりも精度は低下するが、計算時間が短縮化されることを示した。さらに、2次元キャビティ内の非圧縮性流体計算へ適用した結果、DC法を用いたFVM-QSIスキームにより、既往の5次精度TVDスキームよりも精度が高い数値解が得られること、また計算時間の点においても本手法は十分実用的であることなどが示された。

Key Words : finite volume method, conservative form, convection equation, collocated grid, quintic spline function

1. 緒言

数値流体力学においては、線形あるいは非線形の移流方程式の数値解を適切に得ることができる計算スキームを構成することは、最も重要な研究課題の一つに位置づけられている。水工学の分野においても、多次元の非圧縮性流体の数値計算法を用いた流れの予測と評価が一般に行われるようになっており、移流過程を適切に扱える計算スキームの重要性は非常に高い。

これらの計算スキームに求められる条件としては、数値的な精度が高いことはもちろんであるが、さらに保存性が満足されることや数値振動を起こさないことも重要である。流れによる物質の移流現象や分散相をpassive scalarとして扱う混相流モデルなどにおいては、計算領域内でそれらの保存性が満足される必要があり、また非物理的な数値振動が生ずるスキームでは信頼性のある数値解を得ることはできない。また、自由水面の大変形を扱う数値解法¹⁾や、気体と液体が混在するような多相流場を統一的に解析する手法が近年提案されているが^{2), 3)}、これらの解法で利用されるスカラーの移流方程式は、保存性を満足する条件のもとで計算される必要がある。さらに、保存性に加えて、これらのスカラー関数の計算や気液相間の界面追跡法においては、値が急変するスカラー場を、非物理的な数値振動を起こさずに精度良く解析できるスキームが

必要とされる。以上を考慮すると、これまでにも同様の指摘があるように⁴⁾、次のような条件が計算スキームに求められる。すなわち、1) 数値的な精度が高く、不連続面を明瞭に追跡できること、2) 非物理的なオーバーシュートやアンダーシュートが生じないこと、3) 保存性を満足すること、という3点が極めて重要であり、さらに、計算時間や使用するメモリ容量、取り扱いやすさなどに関する条件が加えられる。

以上を考慮して、本報では保存形表示された移流方程式を計算するための高次精度スキームについて考察を行う。基礎式に対して有限体積法に基づく離散化を行い、計算セル境界におけるフラックスを5次スプライン関数を利用して空間内挿するFVM-QSIスキームを示す。そして、同スキームあるいはTVD条件を一般には満足しない既往の高次精度スキームに対して、保存性を損なわずに数値振動を抑制するフラックス制御法(DC法とFP法)を提案する。フラックス制御法を用いたFVM-QSIスキームは、保存性を満足し、計算精度が比較的高く、しかかも数値振動が抑制される。DC法を用いたFVM-QSIスキームを移流方程式へ適用し、数値振動が抑制された高精度の計算が実際に可能であることを示す。さらに、同スキームをキャビティ内の非圧縮性流体計算へ適用し、計算精度や計算時間に関する検討を行い、その有効性を確認する。

2. 数値解析手法

(1) 保存形表示された移流方程式の離散化

直交座標系では、保存形表示されたスカラー c の移流方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

ここに、 t は時間、 x_i は座標成分、 f_i は cu_i で与えられ、 u_i は x_i 方向の流速成分である。式(1)は、積分型の表示では次のように記述される。

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dv + \int_S f n dS = 0 \quad (2)$$

ここに、 f は cu であり、 u は流速ベクトルである。また n は積分領域境界面上の外向き単位法線ベクトルである。簡単のため、2次元 xy 座標空間を対象とし、セル境界が座標軸と平行な等間隔構造格子を用いるとすれば、式(2)は次のように離散化される。

$$c_{ij}^{n+1} = c_{ij}^n - c_x(f_{ij} - f_{i-1j}) - c_y(g_{ij} - g_{ij-1}) \quad (3)$$

ここに、 $c_x = \Delta t / \Delta x$ 、 $c_y = \Delta t / \Delta y$ であり、 Δt は時間増分、 Δx と Δy はそれぞれ x, y 方向の計算セル幅である。 f_{ij} と g_{ij} はセル境界上で定義される次式のフラックスである。

$$f_{ij} = c_{i+\frac{1}{2},j}^n u_{ij} \quad (4a)$$

$$g_{ij} = c_{ij+\frac{1}{2}}^n v_{ij} \quad (4b)$$

u, v はそれぞれ x, y 方向の流速成分である。離散化された変数の配置を図-1に示す。 c_{ij} はセル中心で定義され、 u_{ij} と v_{ij} はセル境界上で与えられているとする。 $c_{i+\frac{1}{2},j}$ 等は、セル境界上の c を表し、これを空間内挿等で求めることが必要となる。

1次風上型のスキームを用いる場合には、式(4)中に含まれるセル境界上の c として、隣接する風上側のセルの c_{ij} が用いられる。風上型スキームでは解の単調性は維持されるが、数値拡散のため精度の高い計算は困難である。一方、2次精度以上の高次精度スキームでは、一般に複数のセル中心上の c_{ij} からセル境界上

の c が評価される。この場合に、TVD 条件⁵⁾ が満足されないと数値解の振動が発生し、解の信頼性が損なわれたり、計算が破綻する場合がある。

上記のような有限体積型の離散化法を用いる場合に数値解の振動を抑制する方法の一つとして、QUICK-FRAM⁶⁾ が提案されている。この手法は、QUICK スキーム⁷⁾ による計算で数値振動が発生した場合に、FRAM(filtering remedy and methodology)⁸⁾ と同様の考えに基づき、TVD 条件を満足する1次風上型スキームに切り替える方法である。また、有限体積法で用いられる TVD 条件を満足するスキームとして、CO(Chakravarthy-Osher) スキーム⁹⁾、ENO(essentially non-oscillatory) スキーム¹⁰⁾、MUSCL(monotone upstream-centered schemes for conservation laws)^{11),12)} などが提案されている。これらの TVD スキームでは、高次内挿の際に minmod 関数などの制限関数を利用するなどの方法により、数値振動を起こさないスキームを構成している。本報では、上記のような既往の手法と異なり、オーバーシュートあるいはアンダーシュートの大きさに応じてフラックスを計算領域内で再配分することで、数値解の振動を抑制する手法を考察する。最初に5次スプライン関数を用いた内挿法とフラックスの制御法を示し、次にスカラーの移流計算および非圧縮性流体計算への適用性を検討する。

