

[特 集]

離発着数と滑走路舗装劣化との相互作用を考慮した複数滑走路の最適維持・補修計画

竹林幹雄

正会員 工博 神戸大学工学部建設学科助教授 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町1-1)

本稿では、複数滑走路で構成される空港における最適滑走路維持・補修計画について考究した。特に、離発着回数が滑走路の舗装状態に与える影響を考慮した方法論について検討を加えた。まず、定常状態について離発着数を明示的な操作変数とした定式化を行い、Pontryagin の最大原理を用いて最適性条件を導出し、解法を開発した。続いて、3本の滑走路の場合について数値計算を行い、整備間隔の違いが離発着数の制御および舗装厚に与える影響について検討した。その結果、整備間隔が短いほど、特定の滑走路を集中的に配分する傾向が現れ、費用も高騰することが把握された。一方、整備間隔が長くなれば、各滑走路の配分離発着数がほぼ等しくなる制御が行われ、費用も低減することがわかった。

Key Words: runway maintenance, multiple runways, steady state, maximum principle

1. はじめに

世界の主要空港のほとんど全ては、複数の滑走路で構成されている。例えば、米国を例に取れば世界最大の利用者数で知られるアトランタ空港をはじめとして、シカゴ・オヘア空港、ダラス・フォートワース空港などはいずれも3本以上の滑走路を有しており、他の主要空港も最低2本の滑走路で構成されているのが通常である。この傾向は欧州でも同様であり、ゲートウェイ機能の競争が活発な東アジア地域でも香港・チエラックコック空港やシンガポール・チャンギ空港をはじめとして、複数滑走路による運営が当然となってきている。わが国においても成田空港では暫定滑走路が2002年5月には供用され、関西空港では現在2007年供用開始の第2滑走路を建設中である。

以上に挙げた空港はいずれも非常に混雑した、あるいは将来的に混雑が予想される空港である。特に北米や欧州の主要空港では短距離便需要の大幅増により混雑を極め、大幅な遅延(delay)が頻繁に生じている¹⁾。こういった問題は空港の経営上、深刻な問題となっている。なぜなら、遅延は航空輸送サービスの質的低下を示すものであり、その影響はエアラインのみに留まらず、旅行者の需要構造そのものにまで影響を及ぼすと考えられるためである。

空港経営に関して、今度は別の視点から検討を加

えてみよう。空港の経営を考える上で、その主たる構成要素である滑走路の維持・補修を合理的に行なうことは極めて重要である。滑走路の維持・補修には維持・補修の整備間隔 (length of interval), 閾値となる滑走路の劣化の程度 (acceptable deterioration), コンディションの改善の程度 (intensity of improvement), そして維持・補修にかかる費用を検討しなければならない²⁾。一方、離発着数が多ければ多いほど、滑走路の状態、特に舗装に与える影響は大きい。さらに、滑走路を補修するためには、当該滑走路を一時閉鎖しなければならないため、他の滑走路への負担が増す、ないしはそれに相当する需要を失うことになる。

以上のように考えると、空港管理者は空港運営においては、空港施設の維持・補修と、毎期の遅延など滑走路の混雑に起因する不効用 (disutility) を同時に考慮しなければならないと考えられよう。この場合、最適な維持・管理計画を立案するためには離発着数 (需要) の各滑走路への配分と滑走路の舗装劣化との間の相互作用に着目することが重要である。

従来、滑走路の維持・補修に関しては国内外で多くの研究がなされてきており、最近では航空需要、すなわち離発着数と滑走路の舗装劣化との関係に着目した滑走路補修に関する研究も見られるようになってきた³⁾。しかし、その大半は力学的な側面からの検討であり、議論の多くは力学的強度に着目して

舗装厚を決定する問題に焦点が絞られている³⁾。ゆえに、本稿が着目する離発着需要を考慮した維持・管理政策に関しては、ほとんど検討されてきていないというのが実情である。

本稿で着目する問題はいわゆる demand-quality interaction 問題に分類されるものであり、道路の維持・管理に関する研究では比較的古くから検討されてきた分野である。

demand-quality interaction の先駆的研究は Friesz and Fernandez⁴⁾⁽⁵⁾によってなされたというのが、衆目の一致するところであろう。Friesz らは交通量と舗装状態という 2 種類の異なる状態変数を定義し、Pontryagin の最大原理を用いて最適な補修政策のための条件を導出している。そして最適政策として、単純制御 (singular control) とバンバン制御 (bang-bang control) を取り上げ、その効果について検討を加えた。Friesz らの研究は極めて理論的であり、最適制御に関して非常に多くの示唆を与えるものである。しかし、Friesz らのモデルでは、需要はあくまでも状態変数であり、明示的な制御変数は毎期の維持投資額である。すなわち、道路のコンディションによって通過する交通量（需要）が決定される構造になっており、本稿で対象とする「需要そのものを操作することによって最適な状態に導く」方法論とは大きく異なる。なぜなら、道路とは異なり、空港管理者は需要を能動的に各滑走路に配分するので、結果的に積極的に需要を制御することは可能だからである。

