

常時微動計測に基づく非比例減衰系の 非反復構造逆解析と長大吊橋の動特性の理解

長山智則¹・阿部雅人²・藤野陽三³・池田憲二⁴

¹学生員 イリノイ大学大学院博士課程 土木環境工学専攻
(205 North Mathews Ave. Urbana, Illinois, 61801)

²正会員 Ph. D. 東京大学助教授 大学院工学系研究科社会基盤工学専攻
(〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1)

³フェロー Ph. D. 東京大学教授 工学系研究科社会基盤工学専攻 (同上)

⁴正会員 北海道開発土木研究所 構造部構造研究室長 (〒062-8602 札幌市豊平区平岸1条3丁目)

構造物の健全性や外力・荷重評価に、使用状態においても計測可能な常時微動を利用することの利点は大きい。本研究は著者が以前開発した常時微動データに基づく構造逆解析法の問題点を解決し、①モード同定においてノイズの判別が可能であり、②多入力系を扱え、③構造逆解析においては減衰に関する仮定や構造特性の事前推定そして反復計算を必要としない理論的手法を構築した。さらに、実構造物の振動計測結果に適用する。支承や伸縮装置による摩擦力と自動空気力を等価剛性・等価減衰として逆解析を行い、以前試みた逆解析と比較の上、本手法の有効性を示した。

Key Words : ambient vibration, non-proportional damping, non-iterative approach, structural identification, suspension bridge

1. はじめに

膨大な社会基盤のストックを維持管理していくためには構造物の健全性を効率的かつ確実に評価する手法が必要である。特に地震、台風による大きな外力を受けた構造物や老朽化構造物はこのような評価を必要とする。現在は詳細検査や目視検査が行われているが、いずれも効率性と信頼性を同時に満たすものではない。難しさとしては例えば構造物が大きくかつ多数あるため多大なコストがかかることや検査に際して供用停止が困難であること、そしてしばしば外部から損傷を確認できないことが挙げられる。

この問題に対して有効な解決手法のひとつとして振動計測を利用した損傷同定が期待される。その考え方は次のとおりである。損傷は構造モデルの質量、減衰、剛性といった構造特性の変化に現れる。構造特性自体の計測は容易でないが、その変化はモード特性に反映されるので、従来から計測、同定のなされているモード特性^{1),2)}から構造特性を逆解析できれば損傷が検出されるはずである。この手法はモード特性同定と構造逆解析の2つのステップからなる。モード特性の把握には近年著しい進展が見られる。

レーザードップラー速度計や計算機など計測、情報処理技術の進歩³⁾やERA⁴⁾などモード解析法の発展により、時間、空間における密な計測信号を効率的に詳細に解析できるようになった。さらに、常時微動を解析することで供用中も検査できることや構造物内部の損傷もモード特性の変化に現れることは損傷検出に際しモード特性を利用する利点である。

一方、構造逆解析も多くの試みがなされてきたがいくつかの仮定が必要であった。Kaouk & Zimmerman⁵⁾やSmithら⁶⁾は損傷前の減衰行列、剛性行列が既知のという仮定の下で減衰、剛性の変化を同定したが損傷前の構造特性を正確に推定することは困難である。Cha & de Pillis⁷⁾は事前に構造特性を把握する必要がなく、反復計算を必要としない手法を開発した。しかし非減衰系を仮定して導出しているため、しばしば損傷が反映される減衰比や複素モード形を扱えないという問題がある。

これら2つのステップを組み合わせる常時微動から構造逆解析する試みとしては阿部ら⁸⁾による白鳥大橋の構造逆解析が挙げられる。加速度計で記録された常時微動データからRandom Decrement(RD)法⁹⁾により自由振動波形を推定し、Ibrahim Time Domain

(ITD)法¹⁰⁾でモード特性同定を行っている。同定されたモード特性には振幅レベル依存性が見られ、振幅別に構造逆解析している。しかしながらモード特性同定および構造逆解析において、それぞれ次の問題がある。まず自由振動波形推定に際しRD法の計算負荷が大きい。モード特性同定にあたっては、ノイズモードと真のモードを判断する基準が明瞭でないこと、1つの時系列データを扱うITD法¹⁰⁾により、モードごとに励起されやすい初期状態から始まる波形を選んで同定していることから自由振動波形が真のモード振動に分解できているとは言いがたい。構造逆解析は反復計算を必要とすることや設定する誤差関数により解が異なること、そして損傷前の状態として非減衰系を仮定していることが大きな問題である。

Hongら^{11),12)}はこれらの問題に対しそれぞれ有効な解決手法を提案し、数値モデルおよびコンクリート供試体の常時微動計測データから良好な構造逆解析結果を得ている。モード特性同定には相関関数¹³⁾、ERAを利用し、構造逆解析にはCha & de Pillis⁷⁾の方法を非比例減衰系に拡張し適用している。本手法の実構造物への適用が期待される。

本研究の目的はHongらにより提案された一連の手法を実構造物に適用し、常時微動応答から構造特性を把握することそして文献8)の手法と比較の上本手法の有効性を確かめることである。対象構造物は文献8)で解析が試みられた白鳥大橋であり、同様にモード特性の振幅依存性を明らかにし、これをもとに構造逆解析を行う。この手法は文献8)の手法の問題点を有しないのでその解析結果に比べてモード特性はより精緻に、構造逆解析は損傷前の減衰を反映して正確に、かつ必要とされる計算負荷は小さくなることが期待される。なお、文献8)では解析にあたり振幅レベルにより全データをそれぞれ7時間余りの10ランクに分類しているが、各ランク内でも風速条件や、主径間、側径間の振動状態に変動があり、同条件とみなすことは妥当ではない。本研究で用いる手法は計算負荷が小さいことからさらに詳細に分類したデータに適用が可能で、連続する2時間のデータごとに解析を行う。なお、逆解析により求めるものは損傷ではなく、振幅レベルに依存して現れるモード特性変化の原因と考えられる、空気力と支承および伸縮装置における摩擦力の等価減衰、等価剛性である。これらの逆解析は原理上等価な損傷同定問題に適用できると考える。また、将来振動計測を利用した構造ヘルスマニタリングを実現するにあたり、損傷と空気力や摩擦力による構造特性の変化を判別する必要があるこれに資するものである。

本論文はまず、常時微動から構造逆解析する理論を説明する。ついでこの手法を白鳥大橋における振動計測結果にこれらの方法を適用する。

2. 常時微動データに基づく振動モード特性の同定

ここでは、常時微動データから各モードの固有振動数・減衰比を同定する手法を構築する。まず、(1)において不規則な常時微動波形から自由振動波形を生成する方法を提示し、次いで(2)において自由振動波形からモード特性を同定する手法を示す。

(1)自由振動波形の生成

常時微動波形から自由振動に相当する波形を生成する手法として相関関数を利用する方法とRandom Decrement(RD)法⁹⁾が挙げられる。いずれも実構造物の解析に適用されており、Farrar & James¹⁴⁾は相互相関関数を利用して道路橋の、阿部ら⁸⁾はRD法を利用して白鳥大橋の、それぞれ自由応答を求めている。これら2つの手法の導出方法は異なるがしばしば等価である。Vandiverら¹⁵⁾は線形時不変系にゼロ平均の定常ランダム外力が作用する場合、RD法により得られる応答Randomdec signatureが自己相関関数の定数倍であることを証明した。さらに外力が白色雑音である場合には自己相関関数が自由応答に一致するため、相関関数とRD法のいずれによっても自由応答を推定することができる。このうち相関関数は高速フーリエ変換を利用することで、短時間で計算できることから本研究では2つの手法のうち相関関数を利用することとした。

まず、インパルス外力による系の自由振動応答を求める。 N 自由度線形時不変系は次式のようにモデル化される。

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad (1)$$

ここで M は質量行列、 C は減衰行列、 K は剛性行列、 $x(t)$ は変位ベクトル、 $f(t)$ は外力ベクトルである。 M 、 C 、 K は $N \times N$ 次元、 $x(t)$ 、 $f(t)$ は $N \times 1$ 次元である。状態変数を用いて、式(1)を $2N$ 個の1階微分方程式で表すと

$$\dot{y}(t) - Ay(t) = f'(t) \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (2a)$$

$$f'(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}f(t) \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{Bmatrix} \quad (2c)$$

となる。0 はゼロ行列、I は単位行列、[Q]⁻¹ は逆行列をあらわす。式(2)を *s* 領域にラプラス変換すると、初期変位、初速度が共に 0 の場合には

$$s\bar{\mathbf{y}}(s) - \mathbf{A}\bar{\mathbf{y}}(s) = \bar{\mathbf{f}}'(s) \quad (3)$$

と表される。 $\bar{\mathbf{y}}(s)$ 、 $\bar{\mathbf{f}}'(s)$ はそれぞれ $\mathbf{y}(t)$ 、 $\mathbf{f}'(t)$ のラプラス変換である。行列 A の固有ベクトル行列 Φ を用いて式(3)をモード座標 $\bar{\mathbf{q}}(s)$ に変数変換し、 Φ^T を左からかけると次式を得る。

$$(s\mathbf{I} - \Lambda)\bar{\mathbf{q}}(s) = \Phi^T \bar{\mathbf{f}}'(s) \quad (4)$$

Λ は A の固有値を成分に持つ対角行列である。式(4)は非連成化されておりモードごとに表される。

$$(s - \lambda_i)\bar{q}_i(s) = \Phi_i^T \bar{\mathbf{f}}'(s) \quad i=1,2,\dots,2N \quad (5)$$

