

[特 集]

不確実性下における最適点検・修繕ルール

慈道充¹・小林潔司²¹正会員 理修 (株) 中央復建コンサルタンツ計画系グループ(〒 532-0004 大阪市東淀川区東中島4-11-10)

E-mail:jido-m@cfk.co.jp

²フェロー会員 工博 京都大学教授 大学院工学研究科都市社会工学専攻(〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

E-mail:kkoba@psa2.kuciv.kyoto-u.ac.jp

本研究では、劣化水準が不確実に変動する土木施設の最適点検・修繕タイミングを決定する問題を取り上げる。土木施設の劣化水準は部分的に観測可能であり、点検によって初めてその劣化水準を把握できると考える。期待ライフサイクル費用を最小にするような点検・修繕投資のタイミングを決定する最適インパルス制御問題として定式化する。その上で、ある時点における劣化水準の観測値に基づいて点検・修繕投資を行うかどうかを判定する状況依存的な点検・修繕投資ルールとその数値解法を提案する。さらに、数値計算事例を用いて点検・修繕投資ルールの適用方法を紹介する。

Key Words : *repairing policy, inspection policy, state-dependent rules, life cycle cost, impulse control*

1. はじめに

従来より、土木施設の機能劣化プロセスを確定的な変化過程として記述し、ライフサイクル費用を最小にしうような最適修繕投資計画を求める方法が提案されている。しかし、施設の劣化過程に不確実性が介在する場合、施設の機能劣化の過程を確定的に把握できず、確定的な施設修繕計画を策定することは困難である。むしろ、施設の点検業務を通じて観察される施設の劣化水準という部分的な情報を用いながら、施設の修繕タイミングや修繕内容を決定するための修繕ルールを設計することが重要である。

小林等は、不確実な劣化過程に従う土木施設の最適修繕問題を最適インパルス制御問題として定式化するとともに、ファイナンス工学手法を用いて状況依存的な最適修繕ルールを求める方法を提案している¹⁾⁻³⁾。しかし、そこでは施設管理者が施設の劣化過程を常に直接観察可能であることを想定していた。劣化水準が直接観測可能な場合、最適修繕問題は施設の修繕を実施することが最適となるような劣化水準を求める問題に帰着される。しかし、施設の劣化水準が直接観測できない場合は、劣化水準を点検するタイミングと修繕を実施するタイミングの双方を同時に決定する必要がある。

土木施設の劣化過程が直接観察可能でない場合、過去に点検、もしくは修繕を行った時点で観察された劣化水準とそれからの経過時間といった限られた情報に基づいて、施設の点検・修繕戦略を決定せざるを得ない。その場合、1) どれだけの時間間隔をあけて施設の点検を実施するか、2) 点検結果に基づいてその時点に

におけるアクション(修繕を実施するか否か)を決定することが必要となる。本研究では、ある時点におけるアクションにより決定された劣化水準に基づいて、つぎに点検を実施する最適タイミングとその時点におけるアクションの内容を決定するための状況依存のルールを求める方法を提案する。

本研究では、劣化過程を点検作業を通じて観測可能な土木施設の最適点検・修繕戦略について考察する。その際、ある過去の時点におけるアクションの結果とそれからの経過年数という情報に基づいて、施設の点検・修繕タイミングを決定するような点検・修繕ルールを設計する問題をとりあげる。以下、2. では本研究の基本的な考え方を示す。3. において最適点検・修繕問題を定式化する。4. では、最適点検・修繕問題を状況依存のルールとして導出する方法を提案する。5. で数値計算事例を示す。

2. 本研究の基本的立場

(1) 従来の研究

最適修繕問題に関しては、オペレーションズ・リサーチの分野において最適取り替え問題としてすでに確立した研究分野となっている⁴⁾。破壊や故障がある定常的な確率過程に従って生起するようなシステムの最適修繕戦略に関しては膨大な研究が蓄積されている^{4),5)}。ここでは、最適修繕問題を確率動的計画問題、あるいはマルコフ決定過程として定式化しており、最適保全・修繕戦略は一連の確定的ルールとして定義される。公共施設の修繕問題に関しては、土木計画の分野をはじ

めとして研究が蓄積されてきた。例えば、劣化水準を確定的に扱い修繕費用の最小化や工事量の平準化をめざした修繕計画モデル^{6),7)}や、施設需要との関連を定量化した修繕モデル^{8),9)}が提案されているが、そこでは施設需要は確定的な扱いになっている。内田¹⁰⁾は、道路施設を対象として劣化水準の劣化に関する評価指標を提案し、修繕投資ルールを修繕が必要となる道路施設の劣化水準と修繕後の劣化水準の組で表す方法を提案している。しかし、修繕ルールは道路施設をとりまく需要条件と無関係に設定されており、修繕ルールが導出された理論的な根拠が明らかではない。

一方、小林等¹⁾は、施設に対する累積需要が施設の劣化水準に影響を及ぼすような土木施設の維持・補修問題をとりあげ、Scarfの(S, s)ルールの考え方^{11),12)}に基づいた土木施設の最適修繕戦略を得る方法を提案している。その際、施設の累積需要が非正常確率過程に従うことより、Suelmによる非正常在庫投資理論¹³⁾に着目し、施設需要や施設の劣化の程度という事後的な観測情報に基づいて修繕投資の実行の有無やその内容をそのつど決定する状況依存的な修繕ルールを求める方法を提案している。しかし、そこでは施設の劣化水準が直接観測可能であることが前提となっている。多くの土木施設においては、点検業務を通じてのみ施設の劣化水準が部分的に観測可能である場合が少なくない。このようにシステムの状態が部分的に観測可能な確率過程に関する制御問題に関してはマルコフ決定過程¹⁴⁾の分野で研究が蓄積されている。さらに、劣化過程が直接観測可能でないような施設の修繕問題をマルコフ決定過程を用いて分析する方法もいくつか提案されている¹⁵⁾⁻¹⁷⁾。既存の研究の多くは点検時期をあらかじめ確定的に与えており、定期的な点検により獲得した点検情報に基づいて修繕投資の有無を決定するアプローチとなっている¹⁵⁾。しかし、地下埋設物のような土木施設の点検費用は無視できず、このような施設に関しては点検費用を含めた期待ライフサイクル費用の最小化を達成するような点検・修繕戦略を求めることが必要となる。さらに、このような点検と修繕の同時決定を考慮したマルコフ決定モデル^{16),17)}も提案されている。しかし、筆者の知る限り、本研究のように連続時間を対象として、最適点検・修繕のタイミングを決定するような研究事例は見あたらない。本研究で定式化した最適点検・修繕モデルは、最終的に積分方程式モデルを解く問題に帰着する点に特徴がある。マルコフ決定過程を用いたアプローチでは、状態変数や政策変数が増加するにつれて急速にマルコフ推移行列の次元が増加し、計算が困難になるという欠点がある。しかし、積分方程式モデルでは連続的な状態変数を取り扱うことが可能であり、4.(3)で提案するような

収束計算により最適解を求めることが可能となる。

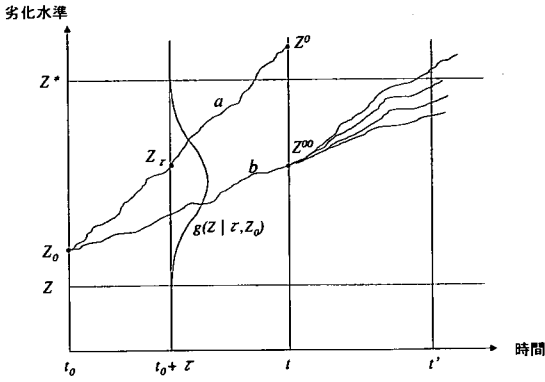
(2) 劣化過程の部分的観測可能性

本研究では劣化過程が不確実な土木施設の修繕問題を考える。施設の修繕により施設の劣化水準はある所与の水準にまで回復する。施設の劣化水準は常に観測できるわけではないが、点検・修繕を実施した時点においてのみ観測可能である。すなわち、施設の劣化過程は部分的に観測可能であり、観測を実施するためには費用が必要となる。多くの土木施設の劣化過程が、このような部分的観測可能性という特性を持っている。たとえば、水道施設等のような地下埋設構造物の場合、劣化過程を直接観察することは実質的に不可能であり、施設の劣化水準を観察するためには(修繕費用ほどには大きくないものの)多大な点検費用が必要となる。施設の劣化が進展すれば漏水等による損失(利用者費用)が増加する。施設管理者は無限期にわたって発生する利用者費用と点検・修繕費用の総和の現在価値で評価される期待ライフサイクル費用を最小にするように施設のメンテナンスのための点検・修繕を実施する必要がある。点検に固定的な費用が必要な場合、時間軸上の離散的なタイミングにおいて点検作業が実施される。点検の結果、施設の劣化が進んでいると判断された場合には施設の修繕が実施され、施設の劣化水準は所与の水準まで回復する。したがって、施設の劣化水準は点検が実施されたタイミングのみにおいて判明する。したがって、施設の点検・修繕過程は各点検が実施される時点、およびその時点におけるアクション(点検のみか、修繕も実施するか)、およびアクション後の劣化水準で構成されるアクションプロファイルの時間的な系列として記述される。