補修の時期決定とその改善の程度、および総費用の関係について検討したものに Tsunokawa and Schofer⁶⁾の研究を挙げることができる。彼らはマルコフ過程を仮定し、舗装状態のみを状態変数として、定式化を行っている。ここではノコギリ歯モデル (sawtooth model) を平滑化したトレンドモデルで近似解を求める手法を提案している。Tsunokawa らの提案した方法は実用に即したモデルであり、比較的容易に補修間隔、改善の程度、総費用を求めることができる。同じ問題フレームでより簡便に解を求める方法について検討したものに Li and Madanat⁷⁾が挙げられる。彼らはマルコフ過程の特徴に着目し、定常状態における閾値となる路面の劣化度（路面の粗度で示される）と改善後の路面の粗度を相互に最適化することで、最適な整備間隔、補修前後の路面粗度を求めるという、極めて簡便な計算手法を提案した。しかし、いずれのモデルも demand-quality interaction の枠組みとは異なっており、需要は固定されている。このため本稿で取り上げる需要の制御による滑走路維持・管理の最適化を取り扱うには適

切ではない。

本稿では、複数滑走路を有する空港における滑走路維持・補修の最適化問題を、demand-quality interaction 問題としてとらえ、需要制御を考慮した維持・補修政策の特徴について検討を加える。

本稿は 4 章で構成される。まず、第 2 章では定常状態下での各期における離発着数の配分と維持・補修政策との関係に着目し、最適化問題として定式化を行う。続いて、Pontryagin の最大原理を用いた最適性条件の導出を行い、解法アルゴリズムを提案する。第 3 章では数値計算を通して、解の特性について検討を加えることとする。第 4 章では本稿の結論を述べる。

2. モデル

(1) 前提条件

複数滑走路の維持・補修問題を最適化問題として定式化を行うために、以下のような前提条件を設ける。

- 1) 対象とする現象は確定的であるとする。
- 2) 計画期間は無限期間として評価する。
- 3) 当該空港の総離発着数は与件であり、全ての期間を通じて一定であるとする。ただし、各滑走路の容量は総発着数を全て配便可能であるとする。
- 4) 各滑走路は全て同じ規格で設計されており、離発着によって受ける滑走路の舗装の劣化も、同じ反応関数で表現できるものとする。
- 5) 全て同形式の航空機が利用するものとし、各フライトは同じ負荷を滑走路に与えるものとする。
- 6) 滑走路を補修する際は、当該滑走路は閉鎖され、その需要は他の滑走路に配分されるものとする。
- 7) 補修は速やかに行われ、補修後は直ちに供用されるものとする。
- 8) 補修単価は全期間を通じて一定であるとする。また、補修作業は毎回同じ手法で行われるものとする。

(1)は滑走路の舗装劣化、フライト数に関しては確率事象を一切含まないことを表す。(2)および(8)は維持・補修政策の特性を比較するために便宜的に導入した。(3)は、本稿で対象とする空港への需要は極めて大きいものの飽和状態であるとし、減少することはないという状態を想定するために設定した。(4), (5)は、滑走路は全て同じ条件下で劣化するという等質性を表している。例えば、同じ地盤条件、舗装材、

構造・デザインの滑走路で構成されていることを想定している。(6), (7)は補修工事実施時点の条件を表しており、現実の状態を考慮したものである。

(2) 定式化

滑走路数 n で構成される空港について考える。滑走路 i ($i \in I$, I は滑走路の集合を表す) の劣化の状態の微小変化量 $dS_i(t)/dt$ は現在利用するフライト数 $f_i(t)$ と現在の滑走路の状態 $S_i(t)$ に依存すると仮定する。また各滑走路ではフライト数 $f_i(t)$ に応じた遅延が生じ、遅延によるエアライン、旅客が負担するコストの総計が $C(f_i(t))$ で表現されるものとする。毎期の総フライト数は F で一定であるとする。今、 $k-1$ 回目の補修が終了した時点 t_{k-1} から、次の補修時点 t_k までに滑走路 i で生じる総費用 J_k^i は

$$J_k^i = \int_{t_{k-1}}^{t_k} C(f_i(t))e^{-\gamma t} dt + M(w_k^i)e^{-\gamma(t_k-t_{k-1})} \quad (1)$$

で表すことができる。ここで、 $M(w_k^i)$ は k 回目の滑走路 i における補修時の舗装厚 w_k^i に応じた費用である。また、 γ は割引率を表す。

右辺第1項は滑走路の混雑に起因するコストを表し、第2項は補修費用である。

空港管理者の目的は全ての滑走路で生じる費用の総計の最小化であるとすると、空港管理者の直面する問題は、次のように定式化される。

[問題 MP]

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sum_i C(f_i(t))e^{-\gamma t} dt + M(w_k^i)e^{-\gamma(t_k-t_{k-1})} \right\} \quad (2)$$

Sub. To

$$\frac{dS_i(t)}{dt} = g_i(f_i(t), S_i(t)) \text{ for } \forall i \in I \quad (3)$$

$$\Delta S_i = S_i(t_k^+) - S_i(t_k^-) = V(w_k^i, S_i(t_k^-)) \quad (4)$$

$$S_i(0) = S_i^{ini} \quad \text{for } \forall i \in I \quad (5)$$

$$\sum_i f_i(t) = F \quad \text{for } \forall t \quad (6a)$$

$$f_{i'}(t_k) = 0, \quad i' \in I \quad (6b)$$

$$f_i(t) \geq 0, \quad S_i(t_k^+) > S_i(t_k^-), \quad t_k - t_{k-1} > 0 \quad (7)$$