Φ_i は Φ の第 *i* 列ベクトル、 λ_i は Λ の第(*i*,*i*)成分である。式(5)を $\bar{q}_i(s)$ について解き、ラプラス領域の積は時間領域では畳み込み積分で表されることに注意してラプラス逆変換を施すと時間領域の解が求められる。

$$q_i(t) = \Phi_i^T \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (6)$$

モード座標から物理座標に変換し、全てのモードについて応答を重ね合わせると、

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{2N} \Phi_i \Phi_i^T \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \quad (7)$$

となる。質点 *k* におけるインパルス外力による質点 *r* の応答は、 $\delta(t)$ を Dirac のデルタ関数とすると

$$\begin{aligned} y_{rk}(t) &= \sum_{i=1}^{2N} \Phi_i^r \Phi_i^k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{2N} \Phi_i^r \Phi_i^k e^{\lambda_i t} \end{aligned} \quad (8)$$

である。ここで Φ_i^r は第 *i* 次モード形の質点 *r* に対応する成分である。

次にランダム外力 $\mathbf{f}(t)$ による、質点 *r* と質点 *s* における応答 $y_r(t)$ 、 $y_s(t)$ の相互相関関数 $R_{rs}(T)$ を考える。

$$R_{rs}(T) = E\{y_r(t+T)y_s(t)\} \quad (9)$$

$E\{\}$ は期待値を表す。式(7)より $y_r(t)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \sum_{k=1}^N y_{rk}(t) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{2N} \Phi_i^r \Phi_i^k \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\tau) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入すると

$$R_{rs}(T) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \Phi_i^r \Phi_i^k \Phi_j^s \Phi_j^l \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{f_k(\tau)f_l(\sigma)\} e^{\lambda_i(t+T-\tau)+\lambda_j(t-\sigma)} d\tau d\sigma$$

であり、 $\mathbf{f}(t)$ はランダム外力であるのでその相関関数は次式を満たす。

$$E\{f_k(\tau)f_l(\sigma)\} = \alpha_{kl}\delta(\tau-\sigma) \quad (12)$$

$f_k(t)$ は $\mathbf{f}(t)$ の第 *k* 成分、 α_{kl} は定数である。式(12)を式(11)に代入し、 $t-\tau$ を改めて τ とおくと、

$$\begin{aligned} R_{rs}(T) &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \Phi_i^r \Phi_i^k \Phi_j^s \Phi_j^l \alpha_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda_i+\lambda_j)\tau+\lambda_i T} d\tau \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \Phi_i^r \Phi_i^k e^{\lambda_i T} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{2N} \Phi_j^s \Phi_j^l \alpha_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\lambda_i+\lambda_j)\tau} d\tau \right) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。式(8)と式(13)を比べると相互相関関数 $R_{rs}(T)$ は質点 *s* に依存する初速度を持ち初期変位ゼロの自由応答 $y_{rk}(t)$ を重ね合わせたものであることがわかる。自己相関関数 $R_{rr}(T)$ も同様に自由応答の重ねあわせであることが導かれる。よってある基準点 *s* と 1 から *N* までの各点の応答の相関関数はある衝撃力を受けた系の自由振動応答とみなすことができる。

(2) 振動モード特性の同定

自由振動応答からモード特性を同定する手法として Eigensystem Realization Algorithm (ERA)⁴⁾ と Ibrahim Time Domain (ITD)法¹⁰⁾が挙げられる。文献8)では ITD 法を用いているが後に述べるように ITD 法を一般化したものが ERA と言える。本研究では ERA を用いることとし、以下に導出する。

N 自由度線形時不変離散時間系の状態方程式と観測方程式は次のように表される。

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}'\mathbf{y}(k) + \mathbf{B}'\mathbf{u}(k) \quad (14)$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{C}'\mathbf{y}(k) \quad (15)$$

\mathbf{A}' は $N \times N$ 次元システム行列、 \mathbf{B}' は $N \times m$ 次元入力行列、 \mathbf{C}' は $p \times N$ 次元出力行列、 $\mathbf{u}(k)$ は $m \times 1$ 次元制御ベクトルである。離散時間系の $\mathbf{y}(k)$ は連続時間系での時刻 $k\Delta t$ での状態変数 $\mathbf{y}_{continuous}(k\Delta t)$ に等しい。

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}_{continuous}(k\Delta t) \quad (16)$$

なお、式(2)の連続時間系は、入力が Δt の間一定であるという条件下で式(14)の離散時間系に次のように関係づけられる。

$$\mathbf{A}' = \exp(\mathbf{A}\Delta t) \quad (17a)$$

$$\mathbf{B}' = - \int_0^{\Delta t} \exp(\mathbf{A}\tau) d\tau \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (17b)$$

$$\mathbf{f}(k\Delta t) = \mathbf{F}\mathbf{u}(k) \quad (17c)$$

式(14), (15)で表されるシステムのインパルス応答は

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{k-1}\mathbf{B}'\mathbf{u}(0) \quad (18)$$

である。制御ベクトルの成分ごとにインパルス応答を考え、列方向に並べると次の Markov パラメータが得られる。

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{k-1}\mathbf{B}' \quad (19)$$

初期変位からの自由応答の場合には

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}'\mathbf{A}'^k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_m(0) \end{bmatrix} \quad (20)$$

である。Markov パラメータを用いて $r \times s$ の Hankel 行列は次のように表される。

$$\mathbf{H}_{rs}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(k) & \mathbf{Y}(k+t_1) & \dots & \mathbf{Y}(k+t_{s-1}) \\ \mathbf{Y}(j_1+k) & \mathbf{Y}(j_1+k+t_1) & \dots & \mathbf{Y}(j_1+k+t_{s-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}(j_{r-1}+k) & \mathbf{Y}(j_{r-1}+k+t_1) & \dots & \mathbf{Y}(j_{r-1}+k+t_{s-1}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

ここで、 $j_i (i=1, \dots, r-1)$ と $t_i (i=1, \dots, s-1)$ は任意の整数である。初期状態からの自由振動を考える場合には、 $\mathbf{H}_{rs}(k-1)$ を $\mathbf{H}_{rs}(k)$ とする。可観測行列 \mathbf{V}_r ($rp \times n$ 次元)、可制御行列 \mathbf{W}_s ($n \times ms$ 次元)により Hankel 行列は次のように表される。

$$\mathbf{H}_{rs}(k) = \mathbf{V}_r \mathbf{A}'^k \mathbf{W}_s \quad (22a)$$

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C}' \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}'\mathbf{A}'^{j_{r-1}} \end{bmatrix} \quad (22b)$$

$$\mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}' & \mathbf{A}'^{t_1}\mathbf{B}' & \dots & \mathbf{A}'^{t_{s-1}}\mathbf{B}' \end{bmatrix} \quad (22c)$$

式(19)を満たす \mathbf{C}' 、 \mathbf{A}' 、 \mathbf{B}' は無数に存在するが、最小の次元でこれを満たす行列を求めるために ERA は特異値分解を利用する。Hankel 行列を

$$\mathbf{H}_{rs}(0) = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \quad (23)$$

と特異値分解する。 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} はユニタリ行列、 \mathbf{D} は特異値からなる対角行列である。系が N 自由度で $2N$ 個の複素モードが観測される場合には $\mathbf{H}_{rs}(0)$ のランクは $2N$ である。この場合、 \mathbf{D} の対角成分のうち初めの $2N$ 個が非ゼロであり、Hankel 行列はこれらの特異値からなる対角行列 \mathbf{D}_{2N} と \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} の初めの $2N$ 列成分 \mathbf{P}_{2N} 、 \mathbf{Q}_{2N} を用いて再構築される。

$$\mathbf{H}_{rs}(0) = \mathbf{P}_{2N}\mathbf{D}_{2N}\mathbf{Q}_{2N}^T \quad (24)$$

ここで次の関係

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{E}_p^T \mathbf{H}_{rs}(k) \mathbf{E}_m \quad (25)$$

$$\mathbf{E}_p^T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad p \times pr \text{ matrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad ms \times m \text{ matrix} \quad (27)$$

を使うと式(22), (24), (25)より

$$\mathbf{Y}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p^T \mathbf{P}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{2N}^T \mathbf{V}_r \mathbf{A}'^k \mathbf{W}_s \mathbf{Q}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_{2N}^T \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \quad (28)$$

となり、さらに変形すると次の関係が得られる。

$$\mathbf{Y}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_p^T \mathbf{P}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{2N}^T \mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{Q}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_{2N}^T \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \quad (29)$$

式(19), (29)より最小実現のひとつが次のように得られる。

$$\mathbf{C}' = \mathbf{E}_p^T \mathbf{P}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{2N}^T \mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{Q}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \quad (31)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{Q}_{2N}^T \mathbf{E}_m \quad (32)$$

求められた行列 \mathbf{A}' の固有値問題からモード特性が得られる。

$$\left[\mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{2N}^T \mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{Q}_{2N} \mathbf{D}_{2N}^{-\frac{1}{2}} \right] \boldsymbol{\psi} = \lambda \boldsymbol{\psi} \quad (33)$$

ここで λ と $\boldsymbol{\psi}$ はそれぞれ固有値、固有ベクトルを表す。モード角振動数 ω と減衰比 ξ は次のように求められる。

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \sqrt{\text{Re}(\ln \lambda)^2 + \text{Im}(\ln \lambda)^2} \quad (34a)$$

$$\xi = \frac{-\text{Re}(\ln \lambda)}{\sqrt{\text{Re}(\ln \lambda)^2 + \text{Im}(\ln \lambda)^2}} \quad (34b)$$

$\mathbf{E}_p^T \mathbf{P}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Psi}$ はモード形である。 $\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^T\mathbf{E}_m$ は Modal Participation Factor と呼ばれ初期モード振幅を表す。

