

3自由度はり要素モデルを用いた 離散系における伝達境界の定式化

李相勲¹・田邊忠顕²

¹学生会員 工修 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻 博士課程後期課程

lee@civil.nagoya-u.ac.jp (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

²フェロー 工博 名古屋大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町)

同形式の構造が非常に長く連続している高架橋のような構造物の応答を解析する際、その一部を取り出し両端を自由境界として取り扱う一般の解析方法はそれが安全側であることを前提に行われる。本研究では3自由度を持つ質点系はり要素を用いて離散系における無限領域をエネルギー伝達境界に定式化し検証を行った上で、さまざまな振動数を持つ調和地動外乱に対する、伝達境界を考慮したパラメトリック振動解析を行った。その結果、このような連続構造物に地動外乱が作用したとき、両端を自由境界にした場合より伝達境界を有する場合の方が外乱による応答変位が大きくなる可能性が存在することが確認された。

Key Words : *energy-transmitting boundary, energy radiation, discrete system, dynamic analysis*

1. はじめに

同形式の構造が非常に長く連続している高架橋のような構造物の応答を解析する際、その一部を取り出し両端を自由境界として取り扱う一般の解析方法は‘全構造物が様な地震動を受けるときにはその構造物と同様な剛性を持つ1質点系モデルで解析してもその結果はほとんど変わらない’ということからそれが安全側であることを前提に行われている。しかし、このような方法は2つの問題点が考えられる。その1つは対象高架橋の中に不規則的な構造を含んでいる場合は構造物全体をモデル化し解析しなければ正確な結果は求められない。また、新幹線高架橋のような構造物は数キロもしくは数十キロの長さを持っており、それが様な地震動を受け様に応答することとは考えにくい。むしろ地震動が一部に集中し、他のところはより小さい地震動を、または、集中点から遠いほど小さくなる地震動を受けると考えられる。その場合は、集中点から発生したエネルギーは外方向へ逸散し、波動の移動が発生する。このようなエネルギーの流れを考慮することができないのがもう1つの問題点である。本研究では離散系に対して、地震動が集中する部分を不規則領域と想定し、その両側を半無限規則領域

としてのエネルギー伝達境界を設定することを試みた。そして、そのモデルに対する振動解析において半無限規則領域の励振はないと仮定した。その解析結果から、地動による応答と逸散する波動が干渉し、ある振動数の条件では、その振幅が増幅することが分かった。このことは、長大連続高架橋を耐震設計するときに、解析対象の構造物のみを取り出し、その両側を自由境界として仮定する既存の設計方法が、常に安全側とは限らないことを示している。

本年度中に改訂予定の土木学会コンクリート標準示方書耐震設計編では、RC構造物の耐震解析は基本的に動解を用いることとし、地盤を無限境界を持つ連続体としてモデル化することを規定している。現在までに地盤の分野に関しては、無限連続体としての地盤を対象に、各種の境界条件の設定方法¹⁾が確立されているが、高架橋のように、柱、はり部材及び格点からなる離散系構造においては、地盤について成り立つような単純な波動解は適用できない。桁構造の半無限領域に関しては、三輪・田邊²⁾がエネルギー伝達境界を用い定式化しているが、伝達境界についての明瞭な説明や検証が行われず、また、いくつかの問題点が含まれていた。著者らは1自由度を持つマス-バネ系モデルを用いて線形系を仮定した無限

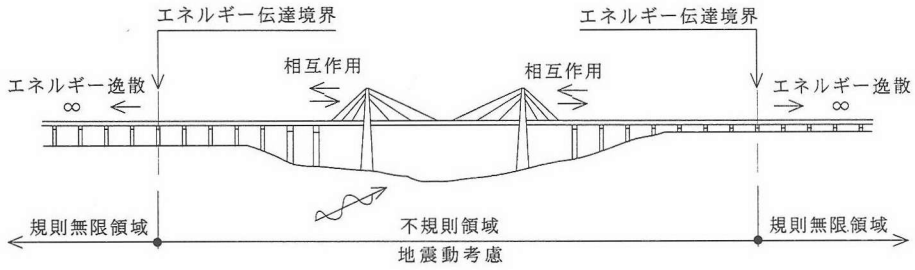


図-1 離散系におけるエネルギー伝達境界の概念図

連続体としての伝達境界を定式化し、考察と検証を行ってきた³⁾。本研究では、3自由度を持つ橋軸方向に対する広がりをもった、2次元はり要素を用いて連続高架橋に対するエネルギー伝達境界を定式化し、数値解析的検証を行った。また、外乱として調和地動の角振動数 ω を変化させながらパラメトリック解析を行い伝達境界の働きとその効果を検討した。

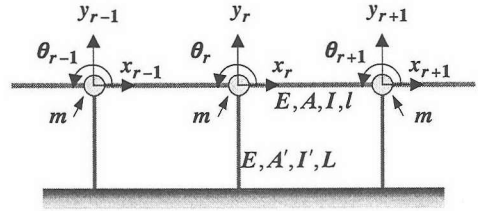


図-2 領域L, Rのモデル図

2. エネルギー伝達境界の定式化

地盤を無限の成層構造と仮定した、厳密解のコンシステント境界⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾、またはエネルギー伝達境界、が論議されている。振動数領域で定式化されるこの方法は、逸散条件を満たす水平方向の厳密変位関数を用いている。本研究に使われている定式化は上記の方法と類似しており、離散系に適用するものである。典型的な例として、図-1のような両側に半無限の一樣な連続ラーメン高架橋が隣接している斜長橋を考える。ここで、連続高架橋は2つの部分に分けられる。斜長橋と一部不規則的な部分を含めた有限な領域と残りの無限に連結する領域とである。前者を不規則領域、後者を規則無限領域とする。この2つの領域の境界であるエネルギー伝達境界は不規則領域からのエネルギーを無限領域に逸散する。このような設定で斜長橋と隣接構造物との相互作用と無限領域へのエネルギー逸散を考慮することにする。

(1) 無限領域L, Rにおける波動伝播の条件

領域L, Rに伝播する波動解を求めるため、領域L, Rの連続ラーメン高架橋から図-2のように任意の $r-1, r, r+1$ 番目の節点を考える。図で示すように部材特性は、桁のスパン長を l 、軸方向剛性を EA 、曲げ剛性を EI とし、橋脚の長さを L 、軸方向剛性を EA' 、曲げ剛性を EI' とする。自由度は水平、鉛直、回転の3自由度とする。質量は各節点に水平と垂直方向の集中質量として取り扱い、回転慣性は考慮しない。外荷重が存在しない場合、 r 番目の節

点における水平、鉛直、回転方向のそれぞれの運動方程式を立てると次のように表される。

$$-\frac{EA}{l}x_{r-1} + \left(\frac{2EA}{l} + \frac{12EI'}{L^3}\right)x_r + \frac{6EI'}{L^2}\theta_r - \frac{EA}{l}x_{r+1} = -m\frac{d^2x_r}{dt^2} \quad (1)$$

$$-\frac{12EI}{l^3}y_{r-1} - \frac{6EI}{l^2}\theta_{r-1} + \left(\frac{24EI}{l^3} + \frac{EA'}{L}\right)y_r - \frac{12EI}{l^3}y_{r+1} + \frac{6EI}{l^2}\theta_{r+1} = -m\frac{d^2y_r}{dt^2} \quad (2)$$

$$\frac{6EI}{l^2}y_{r-1} + \frac{2EI}{l}\theta_{r-1} + \frac{6EI'}{L^2}x_r + \left(\frac{8EI}{l} + \frac{4EI'}{L}\right)\theta_r - \frac{6EI}{l^2}y_{r+1} + \frac{2EI}{l}\theta_{r+1} = 0 \quad (3)$$