ここで、

$g_i(f_i(t), S_i(t))$: 滑走路の劣化を表す関数。

$\Delta S_i(t)$: 補修による滑走路の舗装状態の改善指標。

$S_i(t_k)$: k 回目の補修直前の滑走路 i の舗装粗度であり、滑走路の舗装劣化度を表す。

$S_i(t_k^+)$: k 回目の補修直後の滑走路 i の舗装粗度。

V : 補修による滑走路の舗装状態の改善程度を表す関数で、補修時の舗装厚 w_k^i と補修直前の舗装粗度 $S_i(t_k)$ を変数とする。

S_i^{ini} : 滑走路 i の初期舗装粗度。

i : k 回目の補修時に補修を受ける滑走路を示す。

式(2)は目的関数である。式(3)は滑走路の舗装劣化の状態遷移を表す状態方程式である。式(4)は補修時の舗装改善の程度は、補修直前と直後の舗装コンディションの差によって表され、それは舗装厚と補修直前の舗装粗度の関数で表現されることを意味する。式(5)は舗装の初期状態を表す。式(6a)は総フライト数が一定であることを表し、式(6b)は補修時に滑走路が閉鎖されることを意味する。式(7)は各操作変数に関する非負ないしは正であることを示す制約条件である。

(3) 解法

問題 MP の最適解を求めるために、まず Li and Madanat⁷⁾に倣い、定常状態を仮定した維持・補修計画について検討する。定常状態が実現することを仮定しているため、同じ補修パターンが繰り返されることになる。

問題 MP は操作変数にフライト数を含んでいるため、状態変数のみで構成された問題に対応した Li and Madanat⁷⁾の解法は適用できない。このため、動学最適化問題の標準的解法である Pontryagin の最大原理を応用することを考える。

最大原理を用いて維持・補修の動学最適化問題を解く場合、以下のような手順を踏む。

- 1) $f_i(t)$ の最適トラジェクトリ、 $S_i(t_k^+)$ (ないしは $S_i(t_k^+)$) の最適値、および最適整備間隔 $t_k - t_{k-1}$ を $S_i(t_k^+)$ (ないしは $S_i(t_k^-)$) を与件として求める。
- 2) $S_i(0)$ を与件とし、 $S_i(t_k^+)$ (ないしは $S_i(t_k^-)$) に対応する最適な最初の補修時点 t_1 およびその際の $f_i(t)$ の最適トラジェクトリを求める。
- 3) 1), 2) より無限期間での総コストを確定し、最適な $S_i(t_k^+)$ (ないしは $S_i(t_k^-)$) を決定する。

2) に示されるように、最初の補修までのコストは初期条件に依存する。このため、総コスト自体は初期条件に依存する。しかし、本稿で対象とする 1) の過程、すなわち定常状態下では、各時点のフライト数の制御および補修方法のみに依存し、初期条件に依存しない。本稿では、問題の本質であるフライト数の制御と補修方法との関係に焦点を絞るために、以降 1) の過程に関してのみ検討を加えることとする。

なお、以降補修は滑走路ごとに非同期の場合を取り上げる。これは以下の理由による。

- ① 全ての滑走路の整備を同期させる場合を除けば、同期させる滑走路の組み合わせ問題を組み込む必要がある以外は本モデルと基本的に同じである。
- ② 全ての滑走路の整備を同期させる場合、当該空港以外の空港に需要を処理させる必要があるが、この場合は空港間で本モデルを適用することになる。

このように、全て非同期の場合を定式化することで基本的な挙動は全て網羅できることがわかる。

さて前述のように、滑走路数 n のもとでの定常状態下では、補修は同一のパターンを繰り返すことになる。1サイクルの期間長を τ で表すと、 τ は期間長 η に含まれる同じパターンを n 回繰り返すことになる。すなわち、 $\eta = \tau/n$ である。図-1 は $n=3$ での定常状態下での滑走路の舗装劣化の関係を図化したものである。各線は舗装の劣化の軌跡を表しており、各区間（図中の η で示された部分）は全て同じパターンの軌跡で構成されていることがわかる。

図-1 に表された定常状態では初期の滑走路の舗装粗度 S_0 （ないしは終端の舗装粗度 S_τ ）、整備間隔 τ そして各滑走路への配分フライト数 $f_i(t)$ が操作変数である。しかし、問題の特徴に着目すれば、より単純な最適化問題に帰着することを以下に示す。

今、 S_0 および τ を与件とし、 $f_i(t)$ を操作変数として定常状態に関する定式化を考える。この場合、問題 MP を期間 τ に関して解き、無限期間で割り引くことになる。さて、一見すると問題 MP は「自由端問題」として取り扱うべき問題のように受け取られる。実際、終端点の S_τ は未知数である。しかし、実際には次のような等式が成立する。 $i=1, \dots, n$ とする。

$$S_{i-1}(\eta) = S_i(0), \quad i \geq 2 \quad (8)$$

である。以下、滑走路の番号を No. i という形式で表すとする。修繕の順は滑走路番号が小さい順に修繕が行われるものとする。簡単のため、No.1 の滑走路が次に補修を受ける場合を考えよう。