以上のようにして求められたモード特性にはノイズによるものと真のモードによるものが含まれると考えられる。これらを区別する1つの方法が先に示した特異値分解で、ノイズ成分は小さな特異値に対応すると考えられるので設定した閾値よりも小さな特異値はゼロとみなすことでノイズを除去する。もう1つの方法は真のモードとノイズによるものを区別する指標を用いることであり、ここでは指標とし

て Modal Amplitude Coherence (MAC)について説明する。

MAC には可観測性に関するものと可制御性に関するものの2種類がある。まず、可制御性に関する MAC から説明する。初期モード振幅は先に述べたように

$$\Psi^{-1} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_m = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{2N}]^T \quad (35)$$

である。 \mathbf{q}_i は $m \times 1$ 次元ベクトルで i 次モードの初期振幅である。その後の理想的な挙動は同定されたモード振動数、減衰比を用いて複素領域で次のようにならわされる。

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \left[\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i e^{(-\xi_i \omega_i + i \omega_i \sqrt{1-h_i^2}) t_{i-1}}, \dots, \mathbf{q}_i e^{(-\xi_i \omega_i + i \omega_i \sqrt{1-h_i^2}) t_{i-1}} \right] \quad (36)$$

一方で ERA により求められるモード振幅時刻歴は

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{2N}]^T = \Psi^{-1} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \quad (37)$$

である。これらを用いて可制御性に関する MAC は

$$MAC^c_i = \frac{|\bar{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{b}_i|}{\left(\|\bar{\mathbf{q}}_i\| \|\mathbf{b}_i\| \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (38)$$

と定義される。

次に可観測性に関する MAC を定義する。先に触れたようにモード形は

$$\mathbf{E}_p^T \mathbf{P} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \Psi = [\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{2N}] \quad (39)$$

と表される。モード形のその後の挙動は可制御性の場合と同様に

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T = \left[\boldsymbol{\varphi}_i^T, \boldsymbol{\varphi}_i^T e^{(-\xi_i \omega_i + i \omega_i \sqrt{1-h_i^2}) t_{i-1}}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_i^T e^{(-\xi_i \omega_i + i \omega_i \sqrt{1-h_i^2}) t_{i-1}} \right] \quad (40)$$

となり、ERA により求められるモード形の時刻歴

$$[\boldsymbol{\varphi}^e_1, \boldsymbol{\varphi}^e_2, \dots, \boldsymbol{\varphi}^e_{2N}] = \mathbf{P} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \Psi \quad (41)$$

である。これらを用いて可観測性に関する MAC は

$$MAC^o_i = \frac{|\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \boldsymbol{\varphi}^e_i|}{\left(\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i\| \|\boldsymbol{\varphi}^e_i\| \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (42)$$

と定義される。

文献 8) は白鳥大橋のモード特性同定に ITD 法を適用している。これは元来 1 入力系に対して導かれたものであるが、容易に多入力系に拡張できて Hankel 行列を元にした次の固有値問題で表される。

$$\left[\mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{H}_{rs}(0)^\# \right] \boldsymbol{\psi} = \lambda \boldsymbol{\psi} \quad (43)$$

ただし、添え字の # は擬似逆行列を表す。固有値、固有ベクトルとしてモード特性が求められる。(43) は ERA においてすべての特異値を非ゼロとみなして解くことに相当する。この意味において ERA は ITD 法よりも一般的であり、また、初期モード振幅、MAC 値などの情報が得られることから本研究では ERA を利用することとする。

3. 非比例減衰系の非反復構造逆解析法

モード特性の違いを構造特性の違いとして逆解析する方法を説明する。本手法の導出にあたって構造特性の違いは損傷を想定しているが一般に構造特性の変化に適用可能である。

文献 8) では基準となるモードあるいは損傷前のモードに付加減衰、付加剛性を考慮して固有値問題を設定し、固有値、固有ベクトルから求められるモード特性が損傷後のモードとの誤差関数を最小とするように最適化問題を解く手法を提案している。この方法では振動数、減衰比、モード形の差を総合的に表す誤差関数の設定が難しく逆解析結果もこれに大きく依存する。さらに誤差関数は極小値を複数持つことが考えられ最適解の探索は容易でない。加えて反復計算が必要であるために計算負荷は非常に大きい。逆解析するべき構造特性の数が多い場合には複数の極小値、計算負荷の問題はより深刻である。また、基準となる状態の減衰が無視できるという仮定も必要とする。

そこで誤差関数に依存せず減衰に関する仮定を必要としない、非反復計算による構造逆解析法を提示する。

(1) モデル化

式 (1) は状態変数を利用して次のように表すことができる。

$$\mathbf{A}'' \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}'' \mathbf{y} = \mathbf{f}''(t) \quad (44a)$$

$$\mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (44b)$$

$$\mathbf{B}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (44c)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (44d)$$

$$\mathbf{f}''(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44e)$$

式(2)と式(43)が互いに等しいことは容易に確認できる。上式の斉次解は次の一般化固有値問題で表される。

$$\mathbf{B}''\Phi_u = -\mathbf{A}''\Phi_u\Lambda_u \quad (45)$$

Λ_u は固有値を対角成分に、 Φ_u は固有ベクトルを列成分にもつ行列である。添え字の u は損傷前の状態を想定している。なお、固有値はモード振動数と減衰比に、固有ベクトルは状態変数表示したモード形に対応し、前章で述べたモード特性同定により得られる。

損傷は質量、剛性、減衰行列の変化、つまり $\delta\mathbf{M}$ 、 $\delta\mathbf{K}$ 、 $\delta\mathbf{C}$ としてモデル化される。接続性に関する物理的制約により一般に $\delta\mathbf{M}$ は対角行列、 $\delta\mathbf{K}$ 、 $\delta\mathbf{C}$ はしばしば三重対角行列である。これらの行列から式(44)と同様に $2N \times 2N$ 次元の行列 $\delta\mathbf{A}$ 、 $\delta\mathbf{B}$ を

$$\delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{C} & \delta\mathbf{M} \\ \delta\mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\delta\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{K} & 0 \\ 0 & -\delta\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (47)$$

と定義する。損傷後の系の運動方程式を状態変数表示すると式(44)中の行列 \mathbf{A}'' 、 \mathbf{B}'' はそれぞれ $\mathbf{A}'' + \delta\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}'' + \delta\mathbf{B}$ となる。損傷後の一般化固有値問題は

$$[\mathbf{B}'' + \delta\mathbf{B}]\Phi_d = -[\mathbf{A}'' + \delta\mathbf{A}]\Phi_d\Lambda_d \quad (48)$$

となる。 Λ_d 、 Φ_d はそれぞれ固有値、固有ベクトル行列で添え字の d は損傷後の状態を想定している。

次に、計測したモード特性 Φ_u 、 Λ_u 、 Φ_d 、 Λ_d と損傷を関係づけるために、得られた一般化固有値問題を変形する。式(45)を転置し Φ_d を右からかけると

$$\Phi_u^T \mathbf{B}'' \Phi_d = -\Lambda_u \Phi_u^T \mathbf{A}'' \Phi_d \quad (49)$$

となり、式(48)に Φ_u^T を左からかけると

$$\Phi_u^T [\mathbf{B}'' + \delta\mathbf{B}]\Phi_d = -\Phi_u^T [\mathbf{A}'' + \delta\mathbf{A}]\Phi_d\Lambda_d \quad (50)$$

となる。式(50)から式(49)を減じると

$$\begin{aligned} \Phi_u^T \delta\mathbf{A}\Phi_d\Lambda_d + \Phi_u^T \delta\mathbf{B}\Phi_d = \\ \Lambda_u \Phi_u^T \mathbf{A}'' \Phi_d - \Phi_u^T \mathbf{A}'' \Phi_d\Lambda_d \end{aligned} \quad (51)$$

が得られる。

式(51)は損傷前後のモード特性と構造特性、損傷の関係式である。 $\delta\mathbf{A}$ 、 $\delta\mathbf{B}$ を決定することがすなわち損傷同定であるが一般に容易でない。まず未知行列 $\delta\mathbf{A}$ 、 $\delta\mathbf{B}$ について直接解くことができない。繰り返し計算により解を求めることが試みられているが計算時間が長くなることや適当な初期値を必要とするなど解決すべき問題点が多い。さらに、右辺の \mathbf{A}'' は

サブマトリックスに損傷前の質量、減衰行列を含み既知とは限らない。特に減衰行列を推定することは困難で、これを無視したり、比例減衰を仮定したりして \mathbf{A}'' を推定することが試みられているが必ずしも妥当な推定ではなく損傷同定の信頼性を損なうものである。そこで、損傷-モード特性関係式の非反復解法を提示し、ついで損傷前の減衰行列を推定する必要がないことを示す。

(2) 損傷-モード特性関係式の変形

損傷-モード特性関係式の非反復解法⁷⁾の基本的な考え方は $\delta\mathbf{A}$ 、 $\delta\mathbf{B}$ をベクトルに変形することである。まず行列変形について説明し、次に式(51)に適用する。更に $\delta\mathbf{A}$ 、 $\delta\mathbf{B}$ が疎行列であることを利用して求めるべき未知数を減らす。