(3) 劣化過程とアクションプロファイル

施設の劣化水準を1元的な指標 z により表現しよう。 z の値が大きくなると劣化が進行していると考え。施設の劣化過程は不確実であり、将来劣化がどのように進展するかを確定的に予測できない。図-1には、無限に考えられる劣化過程の中から、いくつかのサンプル経路を抽出したものである。かりに、施設の劣化がサンプル経路 a に従って進展したとしよう。しかし、施設管理者は劣化過程を直接観測できないため、施設の劣化がサンプル経路 a に従っていることは施設管理者にはわからない。しかし、時点 t_0 における劣化水準と、それからの経過時間 τ という情報に基づいて、時点 $t_0 + \tau$ における劣化水準の確率分布が予測可能であると仮定しよう。さらに、経過時間が大きくなるほど、劣化水準の確率分布の分散が大きくなる。

時点 t にある点検が実施され、施設の劣化水準が z^0



時点 t_0 において劣化水準 z_0 が観測され、その後、劣化水準がサンプルパス a に従って推移すると仮定しよう。しかし、観測者にはサンプルパスは計測されない。例えば、時点 $t_0 + \tau$ において劣化水準 z_r が実現していても、観測者にはその値は観測できず、確率密度関数 $g(z|\tau, z_0)$ に従って分布することのみが判っている。時点 t に点検を実施して観測した劣化水準 z^0 が臨界的劣化水準 z^* より大きければ直ちに修繕が実施される。一方、観測した劣化水準が z^{00} の場合には修繕は見送られ、時点 $t' = t + \tau'$ に改めて点検が実施される。

図-1 劣化過程とアクションプロフィール

であることが判明したしよう。その際、劣化水準 z^0 が直ちに修繕を行うべき管理水準 z^* を上まわっていれば修繕を実施する。そうでなければ、一定期間において再度点検を行って、次のアクションを決定する考える。すなわち、アクションのタイプとして、1) 直ちに修繕を実施する、2) 修繕を見送り、ある一定の期間が経過したのち点検を実施するという2つが考えられる。時点 t において直ちに修繕を実施した場合、図-1のサンプルパス a のように、劣化水準はある所与の水準 Z に回復する。その後、劣化水準は新しいサンプルパスに従って推移する。一方、施設の劣化水準がサンプルパス b に従って推移した場合を考えよう。時点 t で観測された劣化水準 z^{00} は管理水準 z^* より小さくなり、修繕は見送られる。時点 t で劣化水準 z^{00} を観測しても、時点 t 以降の劣化過程も不確定であり、施設管理者は劣化水準を確定的に把握できない。しかし、時点 t に点検を行ったことにより、考慮の対象とすべき時点 t 以降のサンプルパス集合を時点 t において劣化水準 z^{00} を持つサンプルパス集合に絞りこむことができる。時点 t においてアクションを実施したのちの劣化水準は、修繕を実施した場合には Z に、修繕を見送った場合には点検で判明した水準 z^{00} にあることが確定する。時点 t 以降、施設の劣化水準はつぎに点検が実施される時点まで直接観察することはできない。時点 t' で再び点検を行った場合、その時点の劣化水準が確定し、以下これまでに

述べた過程が再び繰り返される。このように施設の劣化水準は、1) 点検を実施した時点、2) 修繕を実施した時点のみにおいて確定的な値をとり、それ以外の時点における劣化水準を確定的に把握することはできない。施設管理者の行動は、期待ライフサイクル費用を最小にするように点検、修繕という2つのアクションを実施するタイミングとその時間的経過パターンを決定する問題として定式化される。

(4) 点検・修繕ルール

劣化過程が直接観察できない場合、点検を行った時点においてのみ施設の劣化水準を観察できる。そのとき、「どのようなアクションを実施するか」、「どのようなタイミングでつぎの点検を実施すべきか」は、点検により観測された劣化水準に依存して決定される。いま、初期時点 $t_0 = 0$ を起点とし無限遠まで続く時間軸を考える。点検・修繕過程を時間軸に沿ったアクションの系列として定義しよう。いま、時点 t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) において第 k 番目の点検が実施され、劣化水準 z_k^0 が観測されたとしよう。初期時点 $t_0 = 0$ には点検が実施され劣化水準 z_0^0 が観測されていると考える。時点 t_k で採用できるアクションのタイプとして、「点検のみを実施し修繕を見送る」場合 ($\xi_k = 1$ と表す) と、「点検に結果に基づいて修繕を実施する」場合 ($\xi_k = 2$ と表す) を考える。時点 t_k の点検結果 z_k^0 に基づいてアクションの内容を決定するルールを

$$\xi(z_k^0) = \xi_k \quad (1)$$

で表す。アクション実施後の施設の劣化水準 \hat{z}_k は

$$\hat{z}_k = \begin{cases} z_k^0 & \xi_k = 1 \text{ の時} \\ Z & \xi_k = 2 \text{ の時} \end{cases} \quad (2)$$

と表される。ただし、 Z は回復水準である。つぎに、第 $k+1$ 番目の点検の実施時期 t_{k+1} は時点 t_k におけるアクション実施後の劣化水準 \hat{z}_k に対応して

$$t_k + \tau(\hat{z}_k) = t_{k+1} \quad (3)$$

として一意的に決定される。ただし、 $\tau(\hat{z}_k)$ は第 k 番目のアクション時点の劣化水準が \hat{z}_k の場合、つぎの第 $k+1$ 番目のアクションが実施されるまでの時間間隔を表している。点検・修繕履歴は時点 k における点検により劣化水準 z_k^0 を観察し、アクションルール

$$\mathcal{R}(z_k^0, \hat{z}_k) = \{ \xi(z_k^0), \tau(\hat{z}_k) \} \quad (4)$$

を用いて、その時点のアクションの内容 ξ_k とつぎの点検の時点 t_{k+1} を

$$\begin{cases} \xi(z_k^0) = \xi_k \\ t_k + \tau(\hat{z}_k) = t_{k+1} \end{cases} \quad (5)$$

と決定することにより生成される。このように最適点検・修繕ルールは点検結果 z_k^0 に基づいてアクションの

内容 ξ_k を決定する状況依存的ルール $\xi(z_k^0)$ とつぎの点検の実施時期 t_{k+1} を決定する状況依存的ルール $\tau(\hat{z}_k)$ のペアとして定義することができる。時点 t_k で実施される第 k 番目のアクションプロフィールは

$$P_k = (t_k, \xi_k, \hat{z}_k) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

と表される。この時、点検・修繕履歴は P_k ($k = 0, 1, 2, \dots$)というアクションプロフィールの系列で記述される。いま、初期時点 $t = 0$ における劣化水準の観測値を z_0^0 とすれば、アクションルール \mathcal{R} により第0回目のアクションのタイプは $\xi(z_0^0)$ に決定される。アクション実施後の施設の劣化水準 \hat{z}_0 は式(2)で決定される。つぎの第1回目の点検が $\tau(\hat{z}_0)$ に実施される。それ以降、状況依存的ルール $\mathcal{R}(z_k^0, \hat{z}_k)$ を繰り返し適用することにより、アクションプロフィールのサンプル系列が決定される。なお、施設の劣化過程は不確実であり、次期の劣化水準を確定的に求めることは不可能である。

3. 最適点検・修繕モデルの定式化

(1) モデル化の前提条件

施設管理者は、初期時点から無限に続く時間軸上で、期待ライフサイクル費用を最小にするように点検・修繕を行う。施設に対して反復的な外力が作用したり、自然的な劣化により時間を通じて施設の劣化水準は悪化する。施設の劣化水準は1元的な尺度 z で表されており、劣化が進むほど z の値は大きくなる。劣化水準 z は $[Z, \infty)$ で定義される。 Z は施設の最良のサービス水準であり、修繕により劣化水準は Z まで回復する。施設機能が劣化すれば利用者費用が増大する。施設の劣化過程は不確実であり、劣化水準を直接的に観測できない。しかし、点検作業によってその水準が観測可能となる。点検作業の実施には費用が発生する。点検は瞬間的に行われ、点検により施設の劣化水準の劣化過程は影響を受けない。点検により施設の劣化水準が判明した場合、つぎのアクションとして、1) 修繕を実施する、2) 修繕を見送るという2つのアクションを選択することができる。修繕が行われた場合、修繕作業は瞬時に完了する。修繕を行えば修繕費用が発生する。施設管理者のマネジメント問題は期待ライフサイクル費用を最小にするようなアクション系列を求める最適点検・修繕ルールを決定する問題として定式化できる。