(2) セル境界上の変数の5次精度空間内挿

式(4)で与えられるフラックスを精度良く求めるためには、セル境界上の c の値を高次の空間内挿で評価することが必要となる。例えば、有限体積法における QUICK スキームは、2次関数を利用してセル空間上の値を空間内挿する手法である。

ここでは、空間内挿として5次スプライン関数を用いてセル境界上の c の値を空間内挿する方法を考える。前報¹³⁾では、非保存形の移流方程式に対して、セル中心で変数の1階微分量を5次スプライン関数を利用して求める手法(QSI スキーム)を示した。本報では、保存形の基礎式と離散化法に基づくため、変数値そのものがセル境界で空間内挿される、両者を区別するため、前報¹³⁾で示された非保存形の基礎式に適用する手法を FDM-QSI (有限差分法による QSI スキーム)、また本報で検討するものを FVM-QSI (有限体積法に基づく同スキーム) と表す。

1次元場における5次スプライン関数の導出アルゴリズムは Herriot ら¹⁴⁾ により示されており、この手法では3個以上の節点が与えられれば対象とする区間の関数が得られる。前報¹³⁾の FDM-QSI では、計算精度と計算時間を考慮して、6個の格子点を利用して

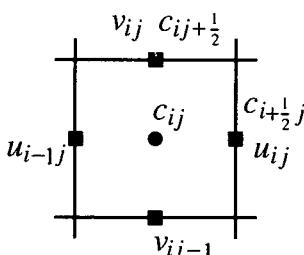


図-1 計算セルと変数の定義位置

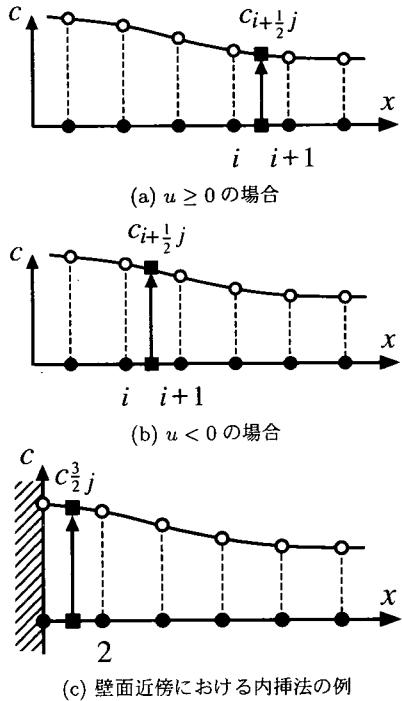


図-2 セル境界上の変数の 5 次スプライン内挿(図中の●はセル中心、■はセル境界を表す)

5 次スプライン関数を定めた。これと同様に、FVM-QSI ではセル境界上の流速成分に対しても風上側に 4 点、その反対方向に 2 点の格子点を利用して 5 次スプライン関数を定め、セル境界上の変数値を空間内挿する。境界付近において、格子点が確保できない場合は、それらの配置をずらして合計 6 点の格子点を用いて同様に内挿を行う。利用する格子点分布の例を図-2 に示す。

(3) フラックスの直接制御法

QUICK スキームや FVM-QSI スキームによりセル境界上で求められたフラックスを f^* および g^* と表す。式(3)の f および g として f^* および g^* を用いて計算された値を c^* とする。すなわち、

$$c_{ij}^* = c_{ij}^n - c_x (f_{ij}^* - f_{i-1,j}^*) - c_y (g_{ij}^* - g_{ij-1}^*) \quad (5)$$

c^* をそのまま c^{n+1} とするときには、TVD 条件は満足されず数値振動が生ずる場合がある。数値振動を回避するためには、MMT フィルタ¹⁵⁾ のように、計算された c の値を制御する方法があるが、この場合には保存性が満足されなくなり、有限体積型の離散化法を用いる利点が失われてしまう。このため、計算された c の値ではなく、フラックスを制御する方法を検討する。フラックスが変化しても、隣接する計算セル間で共通のセル境界上のフラックスが用いられれば、計算領域

全体の保存性は満足される。

移流方程式の計算が適切に行われる場合、上流域に分布する c^n の最大値よりも過大、あるいは最小値よりも過小な c^{n+1} は発生しない。MMT フィルタはこの原理を利用するものであるが、ここでも同様にして c^* のオーバーシュートあるいはアンダーシュートの大きさ dc を評価する。すなわち、

$$dc_{ij} = \max\{c_{ij}^* - c_{\max}, 0\} \geq 0 \quad (6)$$

$$dc_{ij} = \min\{c_{ij}^* - c_{\min}, 0\} \leq 0 \quad (7)$$

を計算する。 $dc_{ij} \neq 0$ の場合には数値振動が生じており、フラックスの補正が必要となる。ここに、 c_{\max} と c_{\min} は、 n ステップにおける上流側の 4 つのセル中心の c の最大値と最小値である。1 次元場を例にとれば、 c_{\max} は次式から定められる。

$$c_{\max} = \begin{cases} \max\{c_{i-1}^n, c_i^n\} & u \geq 0 \\ \max\{c_i^n, c_{i+1}^n\} & u < 0 \end{cases} \quad (8)$$