ここで、式(1)、式(2)、式(3)における各変位は角振動数によって表すことができる⁸⁾。従って、任意の振動数 ω に対し、以下の式で表す波動解が存在すると仮定する。

$$\{\delta\}_r = \begin{Bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u\eta^r \\ v\eta^r \\ w\eta^r \end{Bmatrix} \cdot e^{i\omega t} = [U]\eta^r e^{i\omega t} \quad (4)$$

ここに, u, v, w は水平, 鉛直, 回転方向のそれぞれの複素変位振幅であり, 式(4)は離散化された構造に対する一種の波動解である. 式(4)を, 式(1), 式(2), 式(3)に代入し, 変形すると次のようになる.

$$\{\eta^2[A] + \eta[B] + [D]\} \{U\} = \{0\} \quad (5)$$

ただし, 上式におけるベクトルや各マトリクスは次のようである.

$$\{U\}^T = \{u \quad v \quad w\} \quad (6)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} + \frac{12EI'}{l^3} - m\omega^2 & 0 & \frac{6EI'}{l^2} \\ 0 & \frac{24EI}{l^3} + \frac{EA'}{l} - m\omega^2 & 0 \\ \frac{6EI'}{l^2} & 0 & \frac{8EI}{l} + \frac{4EI'}{l} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \quad (9)$$

上式(5)において $\{U\} = \{0\}$ 以外の解を有する条件として, 以下の固有方程式が得られる.

$$\left| \eta^2[A] + \eta[B] + [D] \right| = 0 \quad (10)$$

式(10)を満たす固有値 ${}_s\eta$ ($s=1,2,\dots,6$) と, それに対応する固有ベクトル ${}_s\{v\}$ ($s=1,2,\dots,6$) が角振動数 ω に対して得られる. ここで, 固有値 ${}_s\eta$ は, 各振動数成分に対して共役解を持っているので次のように指数関数で表すことができる.

$${}_s\eta = {}_s a \cdot e^{-zi\phi_s} \quad (s=1,2,3) \quad (11)$$

ただし, ${}_s a$ は固有値 ${}_s\eta$ が実数解であれば ± 1 , 重解であ

れば解自身を表し, 複素数であれば次のようになる.

$${}_s a = \sqrt{\text{Re}({}_s\eta)^2 + \text{Im}({}_s\eta)^2} \quad (12)$$

上式(12)の $\text{Re}({}_s\eta)$ は ${}_s\eta$ の実部を, $\text{Im}({}_s\eta)$ は ${}_s\eta$ の虚部を表す. そして, 固有値 ${}_s\eta$ を式(4)に代入すると領域 L,R の s 次モードの波動は次式で表すことができる.

$$\{\delta\}_r = {}_s \{v\} {}_s a^r e^{zr} e^{i\omega t} = {}_s \{v\} {}_s a^r e^{i(\omega t \pm r, \phi)} \quad (13)$$

この式は, 位置を表す変数 r と時間の変数 t で表されており, 各位置によって位相が違ってくる, 即ち, 伝播する波動を表している. 符号が負なら右方向へ, 正なら左方向へ伝播する波動である. 領域 L,R に伝播する全ての波動は, これらの全てのモードを重ね合わせた次式で表すことができる.

$$\{\delta\}_r = \sum_{s=1}^3 \alpha {}_s \{v\} {}_s a^r e^{i(\omega t \pm r, \phi)} \quad (14)$$

ここで, ${}_s \alpha$ は刺激係数, ${}_s \{v\}$ は s 次の固有ベクトルである.

以上で, 領域 L,R に対する, 任意の節点の波動解が得られた. この波動解から固有値 ${}_s\eta$ の値に応じて波動の特性が異なることが分かる. 即ち, ${}_s\eta$ が複素数の場合 (${}_s\phi$ が実数) は位相差 ${}_s\phi$ で伝播する波動であり, ${}_s\eta$ が重解を持つ場合 (${}_s\phi$ が零) は無限領域の固有振動モードを表す波動であり standing wave と呼ばれる. ${}_s\eta$ が実数の場合 (${}_s\phi$ が純虚数) は波動の進行方向に従って振幅が指数関数的に減少する波動で exponential mode と呼ばれる.

(2) 伝達境界の定式化

伝達境界を設定する方法は, 式(14)で表される波動が境界面に伝播するときの節点力 (右 $\{Q\}_R$, 左 $\{Q\}_L$) を求め, 図-3 のようにその反力を解析領域 Ω に外力として与えることである. その外力は波動の伝播方向 (左右2成分) の和で表すことができる.

$$\{Q\}_R = \{Q\}_R^R + \{Q\}_R^L, \quad \{Q\}_L = \{Q\}_L^R + \{Q\}_L^L \quad (15)$$

ここで, 上付文字は波動の伝播方向を, 下付文字は領域を表す. 各方向に伝播する各領域の外力はそれぞれ次のように複素節点外力振幅で表すことができる. 即ち, 領

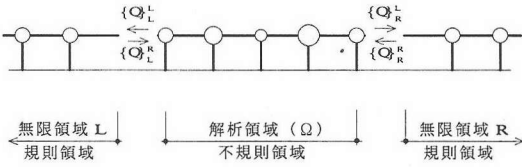


図-3 領域L,Rの境界面における節点力

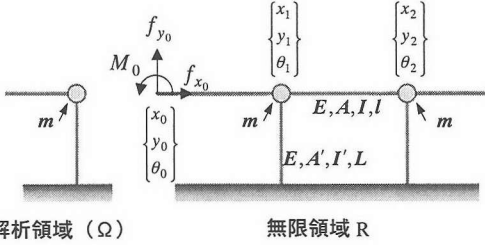


図-4 領域Rの境界面における節点力

領域Rに右方向に波動が伝播したとき、

$$\{Q\}_R^R = \begin{Bmatrix} f_{x_0} \\ f_{y_0} \\ M_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x_{RR}}^R \\ f_{y_{RR}}^R \\ M_{RR}^R \end{Bmatrix} \cdot e^{i\omega t} = \{P\}_R^R \cdot e^{i\omega t} \quad (16)$$

である。従って、解析領域Ωに接する領域Rの境界面における節点力は、図-4のモデルにおいて境界面の節点、即ち節点番号0 (r=1)に波動が伝播したときの節点力より求める。図-4に示したモデルの境界面における水平、鉛直、回転方向それぞれの節点力と節点変位の関係式は次のように表すことができる。

$$f_{x_0} = \frac{EA}{l} x_0 - \frac{EA}{l} x_1 \quad (17)$$

$$f_{y_0} = \frac{12EI}{l^3} y_0 + \frac{6EI}{l^2} \theta_0 - \frac{12EI}{l^3} y_1 + \frac{6EI}{l^2} \theta_1 \quad (18)$$

$$M_0 = \frac{6EI}{l^2} y_0 + \frac{4EI}{l} \theta_0 - \frac{6EI}{l^2} y_1 + \frac{2EI}{l} \theta_1 \quad (19)$$

そして、式(14)の右方向に波動が伝播するときの変位(固有値ηの指数部の記号が負)と式(16)で表される節点力を式(17)-(19)の運動方程式に代入し整理すると次式が得られる。

$${}_s \{P\}_R^R = \begin{Bmatrix} f_{x_{RR}}^R \\ f_{y_{RR}}^R \\ M_{RR}^R \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} - \frac{EA}{l} {}_s \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} - \frac{12EI}{l^3} {}_s \eta_1 & \frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{l^2} {}_s \eta_1 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} - \frac{6EI}{l^2} {}_s \eta_1 & \frac{4EI}{l} + \frac{2EI}{l} {}_s \eta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