次の行列方程式を考える。

$$\mathbf{Z}^T \delta\mathbf{Y}\mathbf{W} = \mathbf{R} \quad (52)$$

ここで行列 \mathbf{Z} 、 \mathbf{W} は $2N \times 2N_e$ 次元、 \mathbf{R} は $2N_e \times 2N_e$ 次元の既知行列、 $\delta\mathbf{Y}$ は $2N \times 2N$ 次元の未知行列である。 N は系の自由度、 N_e は可観測モード数を想定している。未知行列をより扱いやすいベクトルに変形する。行列 \mathbf{Z} 、 \mathbf{W} 、 \mathbf{R} 、 $\delta\mathbf{Y}$ の第 (i,j) 成分をそれぞれ $z_{i,j}$ 、 $w_{i,j}$ 、 $r_{i,j}$ 、 $\delta y_{i,j}$ と、 \mathbf{Z} 、 \mathbf{W} の第 j 列ベクトルを \mathbf{z}_j 、 \mathbf{w}_j ($j=1, \dots, N_e$) と表す。行列 \mathbf{R} 、 $\delta\mathbf{Y}$ を次のように列ベクトルに変形する。

$$\delta\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \delta y_{1,1} \cdots \delta y_{1,2N} | \delta y_{2,1} \cdots \delta y_{2,2N} | \\ \cdots | \delta y_{2N,1} \cdots \delta y_{2N,2N} \end{bmatrix}^T \quad (53)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{1,1} \cdots r_{1,2N_e} | r_{2,1} \cdots r_{2,2N_e} | \cdots | r_{2N_e,1} \cdots r_{2N_e,2N_e} \end{bmatrix}^T \quad (54)$$

これらのベクトルを用いると式(52)の行列方程式は

$$\mathbf{G}\delta\mathbf{y} = \mathbf{r} \quad (55)$$

と表される。 \mathbf{G} は $4N_e^2 \times 4N_e^2$ 次元の行列、 $\delta\mathbf{y}$ と \mathbf{r} はそれぞれ次元が $4N_e^2 \times 1$ 、 $4N_e^2 \times 1$ の列ベクトルである。成分ごとに計算すると \mathbf{G} は $2N_e \times 4N_e^2$ 次元の行列 \mathbf{G}_i を用いて次のように表されることが確認できる。

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_i \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{2N_e} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} z_{1,i}\mathbf{w}_1^T & z_{2,i}\mathbf{w}_1^T & z_{3,i}\mathbf{w}_1^T & \cdots & z_{2N_e,i}\mathbf{w}_1^T \\ z_{1,i}\mathbf{w}_2^T & z_{2,i}\mathbf{w}_2^T & z_{3,i}\mathbf{w}_2^T & \cdots & z_{2N_e,i}\mathbf{w}_2^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1,i}\mathbf{w}_{2N_e}^T & z_{2,i}\mathbf{w}_{2N_e}^T & z_{3,i}\mathbf{w}_{2N_e}^T & \cdots & z_{2N_e,i}\mathbf{w}_{2N_e}^T \end{bmatrix} \quad (57)$$

$N_e = N$ の場合には式(55)はガウスの消去法により

解くことができる。\$N_e < N\$ の場合は未知数が方程式の数よりも多いため解が定まらない。そこで接続性や損傷箇所についての知識を用いて未知数を減らすといった工夫がなされる。

次にこの行列方程式の変形を式(51)に適用する。

$$\Phi_u^T \delta A \Phi_d \Lambda_d \rightarrow G \delta a \quad (58)$$

$$\Phi_u^T \delta B \Phi_d \rightarrow H \delta b \quad (59)$$

\$\delta a\$, \$\delta b\$ は \$\delta A\$, \$\delta B\$ を列ベクトルに直したものである。\$\delta A\$, \$\delta B\$ は先に述べたように疎行列であるので変形後の \$\delta a\$, \$\delta b\$ も多くのゼロ成分を含む。そこでこれらのゼロ成分と、それに対応する \$G\$, \$H\$ の成分を消去して行列、ベクトルの次元を小さくすることができる。たとえば、\$\delta M\$ は一般に対角行列で、\$\delta K\$, \$\delta C\$ はしばしば三重対角行列である。\$\delta a\$, \$\delta b\$ に現れる、\$\delta M\$, \$\delta K\$, \$\delta C\$ に対応するベクトル \$\delta m\$, \$\delta k\$, \$\delta c\$ はこの場合次のように次元を小さくできる。

$$\delta m = [\delta m_{1,1} \quad \delta m_{2,2} \quad \dots \quad \delta m_{N,N}]^T \quad (60)$$

$$\delta c = \begin{bmatrix} \delta c_{1,1} & \delta c_{1,2} | \delta c_{2,1} & \delta c_{2,2} & \delta c_{2,3} | \\ & & \dots & & & \\ & & & \delta c_{N,N-1} & \delta c_{N,N} \end{bmatrix}^T \quad (61)$$

$$\delta k = \begin{bmatrix} \delta k_{1,1} & \delta k_{1,2} | \delta k_{2,1} & \delta k_{2,2} & \delta k_{2,3} | \\ & & \dots & & & \\ & & & \delta k_{N,N-1} & \delta k_{N,N} \end{bmatrix}^T \quad (62)$$

\$\delta a\$ と \$\delta b\$ には共通する成分が含まれるのでそれぞれの成分が対応するようにゼロベクトル \$\mathbf{0}\$ を挿入する。

$$\delta a = [\delta m^T \quad \delta c^T \quad \mathbf{0}^T]^T \quad (63)$$

$$\delta b = [\delta m^T \quad \mathbf{0}^T \quad \delta k^T]^T \quad (64)$$

これに対応して行列 \$G\$, \$H\$ にはゼロ行列を挿入する。これらのベクトル、行列を用いると式(51)の左辺 \$G\delta a + H\delta b\$ は \$D\delta v\$ と表すことができる。

$$D = [g_1 \dots g_N | g_{N+1} \dots g_{4N-2} | \mathbf{0} \dots \mathbf{0}] \\ + [h_1 \dots h_N | \mathbf{0} \dots \mathbf{0} | h_{N+1} \dots h_{4N-2}] \quad (65)$$

$$\delta v = [\delta m^T \quad \delta c^T \quad \delta k^T]^T \quad (66)$$

ここで、\$g_j\$, \$h_j\$ はそれぞれ \$G\$, \$H\$ の第 \$j\$ 列成分である。行列 \$C\$, \$K\$ は各質点間を結ぶ要素に相当する減衰、剛性係数から構成されているので、その接続性を考慮して \$\delta v\$, \$D\$ を変形し、独立な減衰係数、剛性係数のみが \$\delta v\$ に現れるようにすることが可能である。

一方式(51)の右辺は次のように変形できる。

$$\Lambda_u \Phi_u^T A'' \Phi_d - \Phi_u^T A'' \Phi_d \Lambda_d = \Lambda_u P - P \Lambda_d \quad (67)$$

$$P = \Phi_u^T A'' \Phi_d \quad (68)$$

\$\Lambda_u\$, \$\Lambda_d\$ はともに対角行列であるので式(51)右辺の

第\$(i,j)\$成分は次のように表される。

$$RHS_{i,j} = (\lambda_i^u - \lambda_j^d) P_{i,j} \quad (69)$$

ここで、\$\lambda_i^u\$, \$\lambda_j^d\$ は \$\Lambda_u\$, \$\Lambda_d\$ の第\$(i, j)\$成分である。左辺の変形にあわせて右辺から \$4N_e^2\$ 次元の列ベクトル \$\mathbf{r}\$ を得る。

$$\mathbf{r} = [RHS_{1,1} \dots RHS_{1,2N_e} | RHS_{2,1} \dots RHS_{2,2N_e} | \\ \dots | RHS_{2N_e,1} \dots RHS_{2N_e,2N_e}]^T \quad (70)$$

以上より損傷同定問題は次の線形連立方程式で表されることが導かれた。

$$D \delta v = \mathbf{r} \quad (71)$$

(3) 損傷前構造特性の扱い

式(71)は \$D\$ および \$\mathbf{r}\$ が既知で、\$D\$ のランクが \$\delta v\$ の長さと同じかより大きい場合には唯一解が定まる。変形前の式(51)から明らかなように \$D\$ は ERA あるいは ITD 法によって同定されるモード特性のみから構成されるが、\$\mathbf{r}\$ は損傷前の構造特性 \$A''\$ を含む。減衰行列をサブマトリックスとして含む \$A''\$ は一般に推定が困難である。そこで \$C\$ が未知の場合にも、損傷前後のモード特性と \$M\$ から式(51)右辺を推定する方法を提案する。なおこの方法ではモード特性のうち ERA により求められる初期モード振幅を必要とする。

まず次式を満たす変換行列 \$\Theta\$ を定義する。

$$\Phi_d = \Phi_u \Theta \quad (72)$$

十分なモード特性同定がなされ、線形独立なモード形ベクトルが正則行列を構成する場合には \$\Theta\$ はモード形行列の逆行列を利用して求められる。

$$\Theta = \Phi_u^{-1} \Phi_d \quad (73)$$

\$\Phi_u\$ が正則行列にならない場合には逆行列の代わりに擬似逆行列が利用される。この \$\Theta\$ を導入すると式(68)の行列 \$P\$ は減衰行列を用いることなく次のように求めることができる。

$$P = \Phi_u^T A'' \Phi_u \Theta = \mathbf{a} \Theta \quad (74)$$

$$\mathbf{a} = \Phi_u^T A'' \Phi_u \quad (75)$$

\$\mathbf{a}\$ は対角行列で、モード特性同定の過程で求められる初期モード振幅と初速度から以下のように推定できる。

式(44)のラプラス変換は初期条件 \$y_0\$ の下で、

$$(sA'' + B'') \hat{y}(s) = \hat{f}''(s) + A'' y_0 \quad (76)$$

である。座標変換 \$\hat{y} = \Phi_u \hat{q}\$ を施し、\$\Phi_u^T\$ を左からかけるとモード形ベクトルの直交性により式(76)は非連成化される。

$$(s\mathbf{a} + \mathbf{b}) \hat{q}(s) = \Phi_u^T \hat{f}''(s) + \Phi_u^T A'' y_0 \quad (77)$$