この場合、No. n の滑走路は補修を受けた直後になる。現在価値 Hamiltonian は以下のようになる。

$$H_1 = \left\{ \sum_{i=1}^n C(f_i(t))e^{-\eta} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) \{ g_i(f_i(t), S_i(t)) \} \right\} \quad (9)$$

式(9)の右辺第 2 項は、式(6a)により $f_i(t)$ のうち 1 つは従属変数として記述することが可能であるため、次数を 1 減じて記述することができることを利用した結果である。また、 $\lambda_i(t)$ は Lagrange 乗数である。KKT 条件を導出すると、以下を得る。

$$\frac{dH_1}{df_i(t)} = 0 \quad \text{for } \forall i \quad (10a)$$

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H_1}{dS_i(t)} \quad \text{for } \forall i \quad (10b)$$

$$\frac{dH_1}{d\lambda_i(t)} = g_i(f_i(t), S_i(t)) \quad \text{for } \forall i \quad (10c)$$

残余価値関数を $\Phi = M(w_n)$ とすれば、横断条件は次のように与えられる。

$$\lambda_1(\eta) = \frac{d\Phi}{dS_\tau} \quad (10d)$$

式(10a)-式(10d)および終端条件 $f_i(\eta)=0$ より、 $f_i(t)$ の軌道は (S_0, S_τ, η) の関数として示される。式(10b)より $\lambda_i(t)$ も同様に (S_0, S_τ, η) の関数として表される。ゆえに全ての $f_i(t)$ は (S_0, S_τ, η) の関数として求められることがわかる。

次に状態変数 $S_i(t)$ に着目する。 $S_i(t)$ は、式(3)の微分方程式の解として求められる。ゆえに、 $S_i(t)$ を解析解として求めることができる場合、 $S_i(t)$ は適当な積分定数 B_i を用いた (S_0, S_τ, η) の関数として表現される。積分定数 B_i は式(8)および初期条件 $S_i(0) = S_0$ から決定される。このため、 $S_i(t)$ も (S_0, S_τ, η) の関数として表されるが、 $S_i(\eta) = S_\tau$ を考慮すると、 S_i は (S_0, η) の関数として表されることがわかる。すなわち、以下のように求められる。

$$S_\tau = \frac{Q_2 S_0 + Q_3}{Q_1} \quad (11)$$

ここで、 Q_i ($i=1, 2, 3$) は付録の項で示す係数をまとめ表記したものであり、 η の関数として与えられる。

S_i の値を改めて $S_i(t)$ 、 $\lambda_i(t)$ や $f_i(t)$ に代入すれば、各変数は (S_0, η) の関数として表すことができる。

ゆえに、最初の補修終了後の定常状態における現在割引価値としての総ライフサイクル費用（以降、TDLC と表記する） J_1 は、

$$J_1(S_0, \eta) = \frac{(m_1 w + m_2) e^{-\eta} + \sum_{i=1}^n \int_0^\eta C(f_i(t)) dt}{1 - e^{-\eta}} \quad (12)$$

である。 w は式(4)により S_0 の関数で表される。

3. 数値計算

本章では、数値計算を通してモデルの挙動特性を把握する。

(1) 関数およびパラメータの特定

モデルで導入した関数を以下の形に特定する。

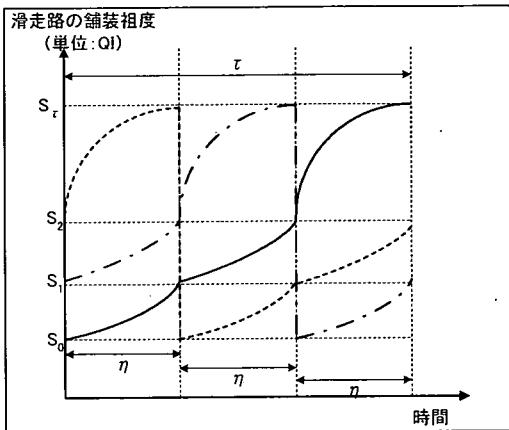


図-1 定常状態における滑走路コンディションと補修方法の関係 ($n=3$)

表-1 パラメータ一覧

パラメータ	値	パラメータ	値
c	50	F	5
a_1	0.01	a_2	0.01
m_1	12000	m_2	600000
g_1	5	g_2	0.78
g_3	-66		

$$C(f_i(t)) = c(f_i(t))^2 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (13a)$$

$$g_i(f_i(t), S_i(t)) = a_1 f_i(t) + a_2 S_i(t) \quad (13b)$$

$$M(w_n) = m_1 w_n + m_2 \quad (13c)$$

$$V(\Delta S) = g_1 \sqrt{w_n} + g_2 S_\tau + g_3 \quad (13d)$$

式(13a)のコスト関数は非線形挙動を示す単純な例である。無論、これ以外の形式を導入することは可能であるが、問題の本質を簡便に理解するために、2次形式を採用した。式(13b)は Friesz and Fernandes⁴⁾で採用された舗装の状態方程式である。式(13c)および式(13d)は Tsunokawa and Schofer⁶⁾で採用された補修のコスト関数と補修厚と補修改善度の関係を表したものである。式(13b)～式(13d)はいずれも道路の舗装に関する関数である。しかし、空港に関する既存研究がほとんど存在しないこと、および問題の本質には影響しないことを考慮し、ここではこれらの関数を採用することとした。