(2) 劣化過程のモデル化

時点 t_k においてアクションが行使され、アクション後の劣化水準が \hat{z}_k に確定したとしよう。点検時点 t_k からある時点 $t = t_k + \tau$ までの期間において何らのアクションも行使されなかった状況を考えよう。施設の状態は点検もしくは修繕によってのみ確定的に把握するこ

とができ、それ以外では施設の状態を確率的にしか把握できない。ある点検時点でのアクション後の劣化水準が \hat{z}_k であり、それから時間間隔 $\tau > 0$ が経過した時点での劣化水準 z^0 の確率分布が、ある条件付き確率密度関数 $g(z^0 | \tau, \hat{z}_k)$ で表されると考える。変数 z^0 は点検により観測される劣化水準を表しており、点検を実施する前の段階では確率変数である。確率密度関数 $g(z^0 | \tau, \hat{z}_k)$ は $\tau > 0$ および区間 $[Z, \infty)$ で定義されており、1) 施設の劣化水準は修繕をしない限り時間とともに悪化する、2) 時間とともに劣化水準の不確実性が増加する、という劣化過程の特性を表現していると考えられる。

(3) 最適点検・修繕モデルの定式化

施設の劣化水準に応じて変化する利用者費用を劣化水準 z^0 の関数 $c(z^0)$ により表現しよう。 $c(z^0)$ は区間 $[Z, \infty)$ で定義されており、任意の $z^0 \in [Z, \infty)$ に対して、

$$c > 0, c' > 0, c'' > 0 \quad (7)$$

を満足すると仮定する。ただし、記号 I は1階微分を、記号 II は2階微分を表す。 $z^0 = Z$ が修繕を実施した直後の劣化水準に対応しており、 z^0 の値が大きいほど劣化が進行している。これまでの議論より、施設管理者はアクションを実施した時点においてのみ、施設の劣化水準を確定的に知ることができる。それ以外の時点では、劣化水準の値を確定的に把握できない。したがって、どれだけの利用者費用が生じているのかも確定的に把握できない。前回のアクションを実施した直後の劣化水準が \hat{z}_k であり、それから時間 τ が経過した時点での劣化水準は確率密度関数 $g(z^0 | \tau, \hat{z}_k)$ に従って分布する。したがって、時点 $t_k + \tau$ での期待利用者費用 $\Omega(\tau, \hat{z}_k)$ は

$$\Omega(\tau, \hat{z}_k) = \int_Z^\infty c(z^0) g(z^0 | \tau, \hat{z}_k) dz^0 \quad (8)$$

と定義できる。点検費用は、劣化水準の値に関わらず時間を通じて一定値 I をとると仮定する。つぎに、時点 t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$)の点検結果が z_k^0 であり、修繕が必要であると判断されたと考えよう。仮定より、修繕投資により劣化水準は Z まで回復する。回復レベル Z は外生的に与えられており定数である。修繕費用は修繕前の劣化水準 z_k^0 に応じて変動する考え、修繕費用関数を $F(z_k^0)$ と表現する。 $F(z_k^0)$ は任意の $z_k^0 \in [Z, \infty)$ に対して、

$$F > 0, F' > 0, F'' > 0 \quad (9)$$

を満足すると仮定する。管理主体は現在価値に割り引いた期待総費用の最小化を試みると考える。すなわち、時点 t_0 において初期劣化水準 $z_0^0 \in [Z, \infty)$ の下で管理主体が最小化を試みる汎関数を

$$J(V_0; z_0^0) = E_{V_0} \left[\int_0^\infty c(z^0(t)) \exp(-\rho t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} I \exp(-\rho t_k) \right]$$

$$+ \sum_{j \in \{k | \xi_k = 2, k \geq 0\}} F(z_j^0) \exp(-\rho t_j)] \quad (10)$$

と定義する。ただし、 ρ は瞬間的割引率である。また、 $V_0 = \{P_k | k \geq 0\}$ はアクションプロフィールであり制御変数である。このような V_0 を点検・修繕戦略と呼ぶ。劣化過程は完全に観測可能ではないため、点検・修繕時点に関する最適制御問題となっている。なお、時点 t_0 において劣化水準 z_0^0 が判明した時点において点検費用はすでにサンクしている。したがって、式(10)において時点 t_0 における点検費用は期待ライフサイクル費用に含まれていない。いま、制御変数 V_0 が与えられれば、記号 E_{V_0} は制御 V_0 が与えられた下で、各時点における総費用を確率変数 $z^0(t)$ の分布に基づいて期待値(8)をとるような期待値操作を表す。この時、施設管理者が解くべき最適点検・修繕問題は

$$\Phi(z_0^0) = \min_{V_0} \{J(V_0)\} \quad (11)$$

と定式化できる。問題(11)は最適なアクションタイミングにおいてのみ、点検・修繕を実施する最適インパルス制御問題^{18),19)}となっている。最適値関数 $\Phi(z_0^0)$ は初期劣化水準 z_0^0 の下で達成可能な最適期待ライフサイクル費用を意味する。

4. 最適点検・修繕ルールの決定方法

(1) 最適値関数

施設管理者が劣化水準の値を確定的に把握できるのは、点検を実施した時点 t_k ($k = 0, 1, 2, \dots$)のみである。いま、時点 t_k 以降、最適な点検・修繕戦略行使することにより実現できる最小期待ライフサイクル費用を最適値関数として定式化しよう。時点 t_k では点検とアクションが同時に実施されるが、その論理的な順序関係を図-2に示している。すなわち、時点 t_k では1)点検の実施を決定する(点a)、2)点検を実施する(点b)、3) z_k^0 が観測される(点c)、4)アクションが選択され(点d)、5)実施される(点e)、6)アクション後の劣化水準 z_k が確定する(点f)という6つのイベントがいずれも所要時間0で完了すると考える。この時、最適値関数を、1)アクションを実施したのちの劣化水準 z_k が確定する点fで定義するか、2)アクションを実施する前の点検結果 z_k^0 が観測された点cで定義するかにより、2つの異なった最適値関数が定義できる。いずれの最適値関数においても、最適値関数が定義される時点では点検費用はすでにサンクされており期待ライフサイクル費用に含めない。

まず、アクション実施後(点f)に確定する劣化水準 z_k に着目して最適値関数を定義しよう。時点 t_k において実施されたアクションの費用は期待ライフサイクル費用に含めない。最適値関数 $\Phi(z_k)$ を時点 t_k 以降にお

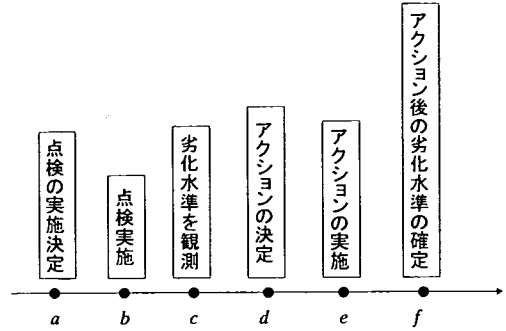


図-2 時点 t_k における論理的順序関係

いて最適インパルス制御¹⁹⁾を行うことによって達成可能な最小期待総費用として

$$\begin{aligned} \Phi(z_k) = \min_{V_k} E_{V_k} \left[\int_{t_k}^{\infty} c(z^0(u)) \exp\{-\rho(u - t_k)\} du \right. \\ \left. + \sum_{i \geq k+1} I \exp\{-\rho(t_i - t_k)\} \right. \\ \left. + \sum_{j \in \{i | \xi_i = 2, i \geq k+1\}} F(z_j^0) \exp\{-\rho(t_j - t_k)\} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

と定義する。ただし、 V_k は時点 t_k を始点とする点検・修繕戦略を表す。上式において、時点 t_k の点fでは点検・修繕費用はすでにサンクされており、期待ライフサイクル費用(12)には時点 t_{k+1} 以降の点検・修繕費用が計上される。つぎに、時点 t_k において観測された点検結果 $z_k^0 \in [Z, \infty)$ に基づいて、点cにおける最適値関数を

$$\begin{aligned} \Phi(z_k^0) = \min_{V_k} E_{V_k} \left[\int_{t_k}^{\infty} c(z^0(u)) \exp\{-\rho(u - t_k)\} du \right. \\ \left. + \sum_{i \geq k+1} I \exp\{-\rho(t_i - t_k)\} \right. \\ \left. + \sum_{j \in \{i | \xi_i = 2, i \geq k\}} F(z_j^0) \exp\{-\rho(t_j - t_k)\} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

