

# 複合構造の平均特性を与える階層型要素の性能評価

生出佳<sup>1</sup>・市村強<sup>2</sup>・石橋慶輝<sup>3</sup>・寺田賢二郎<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>2</sup>正会員 工博 東北大学助手 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>3</sup>学生会員 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

<sup>4</sup>正会員 Ph.D 東北大学助教授 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

本論文では、複雑な構造を持つ複合構造物の平均的な力学挙動を与える階層型高性能有限要素に関する基礎的研究を示す。この要素は、形式的には重合メッシュ法と等価な定式化になるが、あくまでも複合構造と等価な要素剛性を導出することが第一の目的であり、非適合要素として用いることができることに着目する。結果として得られる解析手法は、粗い近似のためのグローバル構造と近似性能を高めるためのローカル構造を個別に設定し、グローバル要素の剛性にローカル構造を反映した等価な要素剛性を用いて、グローバル要素による平均的な挙動を得るというものである。種々のケーススタディを行うことにより、複合構造の等価剛性を与える階層型要素の要素としての妥当性、精度、有効性を検討した。

**Key Words :** *hierarchical finite element, composite structures, nonconforming finite elements, enhanced assumed strain method, overlaying mesh method*

## 1. 序論

異種材料が複雑に組み合わさって構成される構造物や部材などの複合構造を対象とした問題に対して、計算機を用いてより精度の高い解を得るためには、多くの計算機容量と計算時間が必要になる。このような大自由度問題に対して、大型計算機や並列計算機を最大限に利用して解いた数値計算例がある<sup>1)</sup>。しかし、特に大型計算機は非常に高価であるために容易に設置あるいは利用できるものではない。また、並列計算機は大型計算機に比べて安価であり MPI (Message Passing Interface) などの通信ライブラリが開発されて比較的容易に利用できるようになってきたが、システムの導入や解析対象の領域分割などに専門的な知識が必要となる部分も多く、一般に普及し利用されるようになったとは言いがたい。このように、一般の多くの環境では大自由度問題を解くことが難しいのが現状である。このため、複合構造を対象とした問題の高精度な解を得るためには、より効率的に解を得る方法を考える必要がある。

局所的に非均質なあるいは局所的に高いひずみ勾配を生ずる問題について、粗い (グローバル) メッシュと細かい (ローカル) メッシュを重ね合わせるグローバル・ローカル有限要素法が開発されており、アダプティブ s-法 (あるいは重合メッシュ法<sup>2)</sup>) として理論的にも整備されている<sup>3)</sup>。この手法は、サブストラクチャ法<sup>4)</sup>に定式化が類似しているが、ローカルの構造には近似

的に仮定された境界条件が付加され、ローカルメッシュは必ずしもグローバルメッシュの要素端 (辺) と一致していなくてもよい。このような特徴を利用して、任意の幾何学的特徴を有する複合構造に対する一種のズームイン解析的な応用例が報告されている<sup>5)</sup>。

このようなグローバル・ローカル解析手法を応用し、解析対象を巨視的 (グローバル) および微視的 (ローカル) な視点の両方により捉え、数値計算を行うグローバル要素の材料特性にローカルの構造をより厳密に考慮できれば、複合構造に対するより高精度な解を効率的に得ることが可能であろうと考え、筆者らは、複雑な構造を持つ複合構造物の平均的な力学挙動を与える階層型解析手法に基づく高性能有限要素 (階層型要素) を提案し、動的問題におけるその有用性を検討してきた<sup>6)</sup>。この階層型要素は、形式的には重合メッシュ法などのグローバル・ローカル有限要素法と等価な定式化になるが、あくまでも複合構造と等価な要素剛性を導出することを第一の目的としている。内部自由度を付加することで要素性能を向上させたこの要素は、非適合要素あるいは、一種の mini 要素<sup>7)</sup>とみなすことも可能である。また、結果として得られる解析手法は、グローバル構造とローカル構造を個別に設定し、それぞれに対応する変形成分を導入して与えられるグローバル応答変位を主成分とした平均挙動を得ようとするものである。このため、本解析手法は Garikipati and Hughes<sup>8)</sup> がひずみの局所化問題のために開発したマルチスケ-

ル変分法と同等の数理構造を有する。

本論文では、先の論文<sup>6)</sup>で取り上げなかった、静的問題における階層型要素の性能に関する基礎的な考察として、ローカルメッシュの境界条件と要素の性質の関係を明らかにすること、計算効率化の程度を示すことを行う。まず、筆者ら<sup>6)</sup>の定式化に補足説明を加え、より詳しく定式化を示すことにする。線形弾性問題の境界値問題と対応する変分方程式を与え、階層的な空間の離散化（領域分割）を定義する。この領域分割により生成される粗い近似のためのグローバルメッシュと近似性能を高めるための細かなメッシュ（ローカルメッシュ）に対応する有限要素近似を行い、階層型要素の定式化を説明する。次に、階層型要素の性能を数値的に検証する。この数値計算例では、均質構造についての階層型要素と代表的な要素との近似性能の比較を行うことで、一般的な有限要素としての特性を考察する。大自由度問題に対して、計算機容量、計算時間の軽減がどの程度可能かを示すことにする。さらに、必ずしもグローバルメッシュが物理領域に一致しない任意形状の構造に階層型要素を適用し、解析対象のモデル化における有限被覆法<sup>9)</sup>的な取り扱いの可能性について考察する。

## 2. 問題設定と空間の離散化

### (1) 線形弾性体の静的釣り合い問題

図-1(a)に示すような静的な平衡状態にある線形弾性体を考える。実数の空間を $\mathcal{R}$ とし、この物体が $n_{\text{dim}}$ 次元空間 $\mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ 内に占める数学領域を $\Omega \in \mathcal{R}^{n_{\text{dim}}}$ とする。また、数学領域の境界 $\partial\Omega$ をこの物体の境界とすると、変位を規定される境界 $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ と荷重が与えられる境界 $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$ とに分解されるものとする( $\partial\Omega = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma}$ )。

以下、 $n_{\text{dim}} = 3$ 次元問題を考えることにし、応力 $\sigma$ 、ひずみ $\varepsilon$ 、変位 $\mathbf{u}$ をすべてマトリックス表記で、