2 次元場では j 方向にも同様の評価を行う。 c_{\min} も同様に定められる。

数値振動を回避するためには、直接的には $c_{ij}^* - dc_{ij}$ に相当する補正を f^* および g^* に対して行えよ。ただし、この修正により他の計算セルの dc が変化するため、反復計算等により、計算領域全体で dc を 0 に近づける操作が必要となる。計算セルにおいて各方向に均等なフラックスの修正を行うとすれば、反復計算の $k+1$ ステップのフラックスの修正値は k ステップの値を用いて以下のように求められる。

$$f_{ij}^{k+1} = f_{ij}^k + \frac{dc_{ij}^k}{4c_x} \quad (9a)$$

$$f_{i-1,j}^{k+1} = f_{i-1,j}^k - \frac{dc_{ij}^k}{4c_x} \quad (9b)$$

$$g_{ij}^{k+1} = g_{ij}^k + \frac{dc_{ij}^k}{4c_y} \quad (9c)$$

$$g_{ij-1}^{k+1} = g_{ij-1}^k - \frac{dc_{ij}^k}{4c_y} \quad (9d)$$

あるいはこれと同等の関係として、

$$f_{ij}^{k+1} = f_{ij}^k - \frac{1}{4c_x} (dc_{i+1,j}^k - dc_{ij}^k) \quad (10a)$$

$$g_{ij}^{k+1} = g_{ij}^k - \frac{1}{4c_y} (dc_{ij+1}^k - dc_{ij}^k) \quad (10b)$$

を得る。初期値は $f^0 = f^*$ および $g^0 = g^*$ とする。反復計算の終了判定には、計算領域中の $|dc_{ij}|$ の最大値や dc_{ij} の二乗和などをしきい値と比較すればよい。

本節で示されたフラックス制御を伴う FVM-QSI スキームの計算法は下記のように要約される。

- 1) 5次スプライン関数などの高次内挿関数を用いてセル境界上のフラックス f^*, g^* を求める.
- 2) $f^k = f^*$ および $g^k = g^*$ とする ($k = 0$).
- 3) f^k, g^k を用いて c^k を計算する.

$$c_{ij}^k = c_{ij}^n - c_x (f_{ij}^k - f_{i-1,j}^k) - c_y (g_{ij}^k - g_{ij-1}^k) \quad (11)$$

- 4) 式(6)または式(7)より c^k に対する dc^k を求める.
- 5) dc^k が収束判定条件を満足していれば c^k を c^{n+1} として計算を終了する. そうでなければ、式(10)より f^{k+1}, g^{k+1} を求める. そして、 $k+1$ を k として、上記3)の手順へ戻る.

本節の計算手順では、 dc を用いて直接フラックスを修正するので、以下ではこれを DC (direct correction) 法、あるいはフラックスに対する DC 制御と表記する. 次節では、フラックスを修正するための異なる計算方法を検討する.

(4) ポテンシャル関数を用いたフラックス制御

前節で示された DC 法では、反復計算の各ステップ毎に修正されたフラックスの影響が 1 計算セルずつ伝播してゆくため、収束解を得るまでに多くの反復計算が必要となる. 本節では、フラックスの修正量に対するポテンシャルに相当する関数を用いる方法を検討する.

式(10)を次のように表す.

$$f_{ij}^{k+1} = f_{ij}^k + \tilde{f}_{ij}^k \quad (12a)$$

$$g_{ij}^{k+1} = g_{ij}^k + \tilde{g}_{ij}^k \quad (12b)$$

\tilde{f} および \tilde{g} を修正フラックスと表記する. 修正フラックスのポテンシャルに相当する関数 ϕ を仮定し、 \tilde{f} および \tilde{g} が次式から計算されるとする.

$$\tilde{f}^k = -\gamma_x \frac{\partial \phi^k}{\partial x} \quad (13a)$$

$$\tilde{g}^k = -\gamma_y \frac{\partial \phi^k}{\partial y} \quad (13b)$$

ここに、 γ_x と γ_y は適当な係数とする. 式(1)を時間方向にのみ離散化すれば、DC 法の k ステップの計算は次のように表される.

$$c^k = c^n - \left(\frac{\partial f^k}{\partial x} + \frac{\partial g^k}{\partial y} \right) \Delta t \quad (14)$$

また、 $k+1$ ステップの計算は次のようにになる.

$$\begin{aligned} c^{k+1} &= c^k - dc^k \\ &= c^n - \left(\frac{\partial f^{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial g^{k+1}}{\partial y} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (15)$$

式(12)を考慮して、式(14)と式(15)の差を取れば次式を得る.

$$\frac{\partial \tilde{f}^k}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{g}^k}{\partial y} = \frac{dc^k}{\Delta t} \quad (16)$$

式(16)に式(13)を代入すれば次式となる.

$$\gamma_x \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial x^2} + \gamma_y \frac{\partial^2 \phi^k}{\partial y^2} = -\frac{dc^k}{\Delta t} \quad (17)$$

したがって、式(17)を満足する関数 ϕ を求め、これを用いて修正フラックスを定める方法が考えられる. 以下でこの計算のための離散化式を導く.

式(13)を空間的に離散化すれば次式となる.

$$\tilde{f}_{ij}^k = -\gamma_x \frac{\phi_{i+1,j}^k - \phi_{ij}^k}{\Delta x} \quad (18a)$$

$$\tilde{g}_{ij}^k = -\gamma_y \frac{\phi_{ij+1}^k - \phi_{ij}^k}{\Delta y} \quad (18b)$$

ここで、 $\phi = dc^k$ とすれば、 $\gamma_x = \Delta x / 4c_x$, $\gamma_y = \Delta y / 4c_y$ であれば式(18)は式(10)と同等になる. この γ_x, γ_y を用いて、式(17)の左辺を中央差分で離散化すれば、次式が導かれる.

$$\phi_{ij}^k = \frac{\alpha}{4} (\phi_{i+1,j}^k + \phi_{i-1,j}^k + \phi_{ij+1}^k + \phi_{ij-1}^k) + dc_{ij}^k \quad (19)$$

ここで、上式右辺には $0 \leq \alpha \leq 1$ なる係数 α を導入した. $\alpha = 0$ の場合には、式(12), 式(18)および式(19)によるフラックスの修正は、式(10)と同等となり、DC 法となる. 一方、 $\alpha \neq 0$ とする場合には、式(19)を満足する解 ϕ が計算され、これを式(18)に用いて修正フラックスが求められる.

本節で示されたフラックス制御の計算法の手順は以下のように要約される ($\alpha \neq 0$ の場合).