と定義しよう。この場合には、時点 t_k で発生するアクション費用が期待ライフサイクル費用に含まれる。さらに、時点 t_k の点dでとりうるアクションに応じて2つの条件付き最適値関数を定義する。まず、点eで、仮に修繕を見送り、それ以降の時点に対して最適点検・修繕戦略を適用した場合に得られる最小期待ライフサイクル費用を条件付き最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^0)$ で表現する。点eで仮に修繕を実施し、それ以降に最適点検・修繕戦略を行使した場合に得られる期待ライフサイクル費用を条件付き最適値関数 $\Phi_\beta(z_k^0)$ により表現しよう。アクション実施後の最適値関数 $\Phi(z_k)$ とアクション実施前の2つの条件付き最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^0)$ 、 $\Phi_\beta(z_k^0)$ の間には

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(z_k^0) &= \Phi(z_k) && \text{修繕を実施しない場合} \\ \Phi_\beta(z_k^0) &= F(z_k^0) + \Phi(Z) && \text{修繕を実施する場合} \end{aligned}$$

が成立する。修繕を実施した場合、劣化水準は Z まで回復する。したがって、アクション実施後の劣化水準は $\hat{z}_k = Z$ となり、アクション実施後の最適値関数は上式において $\Phi(Z)$ で表されている。時点 t_k において修繕を実施することが最適アクションである場合、時点 t_k で仮に修繕を見送ったとしても、その後最適点検・修繕ルールが適用されれば、直ちに修繕が実施されることに留意しよう。したがって、修繕を実施することが最適な場合には、時点 t_k において修繕を延期するという代替的なアクションが存在せず、最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^0)$ を定義できない。一方、時点 t_k で修繕を見送ることが最適な場合を考えよう。この場合、時点 t_k において仮に修繕を行っても、その後最適修繕ルールを適用することによる期待ライフサイクル費用 $\Phi_\beta(z_k^0)$ を定義することができる。当然のことながら、修繕を見送ることが最適である場合には、

$$\Phi_\alpha(z_k^0) < \Phi_\beta(z_k^0) \quad (14)$$

が成立する。ここで、

$$\Phi_\alpha(z^*) = \Phi_\beta(z^*) \quad (15)$$

が成立するような最小の劣化水準 z^* を定義しよう。この時、点検結果 $z_k^0 \in [Z, \infty)$ に基づいて、最適アクションタイプ ξ_k を決定するルールを

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & z_k^0 \in [Z, z^*] \text{の時} \\ 2 & z_k^0 \in [z^*, \infty) \text{の時} \end{cases} \quad (16)$$

と表すことができる。すなわち、点検結果 z_k^0 が z^* より大きいか等しい場合には直ちに修繕が実施され、小さい場合には修繕が延期される。 $z_k^0 = z^*$ の時、直ちに修繕を実施することと、修繕を見送り期間 $\tau(z^*)$ 後に再点検を行うことが無差別となる。 z^* はアクションのタイプを分岐させる臨界的な劣化水準の管理値を表し、臨界的劣化水準と呼ぶこととする。以上のことを整理すれば、最適値関数 $\Phi(z_k^0)$ は次式で定義される。

$$\Phi(z_k^0) = \begin{cases} \Phi_\alpha(z_k^0) & z_k^0 \in [Z, z^*] \text{の時} \\ \Phi_\beta(z_k^0) & z_k^0 \in [z^*, \infty) \text{の時} \end{cases} \quad (17)$$

なお、最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^0)$ は区間 $[Z, z^*]$ 上で、最適値関数 $\Phi_\beta(z_k^0)$ は区間 $[z^*, \infty)$ 上で定義される。

(2) 最適化条件

第 k 番目の点検が実施された時点 t_k における最適点検・修繕問題は、1) 時点 t_k における点検結果 z_k^0 に基づいて実施するアクションタイプ ξ_k を決定する問題と、2) アクション後の劣化水準 \hat{z}_k の下で次に実施する点検時点 $t_k + \tau(\hat{z}_k) = t_{k+1}$ を決定する問題により構成される。すなわち、最適点検・修繕問題を1) 最適アクションタイプ ξ_k を決定する問題(最適アクション問題)と2) 最適タイミング t_{k+1} を決定する問題(最適タイ

ミング問題)に分割しよう。以下では記述の便宜上、最適タイミング問題を先に説明する。

a) 最適タイミング問題

いま、時点 t_k にアクションを実施し、アクション後の劣化水準が \hat{z}_k になったとしよう。さらに、時点 t_k (点 f)以降に最適な点検・修繕戦略を適用することにより獲得できる最適期待ライフサイクル費用の時点 t_k における当該期価値を最適値関数 $\Phi(\hat{z}_k)$ と表そう。ここで、当面の間、最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^0)$ および $\Phi_\beta(z_k^0)$ と臨界劣化水準 z^* がともに既知であると仮定しよう。その上で、第 $k+1$ 番目の最適点検時点を求める問題をとりあげる。いま、時点 t_k からアクションを実施せずに時間 τ だけが経過したとしよう。この時点における劣化水準 z^0 は不確実である。しかし、施設管理者は劣化水準 z^0 が確率密度関数 $g(z^0|\tau, \hat{z}_k)$ に従う確率変数であることは知っている。仮に時点 $t_k + \tau$ で点検を実施し、それ以降は最適な点検・修繕戦略を行使するというシナリオを考えよう。このようなシナリオの下で獲得できる期待最小ライフサイクル費用の時点 $t_k + \tau$ における点検直前の時点(点 a)における当該期価値 $L(\tau, \hat{z}_k)$ は、

$$\begin{aligned} L(\tau, \hat{z}_k) &= \int_Z^\infty \Phi(z^0)g(z^0|\tau, \hat{z}_k)dz^0 + I \\ &= \int_Z^{z^*} \Phi_\alpha(z^0)g(z^0|\tau, \hat{z}_k)dz^0 + I \\ &\quad + \int_{z^*}^\infty \Phi_\beta(z^0)g(z^0|\tau, \hat{z}_k)dz^0 \quad (18) \\ &\tau > 0, \hat{z}_k \in [Z, z^*] \end{aligned}$$

と表せる。上式の右辺第1項は点検により観測された劣化水準が臨界水準以下であり修繕が見送られる場合の最適期待ライフサイクル費用を、第2項は点検費用を、第3項は劣化水準が臨界水準以上となり修繕が実施された場合の期待ライフサイクル費用を表す。ここで、時点 t_k において第 $k+1$ 番目の点検時期を決定する問題を定式化しよう。アクション実施後の劣化水準 \hat{z}_k の下で定義される最適点検間隔 $\tau^*(\hat{z}_k)$ ($\hat{z}_k \in [Z, z^*]$)は

$$\begin{aligned} \tau^*(\hat{z}_k) &= \arg \min_{\tau \geq 0} \left\{ L(\tau, \hat{z}_k) \exp(-\rho\tau) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\tau \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

と表される。ただし、 $\Omega(t, \hat{z}_k)$ は式(8)で定義される期待利用者費用である。式(19)で求める最適時間間隔は観測値 \hat{z}_k に応じて異なる。このことを明示的に表現するため、式(19)では最適時間間隔を \hat{z}_k の関数として表現している。記号 \arg は最適解を与える τ を指示するための記号である。任意の $z_k^0 \in [Z, z^*]$ に対して $z_k^0 = \hat{z}_k$ が成立することに留意しよう。すなわち、 $z_k^0 \in [Z, z^*]$ に対して、 $\Phi_\alpha(z_k^0) = \Phi_\alpha(\hat{z}_k)$ が成立する。よって、最適

値関数 $\Phi_\alpha(\hat{z}_k)$ ($\hat{z}_k \in [Z, z^*]$) は

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\hat{z}_k) &= \min_{\tau \geq 0} \left\{ L(\tau, \hat{z}_k) \exp(-\rho\tau) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\tau \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt \right\} \\ &= L(\tau^*(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho\tau^*(\hat{z}_k)) \\ &\quad + \int_0^{\tau^*(\hat{z}_k)} \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt \quad (20) \end{aligned}$$

と表される。式(20)に式(18)を代入すれば、定義域を $\hat{z}_k \in [Z, z^*]$ とする関数方程式

$$\Phi_\alpha(\hat{z}_k) = f(\hat{z}_k) + \int_Z^{z^*} K(\hat{z}_k, z^0) \Phi_\alpha(z^0) dz^0 \quad (21)$$