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

と表すことにすれば、この物体の静的釣り合い問題に対する境界値問題は、次の応力のつり合い式、応力-ひずみ関係式（構成式）、ひずみ-変位関係式、および境界条件により支配される。

$$\left. \begin{aligned} \partial^T \sigma + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ \sigma &= \mathbf{C} \varepsilon \\ \varepsilon &= \partial \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_u \\ n \sigma &= \hat{\mathbf{t}} \text{ on } \Gamma_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、

$$\partial = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{Bmatrix}$$

であり、 $n_x, n_y, n_z$ は境界における外向き単位法線ベクトルの成分である。また、 $\mathbf{C}$ は弾性定数テンソル、 $\mathbf{b}$ は物体力ベクトル、 $\mathbf{g}$ および $\hat{\mathbf{t}}$ はそれぞれ境界 $\Gamma_u$ と $\Gamma_\sigma$ において与えられる変位と応力ベクトルである。

以上の境界値問題と等価な変分形式が考えられるが、最も一般的なものは変位のみを変数関数とする次の弱形式である。

$$\int_{\Omega} (\partial \delta \mathbf{u})^T \mathbf{C} \partial \mathbf{u} d\mathbf{v} = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\mathbf{v} + \int_{\Gamma_\sigma} (\delta \mathbf{u})^T \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{s}, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (3)$$

ここで、解 $\mathbf{u}$ を探すべき試行関数の空間、および試験関数 $\delta \mathbf{u}$ の空間はそれぞれ、

$$\mathcal{U} = \{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \{H^1(\Omega)\}^3, \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ on } \Gamma_u \} \quad (4)$$

$$\mathcal{V} = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \{H^1(\Omega)\}^3, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_u \} \quad (5)$$

で与えられる。ここに、 $\{H^1(\Omega)\}^3$ は、1階の微分までがLebesgue2乗可積分空間に属する関数の空間である。

### (2) 有限要素による領域分割

図-1(a)に示すように、均質な線形弾性体の一部に介在物が存在するような複合構造を考える。この介在物の代表長は構造物全体のそれと比較して同程度であり、しかも周期的な繰り返し構造もないものとする。したがって、理論的には非均質材料の等価な物性を与える均質化法<sup>10)</sup>を適用することはできない。これに対して本研究では、等価な“物性”ではなく、等価な“要素剛性”を与えることを試みる。ここでは、材料が分布する物理的な領域と数学的な近似領域とを区別し、有限要素法における領域分割（空間の離散化）の階層化を定義する。

まず、複合構造部分と同程度の大きさを持つ有限要素を用いて、この物体を覆う数学領域 $\Omega$ を次式のように $M^0$ 個に分割する（図-1(b)参照）。

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{M^0} \Omega_e \quad (6)$$

ここで、複合構造部分の $e^0$ 番目の物理領域（図-1(c)参照）は数学領域 $\Omega_{e^0}$ （図-1(e)参照）と一致しており、通常

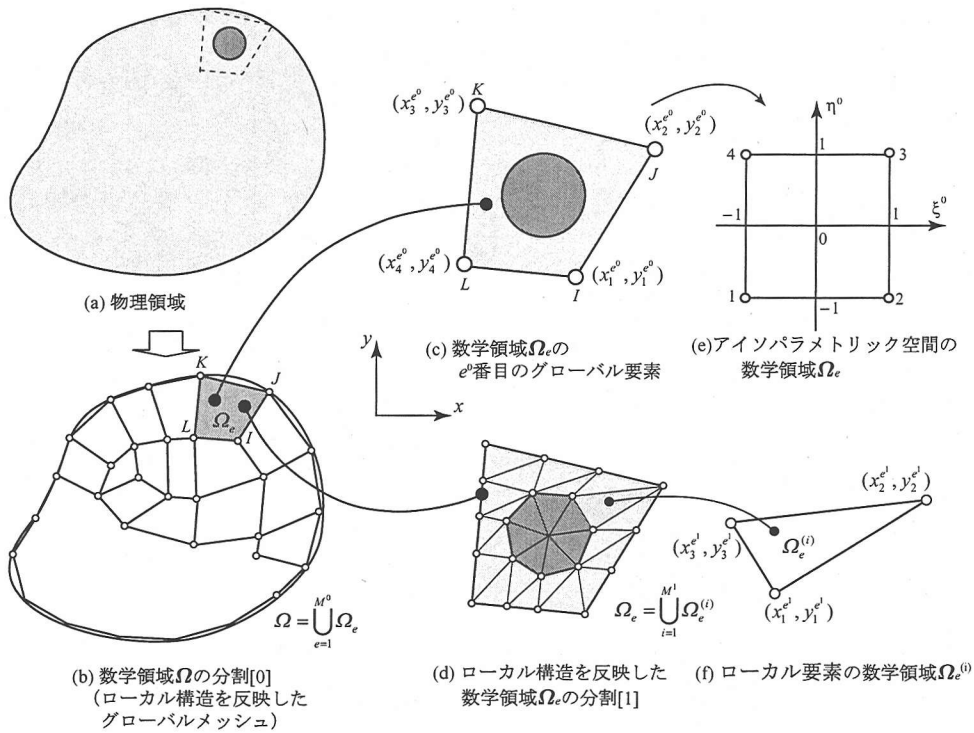


図-1 階層型要素の要素分割について

の有限要素近似の単位である。この分割を分割 [0], 生成されるメッシュをグローバルメッシュ, 有限要素はグローバル要素と呼ぶことにする。さらに,  $e^0 (\in \{1, 2, \dots, M^0\})$  番目のグローバル要素については, 次式のようにさらに  $M^1$  個の領域に分割する (図-1(d) 参照)。

$$\Omega_e = \bigcup_{i=1}^{M^1} \Omega_e^{(i)} \quad (7)$$

これを分割 [1] と呼び, 対応するメッシュをローカルメッシュ, 要素をローカル要素 (図-1(f) 参照) と便宜上呼ぶことにする。ここで定義した部分領域  $\Omega_e, \Omega_e^{(i)}$  ( $= \Omega_e^{(e^1)} : e^1 (\in \{1, 2, \dots, M^1\})$  番目の物理領域と一致する数学領域) は開領域であり, それぞれの境界  $\partial\Omega_e, \partial\Omega_e^{(i)}$  により囲まれている。

このような階層的な領域分割は, 近似関数を導入する数学領域を重ね合わせるにより階層的な近似を可能にした s-アダプティブ有限要素法 (重合メッシュ法)<sup>3)</sup> と等価である。しかし, 重合メッシュ法は複合構造の等価剛性を与えるという考え方よりズームング法的な側面を強調する手法である。次節で定式化を説明する階層型要素は, 空間分解能の異なる複数の要素を重ね合わせることで, 複数の材料からなる任意の幾何学的特性を有する複合構造の平均的な力学挙動を与えるものである。