ここで、式(20)以降、 ${}_s \eta_1 = {}_s a \cdot e^{-i_s \phi}$ 、 ${}_s \eta_2 = {}_s a \cdot e^{+i_s \phi}$ とする。書き直すと、

$${}_s \{P\}_R^R = ({}_s \eta_1 [A] + [E]) \cdot {}_s \{v\} \quad s=1,2,3 \quad (21)$$

ここで、[A]マトリクスは式(7)で定められており、[E]マトリクスは以下の行列である。

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (22)$$

一方、境界上で右方向に波動が伝播するときの領域Rにおける変位の振幅は次式となる。

$$\{U\}_R^R = \sum_{s=1}^3 {}_s \alpha \cdot {}_s \{v\} = [V_R] \cdot \{\alpha\} \quad (23)$$

$$\{\alpha\} = [V_R]^{-1} \cdot \{U\}_R^R \quad (24)$$

ここで、{α}は刺激係数ベクトルであり、[V_R]は波動が右方向に伝播する場合の固有ベクトル ${}_s \{v\}$ からなるマトリクスである。また節点力の振幅は、式(21)から各モードを重ね合わせるにより、次式で表される。

$$\begin{aligned} \{P\}_R^R &= \sum_{s=1}^3 {}_s \alpha \cdot ({}_s \eta_1 [A] + [E]) \cdot {}_s \{v\} \\ &= ([A][V_R][\eta_1] + [E][V_R]) \cdot \{\alpha\} \end{aligned} \quad (25)$$

ここに、

$$[\eta_1] = \begin{bmatrix} 1\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\eta_1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

これに、式(24)を代入すると、

$$\{P\}_R^R = ([A][V_R][\eta_1][V_R]^{-1} + [E]) \cdot \{U\}_R^R = [R]_R \{U\}_R^R \quad (27)$$

となり、これが図-3に示した解析領域 Ω に接する領域Rの境界面における、波動が右方向に伝播するときの複素節点外力振幅と複素節点変位振幅の関係式であり、伝達境界式の一つである。

同様に、領域Rにおいて波動が左方向に伝播するときの伝達境界式は以下のように表すことができる。

$$\{P\}_R^L = [A][V_L][\eta_2][V_L]^{-1} + [E] \cdot \{U\}_R^L = [L]_R \{U\}_R^L \quad (28)$$

ここで、 $[V_L]$ は波動が左方向に伝播する場合の固有ベクトル $\{v\}$ からなるマトリクスである。また $[\eta_2]$ は式(26)に η_1 の代わりに η_2 を代入することで得られる。

そして、領域Lにおいても、波動が左右それぞれの方向に伝播するときの伝達境界式が求められる。この場合では、境界面の節点番号を領域Rと同じく0にし、隣の節点の番号を-1にすれば領域Rと同様に境界面の節点力が求められる。波動が右方向に伝播するときの伝達境界式は

$$\{P\}_L^R = [D][V_R][\eta_1][V_R]^{-1} + [G] \cdot \{U\}_L^R = [R]_L \{U\}_L^R \quad (29)$$

波動が左方向に伝播するときの伝達境界式は

$$\{P\}_L^L = [D][V_L][\eta_2][V_L]^{-1} + [G] \cdot \{U\}_L^L = [L]_L \{U\}_L^L \quad (30)$$

ここに、 $[D]$ マトリクスは式(9)で定められており、 $[G]$ マトリクスは以下の行列である。

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\left[\frac{1}{\eta_1} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta_3} \end{bmatrix} \quad (32)$$

また $[1/\eta_2]$ も式(32)で η_1 の代わりに η_2 を代入することで得られる。以上、式(27)-(30)がそれぞれの境界における伝達境界式である。

(3) 全体の運動方程式

図-1に示すような構造物に、解析領域 Ω において地盤から地震加速度が入射した場合の運動方程式は地動を $\{\delta_0\}_\Omega$ とすれば次のように書ける。

$$[M]_\Omega \{\ddot{\delta}\}_\Omega + [C]_\Omega \{\dot{\delta}\}_\Omega + [K]_\Omega \{\delta\}_\Omega = \{Q\}_\Omega \quad (33)$$

ここで、 $[M]_\Omega$ 、 $[C]_\Omega$ 、 $[K]_\Omega$ は各々解析領域 Ω における質量マトリクス、減衰マトリクス、剛性マトリクスである。

応答 $\{\delta\}_\Omega$ 、地動 $\{\delta_0\}_\Omega$ 、そして外力 $\{Q\}_\Omega$ は、複素節点変位振幅を $\{U\}_\Omega$ 、地動の複素変位振幅を $\{U_0\}_\Omega$ 、複素節点外力振幅を $\{P\}_\Omega$ とし、調和振動の角振動数を ω とすると、それぞれ

$$\{\delta\}_\Omega = \{U\}_\Omega e^{i\omega t}, \quad \{\delta_0\}_\Omega = \{U_0\}_\Omega e^{i\omega t}, \quad \{Q\}_\Omega = \{P\}_\Omega e^{i\omega t}$$

と表すことができる。従って、解析領域における運動方程式は次式となる。

$$([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])_\Omega \{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega + \omega^2[M]_\Omega \{U_0\}_\Omega \quad (34)$$

この式は地動による地盤からの入射加速度振幅を $\{a_0\}_\Omega$ とすると次式で表すことができる。

$$([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])_\Omega \{U\}_\Omega = \{P\}_\Omega - [M]_\Omega \{a_0\}_\Omega \quad (35)$$

式(35)は解析領域において、外力と地動が作用したときの運動方程式である。伝達境界に関しては何も考慮していない。

いま荷重項を零にして波動伝播のみを考慮したとき、解析領域 Ω に接する領域Rの境界面における力の振幅は

$$f_R = \{P\}_R^R + \{P\}_R^L = [R]_R \{U\}_R^R + [L]_R \{U\}_R^L \quad (36)$$

となり、同様に領域Lの境界面における力の振幅は

$$f_L = \{P\}_L^R + \{P\}_L^L = [R]_L \{U\}_L^R + [L]_L \{U\}_L^L \quad (37)$$

となる。よって、この反力を領域LRと解析領域 Ω との境界面にそれぞれ外力として与えると、次のような、波動伝播のみを考慮した場合の解析領域における運動方程式になる。

$$\begin{aligned}
& \{[K] + i\omega[C] - \omega^2[M]\} \{U\}_\Omega = -f_R - f_L \\
& = -[R]_R \{U\}_R^R - [L]_R \{U\}_R^L - [R]_L \{U\}_L^R - [L]_L \{U\}_L^L \\
& = -[R]_R (\{U\}_R^R + \{U\}_R^L) - [L]_L (\{U\}_L^R + \{U\}_L^L) \\
& \quad + ([R]_R - [L]_R) \{U\}_R^L + ([L]_L - [R]_L) \{U\}_L^R
\end{aligned} \tag{38}$$

ここで、境界上における変位振幅に着目すると、領域L側の境界上の変位振幅 $(\{U\}_L^L + \{U\}_L^R)$ は、 $\{U\}_\Omega$ ベクトルの最初の行を占めることになるので、

$$[L]_L (\{U\}_L^R + \{U\}_L^L) = [L]_L \{U\}_\Omega \tag{39}$$

と書ける。同様に領域R側の境界上の変位振幅は

$$[R]_R (\{U\}_R^R + \{U\}_R^L) = [R]_R \{U\}_\Omega \tag{40}$$

と書ける。これらを式(38)に代入すると、

$$[\bar{K}]_\Omega \{U\}_\Omega = ([R]_R - [L]_R) \{U\}_R^L + ([L]_L - [R]_L) \{U\}_L^R \tag{41}$$