次にパラメータに関しては表-1 のように定めた。 m_1, m_2, g_1, g_2 および g_3 の値は Tsunokawa and Schofer⁶⁾で採用された値を用いた。また、 a_1, a_2 および c (定数) は計算のために試行錯誤的に調整した値である。

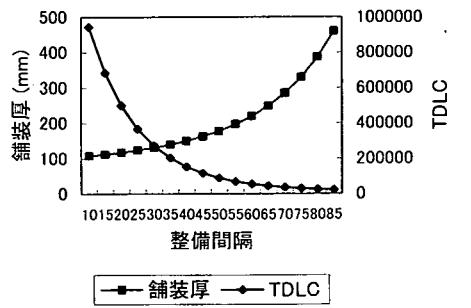


図-2 η, w と総費用の関係($S_0=20\text{QI}$)

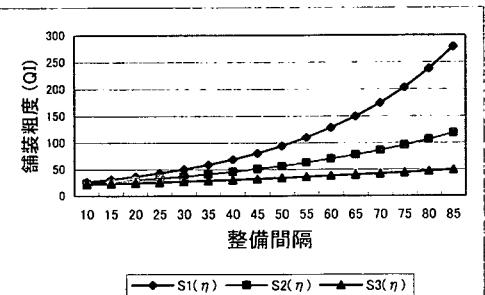


図-3 滑走路の舗装状態($S_0=20\text{QI}$)

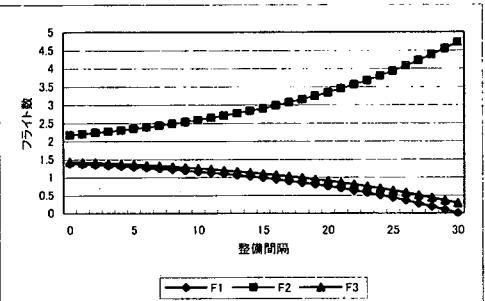


図-4 滑走路別最適フライト数のトラジェクトリ ($\eta=30$)

(2) 計算結果および考察

図-2 は最初の補修終了後の定常状態における整備間隔 η 、舗装厚 w および TDLC の関係を表したものである。ここでは、 $S_0=20$ の場合を記す。フライト数の最適制御を行った場合、TDLC は整備間隔 η が長くなるに従って減少する傾向にあることがわかる。一方、舗装厚 w は増加する傾向にある。ここから、舗装厚が許容可能な範囲であれば、できるだけ整備間隔を長期化した方が望ましいといえる。例として、 $\eta=50$ の場合に着目しよう。この場合、 $\eta=10$

の場合と比較すると、約 50%TDLC を抑制することができる。このように、整備間隔が長くなるほど TDLC は単調に減少する。しかし、舗装厚は η が 60 を超えるあたりから極端に増加する。 $\eta=60$ において $w=250\text{mm}$ に達する。TDLC の最小値は $\eta=85$ で得られるが、これ以上の期間では実行可能解は得られなかった。

次に、各滑走路の舗装劣化指数を比較する。図-3 は No.1～No.3 の各滑走路の 1 サイクル終了時点での舗装劣化の程度と整備間隔 η の関係を表したものである。サイクル終了時に整備される No.1 の舗装粗度 $S_1(\eta)$ は η が増加するに従い、大幅に増加する。一方、整備直後の No.3 に関しては $S_3(\eta)$ は大きく変化しないことがわかる。また、 η が増加するに従い、各滑走路間の終点での舗装のコンディションに大きな差を生じることが認められる。これは、整備間隔が長くなるに従い、フライ特数分配率が大きく変化していることを示唆するものである。

次に、最適フライ特数分配について検討する。図-4 および 5 は $\eta=30$ および $\eta=75$ の各滑走路への最適フライ特数分配のトラジェクトリを表している。 $\eta=30$ の場合、No.2 が主として利用される滑走路であることがわかる。そして、次に補修される No.1 および補修直後の No.3 はほぼ同じ挙動を示していることがわかる。初期の配分数の差は約 0.6 であるが、その差は時間を経るに従って増加し、No.3 はその終点での配便数はほぼゼロとなる。時間を経るごとに No.2 への集中の度合いが強調される方法であることがわかる。

しかし $\eta=75$ の場合、全く異なる挙動を示すことが図-5 からわかる。No.2 は依然として、主として利用される滑走路ではあるが、No.3 も No.2 と同様に、時間を経るごとに、フライ特数分配率が上昇している。このため、終点においては $\eta=30$ の場合、No.2 への配分が全体の 97.5% に達するという極端な配分の集中が生じているものの、 $\eta=75$ の場合ではそのような集中は生じることなく、No.2 と No.3 の比率はほぼ 3:2 である。さらに、10 期を経るまでは各滑走路ともほぼ等しい配分率であることが認められる。このような「等配分」が生じるのは $\eta=72$ 以上になった場合であることが図-6 から理解される。また、 $\eta=72$ 以上の場合は、No.3 への配分フライ特数 $f_3(t)$ は全期間を通じて非減少となる。このような挙動変化を与える点（この場合 $\eta=72$ ）をシフトポイントと呼ぶこととする。