を得る。ただし、

$$K(\hat{z}_k, z^0) = g(z^0 | \tau^*(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho\tau^*(\hat{z}_k)) \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} f(\hat{z}_k) &= \int_0^{\tau^*(\hat{z}_k)} \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt \\ &\quad + \int_{z^*}^\infty \Phi_\beta(z^0) g(z^0 | \tau^*(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho\tau^*(\hat{z}_k)) dz^0 \\ &\quad + I \exp(-\rho\tau^*(\hat{z}_k)) \quad (22b) \end{aligned}$$

である。積分核 $K(\hat{z}_k, z^0)$ の定義域は $\hat{z}_k \in [Z, z^*]$, $z_k^0 \in [Z, \infty)$ である。式(22a), (22b)において、ひとまず $\tau^*(\hat{z}_k)$, $\Phi_\beta(z^0)$ を既知関数, z^* を既知定数と考えよう。この時、式(21)は $K(\hat{z}_k, z^0)$ を積分核とする第2種フレドホルム型積分方程式^{20)–22)}と解釈することができる。積分方程式の定義域は $[Z, z^*]$ である。最適値関数 $\Phi_\alpha(\hat{z}_k)$ ($\hat{z}_k \in [Z, z^*]$) は積分方程式(21)を解くことによって得られる。しかし、 $\tau^*(\hat{z}_k)$ を求めるためには問題(19)を解く必要がある。また、 z^* は未知定数、 $\Phi_\beta(z^0)$ は未知関数であり、以下で述べる最適アクション問題を解くことにより得られる。したがって、最適タイミング問題を解析的に解くことは不可能であり、のちに4.(4)で言及するように、最適タイミング問題と最適アクション問題を逐次解きながら、積分方程式(21)の解を求めるような反復的計算手順を開発する必要がある。

b) 最適アクション問題

時点 t_k (点 d) で最適アクションを決定する問題をとらあげよう。時点 t_k の点検結果は z_k^0 で表される。まず、当該時点で修繕を実施しないことが最適となる場合を考える。この時、アクションは何も実施されないため $z_k^0 = \hat{z}_k$ となり、

$$\Phi(\hat{z}_k) = \Phi_\alpha(z_k^0) \quad (23)$$

が成立する。つぎに、時点 t_k において修繕を実施することが最適である場合を考えよう。修繕を実施した後の施設の劣化水準は Z となる。修繕を実施した後、最適に点検・修繕作業を継続した場合に得られる最適期待ライフサイクル費用は $\Phi(Z) = \Phi_\alpha(Z)$ と表される。最適関数 $\Phi_\beta(z_k^0)$ ($z_k^0 \in [Z, \infty)$) は未知関数であるが、

$$\Phi_\beta(z_k^0) = F(z_k^0) + \Phi_\alpha(Z) \quad (24)$$

と表される。最後に、劣化水準の点検値 z_k^0 が臨界水準 z^* に一致した場合を考える。この時、条件(21)より $\hat{z}_k = z^*$ において

$$\Phi_\alpha(z^*) = f(z^*) + \int_Z^{z^*} K(z^*, z^0) \Phi_\alpha(z^0) dz^0 \quad (25)$$

が成立する。 z^* が最適アクションが分岐する最適臨界劣化水準である場合、条件(14)より $z_k^0 = z^*$ において value matching 条件

$$\Phi_\alpha(z^*) = \Phi_\beta(z^*) \quad (26)$$

が成立する。最適点検・修繕問題の最適化条件は

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\hat{z}_k) &= f(\hat{z}_k) + \int_Z^{z^*} K(\hat{z}_k, z^0) \Phi_\alpha(z^0) dz^0 \\ \hat{z}_k &\in [Z, z^*] \quad (27a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_\beta(z_k^0) &= F(z_k^0) + \Phi_\alpha(Z) \\ z_k^0 &\in [Z, \infty) \quad (27b) \end{aligned}$$

$$\Phi_\alpha(z^*) = \Phi_\beta(z^*) \quad (27c)$$

と表される。ここに、最適点検・修繕問題は連立非線形関数方程式(27a)-(27c)を同時に満足する未知関数 $\Phi_\alpha(z)$, および z^* を求める問題に帰着される。以上の問題を解析的に解くことは不可能であり、数値計算により最適関数、最適値を求めていかざるを得ない。

(3) 最適ルールの計算方法

連立非線形関数方程式(27a)-(27c)をそのまま解くことは困難であるため、1) $\Phi_\alpha(z)$, z^* を与件として最適点検間隔 $\tau^*(z)$ を求める問題(部分問題1), 2) $\tau^*(z)$, z^* を与件として未知関数 $\Phi_\alpha(z)$ を求める問題(部分問題2), 3) value matching 条件 $\Phi_\alpha(z^*) = \Phi_\beta(z^*)$ が成立するような z^* を1次元探索する問題(部分問題3)に分解するとともに、それぞれの部分問題を反復的に解くことにより、最適値関数 $\Phi_\alpha(z)$, 最適点検間隔 $\tau^*(z)$, および最適臨界劣化水準 z^* を求める方法を提案する。最適値関数 $\Phi_\beta(z)$ は $\Phi_\alpha(z)$ が求まれば、式(27b)より簡単に求めることができる。3つの部分問題の相互関係と反復計算方法の概要を図-3に示している。

任意の z^* に対して、部分問題1と部分問題2を反復的に解くことにより最適条件(27a)を満足するような $\tau^*(z)$, $\Phi_\alpha(z)$ を求めることができる。関数 Φ_α は z^* に依存して一意的に決定される。そこで、 z^* をパラメータとする関数 Φ_α のクラスを定義しよう。このような関数クラスの中で式(27b), (27c)を満足するようなパラメータ z^* が存在すれば、関数 $\tau^*(z)$, $\Phi_\alpha(z)$, パラメータ z^* は最適化条件(27a)-(27c)を満足することが保証される。なお、関数 $\tau(z)$, $\Phi_\alpha(z)$, $\Phi_\beta(z)$ を解析的に関数式として表現できないため、区間 $[z, M]$ を複数個の点 \bar{z} の列に離散化するとともに、これらの関数を各点 \bar{z} に対して関数値 $\tau(\bar{z})$, $\Phi_\alpha(\bar{z})$, $\Phi_\beta(\bar{z})$ を対応させる関数関係として表

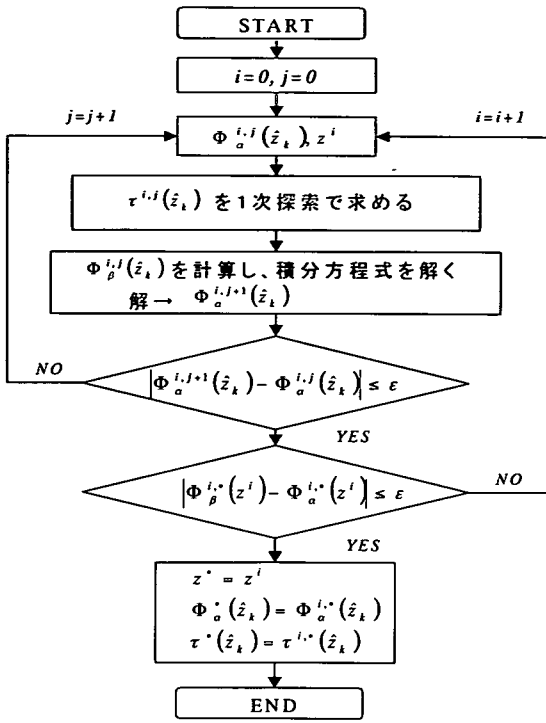


図-3 反復的計算手順

現する。ただし、 M は十分大きな正数である。反復計算は以下の手順にまとめられる。

1) ステップ1

反復回数を表すパラメータを $i = 0, j = 0$ とし、最適臨界劣化水準 z^* を1次元探索するための初期値 z^0 を設定する(付録II参照)。また、初期最適関数 $\Phi_{\alpha}^{0,0}(\hat{z}_k)$ ($\hat{z}_k \in [Z, z^0]$) を設定する。初期関数 $\Phi_{\alpha}^{0,0}(\hat{z}_k)$ は上述のような関数関係として表現される。収束判定パラメータ ε を設定する。

2) ステップ2 (部分問題1)