ここで \$\mathbf{b}\$ は次のように定義される対角行列である。

$$\mathbf{b} = \Phi_u^T B'' \Phi_u \quad (78)$$

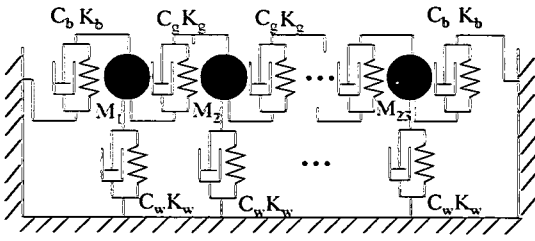


図-1 23自由度非比例減衰系モデル

表-1 基準モデルの質量, 減衰, 剛性

$M_1 \sim M_{23}$ (Kg)	1
C_b (Ns/m)	1
C_g (Ns/m)	0.5
C_w (Ns/m)	0.1
K_b (N/m)	50
K_g (N/m)	100
K_w (N/m)	5

表-2 減衰, 剛性の变化とモード特性

	設定値	同定値
δC_b (Ns/m)	0.5	0.5000
δC_w (Ns/m)	0.1	0.1000
δK_b (N/m)	5	5.0000
δK_w (N/m)	5	5.0000
f_1 (Hz)	0.4046	0.4046
f_2 (Hz)	0.5246	0.5246
f_{23} (Hz)	3.1958	3.1958
ζ_1	0.0224	0.0224
ζ_2	0.0233	0.0233
ζ_3	0.0521	0.0521

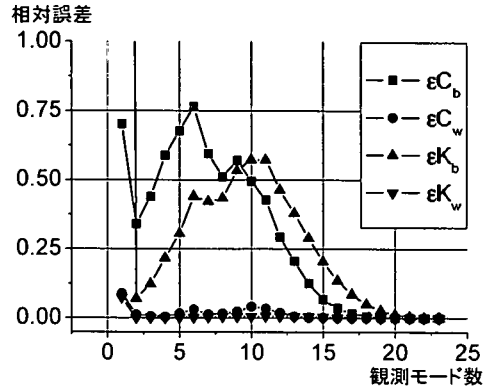


図-2 観測モード数と逆解析相対誤差

初期変位ゼロ, 初速度 v_0 の初期状態から始まる応答を考えると式(77)は

$$(sa + b)\bar{q}(s) = \Phi_u^T A'' y_0 \quad (79)$$

$$y_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (80)$$

となり, モード座標 $\bar{q}_i(s)$ ごとに,

$$(s - \lambda_i^u)\bar{q}_i(s) = \frac{1}{a_i} \Phi_{u_i}^T A'' y_0 \quad i=1, 2, \dots, 2N \quad (81)$$

$$\lambda_i^u = -\frac{b_i}{a_i} \quad (82)$$

と書ける. Φ_{u_i} は Φ_u の第 i 列成分である. 式(81)を $\bar{q}_i(s)$ について解き時間領域に変換すると

$$q_i(t) = \frac{1}{a_i} \Phi_{u_i}^T A'' y_0 e^{s_i t} \quad (83)$$

となり, 更にモード座標から物理座標に変換すると

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N} \Phi_{u_i} \left(\frac{1}{a_i} \Phi_{u_i}^T A'' y_0 \right) e^{s_i t} \quad (84)$$

である. 上式中の $\frac{1}{a_i} \Phi_{u_i}^T A'' y_0$ は初期モード振幅 \bar{Q}_i であり, ERA などのモード特性同定の過程で得られる. 次の関係

$$A'' y_0 = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (85)$$

を利用すると \bar{Q}_i は簡略化され

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{a_i} \hat{\Phi}_{u_i}^T M v_0 \quad (86)$$

となる. $\hat{\Phi}_{u_i}$ は i 次モード形で Φ_{u_i} の上半成分である. よって a の対角成分 a_i は次のように表される.

$$a_i = \frac{1}{Q_i} \hat{\Phi}_{u_i}^T M v_0 \quad (87)$$

(4) 数値モデルへの適用

前節で導いた構造逆解析手法を数値モデルに適用する. モデルは, 後の白鳥大橋への適用を考慮した図-1の23自由度非比例減衰系である. 表-1に構造特性の詳細を示す. M_1 から M_{23} まで23の質点が減衰要素 C_g, C_b, C_w および剛性要素 K_g, K_b, K_w で接続されている. 各質点は C_g, K_g により相互に, C_w, K_w により地面に接続されている. 両端の質点は C_b, K_b によっても地面に接続されている. 損傷は C_b, C_w, K_b, K_w の変化として導入した. 損傷前後の構造についてそれぞれ自由振動応答時刻歴を

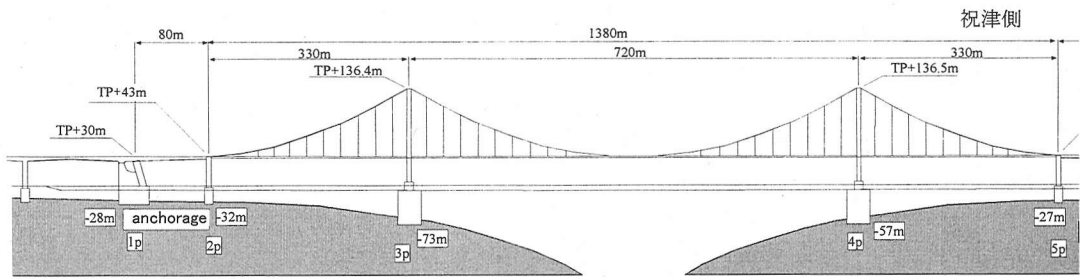


図-3 白鳥大橋一般図 (3 径間 2 ヒンジ補剛吊橋)

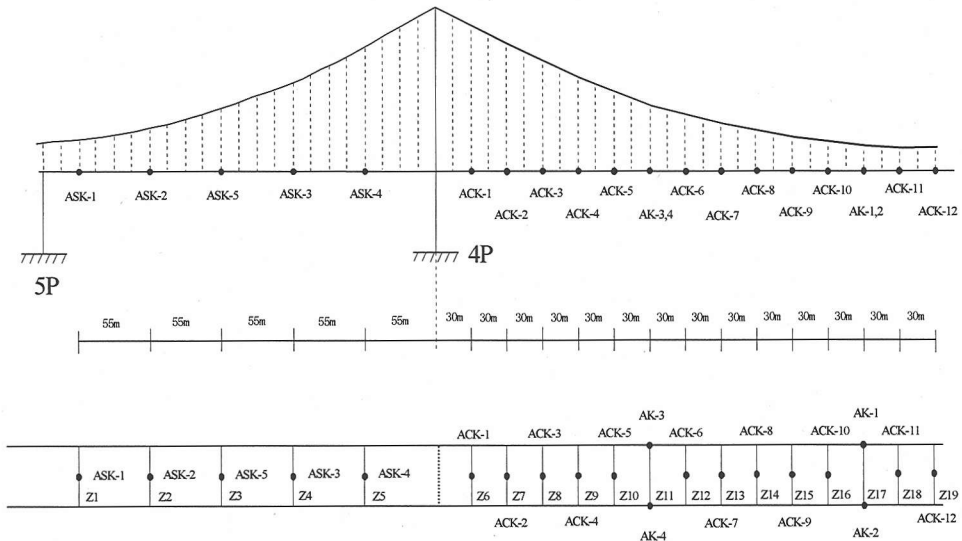


図-4 測点配置

計算し ERA によりモード特性を同定した. 23 次まで全てのモードを用いて逆解析した結果を表-2 に示す. 減衰, 剛性の変化を正確に推定できている. 続いて, 構造逆解析の精度と用いるモード数との関係を調べるために推定パラメータ C_b , C_w , K_b , K_w について誤差指標を定義した.

$$\varepsilon C_i = \frac{|C_{i,analysis} - C_{i,model}|}{|C_{i,model}|} \quad (88)$$

$$\varepsilon K_i = \frac{|K_{i,analysis} - K_{i,model}|}{|K_{i,model}|} \quad (89)$$

添え字の i は b あるいは w をとるものとし, $analysis$ は逆解析により得られた構造特性変化, $model$ は真値を表す. この指標の意味は推定パラメータの真値に対する相対誤差である. 用いるモード数を 1 から 23 まで変えて逆解析をした場合の誤差とモード数の関係を図-2 に示す. 逆解析に用いられないモードがある場合には構造特性の推定に誤差が生じるが,

全モードの約 70%, 17 次モードまで用いた場合には全てのパラメータについて誤差が 0.1 以下になることがわかった. 2 つのモードのみ用いた場合でも誤差は 0.35 以下になっている. なお, モード数の増加とともに誤差が増える領域が確認できるが, モード形ベクトルおよびその変化がより簡単な形をしている低次モードを使っているときには(73)が単位行列に近く擬似逆行列による近似誤差が小さいためと考えられる¹²⁾. 阿部ら¹⁶⁾は各質点が互いに複雑に連結されている数値モデルで同様に誤差の検討をしているが用いるモードが少ない場合に誤差の小さな領域が見受けられないのは, 低次モードにおいてもモード形やその変化が複雑なモデルを扱っているためと考えられる.