このような挙動の変化が生じた理由を考えてみよう。

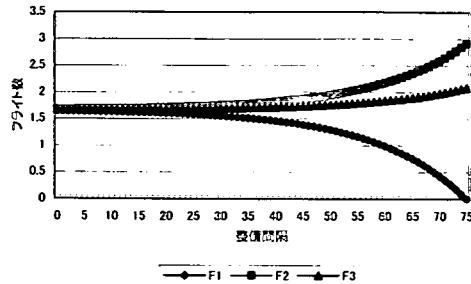


図-5 滑走路別最適フライ特数のトラジェクトリ
($\eta=75$)

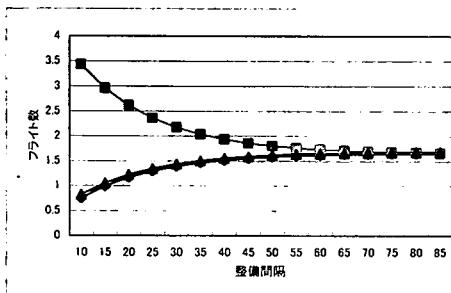


図-6 初期フライ特数の比較($S_0=20\text{QI}$)

フライ特数の最適制御は終端条件 $S_i(\eta) = S_{i-1}(0)$ ($i > 1$) を満足しなければならない。しかし、整備間隔が短すぎた場合、 $S_i(\eta)$ の差ができるだけ小さくする以外、上記の条件を満足する解がないと考えられる。すなわち、特定の滑走路にのみ集中的に配分し、次の期間には別の滑走路に集中配分を切り替えるという、「集中配分」型の制御方式を採用すると考えられる。

一方、整備間隔が十分長い場合、滑走路における混雑に起因する費用 $C(f_i(t))$ は、各滑走路の配分数を等しくすることにより最小化することが可能である。このため、できるだけ長期間「等配分」を行うことが最適であるという結果に結びついたと考えられる。

以上のように、毎期の空港での混雑による費用上昇の点から考えれば、長期間の整備間隔が可能な場合、「等配分」が実現できることから、できるだけ長期の整備間隔が望ましいことがわかる。

しかし、何らかの事情で整備間隔を短期間に設定しなければならない場合、最適制御としては「等配分」は実現できない。この場合は集中配分を行わざるを得ないことになり、TDLC は高騰する。

表-2 a_2 に関する感度分析($S_0=20QI$)

a_2	η	TDLC	w
0.01	72	33453	301
0.011	65	49944	295
0.012	59	71405	288
0.013	55	93656	293
0.014	51	121296	291
0.015	47	154850	283
0.016	44	188737	281
0.017	42	220803	288
0.018	39	263013	278
0.019	38	294684	294
0.02	35	343317	276

最後に、パラメータ a_2 に関する感度分析を行う。これは式(13b)の状態方程式に示されるように、現在の舗装粗度自体が状態変化に与える影響を示すパラメータである。このパラメータは地盤条件の悪いところでは堅牢な地盤条件にあるところよりも値が増加する。すなわち、 a_2 の値が大きなところに立地する滑走路では TDLC は増加し、整備間隔は短縮されると考えられる。

表-2 は感度分析の結果一覧である。各々の値は No.3 のシフトポイントでの値である。ここでは $0.01 \leq a_2 \leq 0.02$ として感度分析を行った。表より、 a_2 が増加するに従い、TDLC は大幅に増加することがわかる。シフトポイントを与える整備間隔は短縮され、これに応じて実行可能領域は短縮化される。実際、本数値計算では $a_2 \geq 0.05$ では実行可能解は存在しないことを確認している。一方、舗装厚 w の値は大きく変化しない。これは、整備間隔や地盤条件に関わらず、シフトポイントを与える最適な舗装厚は、ほぼ一定であるということを意味している。

以上の結果から、地盤条件の悪い滑走路においては、最適舗装厚はほぼ一定であるが、 a_2 の値が上昇するに従って頻繁な補修が必要になり、結果として TDLC は上昇することが認められた。また、実行可能な整備間隔は短縮されることがわかった。このため、例えば人工地盤上の滑走路で構成される空港では、頻繁な補修が必要となり、TDLC は高額になるといえる。

4. おわりに

本稿では、複数滑走路を有する空港において配分フライト数と滑走路の舗装劣化状態間にある相互作用に着目し、滑走路維持・補修の最適化問題を

demand-quality interaction 問題としてとらえ、定式化を行い、最適条件を導出した。また数値計算を通じて、最適制御の特性について検討を加えた。得られた結果を以下に示す。

- 1) 整備間隔が比較的短期間である場合、滑走路は特定の滑走路を重点的に用いる集中配分方式方式をとる。この場合、頻繁な補修と特定滑走路への混雑のため、TDLC はきわめて高い。しかし、整備間隔が短期間であれば、舗装の劣化の程度は小さく、舗装厚も薄い。
- 2) 整備間隔が長くなれば TDLC は大きく減少する。配分フライト数は等配分方式がとられるようになり、期間が長くなるに従い「等配分」の期間も長期化する。しかし、舗装厚は厚くなる。また、「等配分」期間が終了した後、滑走路が 3 本であれば、「主として利用される滑走路」と「補助的に利用される滑走路」に大別され、次期に補修を受ける滑走路は補助的利用に供される。
- 3) 地盤条件が悪化した場合、すなわち a_2 の値が増加した場合、最適舗装厚はほぼ一定であるにもかかわらず、整備間隔は短縮されるため、結果として TDLC は増加する。