- 1) 5次スプライン関数を用いてセル境界上のフラックス f^*, g^* を求める.
- 2) $f^k = f^*$ および $g^k = g^*$ とする ($k = 0$).
- 3) 式(11)を用いて c^k を計算する.
- 4) 式(6)または式(7)より c^k に対する dc^k を求める.
- 5) dc^k が収束判定条件を満足していれば c^k を c^{n+1} として計算を終了する.
- 6) 収束判定条件を満足しない場合には、式(19)の収束計算を行って ϕ^k を求める.
- 7) 得られた ϕ^k を式(18)に用いて修正フラックス \tilde{f}, \tilde{g} を求める.
- 8) 式(12)より f^{k+1}, g^{k+1} を求める. そして、 $k+1$ を k として、上記3)の手順へ戻る.

本節で示された計算法を FP (flux potential function) 法、あるいはフラックスに対する FP 制御と表す. FP 法では、式(19)の収束計算が新たに必要とな

るが、全体の収束解は DC 法より高速に得られると考えられる。しかし、FP 法ではフラックスが過剰に平滑化されて計算精度を低下させる可能性がある。これらの点を含めて、高次精度スキームに対してフラックス制御を行う手法の有効性について、後述の部分で実際に移流方程式の計算を行い検討を加える。

3. 移流方程式に対する適用性

(1) 1 次元移流方程式に対する DC 法と FP 法

提案された手法を 1 次元移流方程式に適用する。1 次元計算領域 ($0 \leq x \leq 150$) に $\Delta x = 1$ の等間隔セルを配置し、 $u = 1.0$ の一定の流速を与えて、スカラー c の初期分布が移流される過程を計算する。 c の初期値の分布は、 $8 \leq x \leq 12$ で $c = 1$ とし、それ以外では $c = 0$ とした。また、DC 法と FP 法の収束判定は、 $|dc|_{\max} \leq dc_0$ とし、 $dc_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ とした。時間差分には Euler 陽解法を用い、 $\Delta t = 0.1$ とした。

図-3 に $t = 100.0$ における c の分布の理論値と計算結果を示す。計算された c の分布の最大値は、DC 法が理論値とほぼ一致しており、FP 法で α を増加させると従い低下している。DC 法あるいは α が 0.4 より小さい FP 法では、FDM-QSI よりも精度の高い結果が得られている。なお、計算結果には若干の位相の遅れが見られる。この誤差は、時間差分に高次の解法を用いることで、ある程度改善されると考えられる¹³⁾。

c の分布の最大値と計算時間を定量的に比較した結果を図-4 に示す。 $\alpha = 0$ の結果が DC 法に相当し、それ以外が FP 法による計算結果である。図中の T/T_{dc} は、DC 法による計算時間 T_{dc} を基準に正規化した計算時間を表す。DC 法と比較して、 $\alpha > 0$ とする FP 法では計算時間が α の増加とともに減少する。しかし、 $\alpha = 0.8$ 付近で極小となった後、 $\alpha = 1.0$ に近づくにつれ、再び計算時間が増加する。一方、図中の C_{\max} は $t = 100.0$ における c の計算結果の最大値を表し、理論値の 1.0 に近いほど精度が高い。図-4 の結果から、 α が増加するにつれて計算精度は単調に低減する傾向が見られる。以上より、本節の計算条件では、 $\alpha \leq 0.8$ では、 α が 0 に近いほど計算時間が長いが精度は高い。

FDM-QSI スキームの結果と比較すると、FVM-QSI スキームの計算時間は $\alpha = 0.8$ の場合に前者の約 1.1 倍、また最も計算時間が長い DC 法では約 3.6 倍である。FDM-QSI スキームの場合には、 $C_{\max} = 0.73$ であることを考慮すると、フラックス制御を用いる FVM-QSI スキームでは、計算時間を要するが、保存性を満足する高精度の数値解を得ることが可能である。

以上の結果から、例えば最初に DC 法でフラックス制御を行い、ある程度 $|dc|$ が小さくなった時点で FP

法を用いて収束を加速するという方法も考えられる。なお、非圧縮性流体計算における圧力計算などを含めた条件での計算時間と精度の関係については、後述部分で検討を加える。