となる。ただし、

$$[\bar{K}]_\Omega = ([K] + i\omega[C] - \omega^2[M])_\Omega + [R]_R + [L]_L \tag{42}$$

従って、解析領域 Ω においての節点外力および地動を考慮し、また、波動エネルギーの伝達を考慮した全体の運動方程式は、式(35)、式(41)、式(42)によって、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
[\bar{K}]_\Omega \{U\}_\Omega &= \{P\}_\Omega - [M]_\Omega \{a_0\}_\Omega \\
&\quad + ([R]_R - [L]_R) \{U\}_R^L + ([L]_L - [R]_L) \{U\}_L^R
\end{aligned} \tag{43}$$

3. 伝播する波動の振動数と部材特性との関係

(1) 水平方向の振動が卓越する波動

図-2 に示したような3自由度を持つ質点系はり要素モデルにおいて水平方向に振動する波動が入射したときにその波動の振動数と構造物の部材特性とは、何らかの関係があることは著者らのマス-バネ系モデルにおける定式化³⁾からも難なく推測することができる。その関係を

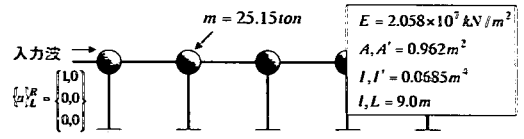


図-5 質点系はり要素モデル

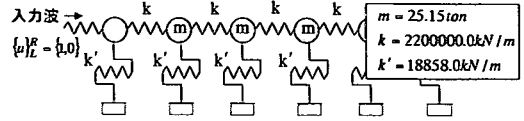


図-6 等価マス-バネ系モデル

求めるために、そのはり要素モデルを等価なマス-バネ系モデルに置き換える。この場合の理論的詳細は文献3)に示してあるが、次式に示すマス-バネ系モデルの波動伝播条件を適用することができる。

$$\frac{k'}{m} < \omega^2 < \frac{k' + 4k}{m} \tag{44}$$

等価なマス-バネ系モデルのバネ係数は構造力学の手法で次のように求められる。

$$k' = \frac{12EI_L + EI_l}{3EI_L + EI_l} \cdot \frac{3EI'}{L^3}, \quad k = \frac{EA}{l \cdot m} \tag{45}$$

従って、伝播条件の下限值と上限値を各々 ω_p 、 ω_s と置くと式(44)は次のように書きなおせる。

$$\omega_p < \omega < \omega_s \tag{46}$$

ここで、

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k'}{m}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k' + 4k}{m}} \tag{47}$$

これを確認するために、図-5 に示す部材特性を持つ10質点のはり要素モデルを考える。図-6 にマス-バネ系モデルと式(45)で計算した等価剛性 k と k' を示す。解析は、両モデルとも領域L,Rと同じ構造を持つ質点10個の解析領域において、左の境界面に左から右方向へ波動が伝播する場合を考える。マス-バネ系の場合、調和振動の入射波の振動数 ω が図-7 に示すように、 $27.4 < \omega < 592.2$ であれば伝播する³⁾。 $\omega = 20$, $\omega = 40$, $\omega = 420$, $\omega = 500$, $\omega = 700$ の場合の解析領域各質点の複素変位振幅を図-8 に複素平面で表す。なお、円の半径は各質点における波動の振幅を表し、円上の点は各質点における波動の位相を表している。伝播する条件である $\omega = 40, 420, 500$ では振幅が変

化せず、質点ごとに一定な位相角ずつ変化しながら伝播することが分かる。また、 ω_p と ω_s の平均値である $\omega = 420$ の場合は各質点の位相差が 90° であることが分かる。即ち、振動数が平均値より小さければ各質点の位相差は 90° より小さくなり、平均値より大きければ各質点の位相差は 90° より大きくなる。伝播しない条件の $\omega = 20, 700$ (exponential mode) では、入射波の振幅は2章(1)節で議論したように指数関数的に減少するが、振動数が大きい方がより急激に減少する。

(2) 鉛直方向と回転の2自由度振動の場合

本節では鉛直方向と回転の振動が支配する2自由度を持つ棒の場合の伝播条件を議論し、数値解析による検証を行う。いま、図-9に示すモデルにおいて、質点rに着目して運動方程式を立てると次式で表される。

$$\left(\eta^2 \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} \frac{24EI}{l^3} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \quad (48)$$

上式(48)を満たす固有値 η を求めると、次のような η に関する4次方程式になる。

$$\eta^4 + \eta^3 \left(-4 - \frac{A}{6} \right) + \eta^2 \left(8 - \frac{2A}{3} \right) + \eta \left(-6 - \frac{A}{6} \right) + 1 = 0 \quad (49)$$

ただし、

$$A = \frac{m\omega^2}{EI} > 0 \quad (50)$$

である。式(49)をAに関して整理すると、

$$f_1(\eta) + f_2(\eta) = 0 \quad (51)$$

ここに、

$$f_1(\eta) = \eta^4 - 4\eta^3 + 8\eta^2 - 6\eta + 1 \quad (52)$$

$$f_2(\eta) = -\frac{A}{6} (\eta^3 + 4\eta^2 + \eta) \quad (53)$$

となる。図-10 に示すように、 $f_1(\eta)$ は2つの実数解と2つの複素解を持っているグラフである。一方、 $f_2(\eta)$ は η が正の場合、負の値になる。従って、式(49)の方程式は必ず2つ以上の実数解を持つ。必ず存在するこの2つの実数解を除くと残りの2つの解は、2つの複素数解、実数の

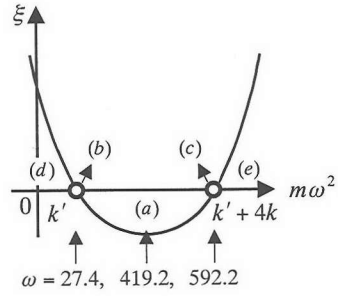


図-7 マス-バネ系モデルにおける波動伝播の条件

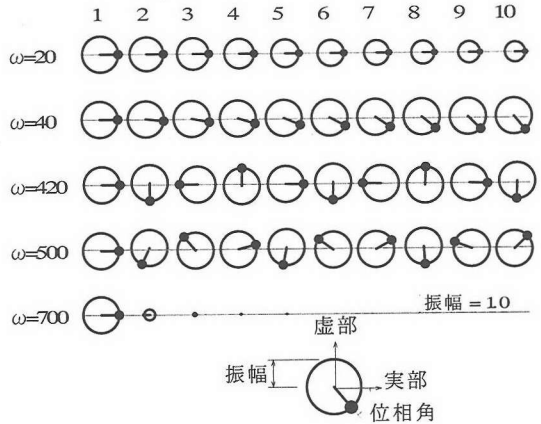


図-8 マス-バネ系モデルにおける複素節点変位振幅 (10質点、水平方向振動)