### 3. 階層型要素

#### (1) マルチスケール変分方程式

式 (3) に対応する要素  $e$  についての変分方程式は,

$$\int_{\Omega_e} (\partial \delta u)^T C \partial u dv = \int_{\Omega_e} (\delta u)^T b dv + \int_{\partial \Omega_e} (\delta u)^T t ds, \quad \forall \delta u \in \mathcal{V} \quad (8)$$

で与えられる。ここで,  $\partial \Omega_e$  はこの要素の境界 (辺) で,  $t := n\sigma$  はそこでの応力ベクトルである。この変分方程式は, 要素レベルでの線形弾性体の静的つり合い問題を定義している。

いま, 変位関数  $u$  が, 以下のように分解できるものとする。

$$u = u^0 + u^1 \quad (9)$$

ここで,  $u^0$  は空間分解能の粗い成分であり,  $u^1$  はより細かな成分である。また, グローバル要素  $\Omega_e$  内で定義される多項式の集合を  $P^k(\Omega_e)$  として, グローバル変位の属する関数空間を次のように定義する。

$$\mathcal{U}^0 = C^0(\Omega) \cap \mathcal{U}; \quad \mathcal{U}^0(\Omega_e) = P^k(\Omega_e) \quad (10)$$

同様に, ローカル変位の許容関数としては,

$$\tilde{\mathcal{U}}^1 = \{u^1 \mid u^1 \in \{H^1(\Omega_e)\}^3, u^1 = \mathbf{0} \text{ on } \partial\Omega_e\} \quad (11)$$

かつ  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \oplus \bar{\mathbf{u}}^1$  を満たすようなものを考える。さらに、以下では簡単のために物体力  $\mathbf{b}$  を無視する。

このような設定のもと、式 (9) およびその変分を式 (8) に代入すれば、次のような  $\mathbf{u}^0$ ,  $\mathbf{u}^1$  についての変分方程式を得る。

$$\begin{cases} \int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{C} (\partial \mathbf{u}^0 + \partial \mathbf{u}^1) dv \\ - \int_{\partial \Omega_e} (\delta \mathbf{u}^0)^T \mathbf{t} ds = 0, & \forall \delta \mathbf{u}^0 \in \mathcal{V}^0 \\ \int_{\Omega_e} (\delta \mathbf{u}^1)^T \mathbf{C} (\partial \mathbf{u}^0 + \partial \mathbf{u}^1) dv = 0, & \forall \delta \mathbf{u}^1 \in \bar{\mathcal{U}}^1 \end{cases} \quad (12)$$

ここで、 $\mathcal{V}^0$  は (5) および (10) と同等の空間を想定している。これらの方程式は、それぞれ対応するスケールの解の支配方程式と見なすことができる。また、この定式化は結果的に、解析的な関数でローカル変位を与えてグローバル変位を近似する Garikipati and Hughes によるマルチスケール変分法<sup>8)</sup> と同一の方程式を与えている。ただし、本研究ではローカルメッシュについてローカル変位をさらに

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{C}^0(\Omega_e) \cap \bar{\mathcal{U}}^1; \mathbf{u}^1(\Omega_e^{(i)}) = \mathbf{P}^k(\Omega_e^{(i)}) \quad (13)$$

のように離散化し、複合構造のための階層型要素を定義する。

## (2) 階層型要素の定式化

分割 [0] において各要素  $\Omega_e$  を  $n_{node^0}$  節点アイソパラメトリック要素とし、一般的な形状関数  $N_{e^0, \alpha}^0(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$ , ( $\alpha = 1, \dots, n_{node^0}$ ) を導入すると、変位は

$$\mathbf{u}^0|_{\Omega_e} = N_{e^0}^0(\xi^0, \eta^0, \zeta^0) \mathbf{d}_e^0 \quad (14)$$

のように表記される。同様に、分割 [1] についても  $n_{node^1}$  節点要素  $\Omega_e^{(i)}$  に対して  $N_{e^1, \alpha}^1(\xi^1, \eta^1, \zeta^1)$  ( $n_{node^0} = 1, \dots, \alpha$ ) を与え、

$$\mathbf{u}^1|_{\Omega_e^{(i)}} = N_{e^1}^1(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) \mathbf{d}_{e^1}^1 \quad (15)$$

と表しておく。ここで、形状関数の定義域に分割ごとの座標系  $(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$ ,  $(\xi^1, \eta^1, \zeta^1)$  を用いるのは、スケールが異なることを明示するための便宜的なものである。また、各関数は同一の物理座標系  $(x, y, z) \in \hat{\Omega}$  で定義されるが、通常アイソパラメトリック変換による座標変換が施される。

以下、分割 [1] における形状関数を、分割 [0] のグローバル要素領域全体  $\Omega_e$  に定義される大域的なものとして  $N_{e^1}^1(\xi^1, \eta^1, \zeta^1) = N_e^1(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$  により表す。これは表記上の簡略化のためであり、節点変位ベクトルもグローバル要素  $\Omega_e$  の自由度  $N_{dim}^e = 3 \times n_{node} = 3 \times n_{node^0}$  で統一して

$$\mathbf{u}^0 = N_e^0(\xi^0, \eta^0, \zeta^0) \mathbf{d}_e^0; \mathbf{u}^1 = N_e^1(\xi^0, \eta^0, \zeta^0) \mathbf{d}_e^1 \quad (16)$$

のように表記する。同様に、ひずみも

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial N_e^0 \mathbf{d}_e^0 + \partial N_e^1 \mathbf{d}_e^1 = \mathbf{B}_e^0 \mathbf{d}_e^0 + \mathbf{B}_e^1 \mathbf{d}_e^1 \quad (17)$$

のように表すことになる。ここで、ローカル節点変位ベクトル  $\mathbf{d}_e^1$  やローカルひずみ  $\mathbf{B}_e^1 \mathbf{d}_e^1$  は、グローバル要素内にあるローカルメッシュについて全体行列を組み立てた (アセンブルした) ものに相当している。これらの有限要素近似式を (12) に代入すれば、

$$\begin{cases} (\delta \mathbf{d}_e^0)^T \left[ \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^0)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_e^0 \mathbf{d}_e^0 + \mathbf{B}_e^1 \mathbf{d}_e^1) dv \right. \\ \left. - \int_{\partial \Omega_e} (\mathbf{N}_e^0)^T \mathbf{t} ds \right] = 0, & \forall \delta \mathbf{d}_e^0 \in \mathcal{R}^{N_{dim}^e} \\ (\delta \mathbf{d}_e^1)^T \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^1)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_e^0 \mathbf{d}_e^0 + \mathbf{B}_e^1 \mathbf{d}_e^1) dv = 0, & \forall \delta \mathbf{d}_e^1 \in \mathcal{R}^{N_{dim}^e} \end{cases} \quad (18)$$