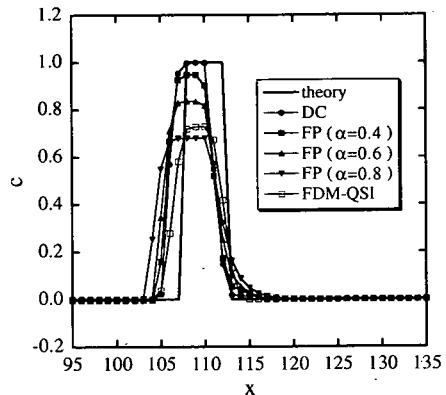


図-3 1 次元移流方程式の計算結果

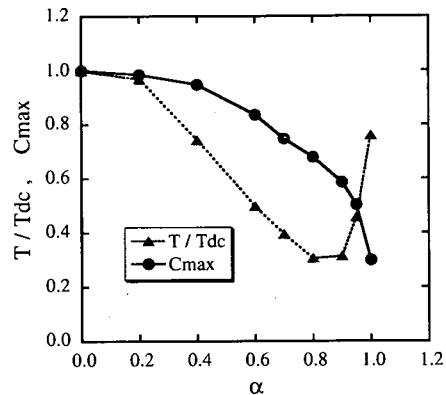


図-4 α を変えた場合の計算時間と c の最大値

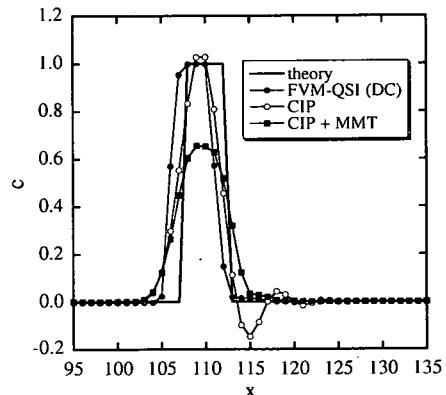


図-5 CIP 法との比較

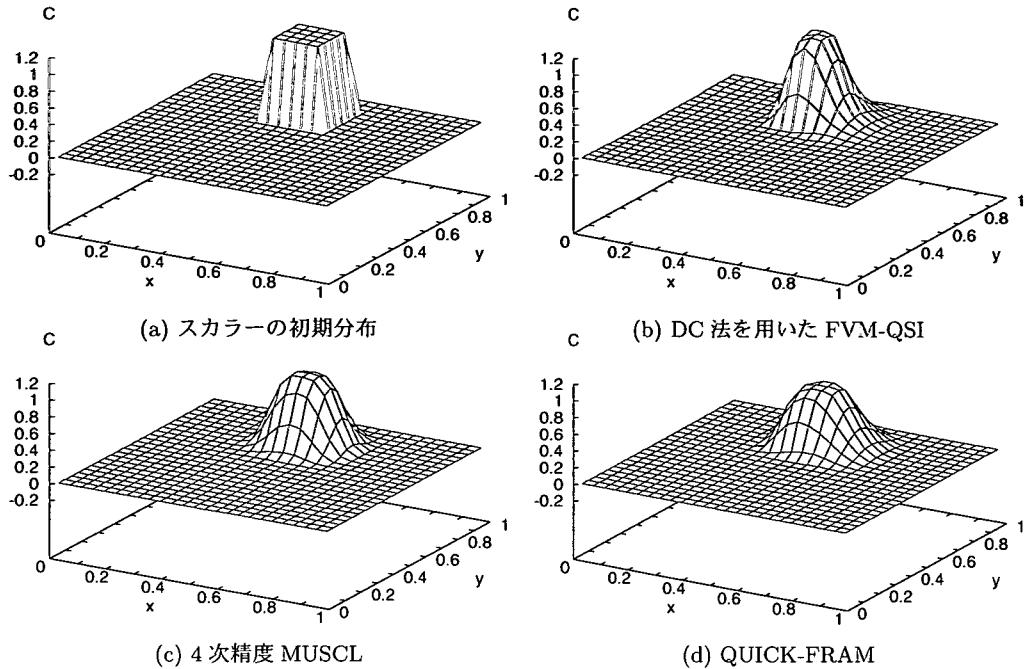


図-6 回転流動場における 2 次元移流計算の結果

次に、代表的な非保存形スキームの一つである CIP 法¹⁶⁾との比較を行った結果を図-5 に示す。計算条件は上記と同じである。CIP 法により得られた c の分布は、非対称性が著しく、オーバーシュートと下流側に大きなアンダーシュートを伴う。この数値振動を抑制するために MMT フィルタを用いると、図-5 に示されるように、 c の値が低減する。さらに、MMT フィルタを用いた場合には、計算領域内の c の総和が最大約 10% 減少し、保存性が大きく損なわれる。

(2) 2 次元移流方程式への適用性

次に、提案された手法を流速が空間的に一様でない 2 次元場におけるスカラーの移流計算に適用する。一辺の長さが 1.0 の正方形領域に角速度 2.0 の剛体回転流速分布を与え、計算領域の一部にステップ状に与えたスカラー c が移流される過程を計算する。 c の初期の分布は図-6(a) に示すとおりであり、 $\Delta t = \pi \times 10^{-3}$ として、一回転すなわち 1,000 ステップまでの計算を行った。時間差分には全てのスキームに Euler 法を用いている。DC 法の収束条件は前節と同様である。

ここでは、主な保存形スキームとの比較を行う。図-6(c), (d) に、4 次精度 MUSCL¹²⁾ および QUICK-FRAM の計算結果を示す。なお、本来の QUICK-FRAM⁶⁾ では、Lagrange スキームを利用して数値振動を検出し、その結果に応じて保存形の QUICK

スキームか風上スキームを使い分けるものとしているが、ここでは最初に保存形の QUICK スキームで計算し、数値振動があれば風上スキームを用いて再計算する方法としている。これらの結果を比較すると、DC 法を用いた FVM-QSI、4 次 MUSCL そして QUICK-FRAM の順に c の最大値の低減が少ない。

図-7 に次式で定義した TV 値の時間的な変化を示す。

$$TV = \sum_{ij} (c_{i+1j} - c_{ij})^2 + \sum_{ij} (c_{ij+1} - c_{ij})^2 \quad (20)$$

QUICK スキームはそのままでは TVD 条件を満足しないので、図-7 に示すように途中で計算が破綻する。しかし、FRAM を用いることで、TVD 条件が満足される。DC 法を用いた FVM-QSI でも TV 値は単調に減少する傾向を示すが、数値拡散が比較的小さいため、他のスキームよりも低下量は少ない。

図-8 に計算された c の分布の最大値を示す。ここでは、3 次精度の MUSCL と 5 次精度の TVD スキーム¹²⁾ の結果を比較に加えた。DC 法を用いた FVM-QSI スキームでは、最大値はほぼ 1.0 で最も精度が高い。また、図-8 に、QUICK スキームに対して、FRAM の代わりに DC 法によるフラックス制御を行った結果を合わせて示す。QUICK-DC による計算結果は、QUICK-FRAM のものより大きく改善され、 c の最大値は 5 次の TVD スキームより高くなっている。