4. 白鳥大橋の常時微動計測データへの適用

前節までに導いた手法を白鳥大橋の常時微動計測

データへ適用する。

(1) 計測の概要

白鳥大橋は北海道室蘭市の室蘭港港口に架かる主径間 720m の 3 径間鋼箱桁吊橋である。図-3 に一般図を示す。1998 年の供用に先立ち加振器を用いた強制振動実験と 2 週間にわたる常時微動試験が鉛直たわみ、桁ねじれを主な対象として行われ、桁、主塔の加速度応答、桁中央の風速が計測された。本研究ではこの常時微動計測結果を利用し、鉛直たわみ振動を対象として解析を行った。この計測データの特徴として、計測周波数が高い(100Hz)、100 時間以上の連続計測、多点計測ということが挙げられる。桁の鉛直振動計測は図-4 に示す z-1 から z-19 の計 19 断面で行われた。

本橋は港口にあり、その地形と橋軸関係から橋軸直交方向に吹く風が多く、鉛直加速度振幅の RMS 値と、橋軸直交方向の平均風速には図-5 に示すように明瞭な対応が見られた。

(2) 振動モード特性の同定

まず常時微動データから自由振動応答波形を得るため 2 時間ごとの計測データについて相関関数を推定した。図-6 に風速 13.7m/s 時の常時微動計測データとそれから導かれた自由振動応答を示す。基準点 s は z8 から z17 までの 10 点に設定し、それぞれのケースで相関関数を推定した。つまり 2 時間ごとのデータについて 19 点の自由振動応答を、基準点を変えて 10 組作成した。続いてこの自由振動応答に対して ERA を適用した。これにあたり 19 点の応答のうち、主径間内の計測点に相当する、z6 から z19 まで 14 点の応答を用い、基準点の異なる 10 組の応答は ERA により同時に解析された。つまり、Markov パラメータ $Y(k)$ の行数は 14、列数は 10 である。特異値分解においては 0.001 よりも小さい特異値はゼロとみなし、得られたモード特性のうち可制御性、可観測性いずれの MAC 値も 70%以上であるものを有意であると考えた。次に、単純梁の 1 から 23 次モード形を、これら有意なモード形と比較し、相関の最も高いモードを白鳥大橋の 1 から 23 次モードと決定した。求められなかったモードもあるが、このようにして 2 時間ごとに 23 次まで白鳥大橋のモード特性を同定した。表-3 と図-7 に、得られたモード特性として平均風速 8m/s における例を示す。表-3 には文献 8) による同定値(平均風速 8.6m/s)と強制加振実験の結果もあわせて示した。これらの中で振動数には良好な対応が見られるが減衰比は文献 8) と比べて ERA による同定値が小さい。この原因として、推定した自

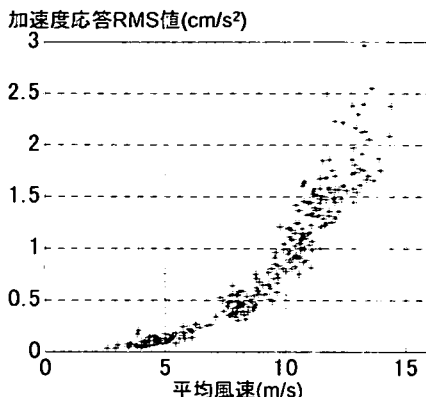


図-5 径間中央での 15 分間平均風速と桁鉛直加速度応答

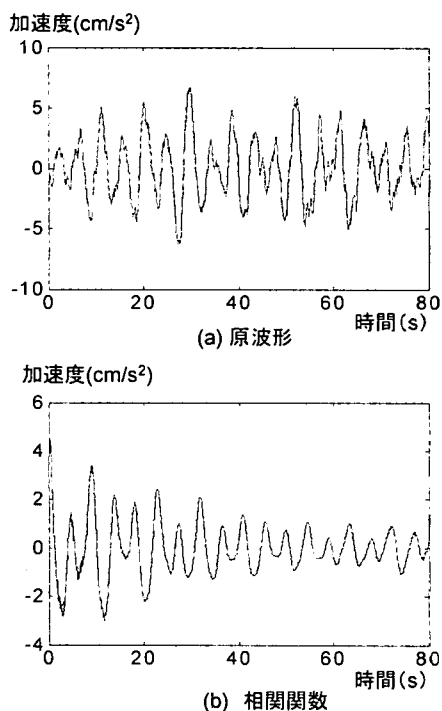


図-6 相関関数によって得られた自由振動波形と原波形

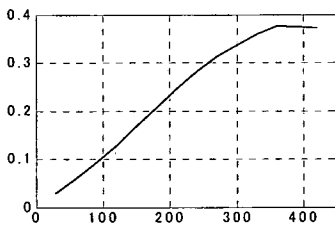
由振動波形および $Y(k)$ の大きさ、ノイズの扱いの違いが考えられるが、今後詳細な検討が必要である。初期モード振幅は、例として基準点が z17, z11 の場合の値を絶対値で示してある。

文献 8) の方法では $Y(k)$ の列数が 1 であり、モードごとに基準点の異なる応答を用いている。本手法ではノイズの扱い、モード分解はより厳密に行われている。そして、MAC 値と初期モード振幅は ITD 法では求められなかったモード特性である。

表-3 同定された鉛直モード特性の一例 風速 8.0(m/s)の場合

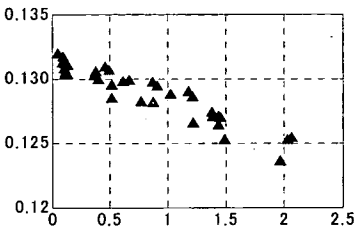
次数	振動数 (Hz)			減衰比 ζ		MACc	MACo	初期モード 振幅の例 (cm/s ²)	
	ERA	文献 8) (ITD 法)	強制加振 実験結果	ERA	文献 8) (ITD 法)				
1	0.128	0.130	0.129	0.0175	0.0216	100	100	0.281	0.153
2	0.151	0.152	0.149	0.0093	0.0135	100	100	0.021	0.333
3	0.220	0.221	0.218	0.0068	0.0068	100	100	0.219	0.110
4	0.323	0.326	0.317	0.0054	0.0147	100	100	0.003	0.019
5	0.441	0.442	0.435	0.0048	0.0158	100	100	0.094	0.053
6	0.570	0.578	0.568	0.0040	0.0319	100	100	0.002	0.072
7	0.723	0.734	0.719	0.0039	0.0481	100	100	0.047	0.035
8	0.889	0.914	0.906	0.0036	0.0662	100	100	0.002	0.000
9	1.08	1.10		0.0038	0.1141	100	100	0.029	0.019
10	1.29	1.34		0.0066	0.0893	100	100	0.001	0.022
11	1.52	1.55		0.0055	0.0711	100	100	0.030	0.022
12	1.76	1.80		0.0008	0.0722	100	100	0.002	0.002
13	2.02	2.05		0.0059	0.0602	100	100	0.043	0.028
14	2.30	2.31		0.0048	0.0593	100	100	0.003	0.044
15	2.58	2.57		0.0040	0.0357	100	100	0.039	0.029
16	2.88	2.83		0.0074	0.0812	100	100	0.004	0.002
17	3.20	3.16		0.0030	0.0517	100	100	0.046	0.030
18	3.51	3.50		0.0045	0.0881	100	100	0.004	0.044
19	3.82	3.82		0.0048	0.1264	99	100	0.028	0.019
20	4.12			0.0066		90	84	0.003	0.004
21	4.50			0.0071		89	91	0.027	0.019
22	4.75			0.0111		85	85	0.004	0.018
23	5.57			0.0012		94	96	0.013	0.015

無次元モード振幅



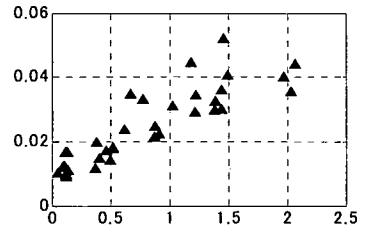
(a) 鉛直1次モード

固有振動数 (Hz)

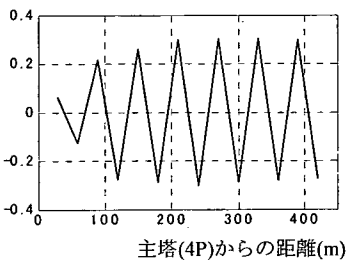


(a) 鉛直1次モード

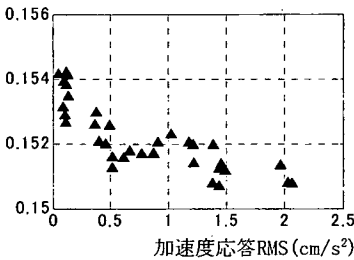
減衰比(ζ)



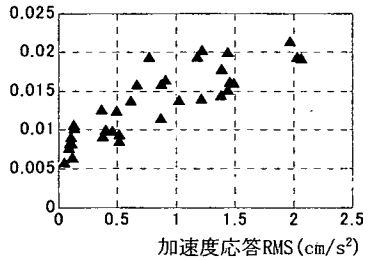
(c) 鉛直1次モード



(b) 鉛直23次モード



(b) 鉛直2次モード



(d) 鉛直2次モード

図-7 モード形の例

図-8 振動数, 減衰比の振幅依存性

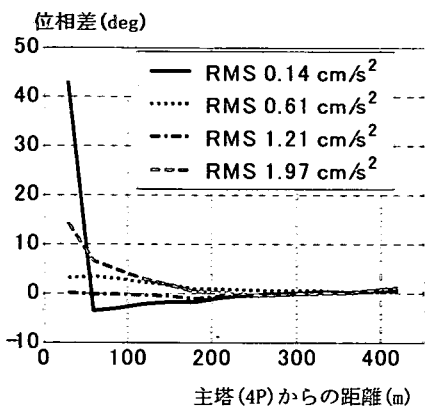


図-9 鉛直1次モード形の位相の振幅依存性

吊橋の応答には文献8)で明らかにされたように風速、振幅レベルの影響がある。同定されたモード特性と加速度応答 RMS の関係を調べたところ明瞭な関係が見られた(図-8)。なお、図-5 に示したように風速と加速度応答 RMS の間には明瞭な関係が見られるので、モード特性と風速の間にも同様な対応関係が見られると考えられる。振幅レベルの増加に対して振動数はわずかに減少、減衰は増加する傾向が確認された。別途行われた風洞実験による鉛直振動に対する空力剛性、空力減衰の効果を考えると振動数、減衰比ともに RMS 応答すなわち風速の増加に伴い増加することが期待される。実際には振動数は逆に減少している。