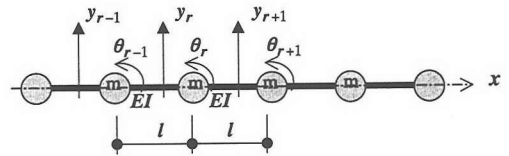


図-9 2自由度の質点系はり要素モデル

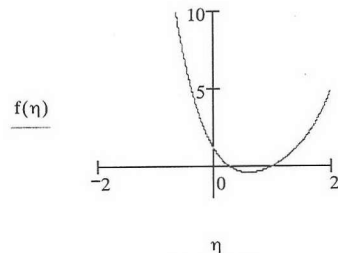


図-10 4次方程式のグラフ

重解、2つの実数解の3つのケースに分かれる。この3つのケースには2章(1)節で議論した波動伝播の条件をそのまま適用することができる。即ち、 η が複素数の場合伝

播する波動である。伝播条件における波動の振動数と部材特性の関係を求めるためには、式(49)の4次方程式において代数的に解を求める必要がある。付録に4次方程式の代数解を示す。著者等はこの代数解において2つ以上の実数解を持つ条件が $\omega_b \neq 0$ のケース1に当てはまることを数値計算によって確認した。また、そのとき f の式①において、根号の中の値によって実数解の数が異なることが分かった。その条件とは、根号の中の値を R とすると、 $R > 0$ の場合は2つの実数解と2つの複素数解、 $R = 0$ の場合は2つの実数解と実数の重解、 $R < 0$ の場合は4つの実数解を持つことである。図-11に示したグラフで $f(A) > 0$ の部分が、 $R > 0$ の場合、即ち2つの実数解2つの複素数解を持つ条件で、波動の伝播条件でもあり、次式で表される。

$$A = \frac{m\omega^2}{EI} < a, \text{ または, } \omega^2 < \frac{a \cdot EI}{I^3 \cdot m} = \omega_b^2 \quad (54)$$

ここで a は $f(A) = 0$ の解である。式(54)を確認するため、図-5のはり要素モデルにおいて、柱部の剛性を非常に小さくして任意の ω に対する解析を行う。任意の角振動数 ω に関しては、実際に式(54)の条件を求めると $\omega < 67.8$ であるので、 $\omega = 40, 60, 80, 100$ の4ケースに対して、垂直方向の振動（振幅1.0）が左端から入射するときの応答を計算した。その結果を図-12に示す。式(54)の条件通り、 $\omega = 40, 60$ の場合、各質点の変位はその位相が異なっており、右側に伝播することが分かった。振幅は振動数によってその形が異なる。 $\omega = 80, 100$ の場合、位相は変化せずその振幅が右方向に向いて急に減少することが分かった。即ち、式(54)の物理的意味は、例えば宇宙空間のような無重力状態に置いてある無限に長い棒を中から振動させたとき、振動が外側に向けて伝わる波動的な応答が生じるための外乱の最大角振動数である。

4. 検証

(1) 伝達境界の動き

本節では2章で定式化した伝達境界が実際にどういう働きをするのかを検討する。対象として図-5のはり要素モデルで質点が10個の場合を考える。ケース1は両端に伝達境界を設けた場合を、ケース2は左端のみに伝達境界を設け右端は自由境界にした場合を想定する。いずれも、左から水平方向に振動する波が入射したときの各質点の水平方向の応答変位を求める。図-13にケース1の両端に伝達境界を設けた場合の各質点の応答変位振幅を示す。図-13によれば、図-8の等価なマス-バネ系モデルの応答変位振幅とほぼ同じ結果となり、1自由度の

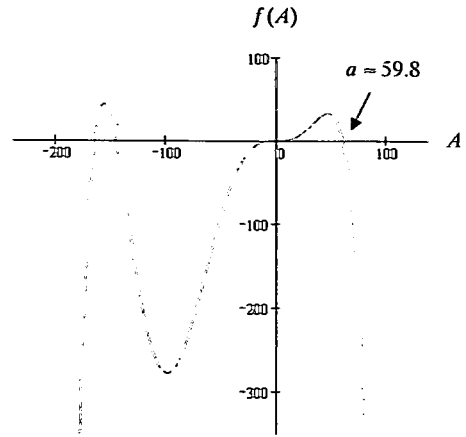


図-11 2つの実数解の条件

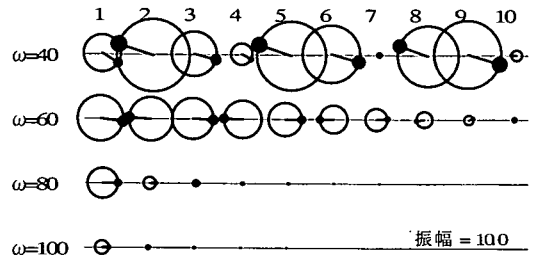


図-12 2自由度の応答変位

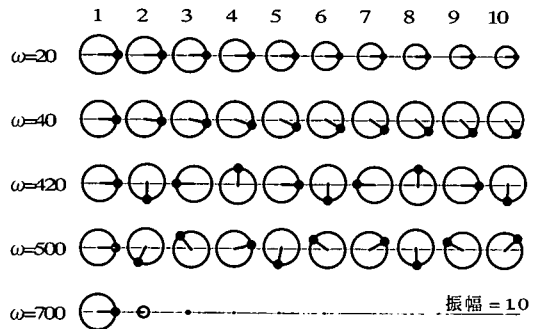


図-13 ケース1、両端に伝達境界を設けた場合

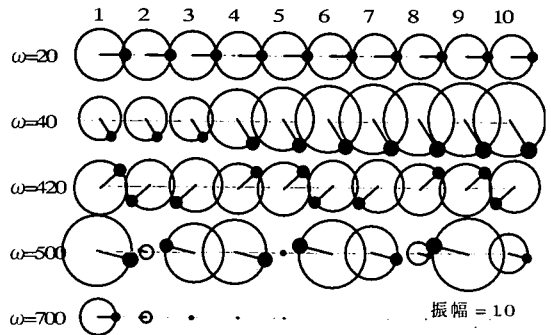


図-14 ケース2、左側のみに伝達境界を設けた場合

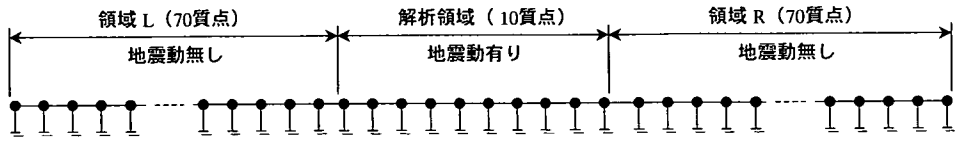


図-15 時間領域解析モデル (150 質点)

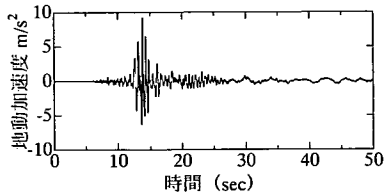


図-16 入力地震波

場合と同様に3自由度はりモデルでも式(46)の波動伝播の条件式に当てはまる事が分かる。しかし、ケース2の左側のみ伝達境界を設けた場合は、図-14 に示すように入射した波は自由境界の質点で反射し入射波と合成し、位相（入射波に対する相対位相）や振幅が異なる波に変わる。これは伝達境界が波動エネルギーを吸収することを意味する。