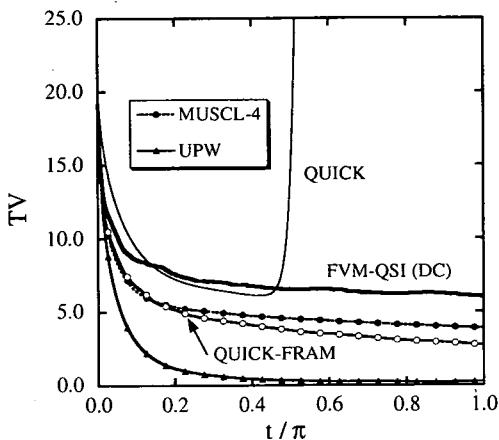


図-7 TV 値の時間的な変化

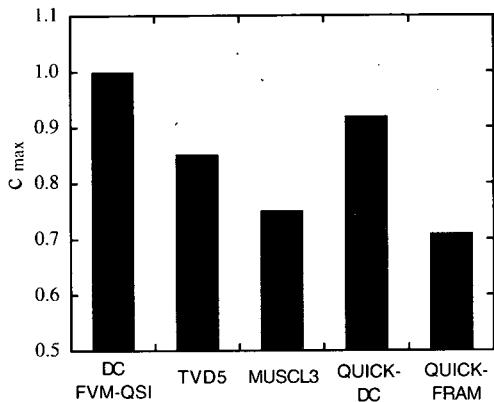


図-8 2 次元移流計算における c の最大値

4. 流体計算におけるスキームの適用性

(1) 非圧縮性流体計算におけるスキームの利用法

本報で示されたフラックス制御法を用いるFVM-QSIスキームを流体計算で利用する方法を示す。この手法を導入する計算法は、一般座標系を用いたコロケート格子配置による非圧縮性流体計算法¹⁷⁾であるが、簡単のため格子点の移動はないものとする。初期の有限体積法ではスタガード格子上で離散化が行われていた。この場合には、積分領域も流速成分に応じてスタガード状に設定される¹⁸⁾。一方、コロケート格子では、すべての流速成分に対して、計算セルを共通に積分領域とすることができますので¹⁹⁾、離散化を容易にするだけでなく、非構造格子への拡張を可能としている。このように、コロケート格子配置は有限体積法でも有用性が認められており、フラックス制御法を用いるFVM-QSIスキームの導入に適している。

MAC 系解法の流体計算では、予測段階における移流項の計算に本手法が適用できる。CBP スキーム²⁰⁾による、 x_i 方向の流速の推定値 u_i^* は、移流項を強保存形¹⁹⁾の表示とすると、次式から求められる。

$$u_i^* = u_i^n - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_m} (J u_i^n U_m^n) \Delta t + D_i \Delta t \quad (21)$$

ここで、式(21)は時間方向にのみ離散化されており、 J はヤコビアン、 D_i は拡散項である。式(21)右辺第2項の移流項中に含まれる U_m^n としては、C-HSMAC 法¹⁷⁾で計算された連続性を満足するセル境界上の流速の反変成分を用いる。一方、同項中に含まれる u_i^n は、セル中心上の値をセル境界に空間内挿して定める。FVM-QSI スキームを用いる場合には、5 次スプライン関数を用いて写像空間中で内挿が行われる。

数値振動を検出するために、式(21)の計算を一度に行わずに、移流項のみの計算を最初に行う。2 次元 $\xi\eta$ 平面上 ($\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$) では、移流項のみから得られる $x (= x_1)$ 方向の流速成分 uc に対する離散化式は次のようになる。

$$uc_{ij} = u_{ij}^n - \frac{1}{J_{ij}} [C_\xi (F_{ij} - F_{i-1,j}) + C_\eta (G_{ij} - G_{i,j-1})] \quad (22)$$

ここに、 $C_\xi = \Delta t / \Delta \xi$, $C_\eta = \Delta t / \Delta \eta$ であり、 $\Delta \xi$ と $\Delta \eta$ は写像空間中のセル間隔である。また、 $u_1 = u$ としており、フラックス F_{ij} と G_{ij} は次式で与えられる。

$$F_{ij} = (Ju^n)_{i+\frac{1}{2},j} U_{ij} \quad (23a)$$

$$G_{ij} = (Ju^n)_{ij+\frac{1}{2}} V_{ij} \quad (23b)$$

ここに、 $U_1 = U$, $U_2 = V$ である。式(22)の F , G として、5 次スプライン関数から求められた F^* , G^* を用いて得られる uc を uc^* とする。 uc^* に対するオーバーシュートあるいはアンダーシュートの大きさ du は、移流計算と同様に、上流域の u_{ij}^n から求められた uc_{max} あるいは uc_{min} と比較して定められる。

du を利用するフラックス制御の反復計算の過程で、次のような修正が行われるとする。

$$F_{ij}^{k+1} = F_{ij}^k + \tilde{F}_{ij}^k \quad (24a)$$

$$G_{ij}^{k+1} = G_{ij}^k + \tilde{G}_{ij}^k \quad (24b)$$

式(13)に対応する、修正フラックス \tilde{F}_{ij}^k , \tilde{G}_{ij}^k に対する関係式は次式となる。

$$\tilde{F}_{ij}^k = -\Gamma_\xi g^{1m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \quad (25a)$$

$$\tilde{G}_{ij}^k = -\Gamma_\eta g^{2m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \quad (25b)$$

ここに, Γ_ξ , Γ_η は係数, g^{mn} は次式のような基本テンソルの反変成分である.

$$g^{mn} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_l} \quad (26)$$

さらに, ϕ に対する関係式は次のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma_\xi g^{1m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_\eta g^{2m} \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_m} \right) \\ = - \frac{Jdu^k}{\Delta t} \end{aligned} \quad (27)$$

一例として, $g^{12} = g^{21} = 0$ の場合には, $\phi = Jdu$ とすれば,

$$\Gamma_\xi = \frac{\Delta \xi}{4C_\xi g^{11}} \quad (28a)$$

$$\Gamma_\eta = \frac{\Delta \eta}{4C_\eta g^{22}} \quad (28b)$$

とすればよく, このとき式 (27) の離散化式は式 (19) と同様となる. したがって, この場合には $\alpha = 0$ とすれば一般座標系における流体計算に対する DC 法となり, $\alpha \neq 0$ の場合には FP 法となる. これらの制御がなされたフラックスを式 (21) に用いれば, 流速の推定値を得ることができる. x_2 方向の流速成分に対しても同様である.

(2) 流体計算における精度の比較

前節で示された移流項の解法を 2 次元キャビティフロー²¹⁾ の計算に適用する. この計算では, 一辺が 1.0 の正方形キャビティにおいて, 上壁面が $U_0 = 1.0$ で移動し, 内部の非圧縮性粘性流体が流動する.

前節の手法では, Navier-Stokes 式の移流項に対して有限体積型の離散化を行っているので, 同様の離散化法における高次精度スキームとされる, 5 次精度の TVD スキーム¹²⁾との比較を行う.

計算精度の比較を行うため, 15×15 という比較的粗い等間隔の計算セルを用いて, レイノルズ数が 1,000 と 3,200 の条件を対象とした計算を行った. FVM-QSI スキームを用いる場合には, フラックス制御には DC 法を用いた. DC 法の収束判定条件は移流計算の場合と同様で, $dc_0 = 1.0 \times 10^{-5}$ とした. 移流項に適用するスキーム以外は全て同じ計算法を用いており, C-HSMAC 法の連続性の誤差判定条件は 1.0×10^{-10} , また $\Delta t = 2.0 \times 10^{-2}$ として $t = 200.0$ まで計算を行った.