特に、3)で示された結果は興味深い。これは、海上空港に代表される地盤条件の悪い空港での維持費用が相対的に高くなることを示唆している。

本稿で示したモデルは、拡張の余地がある。まず、需要が一定である条件のもとで問題を設定しているが、わが国の空港を見ても、需要の変動は長期にわたればかなり大きい。このため、需要変動のリスクを組み込んだアプローチに変更することが考えられる。同時に、本稿では各滑走路が全て同一の条件下で建設されていることを前提としているが、異なる条件を有する滑走路により構成されている空港の最適整備・運営問題に拡張することが、方法論をより一般化する上で必要である。また、本稿では同一の滑走路数に関してのみ、数値計算を通して特性分析を行ったが、同一の需要構造のもとで、異なる滑走路数での最適制御の効果を検討する必要がある。これに関しては現在検討中であり、機会を改めて発表することしたい。

謝辞：本研究を実施するにあたり、University of California at Berkeley の Prof. Samer Madanat に多くの貴重な助言をいただきました。ここに謹んで感謝の意を表します。

付録 $f_i(t)$ の最適トラジェクトリおよび S_t の導出

まず、 $n=3$ とする。

Hamiltonian H が式(9)の形式で与えられるとき、KKT 条件は以下のようになる。

$$\frac{dH_1}{df_i(t)} = c(4f_i(t) + 2f_{i\neq i}(t) - 2F)e^{-\eta} + \lambda_i(t)a_1 = 0, \quad i=1,2 \quad (\text{Aa})$$

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial S_i(t)} = -\lambda_i(t)a_2 \quad (\text{Ab})$$

$$\frac{dH}{d\lambda_i(t)} = a_1 f_i(t) + a_2 S_i(t) \quad (\text{Ac})$$

$$\lambda_1(\eta) = \frac{\partial \Phi(S_1(\eta))}{\partial S_1(t)} \quad (\text{Ad})$$

式(Aa)は式(6)を考慮し、制御変数を f_i および $f_{i\neq i}$ の 2 個としたことにより導出される。式(Ad)は横断条件である。 $\Phi(t)$ は残余価値関数で、 $M(w_n)$ に一致する。明らかに $M(w_n)$ は以下の式を満足する。

$$M(w_n) = m_1 \left\{ \frac{(1-g_2)S_r - S_0 - g_3}{g_1} \right\}^2 + m_2$$

これから、

$$\lambda_1(\eta) = m_1 \frac{2(1-g_2)^2 S_r - 2(1-g_2)(S_0 + g_3)}{g_1^2} e^{-\eta} \quad (\text{Ad}')$$

を得る。式(Aa)および式(Ab)から

$$\lambda_i(t) = -\frac{c(4f_i(t) + 2f_{i\neq i}(t) - 2F)}{a_1} e^{-\eta} \quad (\text{B})$$

$$\lambda_i(t) = A_i e^{-\alpha_2 t} \quad (\text{C})$$

ここで A_i は積分定数である。 $t=\eta$ を(C)に代入すると、

$$A_1 = m_1 \frac{2(1-g_2)^2 S_r - 2(1-g_2)(S_0 + g_3)}{g_1^2} e^{(\alpha_2 - \gamma)\eta} \quad (\text{D})$$

を得る。

各 $f_i(t)$ は以下のように定義される。

$$f_1(t) = \frac{1}{3} F - \frac{2\lambda_1(t) - \lambda_2(t)}{6c} a_1 e^\eta \quad (\text{Ea})$$

$$f_2(t) = \frac{1}{3} F - \frac{-\lambda_1(t) + 2\lambda_2(t)}{6c} a_1 e^\eta \quad (\text{Eb})$$

ゆえに、

$$f_3(t) = F - f_1(t) - f_2(t) = \frac{1}{3} F + \frac{\lambda_1(t) + \lambda_2(t)}{6c} a_1 \quad (\text{Ec})$$

を得る。

終端条件 $f_1(\eta)=0$ を考慮すると、以下を得る。

$$A_2 = 2A_1 - \frac{2Fc}{a_1} e^{-(\gamma-\alpha_2)\eta} \quad (\text{Fa})$$

$$\lambda_2(t) = (2A_1 - \frac{2Fc}{a_1} e^{-(\gamma-\alpha_2)\eta}) e^{-\alpha_2 t} \quad (\text{Fb})$$

次に式(13b)の微分方程式を解いて、以下を得る。

$$S_1(t) = e^{\alpha_2 t} \left[-\frac{Fa_1}{3a_2} e^{-\alpha_2 t} - \frac{a_1^2 (2A_1 - A_2)}{6c(\gamma - \alpha_2)} e^{(\gamma - 2\alpha_2)t} + B_1 \right] \quad (\text{Ga})$$

$$S_2(t) = e^{\alpha_2 t} \left[-\frac{Fa_1}{3a_2} e^{-\alpha_2 t} - \frac{a_1^2 (A_1 - 2A_2)}{6c(\gamma - \alpha_2)} e^{(\gamma - 2\alpha_2)t} + B_2 \right] \quad (\text{Gb})$$

$$S_3(t) = e^{\alpha_2 t} \left[-\frac{Fa_1}{3a_2} e^{-\alpha_2 t} + \frac{a_1^2 (A_1 + A_2)}{6c(\gamma - \alpha_2)} e^{(\gamma - 2\alpha_2)t} + B_3 \right] \quad (\text{Gc})$$