(2) 時間領域解析との比較

本研究で定式化した伝達境界は振動数領域の解析を対象としている。これに等価な条件のモデルを作成して、時間領域の解析で同様な結果が出るかを確認する。伝達境界は無限領域を想定しているため、完全に一致する時間領域解析のモデルは作成できないが、図-15 に示すように解析領域以外の部分を非常に長くし、また減衰を考慮することで近似的に対応できる（反射波が消滅する）。ここでは不規則な振動である地震波について解析を行う。外力としては10質点の解析領域に対し同一の地震波を同位相で入力した。ここで使用する入力地震波を図-16 に示す。両端が自由境界の場合の10質点モデルに対し、振動数領域の解析と時間領域解析を行いそれぞれの時刻歴応答変位を図-17 に示す。また、両端に伝達境界を設けた10質点モデルに対する解析結果と図-15 の等価モデルに対する時間領域解析の結果を図-18 に示す。いずれも対象モデルの中央質点の時刻歴応答変位である。ここでは全ての条件において減衰を考慮しており、減衰マトリクスはレーリー減衰を用いて作成し、減衰定数 h は1次、2次ともに5%とした。全く同一のモデルを振動数領域と時間領域で解析を行った図-17 では、当然、2つの結果は一致する。図-18 に示す2つの応答履歴はその包絡線や振幅がほぼ等しい結果になっている。詳細に比較するためにスペクトル解析を行うと、図-19 のようになる。これは、それぞれの応答に対する角振動数とパワースペ

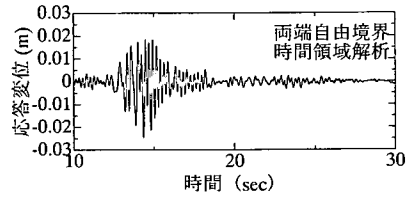
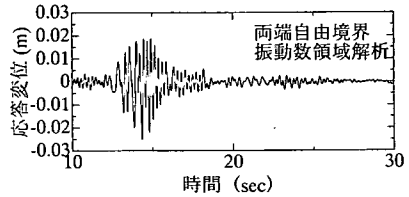


図-17 伝達境界無し ($h=0.05$)

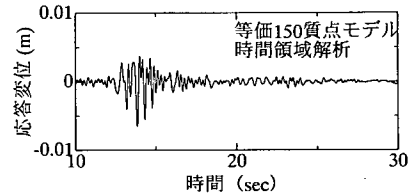
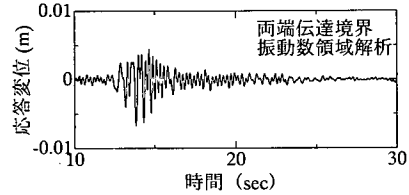


図-18 伝達境界有り ($h=0.05$)

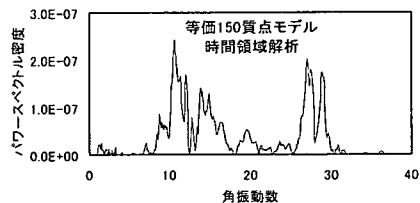
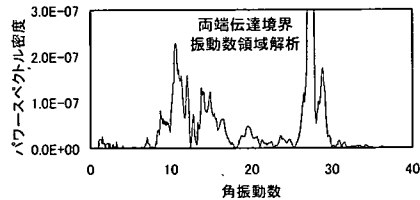


図-19 応答変位のスペクトル

クトルの関係である。両方のスペクトルの形や大きさがほぼ同じであるが、対象構造物の無限領域の基本固有振動数 (standing waveに対応する周波数) である $\omega = 27.4$ のスペクトルが卓越している点のみが相違点である。これは伝達境界の特性をよく表しているものであると考えられる。

5. パラメトリック解析

(1) 調和地動に対する伝達境界の影響

図-5 に示したモデルに対し両側に伝達境界を設け、解析領域の質点の数を1, 2, 5, 10, 20, 50, 100のように変化させながら、調和地動外乱の角振動数が $\omega = 20$, $\omega = 40$, $\omega = 420$ の場合に対し振動解析を行った。境界条件は構造物の両端を自由境界にしたケースと伝達境界にしたケースに分けている。各振動数ごとの調和地動外乱に対する応答の最大変位振幅を図-20 に示す。減衰としてはレーリー減衰を用い、減衰定数 h は1次, 2次ともに5%とした。調和地動外乱としては加速度振幅 1.0m/sec^2 の正弦波を入力する。図-20 に示しているように、 $\omega = 20$ の場合は伝達境界を考慮したときの最大変位振幅は質点数の増加に伴って大きくなり、自由境界のそれに漸近する。しかし、 $\omega = 40$ において、伝達境界を考慮した場合と自由境界の場合を比較すると、質点数が50以上では伝達境界を考慮した場合の方が最大変位振幅が大きい。また、 $\omega = 420$ の場合は質点数にかかわらず伝達境界の場合が自由境界の場合より大きくなっている。この結果は非常に長く連続する高架橋を振動解析するとき、その一部を取り出し両端を自由境界として取り扱う従来の方法は安全側でない可能性があることを示す。次には、そのメカニズムに関して議論する。

(2) 各質点における変位振幅の変化

伝達境界考慮時に応答変位が大きくなることと各質点ごとの変位振幅の関係を調べるため、質点数50, 100, 150に対し、調和地動外乱の振動数が各々 $\omega = 20, 40, 100, 420$ の場合の、伝達境界の有無に対する質点番号と変位振幅の関係を図-21~図-24 に示す。 $\omega = 20$ の場合は伝達境界の両端部の変位振幅は自由境界のそれに比べて半分程度の値から中央部に向かって増加し、自由境界の中央の変位振幅に近づく。それに対して $\omega = 40$ の場合は、伝達境界の場合、両端部の変位振幅は自由境界より小さいが中央に向かって増加し自由境界の変位振幅より大きくなる。質点数が50, 100の場合はそのあと減少し中央部の振幅は自由境界の振幅に近い部分を形成している。この傾向は $\omega = 40$ 以上の場合も同様に現れ、境界に近い部分の振幅は大きく中央部の振幅は自由境界の応答振幅と同様な値

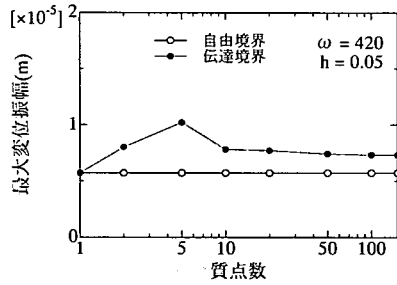
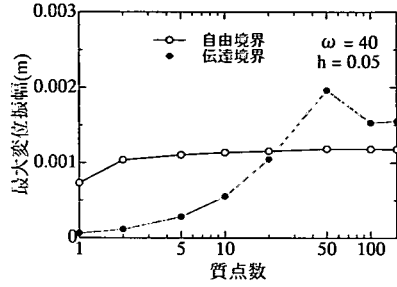
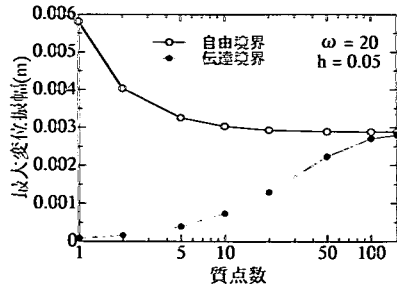


図-20 伝達境界の有無における質点数と応答の関係

を表している。その原因を議論する前に等価な条件下の時間領域の解析でも同様の傾向が発生するかを確かめる。等価な条件とは、図-6 に示した条件のマス-バネ系モデルが100個並んでいるとする。中央の100質点に振幅1.0の正弦波の調和振動外乱を与える。この解析条件は、図-22 の伝達境界、100質点の場合に該当する。等価な時間領域解析の結果について、端部の応答変位を図-25 に、山頂部に該当する質点番号22の応答変位を図-26 に、中央点の応答変位を図-27 に示す。3つの場合ともに最初の1秒間を除いた調和振動になる部分の応答変位の振幅が、図-22 の伝達境界を考慮した100質点の場合と同様な値になっている。以上で伝達境界を考慮した場合、自由境界の場合より質点の変位振幅が大きくなる場合があることを等価なモデルを用いた時間領域解析からも確認した。また、それは調和外乱の振動数が ω_p より大きい場合に現れ、振動数が大きくなるほど波長が短くなり、また境界に近い山の部分が最も大きくなっている。これ