となり、要素剛性方程式が次の行列形式の連立方程式として得られる。

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e^{00} \mathbf{d}_e^0 + \mathbf{K}_e^{01} \mathbf{d}_e^1 = \mathbf{F}_e^0 \\ \mathbf{K}_e^{10} \mathbf{d}_e^0 + \mathbf{K}_e^{11} \mathbf{d}_e^1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{00} & \mathbf{K}_e^{01} \\ \mathbf{K}_e^{10} & \mathbf{K}_e^{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_e^0 \\ \mathbf{d}_e^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_e^0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここに、

$$\begin{cases} \mathbf{K}_e^{00} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e^0 dv \\ \mathbf{K}_e^{01} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^0)^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e^1 dv = (\mathbf{K}_e^{10})^T \\ \mathbf{K}_e^{11} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_e^1)^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e^1 dv \\ \mathbf{F}_e^0 = \int_{\partial \Omega_e} (\mathbf{N}_e^0)^T \mathbf{t} ds \end{cases} \quad (20)$$

である。

ここで、ローカル節点変位ベクトル  $\mathbf{d}_e^1$  が、グローバル節点変位ベクトル  $\mathbf{d}_e^0$  を用いて

$$\mathbf{d}_e^1 = -\mathbf{X}_e \mathbf{d}_e^0 \quad (21)$$

と表すことができるのであれば、式 (19) の第 2 式に代入して、

$$\mathbf{X}_e = [\mathbf{K}_e^{11}]^{-1} \mathbf{K}_e^{10} \quad (22)$$

が得られる。これは、式 (21) に戻せば、

$$\mathbf{d}_e^1 = -[\mathbf{K}_e^{11}]^{-1} \mathbf{K}_e^{10} \mathbf{d}_e^0 \quad (23)$$

を意味するので、式 (19) の第 1 式は、要素  $\Omega_e$  の要素剛性方程式、

$$\mathbf{K}_e^H \mathbf{d}_e^0 = \mathbf{F}_e^0 \quad (24)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{K}_e^H := \mathbf{K}_e^{00} - \mathbf{K}_e^{01} [\mathbf{K}_e^{11}]^{-1} \mathbf{K}_e^{10} \quad (25)$$

が所望の要素剛性行列である。実際、許容関数空間 (11) から分かるように、ローカル変位は要素  $\Omega_e$  について内部自由度しか持たないので、静的縮約により全く同一の式を導くことができる。

式 (22) の各列ベクトルは、分割 [0] の各要素  $\Omega_e$  内での大域的な変形のもとでの基本変形 (特性) を表すことから特性モードと呼ぶことにする。ただし、この特性モードは、分割 [0] の要素レベルでの分割 [1] に対する大域的節点変位モードの応答である。したがって、結果として得られる要素剛性行列 (24) は、複合構造の影響を補正項  $-K_e^{01} [K_e^{11}]^{-1} K_e^{10}$  に持っており、平均的な剛性と見なすことができる。

実際のインプリメンテーションに際しては、多少注意を要する。例えば、式 (20) の各剛性行列は同一の物理領域上での積分で表されているため、複合構造を示す物性  $C$  が空間的に分布することを許容しなければならない。すなわち、 $K_e^{00}$  を含む全ての積分計算はローカルメッシュ分割の要素を単位として行わねばならないことになる (図-1(c) 参照)。しかし、通常の有限要素においてこのような積分を行っても、変位はあくまでも  $P^k(\Omega_e)$  に属するなめらかな関数で近似されるので、複数材料の不連続分布により生ずる不連続ひずみを近似できない。これに対して、階層型要素においては、 $K_e^{00}$  は通常の有限要素法における剛性行列と同一形式で要素内の不連続変形を許容しないが、ローカル変位により  $C^0(\Omega_e)$  以下の連続性を実現することができる。これに対応する剛性部分が、補正項  $-K_e^{01} [K_e^{11}]^{-1} K_e^{10}$  である。

### (3) ローカル変位の境界条件

ここで示した定式化は、先にも述べた通り、 $u^1$  を非適合変位とすれば Wilson ら<sup>11)</sup>の要素と形式的に同等になるほか、Garikipati and Hughes<sup>9)</sup>の与えたマルチスケール変分法とも同一の数理構造を持っている。また、階層型要素における  $\partial u^1$  を仮定ひずみ成分と捉えれば、Simo and Rifai<sup>12)</sup>の Enhanced Assumed Strain (EAS) 要素との等価性も示すことができる。

また、ローカル変位の境界条件は、その許容関数空間と関わるばかりでなく、解の収束性とも関わる要件である。上の定式化では、式 (11) に与えるように、物体の境界と一致しない要素境界において斉次の条件を考えているため、直交条件

$$\int_{\Omega_e} \partial u^1 dv = 0 \quad (26)$$

を満足し、階層型要素はパッチテスト<sup>4), 13)</sup>に合格する。本研究ではさらに、似たような構造、材料が周期的に分布している複合構造を想定し、ローカル変位としてグローバル要素のアイソパラメトリック座標  $(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$

で周期的な関数を選ぶことを考える。この場合、そのままではグローバル要素の要素剛性行列が特異になってしまうが、本研究ではローカルメッシュ全体に弱いばねを配し、これを回避している。また、このとき、グローバル要素が長方形や平行四辺形であればパッチテストに合格するが、それ以外のゆがみ方をしたグローバル要素に対応するローカル構造に対し擬似的な周期境界を課した場合、パッチテストには合格しない。本論文では、ゆがみのない要素、すなわち定形メッシュについてのみ検討するが、後述するように有限被覆法との組み合わせにより任意形状の構造物への対応も可能である。

次節では、グローバル要素に対して

- ローカル変位に斉次の境界条件を与えた場合
- ローカル変位に周期境界を与えた場合

を考え階層型要素の特性・性能を比較、検討する。

## 4. 階層型要素の性能評価

単純な複合構造を有する構造物に対して、階層型要素を用いた次のケーススタディを行い、要素としての特性と数値解の性質を調べる。

**CASE I** 単純な複合構造に対する解析を行い、階層型要素の基本的な応答について検討する

**CASE II** グローバル要素寸法の決定方法について検討する

ただし、階層型要素の要素性能については、均質な構造を用いた他の要素との比較を行い、付録に示す。さらに、次のケーススタディを行い、階層型要素の可能性について調べる。