$\Phi_{\alpha}^{i,j}(\hat{z}_k)$, z^i を与件と考える。最適値関数 $\Phi_{\beta}^{i,j}(z) = F(z) + \Phi_{\alpha}^{i,j}(Z)$ を定義する。任意の $\hat{z}_k \in [Z, z^i]$ に対して最適点検間隔を求める問題

$$\tau^{i,j}(\hat{z}_k) = \arg \min_{\tau \geq 0} \left\{ L^{i,j}(\tau, \hat{z}_k) \exp(-\rho\tau) + \int_0^{\tau} \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt \right\} \quad (28)$$

を1次元探索法により解く。ただし、

$$L^{i,j}(\tau, \hat{z}_k) = \int_Z^{z^i} \Phi_{\alpha}^{i,j}(z^0) g(z^0 | \tau, \hat{z}_k) dz^0 + I + \int_{z^i}^{\infty} \Phi_{\beta}^{i,j}(z^0) g(z^0 | \tau, \hat{z}_k) dz^0$$

$$\tau \geq 0, \hat{z}_k \in [Z, z^i]$$

である。問題(28)の解を $\tau^{i,j}(\hat{z}_k)$ と表す。

3) ステップ3 (部分問題2)

関数 $\tau^{i,j}(\hat{z}_k)$, 最適値関数 $\Phi_{\beta}^{i,j}(z)$, 臨界水準 z^i を与件と考える。 $[Z, z^i]$ 上で定義される積分方程式

$$\Phi_{\alpha}(\hat{z}_k) = f^{i,j}(\hat{z}_k) + \int_Z^{z^i} K^{i,j}(\hat{z}_k, z^0) \Phi_{\alpha}(z^0) dz^0$$

の解 $\Phi_{\alpha}^{i,j+1}(\hat{z}_k)$ を求める(積分方程式の解法に関しては付録参照)。ただし、

$$K^{i,j}(\hat{z}_k, z^0) = g(z^0 | \tau^{i,j}(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho \tau^{i,j}(\hat{z}_k))$$

$$\hat{z}_k \in [Z, z^i], z^0 \in [Z, \infty)$$

$$f^{i,j}(\hat{z}_k) = \int_0^{\tau^{i,j}(\hat{z}_k)} \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt$$

$$+ \int_{z^i}^{\infty} g(z^0 | \tau^{i,j}(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho \tau^{i,j}(\hat{z}_k)) \Phi_{\beta}^{i,j}(z^0) dz^0 + I \exp(-\rho \tau^{i,j}(\hat{z}_k))$$

である。

4) ステップ4

$|\Phi_{\alpha}^{i,j+1}(Z) - \Phi_{\alpha}^{i,j}(Z)| \leq \varepsilon$ が成立した場合、 $\tau^{i,*}(\hat{z}_k) = \tau^{i,j}(\hat{z}_k)$, $\Phi_{\alpha}^{i,*}(\hat{z}_k) = \Phi_{\alpha}^{i,j+1}(\hat{z}_k)$ としてステップ5に進む。そうでない場合には、 $\Phi_{\beta}^{i,j+1}(z) = F(z) + \Phi_{\alpha}^{i,j+1}(Z)$ と置き換える。さらに、 $j = j + 1$ としてステップ2に戻る。

5) ステップ5 (部分問題3)

最適値関数 $\Phi_{\alpha}^{i,*}(\hat{z}_k)$ に基づいて $\Phi_{\beta}^{i,*}(z^i) = F(z^i) + \Phi_{\alpha}^{i,*}(Z)$ を求める。 $|\Phi_{\beta}^{i,*}(z^i) - \Phi_{\beta}^{i,j}(z^i)| \leq \varepsilon$ が成立する場合、 $z^* = z^i$, $\Phi_{\alpha}^*(\hat{z}_k) = \Phi_{\alpha}^{i,*}(\hat{z}_k)$, $\tau^*(\hat{z}_k) = \tau^{i,*}(\hat{z}_k)$ として計算を終了する。そうでない場合、 $\Phi_{\alpha}^{i+1,0}(\hat{z}_k) = \Phi_{\alpha}^{i,*}(\hat{z}_k)$ とする。1次元探索のアルゴリズムにより、新しい z^{i+1} を定義する。 $i = i + 1, j = 0$ としてステップ2へ戻る。

第 i ステップで定義した臨界劣化水準 z^i に対して、ステップ2, ステップ3, ステップ4を通じて最適値関数 $\Phi_{\alpha}^{i,*}(z^i)$, $\Phi_{\beta}^{i,*}(z^i)$ を求めることができる。逐次 z^i を発生することにより、 $\Phi_{\beta}^{i,*}(z^*) = \Phi_{\beta}^{i,*}(z^*)$ が成立するような z^* を1次元探索手法により求めることができる。1次元探索手法に関しては多くの参考文献²³⁾が利用可能であり説明を省略する。

5. 数値計算事例

(1) 計算事例の設定

本研究では、最適点検・修繕問題の典型的なプロトタイプを最適インパルス制御問題として定式化し、状況依存的な最適点検・修繕ルールが有する数理的構造を分析することを目的としている。以下では、簡単な数値計算事例を紹介して最適点検・修繕ルールが有する数理的特性について分析しよう。本研究で提案した最適点検・修繕ルールの有用性は今後の実証分析や適用事例を通じて検討していく必要がある。数値計算に

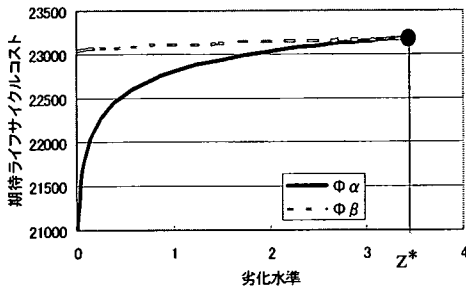


図-4 計算結果 (ベンチマークケース)

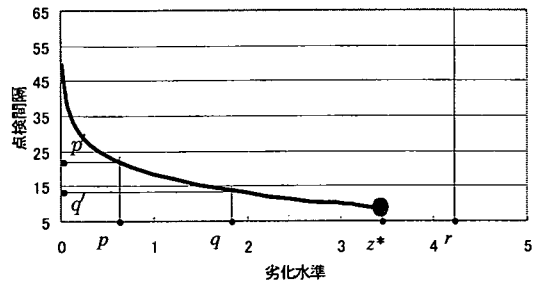


図-5 計算結果 (ベンチマークケース)

あたって、利用者費用関数を

$$c(z) = \iota z^v \quad (29)$$

と特定化しよう。ここに、 $\iota (> 0)$ 、 $v (\geq 0)$ はパラメータであり、 $\iota = 30$ 、 $v = 0.3$ と仮定する。また、修繕費用関数を以下の様に表現しよう。

$$F(\hat{z}_k) = a\hat{z}_k^b + Q \quad (30)$$

ただし、 $a > 0$ 、 $b \geq 0$ はパラメータであり、 Q は固定費用である。数値計算では $a = 100$ 、 $b = 0.4$ 、 $Q = 2000$ に設定する。さらに、時点 t_k のアクション後の劣化水準が \hat{z}_k であり、それより時間 τ が経過した後の劣化水準の条件付き確率密度関数 $g(z^\circ | \tau, \hat{z}_k)$ が対数正規分布

$$g(z^\circ | \tau, \hat{z}_k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)z_k^\circ}} \exp\left\{-\frac{(\ln z^\circ - \mu(\tau, \hat{z}_k))^2}{2\sigma(\tau)^2}\right\} & : z^\circ \in [\hat{z}_k, \infty) \text{ の時} \\ 0 & : z^\circ \in [Z, \hat{z}_k) \text{ の時} \end{cases} \quad (31)$$

に従うと仮定する。ただし、

$$\mu(\tau, \hat{z}_k) = \ln \hat{z}_k + \left(\delta - \frac{1}{2}\gamma^2\right)\tau$$

$$\sigma(\tau)^2 = \gamma^2\tau$$

である。確率密度関数 (31) は 1) 施設の劣化水準は修繕をしない限り時間とともに悪化する、2) 時間とともに劣化水準の不確実性が増加する、という劣化過程の特性を表現している。

(2) 計算結果

土木施設の劣化過程は確率密度関数 (31) のドリフト δ とリスク γ によって規定される。ドリフト δ は単位時間当たりの平均的な劣化率を、リスク γ は劣化過程の不確実性の程度を表している。ベンチマークケースとして $\delta = 0.2$ 、 $\gamma = 0.2$ と設定した場合を考えよう。図-4 はベンチマークケースの最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^\circ)$ 、 $\Phi_\beta(z_k^\circ)$ を示している。最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^\circ)$ 、 $\Phi_\beta(z_k^\circ)$ は点検結果 z_k° に対して単調増加であり、点検結果 z^* において互いに接する。最適値関数 $\Phi(\hat{z}_k)$ は 2 つの最適値関数 $\Phi_\alpha(z_k^\circ)$ 、