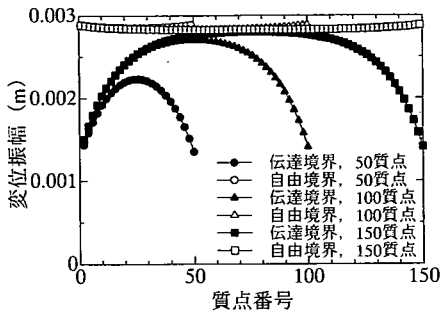


図-21 各質点の応答変位振幅 ($h=0.05$), $\omega=20$

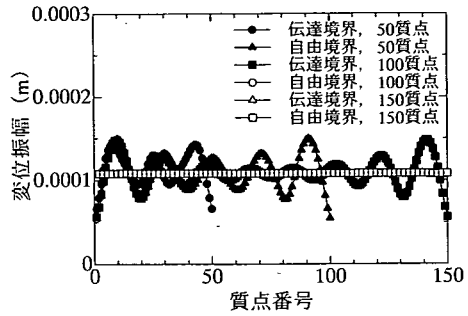


図-23 各質点の応答変位振幅 ($h=0.05$), $\omega=100$

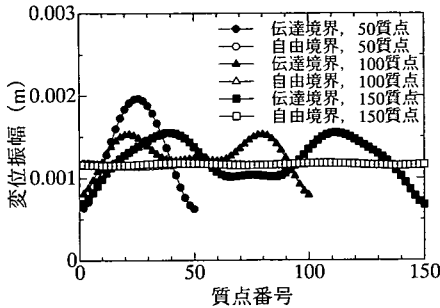


図-22 各質点の応答変位振幅 ($h=0.05$), $\omega=40$

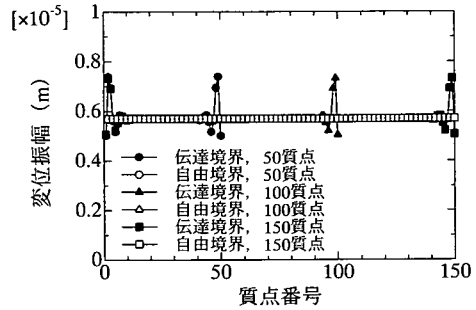


図-24 各質点の応答変位振幅 ($h=0.05$), $\omega=420$

らの結果から各振動数における質点ごとの応答変位振幅の違いは2章(1)節で議論した式(14)の波動解とその传播条件を表すものであると考えられる。即ち、図-21は、外乱の角振動数 ω が ω_0 より小さいとき、外乱によって発生した応答が中から外方向へ、その振幅が減少することを表している(exponential mode)。また、図-22、図-23、図-24は、外乱の角振動数 ω が ω_0 より大きいとき、中から発生したエネルギーは先と同様に伝達境界によって逸散するが波動的に传播するので、地動による応答変位と合成した形で現れているためであると考えられる。以下、これを波動的応答振幅と呼ぶ。中央部の変位振幅が小さくなるのは減衰の影響であると考えられる。次に、これを証明するため非減衰の場合に対し波動的応答振幅のメカニズムを検討する。

(3) 波動的応答振幅のメカニズム

前節の結果から分かるように伝達境界を設けたモデルでは地動に対し質点ごとの応答振幅が一定な値を示さず、波動のような形態を示す。それは、伝達境界がないときの地動による応答と伝達境界によって生じた外側への波動の流れが合成し現れたものであると考えられる。このことをマス-バネ系モデルに対し波動解で表現してみると、解析領域における r 番目の質点の応答は次式のようになる。

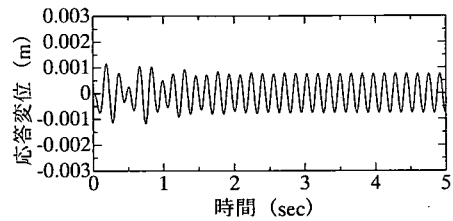


図-25 時間領域解析, 端部

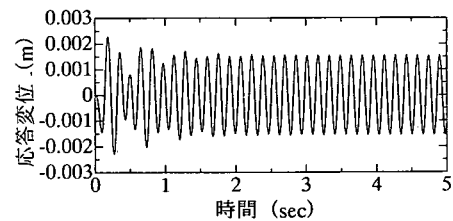


図-26 時間領域解析, 山頂部

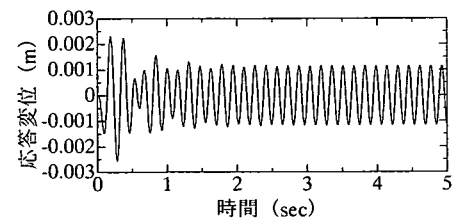


図-27 時間領域解析, 中央点

$$x_r = u\eta^r e^{i\omega t} + \left(\frac{ma_0}{m\omega^2 - k'} \right) e^{i\omega t} \quad (55)$$

ここで右辺の第1項は波動の流れを、第2項は伝達境界がないときの地動による応答を表している。

数値計算で確認するために、減衰がないこと以外は前節と同条件で、 $\omega=40$ の各ケースに対し伝達境界を考慮した解析を行う。図-28、図-29、図-30は応答変位に対し各々、変位振幅（複素変位振幅の絶対値）、複素変位振幅の実部、複素変位振幅の虚部をプロットしたものである。いずれも波動的応答振幅を表しており、100質点、200質点の複素変位振幅の実部と虚部における波の山と山の距離は一定であることが分かる。その距離、即ち波長 λ を質点番号で数えると64である。これを波動式から直接計算して確認する。計算は図-6に示した等価なマス-バネ系モデルで行う。固有値 η と伝播条件のパラメータ ϕ は次のように求められる⁹⁾。

$$\eta = \frac{(-m\omega^2 + 2k + k') \pm \sqrt{(m\omega^2 - 2k - k')^2 - 4k^2}}{2k}$$

$$= 0.99514 \pm 0.09847i$$

$$a = \sqrt{\text{Re}(\eta)^2 + \text{Im}(\eta)^2} = 1.0$$

$$\phi = \cos^{-1}(\text{Re}(\eta)/a) = 0.09863$$

従って、波動式の特徴から波長 λ を計算すると、

$$\lambda = \frac{2\pi}{\phi} = 63.7$$

となり、図-28、図-29、図-30から得た山と山の質点番号の差64と一致している。また、式(55)の第2項は実数であり実際計算してみると、

$$\frac{ma_0}{m\omega^2 - k'} = \frac{25.15 \times 1.0}{25.15 \times 40^2 - 18858.0}$$

$$= 1.176 \times 10^{-3} m$$

となる。この値は図-29の応答振幅曲線の軸になることが分かる。従って、図-30の虚部の応答振幅曲線の軸は0である。式(55)の u の値は解析領域の質点数によって異なる値である。以上のことから、両側が伝達境界である解