**CASE III** 大自由度問題に対して計算効率をどの程度向上するか検討する

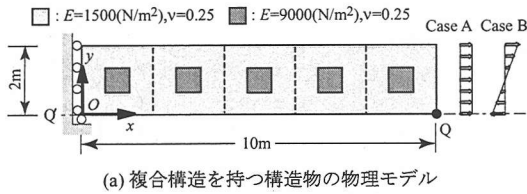
**CASE IV** 一般的な形状を持つ構造に対して階層型要素を適用し、解析対象のモデル化における有限被覆法的な取り扱いの可能性について検討する

これらのケーススタディには、次の階層型要素による解析手法を用いた。

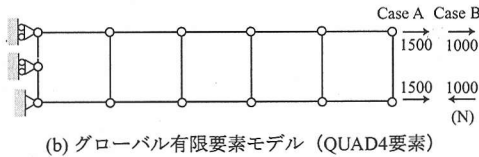
- (H-FEM/D) ローカル変位に斉次の Dirichlet 境界条件を用いる階層型要素による解析手法
- (H-FEM/P) ローカル変位に周期境界条件を用いる階層型要素による解析手法

ここに、H-FE は hierarchical element (階層型要素) を表し、H-FEM は階層型要素を用いた有限要素法のことを表す。解析は全て平面ひずみ状態を想定し、線形弾性体の微小変形のみを扱う。また、比較の対象として、

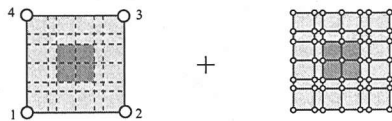
- (Direct FEM) グローバル構造をローカル構造に対する分割 [1] の解像度で要素分割した直接的な有限



(a) 複合構造を持つ構造物の物理モデル



(b) グローバル有限要素モデル (QUAD4要素)



(c)  $e$ 番目のグローバル要素 (d)  $e$ 番目のグローバル要素に対するローカルメッシュ

図-2 複合構造を有する解析対象

表-1 点 Q における変位 (CASE I)

	Direct FEM	Standard FEM/H	H-FEM/D	H-FEM/P
$u_Q^0$ (m):A	7.725	7.446	7.422	7.446
D error (%)	—	3.618	3.931	3.618
$v_Q^0$ (m):B	86.32	50.80	73.61	86.67
D error (%)	—	41.15	15.20	0.02307

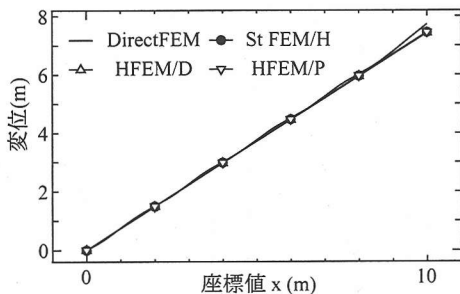


図-3 線分  $\overline{Q'Q}$  上のグローバル変位 (CASE I, Case A)

### 要素解析

- (Standard FEM/H) グローバル構造を分割 [0] のグローバルメッシュで、弾性係数には均質化法<sup>10)</sup>により得られる均質化定数を用いる解析

などの解も適宜参照する。ここで、構造物全体をグローバル構造、(局所的な)複合構造の単位をローカル構造と呼んでいる。また、特に断らない限り、これらの解析では変位法に基づく最も標準的な4節点アイソパラメトリック四辺形要素(QUAD4)を用いることにする。

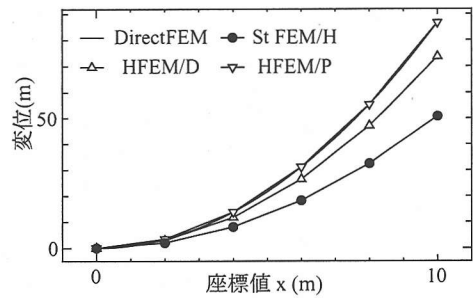


図-4 線分  $\overline{Q'Q}$  上のグローバル変位 (CASE I, Case B)

### (1) 複合構造の等価剛性 - CASE I

図-2(a)に示すような2つの材料から構成される複合構造が、 $x$ 方向に5個、 $y$ 方向に1個並んだ構造物を考える。グローバルメッシュおよびローカルメッシュは、それぞれ図-2(b)と(d)に示すような分割で、各要素には、変位法に基づくQUAD4の形状関数を用いる。階層型要素では、グローバルメッシュを構成する各グローバル要素図-2(c)の材料特性を図-2(d)のローカルメッシュの材料特性、幾何特性により与えている。また、荷重ケースは図-2(a),(b)に示すようにCase A, Case Bの2種類を考える。Case Aの荷重ケースは最も単純な場合であり、均質な構造ならば一般的な有限要素で必ず厳密解(変位の線形分布、応力、ひずみ一定)を再現できることは自明である。

各荷重ケースについて、Direct FEM, Standard FEM/H, H-FEM/D, H-FEM/Pの解析により得られた図-2(a)中のQ点の $x$ 方向(Case A)および $y$ 方向(Case B)の変位 $u_Q^0, v_Q^0$ (式(9)中の $u^0$ の変位)とDirect FEMとの変位の相対誤差D error (%)を表-1に与える。また、図-2(a)中の線分 $\overline{Q'Q}$ に沿った $x$ 方向(Case A)および $y$ 方向(Case B)変位をそれぞれ図-3, 図-4に示す。

Case Aの荷重ケースの場合、表-1や図-3において、Standard FEM/HとH-FEM/Pが同じ変位を与えることは、 $x$ 方向への一様変形に関して両要素が同じ剛性を持つことを意味する。すなわち、この変形モードについては、ローカル変位に周期境界を仮定した階層型要素の要素剛性と均質化法の与える均質化弾性係数を用いて得られたQUAD4の要素剛性は同じであることが分かる。また、H-FEM/Dにおけるローカル変位に斉次の境界を仮定した階層型要素は他の解よりも幾分剛な応答を示す。これは、ローカルメッシュの境界条件が斉次であるために、グローバル要素の剛性が周期境界条件を用いた階層型要素に比べて剛になるためである。

Case Bの荷重ケースについては、H-FEM/P, Direct FEM, H-FEM/D, Standard FEM/Hの順に柔な応答を示している。均質化弾性係数を用いたStandard FEM/Hでは、平面構造の全体に均質化された材料を分布させたことと等価な解析になるため、 $x$ および $y$ 方向の構造特性

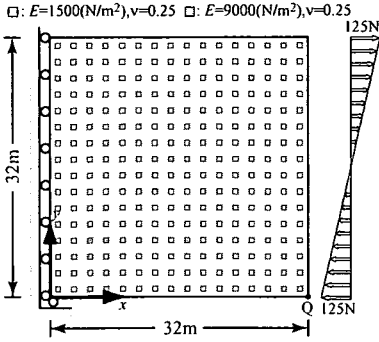


図-5 解析対象 (CASE II)