$\Phi_\beta(z_k^\circ)$ の内、値の小さい最適値関数を用いて定義される。記号「●」は端点であり、最適値関数 $\Phi_\alpha(z)$ は端点より左側 ($z \leq z^*$) の領域で定義される。最適アクションは点検結果 z_k° が臨界劣化水準 z^* より小さい場合は修繕を見送り、大きい場合には直ちに修繕することにより得られる。図-5 は、点検結果 $z_k^\circ \in [Z, z^*]$ と最適点検間隔 $\tau(z_k^\circ)$ の関係を表している。図中の記号「●」は臨界劣化水準における点検間隔 $\tau(z_k^\circ)$ を定義している。 $z_k^\circ > z^*$ の領域では直ちに修繕が実施されるため点検間隔は 0 となる。いま、ベンチマークケースで点検結果 z_k° (点 p) を得たとしよう。この時、最適点検間隔は $\tau(z_k^\circ)$ (点 p') で表される。つぎに、点検結果が $z_k^{\circ\prime} > z_k^\circ$ (点 q) の場合、点検間隔は $\tau(z_k^{\circ\prime})$ (点 q') となる。施設の劣化が進展しているほど、つぎの点検時点までの時間間隔は短くなる。さらに、点検結果が $z_k^{\circ\prime\prime}$ (点 r) の場合を考えよう。点検結果は臨界劣化水準 z^* より大きくなっており (点 r 上で点検間隔 $\tau(z_k^{\circ\prime\prime})$ は定義されていない)、直ちに修繕を実施することが必要であることが読みとれる。この場合、修繕後の劣化水準は Z まで回復し、つぎの点検時点まで時間間隔は $\tau(Z)$ (点 r') となる。 z^* において、直ちに修繕を実施することによる期待ライフサイクル費用と修繕を延期した場合の期待ライフサイクル費用が等しくなる。このため臨界劣化水準 z^* において最適点検間隔は 0 とはならない。

(3) (z, τ) 管理図

最適点検・修繕ルール \mathcal{R} は時点 t_k における点検結果 z_k° に基づいて最適アクションを決定するルール $\xi(z_k^\circ)$ とつぎの点検の実施時期 t_{k+1} を決定するルール $\tau(\hat{z}_k)$ のペアとして表される。最適修繕ルールを図-6 に示すような管理図として表現しよう。図の横軸は点検結果 z_k° を、縦軸はつぎの点検時点までの時間間隔 $\tau(\hat{z}_k)$ を表す。図中のグラフはある劣化環境 (δ, γ) における点検結果 z_k° と最適点検時間間隔 $\tau(\hat{z}_k)$ の関係を表し、各実線の右端の記号「x」、「o」、「●」はそれぞれのケースにお

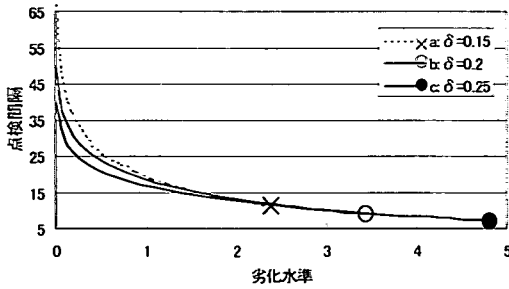


図-6 $\delta - (z, \tau)$ 管理図

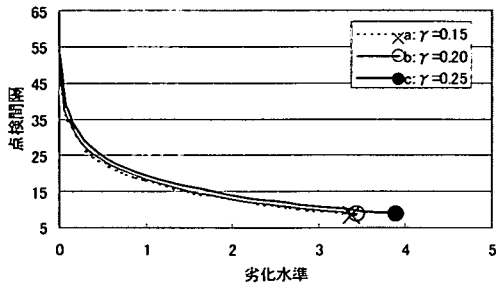


図-7 $\gamma - (z, \tau)$ 管理図

る臨界劣化水準 z^* とその時の点検間隔 $\tau(z^*)$ を表している。各グラフはリスクを $\gamma = 0.2$ に固定しながら、ドリフト δ を変化させた分析結果を示している。ベンチマークケースは図のグラフ b に対応する。ドリフト δ が大きくなれば点検間隔が短くなり、臨界劣化水準も小さくなることが理解できる。図-6を管理図 ($\delta - (z, \tau)$ 管理図と呼ぶ) として準備しておけば、異なる劣化環境 (異なる δ の値) に対する最適点検・劣化ルールを簡単に読みとることができる。図-7は δ の値をベンチマークケースの場合に設定し、 γ の値を変化させた場合の最適点検・修繕ルールを表現しており、 $\gamma - (z, \tau)$ 管理図と呼ぶこととする。この図よりリスク γ が大きくなるほど点検間隔は短くなり、臨界劣化水準も小さい値になることが理解できる。

(4) モデルの拡張可能性

本研究では、最適点検・補修問題の数理構造を明らかにし、最適点検・修繕ルールを (z, τ) 管理図として表現する方法論を開発した。以上の方法論を現実の最適点検・補修問題に適用する場合、対象とする土木施設の特性と対応させて最適点検・修繕モデルを拡張する必要がある。第1に、本研究では劣化水準 z が区間 $[Z, \infty)$ で定義される場合を想定していた。しかし、現実の劣化水準の表現方法は多様である。たとえば、舗装施設

ではMCI水準を用いて管理する機会が多いが、MCIは最大値を10として、劣化が進展するほどMCIが低下する。このように劣化水準の記述方法が変わっても、本モデルにおける確率分布とその定義域に修正を加えることにより、簡単に対処可能である。第2に、本研究では期待ライフサイクル費用に利用者費用を含めている。しかし、たとえば地盤構造物や構造物部材のように、施設の劣化が利用者費用に影響を及ぼさず、施設の破損、損壊費用や修繕費用のみで期待ライフサイクル費用が定義される場合がある。このような施設の点検・修繕問題は、本モデルにおいて利用者費用を0とした特殊ケースに相当する。利用者費用が0となる場合も、本研究で提案したアルゴリズムを用いて点検・修繕ルールを求めることができる。一方、本モデルを直接的に適用することが不可能であり、モデルの実質的な拡張が必要となる場合もある。たとえば、1) 橋梁施設のように多様な修繕投資の方法が存在し、修繕方法によって施設のサービス機能の回復水準が異なる場合が存在する。このような問題には、点検結果に応じて複数の修繕方法の中から最適な修繕方法を選択するような最適点検・修繕モデルを定式化する必要がある。また、2) 橋梁施設の場合、施設の劣化水準が離散的なカテゴリーとして表現される場合が少なくない。このような事例には、離散的な劣化水準を用いた最適点検・修繕モデルを開発する必要がある。さらに、3) たとえば、水道、下水道施設のように、直近の点検時期からの経過時間という情報だけでなく、費用等の利用可能な情報も考慮して最適点検時点を決定できる場合がある。この場合、劣化水準のリスクを経過時間だけでなく、その他の情報も考慮した確率密度関数により表現することが効果的であろう。このように本研究で提案したプロタイプモデルは各種の拡張により、多様な土木施設の点検・修繕問題に適用することが可能である。なお、本研究で提案したルールは個別施設の点検・修繕問題を対象としたものである。複数の施設で構成されるシステムに対しても、基本的には本研究で提案したルールを適用することが可能である。しかし、予算制約が存在する場合における望ましい点検・修繕の実施戦略を検討するためには、例えば参考文献³⁾で提案したように費用便益ルール等の実用的な投資決定ルールを開発することが必要となる。

6. おわりに

本研究では、劣化過程に不確実であり、かつ劣化水準を直接観察できない土木施設の最適点検・修繕戦略を求める問題をとりあげた。期待ライフサイクル費用を最小にするような点検と修繕の最適なタイミングを決

定する問題を最適インパルス制御問題として定式化し、最適点検・修繕戦略が状況依存的ルールとして表現されることを示した。最適点検・修繕戦略は、ある時点において実施した点検結果に基づいて、1) すぐに修繕を実施すべきかどうか、2) つぎの点検をどのようなタイミングで実施すべきか、を決定する簡単なルールとして表現できることを示した。最適点検・修繕ルールを (z, τ) 管理図として予め準備しておけば、ある時点で実施した点検結果に基づいて、アクションの内容とつぎの点検のタイミングを簡単に決定することが可能となる。今後、個々の土木施設を対象とした (z, τ) 管理図を作成することにより、実用性の高い最適点検・修繕ルールを開発することが可能となろう。