計算結果を図-9 と図-10 に示す. これらの結果は, キャビティ中央の鉛直断面内における水平方向流速 u の分布を表している. 計算セル数が少ないため, Ghia の結果にはいずれも一致していないが, DC 法を用いた FVM-QSI スキームによる結果は 5 次の TVD スキーム

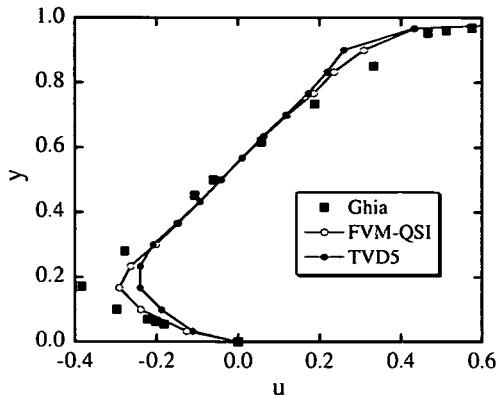


図-9 FVM-QSI(DC 法)と 5 次精度 TVD スキームとの比較 ($Re=1,000$, 15×15 等間隔セル)

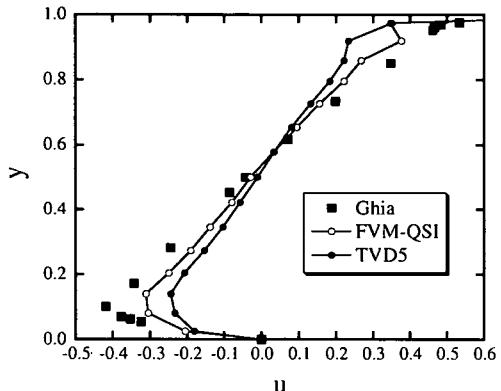


図-10 FVM-QSI(DC 法)と 5 次精度 TVD スキームとの比較 ($Re=3,200$, 15×15 等間隔セル)

よりも Ghia の結果に近い. この結果から, DC 法を用いた FVM-QSI スキームは, 5 次の TVD スキームより計算精度が高いと考えられる.

次に, 計算時間を考慮したスキームの精度を比較する. 図-11 は, レイノルズ数が 1,000 の条件で, DC 法を用いた FVM-QSI スキームに 15×15 , 5 次 TVD スキームにより詳細な 18×18 の等間隔の計算セルを用いて, 同一の $U_0 \Delta t / \Delta x$ のもとで $t = 200.0$ まで計算した結果である. 図-11 に示されるように, 粗格子を用いた FVM-QSI スキームの方が $y \approx 0.2$ で生ずる流速の最大値およびその発生位置が Ghia の結果に近い. 一方, 上記の計算条件では, 5 次 TVD スキームは約 1.2 倍の計算時間を要した. これらの結果は, 圧力計算等を伴う非圧縮性流体の計算では, より少ない計算セル数のもとで精度の高い結果を得るスキームが有利であることを示しており, その点でフラックス制御を行う FVM-QSI スキームは既往の高次精度スキームよりも有効であると考えられる.

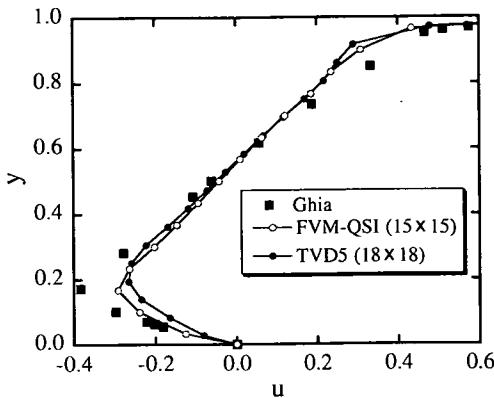


図-11 セル数が異なる条件での FVM-QSI(DC 法)と 5 次 TVD スキームの比較 ($Re=1,000$)

最後に、境界適合座標系を用いてキャビティの境界近傍のセル間隔を密にした条件における計算結果を図-12、図-13 および図-14 示す。Navier-Stokes 式の移流項に対しては、DC 法を用いる FVM-QSI スキームを適用した。適当な計算セル配置を行うことにより、同スキームで Ghia の結果とよく一致する数値解が得られることが示されている。

5. 結言

本報では、保存形表示された線形あるいは非線形の移流方程式を数値解析するための高次精度スキームについて考察を行った。基礎式に対して有限体積法に基づく離散化を行い、計算セル境界におけるフラックスを 5 次スプライン関数を利用して空間内挿する FVM-QSI スキームを示した。そして、FVM-QSI スキームあるいは TVD 条件を一般には満足しない既往の高次精度スキームを対象として、保存性を損なわずに数値振動を抑制するフラックス制御法を検討した。

この制御法として DC 法と FP 法を提案し、直交座標系における移流方程式および一般座標系におけるコロケート格子配置を用いた Navier-Stokes 式の移流項に対する具体的な利用法を示した。移流方程式へ適用した結果、DC 法を用いた FVM-QSI スキームにより数値振動が抑制された精度の高い計算が可能であることが示された。また、FP 法では、パラメータ α を適切に設定することにより、DC 法より精度は低下するが、計算時間を短縮できることが認められた。さらに、2 次元キャビティ内の非圧縮性流体計算へ適用した結果、DC 法を用いた FVM-QSI スキームにより、既往の 5 次精度 TVD スキームよりも精度が高い数値解が得られること、また計算時間の点においても本手法は十分実用的であることが示された。

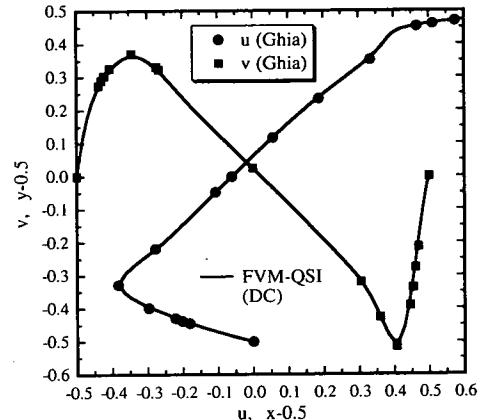


図-12 FVM-QSI (DC 法) の計算結果 ($Re=1,000$, 一般座標系, 50×50 セル)