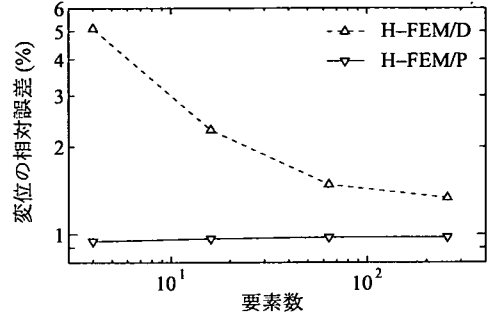


図-8 変位の相対誤差 (CASE II)

(2) グローバル要素寸法が解の精度に与える影響 - CASE II

グローバルメッシュの要素寸法が解の精度に及ぼす影響を調べる。図-5に示すような2つの材料から構成される複合構造が周期的に分布して全体を構成する構造物を考える。グローバルメッシュには、図-6に示すサイズの違う(a)~(d)の4種類のメッシュを考える。図-6(d)のときのローカルメッシュは図-7である。図-6の(a)~(c)のローカルメッシュには図-7をそれぞれ64個、16個、4個用いて正方形に配置したものを用いた。4種類のグローバルメッシュに対して図-5に示す荷重を与え、点Qにおけるy方向変位を求め比較する。

図-8にDirect FEM解析結果との変位の相対誤差とグローバルメッシュの要素数の関係を示す。この図より、H-FEM/Dではグローバル要素数が多くなるほど、つまりグローバル要素寸法が小さくなるほどDirect FEMの解との誤差が小さくなること分かる。このような傾向は、通常の有限要素における要素寸法と解の精度の関係と同じである。一方、H-FEM/Pでは、いずれのグローバル要素寸法を用いても1%以下の誤差しか生じない。これは、CASE Iで指摘したH-FEM/Pにおける非適合変位の存在による影響と考えられる。

以上のことから、次のことが言える。

- H-FEM/Pにおいては、グローバル要素寸法によらず、ある程度精度のよい解が得られる
- H-FEM/Dにおいては、グローバル要素の寸法により解の精度が変化し、グローバル要素寸法が小さいほど解の精度が向上する

(3) 大自由度問題 - CASE III

階層型要素を大自由度問題に適用し、精度を保持しながらDirect FEMと比べて計算効率がどれだけ向上するかについて検討する。解析対象は図-9に示すように、中心から外側に向かって空隙の数が減少するといった規則性を持った構造である。有限要素法を用いて構造解析を行う場合、解析モデルの要素の大きさは構造の最も複雑な部分を構成する要素を基準として定まる。図-10

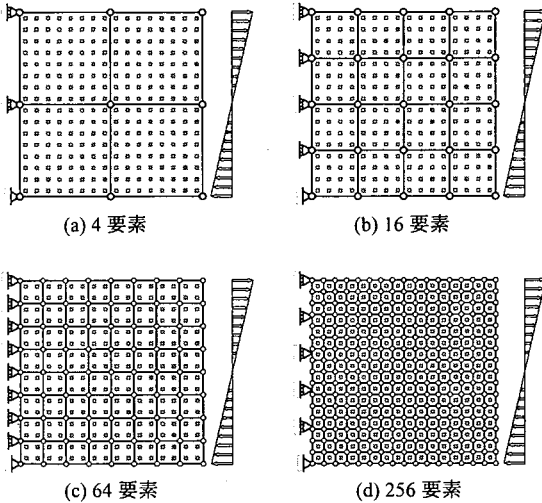


図-6 グローバルメッシュ (CASE II)

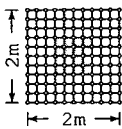


図-7 ローカルメッシュ (CASE II)

を反映できないことが顕著に現れている。これに対して、H-FEM/D、H-FEM/Pの階層型要素は、複合構造の特性を反映した要素剛性を与えている。特にH-FEM/Pの要素は、表-1や図-4からも分かるように、Direct FEMに最も近い解を与えている。このように、Case Bのような曲げ問題において、H-FEM/Pが大変良好な解を与えるのは、周期境界を適用しているためにローカルメッシュ境界上でStandard FEM/Hや通常の4点アイソパラメトリック四辺形要素の変形以上の変形性能が非適合変位として潜在的に存在しているためである。

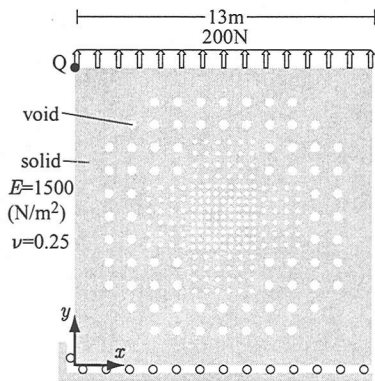


図-9 解析対象 (CASE III)

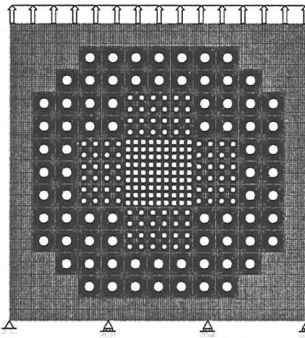


図-10 有限要素モデル (CASE III)

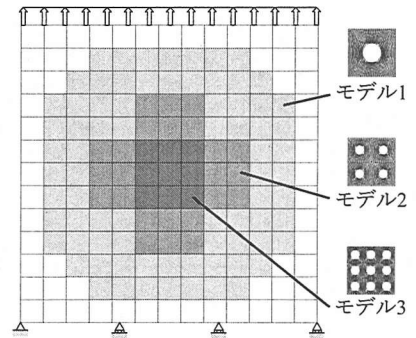


図-11 階層型要素モデル (CASE III)

表-2 点 Q における変位 (CASE III)

	Direct		
	FEM	H-FEM/D	H-FEM/P
$v_Q^0$ (m)	0.1454	0.1450	0.1453
D error (%)	—	0.2545	0.0963

には有限要素モデルの例を示しているが、このモデル図が示すように構造が複雑であるほど多くの要素を必要とし、それに伴ってモデル作成に要する労力や計算コストも増大する。