モード形についても同様に加速度応答 RMS との関係性を調べたところ一見顕著な変化は見受けられないが、モード形の位相に振幅レベル依存性が見られた。図-9 に1次モード形の位相を振幅レベルの異なる4ケースについて示す。位相の基準は桁中央 z17 に設定してある。振幅レベルが小さいときには主塔脇の計測点 z6 のみ局所的に桁中央との位相差が大きく、振幅レベルの増加とともにこの位相差は小さくなる。さらに振幅レベルが増加すると桁中央と主塔近辺の位相差が局所的ではないが再び大きくなっている。図-10 に、z6 における1次モード形振幅と、z17 との位相差を振幅レベルに対して示す。小振幅時は明らかにモード振幅が小さく、位相ずれは大きい。振幅が増加するとこれらはすぐに解消し、位相差は再び徐々に大きくなる傾向が確認できる。局所的な現象は加速度応答 RMS が 0.2cm/s^2 以下の小振幅時におきていることがわかる。モード振幅にばらつきが見られるのは、モード形ベクトルの大きさが1となるように基準化しているためにモード形全体

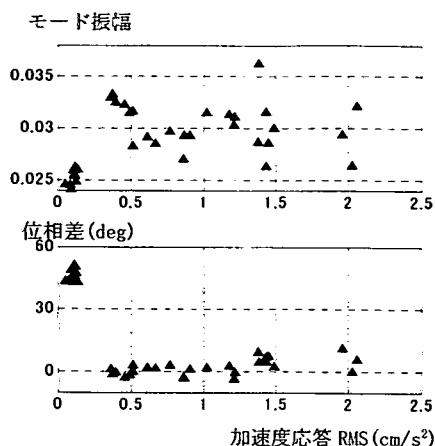


図-10 1次モード形計測点 z6 における振幅、位相の振幅レベル依存性

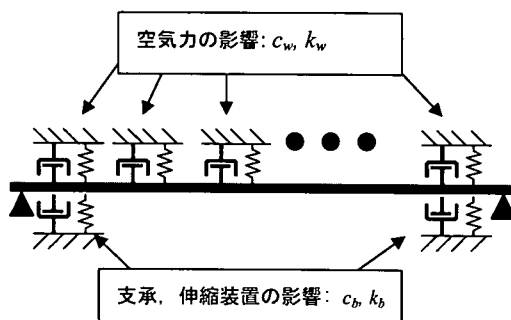


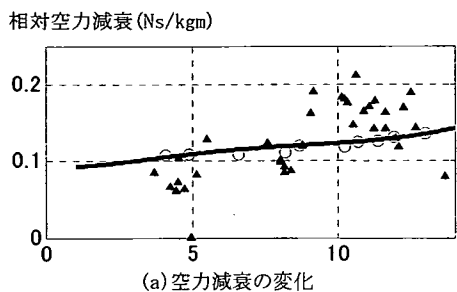
図-11 逆解析の概念モデル

の変化や推定誤差が z6 のモード振幅に反映しているためと考えられる。なお、モード形に位相差があることは非比例減衰系であることを示している。

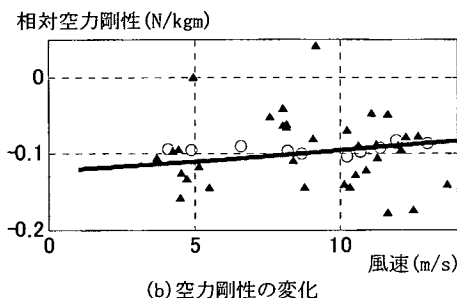
これら振幅依存性は文献8)においても同様に報告されているが、全データを10ランクに分けて各ランクを代表するモード特性について解析しているためモード特性サンプル数が少なく統計的な扱いが難しい。また、振動状態が異なると考えられるデータが1つのランクに分類されていることがある。たとえば加速度 RMS 0.2cm/s^2 程度のデータと 0.4cm/s^2 程度のデータは違う挙動を示すが、1つのランクに分類されている。

(3) 構造特性の逆解析

同定されたモード形には位相差が確認された。位相差の存在は系が非比例減衰系であることを示している。この位相差の原因を構造上で考えると、小振幅時の局所的な位相変化からは支承、伸縮装置の摩擦の影響が、大振幅時の桁全体の位相差、減衰比の増加および風洞実験結果からは空力減衰、空力剛性



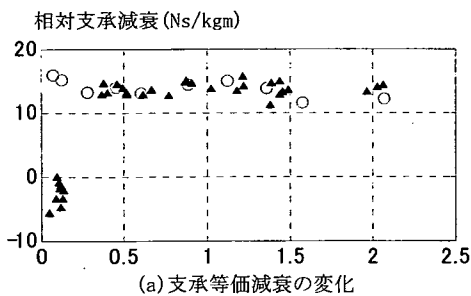
(a) 空力減衰の変化



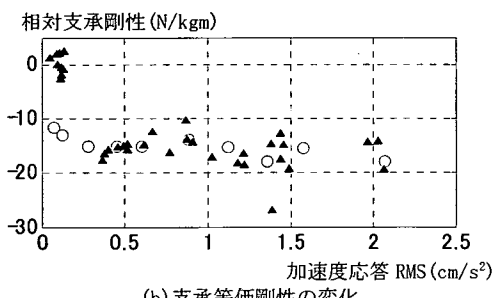
(b) 空力剛性の変化

図-12 空力特性の変化

(▲: 逆解析結果, ○: 文献8), —: 風洞実験



(a) 支承等価減衰の変化



(b) 支承等価剛性の変化

図-13 支承構造特性の変化

(▲: 逆解析結果, ○: 文献8)

の影響が主要なものであると推測される。そこで、これらの影響を図-11 に模式的に示すように桁両端の付加減衰、付加剛性および桁に沿って一様に分布する付加減衰、付加剛性としてモデル化し、同定されたモード特性を用いてこれらの値を逆解析することとした。支承、伸縮装置は付加回転減衰、付加回転剛性としてモデル化されるべきであるが、桁の変位が微小であることから図-11 のように鉛直変位に対する減衰、剛性としてモデル化した。このモデルでは、ある2時間の常時微動計測から同定された状態が基準状態、あるいは損傷前同定問題と対応付けるならば損傷前の状態として図-9 中の桁で表される。他の時間帯の振動状態は桁両端に支承、伸縮装置の影響の変化が、桁全体に空気力の影響の変化がそれぞれ生じてモード特性が変化したと考え、これら構造特性変化を対応する付加減衰 C_b 、 C_w 、付加剛性 K_b 、 K_w として3章で述べた手法により逆解析する。

同定されたモード形は測定点が存在しない桁のおよそ半分の情報を欠いているため逆解析に直接利用することができない(図-4)。そこで23次までのモード形は対称、逆対称いずれかを仮定し桁全体のモード形に拡張した。同様の理由で初速度も計測のない部分について情報を欠いている。拡張された桁全体のモード形と初期モード振幅を用いて桁全体の初速度を推定した。桁の対称性に加えて質量の一様分布も仮定している。ケーブルに作用する運動依存の空

力減衰、空力剛性は橋桁に比べ1オーダー小さいことから逆解析から得られる空力減衰、空力剛性は橋桁の値を代表するものと考えられる。

逆解析は基準とする状態つまり、図-11 で桁と考える状態の選択や逆解析に用いるモード数に依存するが、ここでは小振幅時のある2時間を基準状態に設定しはじめの3つのモードを用いて逆解析した。図-12 に逆解析により得られた空力減衰、空力剛性を、文献8)の値、風洞実験で得られた揚力から算定される空力減衰、空力剛性の値とともに示す。風洞実験結果からの空気力算定の詳細は付録に示す。図-13 には摩擦力の等価減衰、等価剛性を文献8)の値とともに示す。空力減衰、空力剛性はいずれもばらつきが大きいものの空力減衰は風洞実験結果と同様に風速の増加とともに増加する傾向を示している。摩擦力について考えると振幅の増加とともにクーロン摩擦の等価減衰は増加、等価剛性は減少することが予想されるが¹⁷⁾逆解析から得られた結果もこれに整合的である。特に図-10 で見られた小振幅時の局所的な位相差とモード振幅の低下からは支承、伸縮装置が滑動していないことが推測されるが、得られた等価減衰、等価剛性の小振幅時の変化はこの推測に定性的に一致する。

このように、定量的な整合を確認するにはいたっていないが定性的には推定される変化と整合的な傾向が得られた。逆解析値に含まれる誤差として支承、

伸縮装置の特性が完全にはクーロン摩擦系ではないこと、風速が一点計測であること、風向が必ずしも橋軸直交方向に一定していないことが考えられる。

理論上本手法は、基準状態の減衰を無視していない点や解析データの分類をより詳細に行っている点において文献8)の手法よりも解析精度が高いと期待される。結果を比較すると、摩擦力の等価減衰、剛性はモード形などから推測される支承の状態をよりリアリティに反映しているものの、空気力逆解析精度は低い。この違いの原因として、文献8)の方法では解析結果が誤差関数によるため、空力減衰、空力剛性に対する感度が高い誤差関数を設定していたことが考えられる。