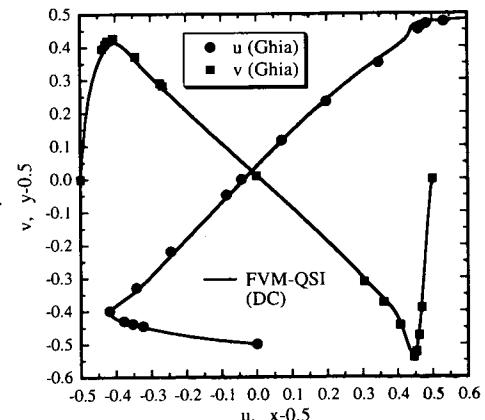


図-13 FVM-QSI(DC 法) の計算結果 ($Re=3,200$, 一般座標系, 62×62 セル)

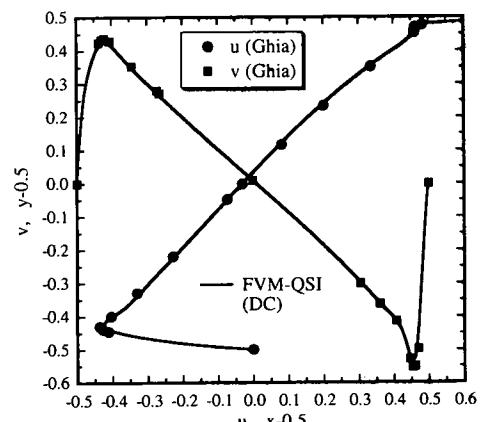


図-14 FVM-QSI(DC 法) の計算結果 ($Re=5,000$, 一般座標系, 72×72 セル)

参考文献

- 1) 白川英親, 高田保之, 黒木虎人, 伊藤猛宏 : VOF 法の改良, 機械学会論文集 B 編, Vol. 62, No. 604, pp. 54–61, 1996.
- 2) Yabe, T. and Wang, P. Y.: Unified numerical procedure for compressible and incompressible fluid, *J. Physical Soc. Japan*, Vol. 60, No. 7, pp. 2105–2108, 1991.
- 3) Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S.: A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, No. 1, 1994.
- 4) 朝位孝二, 小松利光, 大串浩一郎, 羽田野袈裟義 : 移流方程式の高精度数値計算手法に関する研究, 土木学会論文集, No. 586/II-42, pp. 13–22, 1998.
- 5) Harten, A.: on a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes, *SIAM Journal*, Vol. 21, No. 1, pp. 1–12, 1984.
- 6) 前川勇 : 多次元伝熱流動計算における数値拡散, (II), 日本原子力学会誌, Vol. 29, No. 9, pp. 823–833, 1987.
- 7) Leonard, B. P.: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59–98, 1979.
- 8) Chapman, M.: FRAM — Nonlinear damping algorithms for the continuity equation, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 25–38, 1981.
- 9) Chakravarthy, S. R. and Osher, S.: A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws, *AIAA Paper*, 85-0363, 1985.
- 10) Harten, A., Engquist, B., Osher, S. and Chakravarthy, S. R.: Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III, *J. Comput. Phys.*, Vol. 71, pp. 231–303, 1987.
- 11) van Leer, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, pp. 101–136, 1979.
- 12) Yamamoto, S. and Daiguji, H.: Higher-order-accurate upwind schemes for solving the compressible Euler and Navier-Stokes equations, *Computers Fluids*, Vol. 22, No. 2/3, pp. 259–270, 1993.
- 13) 牛島省, 福津家久, 山上路生, 坂根由季子 : 局所 5 次スpline 内挿法 (QSI 法) を利用したコロケート格子による流体解析手法, 土木学会論文集, No. 691/II-57, pp. 73–83, 2001.
- 14) Herriot, J. G. and Reinsch, C. H.: Procedures for quintic natural spline interpolation, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 2, No. 3, pp. 281–289, 1976.
- 15) Koshizuka, S., Oka, Y., Kondo, S. and Togo, Y.: Interpolating matrix method : A finite difference method for arbitrary arrangement of mesh points, *J. Comput. Phys.*, Vol. 75, pp. 444–468, 1988.
- 16) Yabe, T. and Aoki, T.: A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver, *Computer Physics Communications*, Vol. 66, pp. 219–232, 1991.
- 17) 牛島省, 福津家久 : 移動一般座標系を用いたコロケート格子による自由水面流れの数値解析手法, 土木学会論文集, No. 698/II-58, pp. 11–19, 2002.
- 18) S. V. Patankar (水谷幸夫, 香月正司共訳) : コンピュータによる熱移動と流れの数値解析, 森北出版, 1995.
- 19) Rhie, C. M. and Chow, W. L.: Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation, *AIAA Journal*, Vol. 21, pp. 1525–1532, 1983.
- 20) 牛島省, 竹村雅樹, 福津家久 : コロケート格子配置を用いた MAC 系解法の計算スキームに関する考察, 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11–19, 2002.
- 21) Ghia, U., Ghia, K. N. and Shin, C. T.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387–411, 1982.

(2003.3.12 受付)

FIFTH-ORDER CONSERVATIVE SCHEME WITH FLUX CONTROL APPLICABLE TO CONVECTION EQUATIONS

Satoru USHIJIMA, Keisuke YOSHIDA, Masaki TAKEMURA and Ichisa NEZU

A fifth-order numerical scheme (FVM-QSI scheme) has been proposed for linear and non-linear convection equations, which are discretized with a finite volume method. In this scheme, the fluxes on cell boundaries are spatially interpolated with quintic spline functions and they are controlled not to cause numerical oscillations by the proposed DC and FP methods. As a result of the computations, it was shown that the FVM-QSI scheme with the DC method enables us to obtain stable and more accurate results than fifth-order TVD schemes and that the FP method can shorten the computational time. The proposed scheme is also applicable to the incompressible flows without increasing computational time.