$S_3(0)=S_0$ を考慮すると、

$$B_3 = S_0 + \frac{Fa_1}{3a_2} - \frac{a_1^2 (A_1 + A_2)}{6c(\gamma - \alpha_2)} \quad (\text{Ha})$$

同様に $S_3(\eta)=S_2(0)$, $S_2(\eta)=S_1(0)$, から

$$B_2 = S_3(\eta) + \frac{Fa_1}{3a_2} + \frac{a_1^2 (-A_1 + 2A_2)}{6c(\gamma - \alpha_2)} \quad (\text{Hb})$$

$$B_1 = S_2(\eta) + \frac{Fa_1}{3a_2} + \frac{a_1^2 (2A_1 - A_2)}{6c(\gamma - \alpha_2)} \quad (\text{Hc})$$

を得る。

ここで $S_1(\eta)=S_r$ であり、 A_i ($i=1,2$) は (S_0, η) で表すことができるることを考慮すると、 S_i は (S_0, η) を用いて表すことができる。すなわち、式(11)を得る。

$$S_r = \frac{Q_7 S_0 + Q_8}{Q_6} \quad (11)$$

ここで、

$$Q_6 = e^{-\alpha_2 \eta} - \frac{a_1 Q_3}{6c(\gamma - 2\alpha_2)} \quad (\text{Ia})$$

$$Q_7 = e^{2\alpha_2 \eta} + \frac{a_1 Q_4}{6c(\gamma - 2\alpha_2)} \quad (\text{Ib})$$

$$Q_8 = \frac{a_1 F}{3a_2} (e^{2\alpha_2 \eta} - 1 - e^{-\alpha_2 \eta}) + \frac{a_1 Q_5}{6c(\gamma - 2\alpha_2)} \quad (\text{Ic})$$

$$Q_3 = \frac{m_1}{g_1^2} 2(1-g_2)^2 e^{-(\gamma-2\alpha_2)\eta} (Q_1 + 2Q_2) \quad (\text{Id})$$

$$Q_4 = \frac{m_1}{g_1^2} 2(1-g_2) e^{-(\gamma-\alpha_2)\eta} (Q_1 + 2Q_2) \quad (\text{Ie})$$

$$Q_5 = \frac{m_1}{g_1^2} \{ -2(1-g_2)g_3 e^{-(\gamma-a_2)\eta} \} (Q_1 + 2Q_2) \\ - \frac{2Fc}{a_1} e^{-(\gamma-a_2)\eta} Q_2 \quad (\text{If})$$

$$Q_1 = 2e^{(\gamma-2a_2)\eta} - (e^{a_2\eta} - e^{(\gamma-a_2)\eta}) + (e^{\eta} - e^{2a_2\eta}) \quad (\text{Ig})$$

$$Q_2 = -e^{(\gamma-2a_2)\eta} + 2(e^{a_2\eta} - e^{(\gamma-a_2)\eta}) + (e^{\eta} - e^{2a_2\eta}) \quad (\text{Ih})$$

である。

参考文献

- 1) Reynolds-Feighan,A.J. and Butten, K.: An Assessment of the Capacity and Congestion Levels at European Airports, Journal of Air Transport Management, Vol.5, 113-134, 1999.
- 2) Horonjeff, R. and Mckelvey, F.X.: Planning and Design of Airports, McGraw-Hill, 1993.
- 3) Aircraft/pavement interaction, Proc. of Conference/ sponsored by the Airfield Pavement Committee, Air

Transport Division, ASCE, 1991.

- 4) Friesz, T.L. and Fernandez, J.E.: A Model of Optimal Transport Maintenance with Demand Responsiveness, Transportation Research, Vol. 13B, 317-339, 1979.
- 5) Friesz, T.L. and Fernandez, J.E.: Influence of Demand-Quality Interrelationship on Optimal Policies for Stage Construction of Transportation Facilities, Transportation Science, Vol. 15, No.1, 16-31, 1981.
- 6) Tsunokawa, K. and Schofer, J.L.: Trend Curve Optimal Control Model for Highway Pavement Maintenance: Case Study and Evaluation, Transportation Research A, Vol. 28A, No.2, 151-166, 1994.
- 7) Li, Y. and Madanat, S.: A Steady State Solution for the Optimal Pavement Resurfacing Problem, Transportation Research A, forthcoming.

(2002.11.13.受付)

OPTIMAL CONTROL POLICY FOR MULTIPLE RUNWAYS MAINTENANCE CONCERNING DEMAND-RUNWAY QUALITY INTERACTION

Mikio TAKEBAYASHI

This paper aims to propose the optimal control policy for the maintenance of the multiple runway system, in particular, concern the influence of the flight demand on the runway condition. First, the mathematical formulation for this problem is discussed and the necessary conditions for the optimization are obtained by applying the traditional Pontryagin's Maximum Principle. Second, through the numerical examples, it is understood that for the effective maintenance policy for the multiple runway system the long interval for maintenance is required in spite of the thickness of the resurfacing. Moreover, the maintenance schedule that has a short interval gives the concentration to one runway, while the schedule that has a long interval gives the "even share" to each runway.