5. まとめ

本研究の目的は一連のモード特性同定、構造逆解析手法を実橋の振動計測データに適用し手法の有効性を検討することであった。手法の主要な長所は、

1) 逆解析に反復計算を必要としない、2) 事前に系の減衰、剛性を推定する必要がない、3) 常時微動に適用できる、4) 非比例減衰系を扱うことができることである。これらは将来の構造ヘルスマニタリングの実現にあたり重要な特徴である。

この手法を白鳥大橋の常時微動データに適用した。まず、相関関数とERAを利用して常時微動データからモード特性を23次まで同定したところ、これらモード特性は振幅レベル依存性を示し、モード形の位相からは系が非比例減衰系であることが示された。ついで振幅レベルによるモード特性の違いを空気力、支承及び伸縮装置に相当する構造特性の違いとして逆解析した。逆解析より得られた空力減衰は風洞実験結果と同様な傾向が得られた。一方摩擦力はクーロン摩擦の等価減衰、等価剛性から予測される定性的な変化と同様な変化を確認できた。今後は、モード特性誤差の影響、等価減衰、等価剛性と周波数の関係、そして、構造逆解析において基準状態と逆解析結果の関係などより精緻に検討する必要がある。

なお、著者らが以前試みた手法と比べて、モード特性同定、構造逆解析両ステップともより正確で計算負荷が小さいことが期待され、ほぼこれらが確かめられたが、構造逆解析の精度については確認することができなかった。構造逆解析は文献8)によるモード誤差の最小化問題と本研究で提示した非反復法、基準状態における減衰考慮と組み合わせることで、構造特性変化のモード特性への感度を考慮しつつ反復解法によらず逆解析できると考える。

あとがき：常時微動モニタリングから得られる信号は、吊橋のようなフレキシブルな構造物にあってもその振幅レベルは低く、一見ノイズのように見える。しかし、今回の解析からもある程度明らかにすることができたように、このようなデータからも有用な知見が得られるのである。近年のセンサー技術、情報処理技術の進展により莫大なデータの入手、そのプロセスが可能になりつつある。逆解析技術がさらに進めばわれわれが今考えている以上の情報の抽出が可能になるであろう。現在のところ振動モニタリングからの健全性評価については期待が先行し、研究、開発が遅れ気味のところがある。解析技術の進歩は蓄積されるデータの量とも並行するところがあり、今後いろいろな場面での実構造物のモニタリングを期待したい。本研究も文献8)と同様に白鳥大橋の上質な高密度の常時微動データがあったことでリアリティな研究を行うことができた。改めて計測に携わられた方々に深く感謝したい。

付録 空気力の算定

白鳥大橋の設計にあたって、フラッター解析のために2次元断面模型を用いて非定常空気力の測定が行われている¹⁸⁾。模型実験は一様流中の2次元剛体について自由振動法により行われ、白石・小川(1973)¹⁹⁾の方法によって非定常空気力係数が算出されている。非定常空気力係数は、鉛直たわみ、ねじれ2自由度方程式の中で、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \ddot{h} + 2\xi_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h &= \frac{\omega^2}{\mu} \left((L_{hR} + iL_{hl}) \bar{h} + (L_{\alpha R} + iL_{\alpha l}) \alpha \right) \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2\xi_\theta \omega_\theta \dot{\alpha} + \omega_\theta^2 \alpha &= \frac{\omega^2}{\nu} \left((M_{hR} + iM_{hl}) \bar{h} + (M_{\alpha R} + iM_{\alpha l}) \alpha \right) \end{aligned} \quad (A2)$$

ここで L_{hR} , L_{hl} , $L_{\alpha R}$, $L_{\alpha l}$, M_{hR} , M_{hl} , $M_{\alpha R}$, $M_{\alpha l}$: 非定常空気力係数, $\bar{h} = \frac{h}{b}$: 無次元化鉛直た

わみ変位, h : 鉛直たわみ変位, $b = \frac{B}{2}$: 桁幅, α : ねじれ変位, ξ_h : 鉛直たわみ構造減衰比, ξ_θ : ねじれ構造減衰比, ω_h : 鉛直たわみ固有円振動数, ω_θ : ねじれ固有円振動数, ω : 連成円振動数,

$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$, $\nu = \frac{I_\alpha}{\pi \rho b^4}$, m : 単位長あたり質量, I_α : 単位長あたり極慣性モーメント, ρ : 空気密度であ

る。風洞実験結果から非定常空気力係数は無次元化

風速 $V_r = \frac{2\pi V}{\omega B}$ (V : 風速) と、鉛直たわみ、ねじれ変位に関する無次元化振幅の関数として近似式が求められる。ここでは変位のうち鉛直たわみのみ考慮し、 L_{hR} , L_{hI} を用いて式(A1)から空力減衰と空力剛性を算出した。 ω_h , ω には同定された鉛直1次モード振動数を用いた。

参考文献

- 1) Abdel-Ghaffar, A.M., and Housner, G. W.: Ambient Vibration Test of Suspension Bridge, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, pp.983-999, 1978.
- 2) Abdel-Ghaffar, A.M., and Scanlan, R.H.: Ambient Vibration Studies of Golden Gate Bridge, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, pp.463-499, 1985.
- 3) Hong, V.M., Abe, M., Fujino, Y., Kaito, K.: The eigensystem realization algorithm for ambient vibration measurement using laser Doppler vibrometers, *Proceedings of the American Control Conference*, pp435-440, 2001.
- 4) Juang, J.N., Pappa, R.S.: An Eigensystem Realization Algorithm For Modal Parameter Identification And Model Reduction, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 8, No. 5, pp620-627, 1985.
- 5) Kaouk, M., Zimmerman, D.C.: Structural Damage Assessment Using a Generalized Minimum Rank Perturbation Theory, *AIAA Journal*, Vol.32, No.4, pp.836-842, 1994.
- 6) Smith, S.W., Zimmerman, D.C., Bartkovicz, T.J., Kim, H.M.: Experiments for Damage Location in a Damped Structure, *Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Vol. II, Society of Experimental Mechanics, Florida, pp.1096-1102, 1997.
- 7) Cha, P.D., de Pillis, L.G.: Model Updating by Adding Known Masses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp.2547-2571, 2001.
- 8) 阿部雅人, 藤野陽三, 長山智則, 池田憲二: 常時微動

- 計測に基づく非比例減衰系の構造同定と長大吊橋への適用例, 土木学会論文集, No. 689/I-57, pp.261-274, 2001.
- 9) Cole, H.A.: On-line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures, NASA CR-2205, 1973.
 - 10) Ibrahim, S.R., Mikulcik, E.C.: A method for the Direct Identification of Vibration Parameters From the Free Response, *Shock and Vibration Bulletin* 47, pp.183-198, 1977.
 - 11) Hong, V.M., Abe, M., Fujino, Y.: A Non-Iterative Approach in Vibration-Based Damage Detection for a Damped Mechanical System, *AIAA Journal* (投稿中).
 - 12) Hong, V.M.: Application of Laser Doppler Vibrometers in Damage Detection, 東京大学大学院社会基盤工学専攻修士論文, 2001.
 - 13) James, G.H., Carne, T.G., Lauffer J.P., Nord, A.R.: Modal Testing using Natural Excitation, *Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference*, Sant Diego, California, pp.1209-1216, 1992
 - 14) Farrar, C.R. and James, G.H.: System Identification from Ambient Vibration Measurements on a Bridge, *Journal of Sound and Vibration*, 205(1), pp.1-18, 1997.
 - 15) Vandiver, J.K., Dunwoody, A. B., Campbell, R. B., Cook, M.F.: A Mathematical Basis for the Random Decrement Vibration Signature Analysis Technique, *Journal of Mechanical Design*, pp.303-308, 1982.
 - 16) 阿部雅人, 藤野陽三, 長山智則, Vu-manh, H.: 振動計測に基づく非比例減衰系の非反復損傷同定法, 応用力学論文集, Vol.5, 2002.
 - 17) 柴田明徳: 最新耐震構造解析, 森北出版, 1997.
 - 18) 北海道開発局, 長大・道開発コンサル共同企業体: 白鳥大橋上部工耐風検討業務報告書.
 - 19) 白石成人, 小川一志: 非線形動的空気力を考慮した吊橋の耐風応答解析に関する一考察, 土木学会論文報告集, No.244, pp.23-36, 1975.

(2002.12.27 受付)

NON-ITERATIVE IDENTIFICATION OF NON-PROPORTIONALLY DAMPED SYSTEM FROM AMBIENT VIBRATION MEASUREMENT AND ANALYSIS OF DYNAMIC PROPERTIES OF A LONG SPAN SUSPENSION BRIDGE

Tomonori NAGAYAMA, Masato ABE, Yozo FUJINO, Kenji IKEDA

Ambient vibration measurement is a convenient tool for health monitoring of structures in service. The authors proposed a new procedure for structural inversion analysis from ambient vibration data, which resolves some problems of the previous methods. The main advantages of the proposed procedure are: for modal analysis, the method can distinguish noise from meaningful mode and deal with multi-input system; for the inversion analysis, the procedure does not require any assumption over damping, prior estimation of structural properties, or iterative approach. The method is applied to ambient response data of Hakucho Bridge. Since authors applied a different procedure for structural inversion analysis to the same bridge before, the results are compared and the effectiveness of the new method is demonstrated.