これに対し、階層型要素を用いた解析では、重合メッシュ法と同様に、解析対象をグローバルとローカルのモデルに分けて独立して定義する。ローカルの解析モデルにおいては、個々に独立なサイズでの要素分割が可能であるため、空隙や複合構造など、グローバルメッシュの要素領域内に複雑な構造を有する場合には細かいメッシュによるローカルモデルを定義し、逆にそのような構造を持たない場合にはローカルモデルを定義する必要はない。そのため、通常の有限要素モデルと比較して要素数を抑えることができ、効率的に解析を行うことができる。本解析では、さらにモデルの規則性を利用し、図-11に示すような簡単なグローバルの解析モデルと三種類のローカルの解析モデルによって解析を行うことができた。

図-10、図-11に示す解析モデルをそれぞれ Direct FEM, H-FEM/D, H-FEM/P により解析を行った結果として図-9の点 Q における y 方向変位と変位の相対誤差 (D error (%)) を表-2に示す。表より、先の検討で得られた結果と同様に H-FEM/P, H-FEM/D の順に Direct FEM の結果によく一致するが、どちらの解も誤差は小さい。図-12に H-FEM/P のときの変形図および y 方向変位分布を示す。この図からも、階層型要素を用いた解析は Direct FEM と大変よく一致している。表-3にそれぞれの解析モデルを用いて解析したときの使用 CPU 時間、使用メモリ量を示す。ただし、数値計算には Intel Xeon 2.2GHz Dual Processors の CPU, 3072MB のメモ

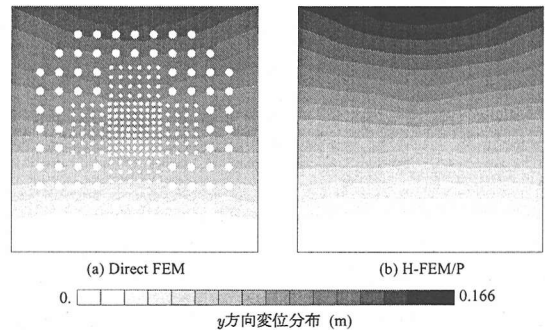


図-12 変形図および y 方向変位分布 (CASE III)

表-3 計算容量の比較 (CASE III)

	Direct		
	FEM	H-FEM/D	H-FEM/P
CPU 時間 (h : mm : ss)	1:28:58	0:02:50	0:04:35
メモリ (Byte)	144 M	16 K	16 K

リを搭載した計算機を用いた。計算時間は、Direct FEM に比べて H-FEM/D では 0.03 倍、H-FEM/P では 0.05 倍と、全体剛性行列の性質が異なるため両方で計算時間が異なるが、いずれも大幅に減少している。また、計算容量も、Direct FEM の 0.01% にまで減少している。このように、階層型要素により計算時間、計算機容量を大幅に軽減することができる。

#### (4) 有限被覆法との組み合わせ - CASE IV

定形のグローバルメッシュと物理領域が必ずしも一致しない一般の構造に対して階層型要素を適用し、Direct FEM の結果と比較する。解析対象は、図-13に示すような左下に曲線の境界を持つ、2つの材料で構成される複合構造物を考える。図-14にこのときの有限要素モデルを示す。階層型要素モデルは、図-15と図-16で表される。図-16に示すように、ローカルメッシュに剛性が 0 の要素を用いることで解析対象の幾何構造を再現して



□:  $E=1500(\text{N/m}^2), \nu=0.25$  ■:  $E=9000(\text{N/m}^2), \nu=0.25$

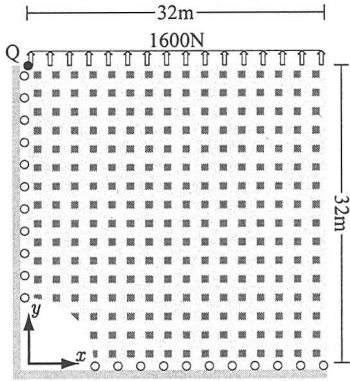


図-13 解析対象 (CASE IV)

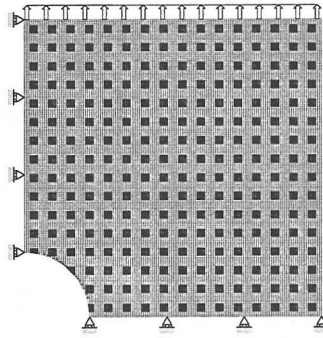


図-14 有限要素モデル (CASE IV)

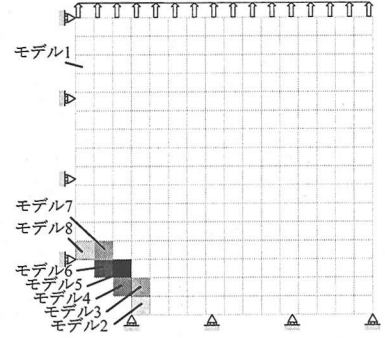


図-15 グローバルメッシュ (CASE IV)

表-4 点 Q における変位 (CASE IV)

	Direct FEM	H-FEM/D
$v_Q^0(\text{m})$	1.028	1.014
D error (%)	—	1.131

いる。この場合、剛性が0のローカルメッシュの境界上では  $u^1 = 0$  であるので、解析には H-FEM/D を用いた。

図-13の点 Q における y 方向変位と変位の相対誤差 (D error (%)) を表-4 に示す。相対誤差は 1% 程度と小さく、よい一致をしている。図-17 に変形図と変位分布を示す。Direct FEM では、境界の変位分布が細かい波のように変化しているが、H-FEM/D の結果ではとても滑らかに変化している。これは、Direct FEM では不均質な材料の境界上での変位の変化を正確に表しているのに対し、階層型要素ではグローバル要素内での変位の変化の平均値を返しているためである。また、図-17(b) 中の、特に図-15 のモデル 4 とモデル 6 に対応する要素では、それぞれの要素の左下の部分で変形が集中し、大きく変位している。しかし、この部分には、図-16 に示すように剛性が 0 の要素が配置されていて材料が存在しないので、ここでの変形は無視できる。これらを加味して全体的な変位分布を見てみると、非常によい一致を示している。

以上のことから、定形でない境界を有する解析対象に対しても、グローバルメッシュには定型要素を用いて精度よく計算することができる。このことより、解析対象のモデル化において、階層型要素で有限被覆法的なモデル化をすることが可能であり、これを適用することによって少ない自由度の解析モデルを用いて精度の良い応答が求められること分かる。