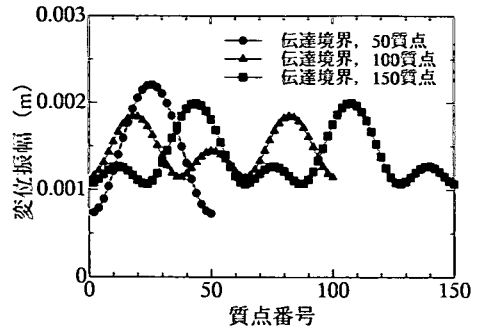


図-28 各質点の応答変位振幅（非減衰）、 $\omega=40$

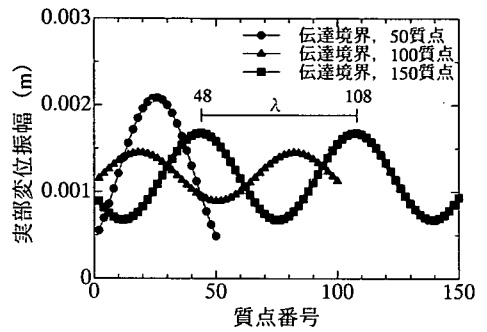


図-29 実部の応答変位振幅（非減衰）、 $\omega=40$

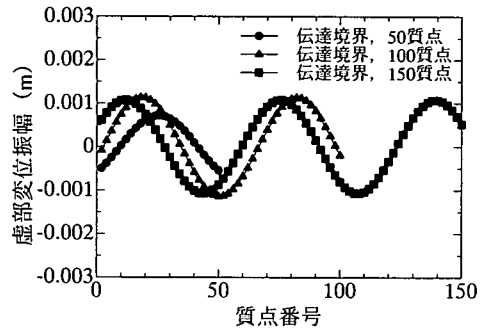


図-30 虚部の応答変位振幅（非減衰）、 $\omega=40$

析領域に地動の外乱が与えられた場合その応答変位は、中から発生したエネルギーが外へ逸散することによって波動的応答が生成され、地動の応答と合成し、波動的応答振幅を表すことが確認された。

6. 結論

本研究では3自由度を持つ質点系は要素モデルを用いて離散系構造物に対するエネルギー伝達境界を定式化した。また、エネルギー伝達境界の性状を調べるため、検証とパラメトリック解析を行った。その結果から次のような知見を得た。

- 1) 3自由度の質点系は要素モデルにおいて水平方向の振動が伝播する条件は、1自由度の場合と同じく

$$\omega_p < \omega < \omega_s$$
 である。
- 2) 上下振動と回転振動が支配する無限棒に対する伝播条件は

$$\omega < \omega_b$$
 である。
- 3) 調和振動外乱の振動数が $\omega < \omega_p$ の場合、伝達境界の場合は中央から端部に向かってその応答が指数関数的に減少する。
- 4) 調和振動外乱の振動数が $\omega > \omega_p$ の場合、伝達境界を考慮すると自由境界の場合よりその応答が大きくなる条件が存在する。
- 5) 非常に長く連続する高架橋を振動解析するとき、その一部を取り出し両端を自由境界として取り扱う従来の方法は安全側でない可能性がある

本研究は振動数領域の解析で非線形解析には対応しない。将来的にはこの研究に基づき時間領域の解析に対し定式化する予定である。その場合は図-1の不規則領域が非線形挙動を規則無限領域が線形挙動を表すモデルになる。

付録 4次方程式の代数解

次のような4次方程式の解を考える。

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

ここで

$$b_1 = -\frac{3a_1^2}{8} + a_2, \quad b_2 = \frac{a_1^3}{8} - \frac{a_1a_2}{2} + a_3$$

$$b_3 = -\frac{3a_1^4}{256} + \frac{a_1^2a_2}{16} - \frac{a_1a_3}{4} + a_4$$

とおく。すると、

• $b_2 \neq 0$ の場合

$$e_1 = -\frac{b_1^2}{48} - \frac{b_3}{4}, \quad e_2 = -\frac{b_1^3}{864} + \frac{b_1b_3}{24} - \frac{b_2^2}{64}$$

とおくと、次の3つのケースに対し、

• $e_1 \neq 0$ の場合 (ケース1)

$$f = -\frac{e_2}{2} + \sqrt{\frac{e_2^2}{4} + \frac{e_1^3}{27}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$g_1 = -\frac{e_1}{3\sqrt[3]{f}}, \quad g_2 = \sqrt[3]{f}$$

• $e_1 = 0, e_2 \neq 0$ の場合 (ケース2)

$$g_1 = 0, \quad g_2 = \sqrt[3]{-e_2}$$

• $e_1 = 0, e_2 = 0$ の場合は (ケース3)

$$g_1 = 0, \quad g_2 = 0$$

が得られる。以上の3ケースに対し、

$$t = -\frac{b_1}{6} + g_1 + g_2$$

である。また、

• $b_2 = 0, \frac{b_1^2}{16} - \frac{b_3}{4} \neq 0$ の場合

$$t = -\frac{b_1}{4} + \sqrt{\frac{b_3}{4}}$$

• $b_2 = 0, \frac{b_1^2}{16} - \frac{b_3}{4} = 0, b_1 \neq 0$ の場合

$$t = -\frac{b_1}{2}$$

以上で求めた t に対し,

$$h_1 = -t - \frac{b_1}{2}, \quad h_2 = -\frac{b_2}{8\sqrt{t}}$$

$$y_1 = \sqrt{t} + \sqrt{h_1 + 2h_2}, \quad y_2 = \sqrt{t} - \sqrt{h_1 + 2h_2}$$

$$y_3 = -\sqrt{t} + \sqrt{h_1 - 2h_2}, \quad y_4 = -\sqrt{t} - \sqrt{h_1 - 2h_2}$$

ただし,

• $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$ の場合は

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0$$

である。結局、4次方程式の解は4つの次式になる。

$$x_1 = -\frac{a_1}{4} + y_1, \quad x_2 = -\frac{a_1}{4} + y_2$$

$$x_3 = -\frac{a_1}{4} + y_3, \quad x_4 = -\frac{a_1}{4} + y_4$$

参考文献

- 1) 土木学会：動的解析と耐震設計第2巻，動的解析の方法，4章，1989
- 2) 三輪健治，田邊忠頭：伝達境界を考慮した半無限長の桁構造の地震応答解析，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.19, No.2, pp.519-524, 1997
- 3) 李相勲，田邊忠頭：連続したマス-バネ系モデルを用いた連続高架橋構造物の伝達境界の定式化，コンクリート工学年次論文報告集，Vol.24, No.2, pp.1165-1170, 2002
- 4) Lysmer, J. : Lumped mass method for Rayleigh waves, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.60, pp.89-104, 1970
- 5) Lysmer, J. and Wass, G. : Shear Wave In Plane Infinite Structures, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.98, pp.85-105, 1972
- 6) Kausel, E. and Roësset, J. M. : Dynamic stiffness of circular foundation, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.101, pp.771-785, 1975
- 7) Kausel, E., Roësset, J. M., Wass, G. : Dynamic analysis of footings on layered media, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.101, pp.679-693, 1975
- 8) 武藤清：構造物の動的解析，丸善，pp.245-248, 1966

(2002. 10. 9 受付)

FORMULATION OF TRANSMITTING BOUNDARY FOR DISCRETE SYSTEM USING BEAM ELEMENT MODEL OF 3 D.O.F

Sanghun LEE and Tada-aki TANABE

When a seismic analysis was conducted for infinitely long elevated bridge, generally, the boundary conditions for joint of a unit bridge have been considered as free. It has been also considered that the results of such analysis would be on safe side. In this research, the transmitting boundary for discrete system was formulated by using beam element model of 3 D.O.F, and its verifications were carried out. Furthermore, parametric analyses were carried out, which are dynamic analyses for structures applied harmonic excitation with various frequencies. As results, we have verified the possibility that responses considering the transmitting boundary could be greater than that of free boundary.