## 5. 結 言

本論文では、複合構造物の平均的な力学挙動を与える階層型要素<sup>6)</sup>の要素特性を調べるための基礎的な数値

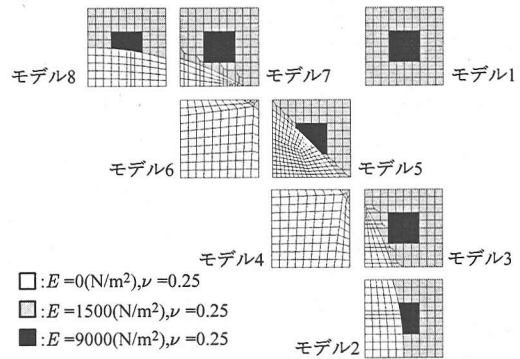


図-16 ローカルメッシュ (CASE IV)

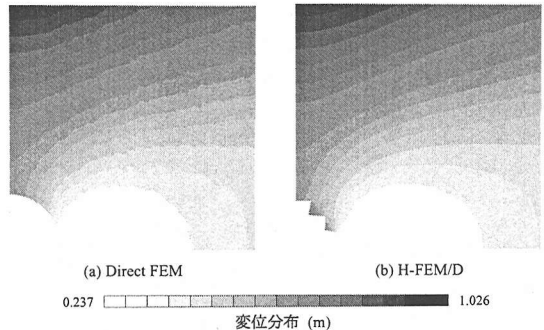


図-17 変形図および変位分布 (CASE IV)

解析による検討を行った。この階層型要素は、複合構造の高精度な解を効率よく求めることができる高性能有限要素である。形式的には重ねメッシュ法と等価であり、近年ひずみの局所化問題において提案されたマルチスケール変分法と数理的に類似の特徴を有する。

階層型要素の応用として、低次のアイソパラメトリック要素の性能向上が挙げられるが、これは、更なる理論的考察が必要であろう。今後、この展開を行い、手法としての確立が期待される。

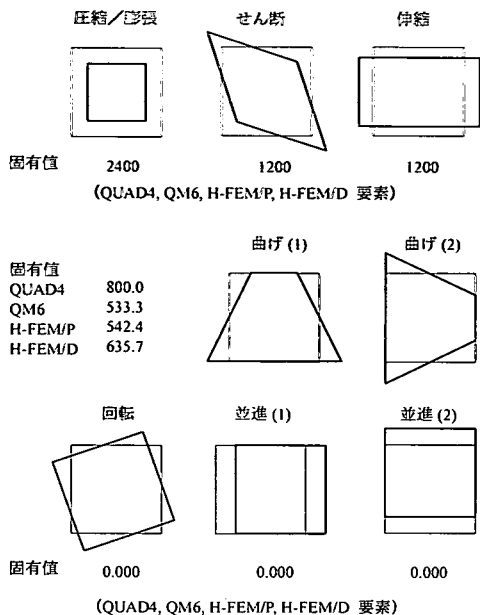


図-18 様々な要素に対する固有値および固有モード

## 付録 階層型要素の要素性能

階層型要素の要素としての特性を調べるために、複合構造を持たない均質な構造に対して階層型要素を適用する。図-18にH-FEM/DとH-FEM/Pの要素の固有値と対応する固有ベクトルを示す。構造物は、CASE Iと同じ大きさで図-2(c), (d)のようなローカル構造のない様な材料分布 ( $E = 1500, \nu = 0.25$ )を仮定する。比較のために通常の4節点アイソパラメトリック四辺形要素 (QUAD4), Wilson-Taylorの非適合要素<sup>11)</sup> (QM6)も併記した。曲げモードに対応する固有値にばらつきが見られる。二つの階層型要素のうち、H-FEM/Pの要素は、QM6と同程度の固有値になっている。固有値の値は、それに対応する変形モードを生じるひずみエネルギーの2倍の値であることから、固有値が小さいほど変形に必要なエネルギーが小さくてすむといえる。このことから、H-FEM/Pの要素は、ローカルメッシュ

の境界条件により、曲げ変形に関する性能が高められていることがうかがえる。

## 参考文献

- 1) Garatani, K., Nakajima, K., Okuda, H., Yagawa, G. : Three-dimensional elasto-static analysis of 100 million degrees of freedom, *Advances in Engineering Software*, Vol.32, pp.511-518, 2001.
- 2) Belytschko, T., Fish, J. and Bayliss, A. : The Spectral overlay on finite elements for problems with high gradients, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.81, pp.71-89, 1990.
- 3) Fish, J. and Markolefas, S. : Adaptive s-method for liner elastostatics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.104, pp.363-396, 1993.
- 4) (例えば) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. : *The Finite Element Method, Fifth Edition, Volume 1 The Basis*, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann, 2000.
- 5) 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣: 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集, Vol.3, Paper No.20010016, pp.145-150, 2001.
- 6) 市村強, 生田佳, 寺田賢二郎, 堀宗朗: 階層型解析手法に基づく構造物の動的解析手法の開発, 応用力学論文集, Vol.5, pp.535-541, 2002.
- 7) Arnold, D. N., Brezzi, F. and Fortin, M. : A stable finite element for the Stokes equation, *Calcolo*, Vol.23, pp.337-344, 1984.
- 8) Garikipati, K. and Hughes, T. J. R. : A study of strain localization in a multiple scale framework — The one-dimensional problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.159, pp.193-222, 1998.
- 9) 大坪英臣, 鈴木克幸, 寺田賢二郎, 中西克嘉: 被覆単位で制度をコントロールするマニフォールド法 (FCM), 計算工学講演会論文集, Vol.2, pp.399-402, 1997.
- 10) Benssousan, A., Lions, J.-L. and Papanicolau, G. : *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- 11) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L. : A non-conforming element for stress analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.10, pp.1211-1219, 1976.
- 12) Simo, J. C. and Rifai, A. : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.29, pp.1595-1638, 1990.
- 13) Machneel, R. H. : *Finite Elements: Their Design and Performance*, Merceel Dekker, New York, 1994.

(2002.9.20 受付)

## HIERARCHICAL FINITE ELEMENTS FOR AVERAGE BEHAVIOR OF COMPOSITE STRUCTURES

Kai OIDE, Tsuyoshi ICHIMURA, Yoshiteru ISHIBASHI and Kenjiro TERADA

Hierarchical finite elements are examined for average mechanical behavior of composite structures. The formulation is formally similar to that of the overlaying mesh method, but its main purpose is to derive the element stiffness that is equivalent to the actual composite structures with local heterogeneities. The resulting elements possess additional internal degrees of freedom in the local finite element mesh for improving the performance and thus are nonconforming. In other words, the local structure with actual heterogeneities is reflected on the evaluation of the element stiffness matrix of a global element, so that a global element behavior is enhanced by the local degrees of freedom. Several numerical analyses are performed to examine the validity and accuracy of the proposed hierarchical finite elements.