本研究で提案した補修投資ルールの考え方は多方面へ拡張が可能である。モデルの直接的な拡張可能性に関しては5.(4)で考察したが、それ以外にも土木施設の補修・更新投資戦略にアプローチする上で重要な研究課題が残されている。第1に、本研究では施設利用の蓄積により施設機能が劣化していくような土木施設の補修問題をとりあげた。土木施設の補修問題には多様な種類が考えられる、しかし、5.(4)で述べたように、本研究で提案したモデルを若干変更することによりアプローチすることが可能である。今後、具体的な施設の点検・修繕ルールを求める実証分析を積み重ねる必要がある。第2に、本研究では施設が無期限にわたり繰り返し利用される場合を想定していた。土木施設の中には将来時点における施設の廃棄が予め決定されている（あるいは、廃棄時期は不確定であるが、廃棄されることが確定している）場合も少なくない。この場合、廃棄時期までに補修投資を実施すべきかどうか大きな問題となろう。この場合、終端時点が確定的（不確定的）に与えられた最適インパルス制御問題を解くことが必要となる。第3に、力学的強度が劣化する構造物の更新投資の問題を取り上げる必要がある。この問題は上で述べたような第2の課題や構造物の性能設計の問題とも深く関連している。今後は構造物の耐用年数や更新投資の可能性も含めた性能設計の方法論を開発する必要がある。第4に、施設劣化に関する確率密度関数の同定方法に関する計量経済学的方法論に関する研究が不可欠である。この種の経験分析の蓄積が、本研究で提案した点検・補修ルールの実用化のために不可欠であると考えられる。最後に、本研究では劣化過程の不確実性を特定化したパラメトリックなアプローチを採用している。しかし、現実には劣化過程の同定は多くの困難を伴うため、劣化過程の不確実性を特定化しないノンパラメトリックなアプローチが有用である場合も少なくない。さらに、追加的な情報を入力することによる学習機構を考慮したような適応制御

モデル²⁴⁾を検討することも今後に残された課題である。

付録 積分方程式の解法^{20)–22)}

第 (i, j) 回目の反復計算により関数 $\tau^{i,j}(\hat{z}_k)$ 、 z^i が求まっていると考えよう。その上で、 (i, j) 回目の反復計算における $[Z, z^i]$ 上で定義された積分方程式

$$\Phi_{\alpha}^{i,j}(\hat{z}_k) = f^{i,j}(\hat{z}_k) + \int_Z^{z^i} K^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) \Phi_{\alpha}^{i,j}(z^{\circ}) dz^{\circ} \quad (32)$$

に着目しよう。ただし、

$$K^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) = g(z^{\circ} | \tau^{i,j}(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho \tau^{i,j}(\hat{z}_k))$$

$$f^{i,j}(\hat{z}_k) = \int_0^{\tau^{i,j}(\hat{z}_k)} \Omega(t, \hat{z}_k) \exp(-\rho t) dt$$

$$+ \int_{z^i}^{\infty} g(z^{\circ} | \tau^{i,j}(\hat{z}_k), \hat{z}_k) \exp(-\rho \tau^{i,j}(\hat{z}_k)) \Phi_{\beta}^{i,j}(z^{\circ}) dz^{\circ}$$

$$+ I \exp(-\rho \tau^{i,j}(\hat{z}_k))$$

$$\hat{z}_k \in [Z, z^i], \quad z^{\circ} \in [Z, \infty)$$

である。式(32)において関数 $\Phi_{\alpha}^{i,j}(\hat{z}_k)$ は \hat{z}_k に関する未知関数であり積分方程式の解として求まる。いま、関数 $K_n^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ})$ ($n = 1, 2, \dots$)を再帰的に

$$\begin{cases} K_1^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) = K^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) \\ \dots \\ K_n^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) = \int_Z^{z^{\circ}} K_{n-1}^{i,j}(\hat{z}_k, t) K^{i,j}(t, z^{\circ}) dt \\ \dots \\ \hat{z}_k \in [Z, z^i], \quad z^{\circ} \in [Z, \infty) \end{cases}$$

と定義し、積分核 $R^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ})$ を

$$R^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) = \sum_{j=1}^{\infty} K_n^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ})$$

と表そう。この時、積分方程式(32)の解は

$$\Phi_{\alpha}^{i,j}(\hat{z}_k) = f^{i,j}(\hat{z}_k) + \int_Z^{z^i} R^{i,j}(\hat{z}_k, z^{\circ}) f^{i,j}(z^{\circ}) dz^{\circ}$$

と表せる。明らかに、条件(32)が定義されるのは $\hat{z}_k \in [Z, z^i]$ の範囲である。

参考文献

- 1) 栗野盛光, 小林潔司, 渡辺晴彦: 不確実性下における最適補修投資ルール, 土木学会論文集, No.667/IV-50, pp.1-14, 2001.
- 2) 田村謙介, 小林潔司: 不確実性下における道路舗装の修繕ルールに関する研究, 土木計画学研究・論文集, No.18(1), pp.97-107, 2001.
- 3) 田村謙介・慈道充・小林潔司: 予算制約を考慮した道路舗装の修繕ルール, 土木計画学研究・論文集, Vol.19(1), pp.71-82, 2002.
- 4) 例えば, Heyman, D.P. and Sobel, M.J. (eds.): Stochastic Models, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 2, North-Holland, 1990.

- 5) 例えば, 三根久, 河合一: 信頼性・安全性の数理, 朝倉書店, 1982.
- 6) 三和雅史: 軌道保守施策の長期的最適化法, 土木計画学研究・講演集, No.21(2), pp.357-360, 1998.
- 7) 堤昌文, 梶木武: 道路の維持管理に関する計画的考察, 土木計画学研究講演集, No.18(2), pp.405-408, 1995.
- 8) 黒田勝彦, 内田敬: 土木構造物の修繕・更新モデル, 土木計画学研究・講演集, No.11, pp.117-124, 1988.
- 9) 深井俊英: 道路施設の修繕と取替の判定に関するシステム論的考察, 土木計画学研究・講演集, No.5, pp.27-32, 1982.
- 10) 内田弘, 召田紀雄: 地方道における長期修繕計画の立案, 土木学会論文集, No.597/IV-40, pp.21-31, 1998.
- 11) Scarf, H.: The optimality of (S,s) policies in the dynamic inventory problem, In: Arrow, K. J., Karlin, S., and Suppes, P. (eds.): *Mathematical Methods in the Social Sciences*, pp. 196-202, Stanford University Press, 1960.
- 12) Constantinides, G. and Richard, S.: Existence of optimal simple policies for discounted-cost inventory and cash management in continuous time, *Operations Research*, Vol. 26, pp. 620-636, 1978.
- 13) Suelm, A.: A solvable one-dimensional model of a diffusion inventory system, *Mathematical Operations Research*, Vol. 11, pp. 125-133, 1986.
- 14) 例えば, White, D.J.: *Markov Decision Process*, Wiley, pp.130-146, 1993.
- 15) 例えば, Eckles, J.E.: Optimal maintenance with incomplete information, *Operations Research*, Vol.16, pp.1058-1067, 1968.
- 16) Madanat, S.: Incorporating inspection decisions in pavement management, *Transportation Research*, Part B, Vol.27B, pp.425-438, 1993.
- 17) Madanat, S. and Ben-Akiva, M.: Optimal inspection and repair policies for infrastructure facilities, *Transportation Science*, Vol.28, pp.55-62, 1994.
- 18) Øksendal, B.: *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th ed., Springer-Verlag, 1998, 谷口説男訳, 確率微分方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.
- 19) Bensoussan, A. and Lions, J. L.: *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities*, Gauthier-Villars, 1984.
- 20) 溝畑茂: 積分方程式入門, 朝倉書店, 1968.
- 21) 近藤次郎: 積分方程式とその応用, コロナ社, 1959.
- 22) 上村豊: 積分方程式-逆問題の視点から-, 共立出版, 2001.
- 23) たとえば, 今野浩, 山下浩: 非線形計画法, 日科技連, 1978.
- 24) Durango, P. and Madanat, S.: Optimal maintenance and repair policies for infrastructure facilities under uncertain deterioration rates: An adaptive control approach, *Transportation Research*, Part A, Vol. 36, pp.763-778, 2002.

(2002. 11. 13 受付)

THE OPTIMAL REPAIRING AND INSPECTION RULES UNDER UNCERTAINTY

Mitsuru JIDO and Kiyoshi KOBAYASHI

This paper focuses upon the optimal repair and inspection policies of public facilities under uncertainty. The deterioration processes of the facilities are supposed to be partially observable by inspection. The optimal impulse control problem is formulated to find out the optimal timing for inspection and repairing so as to minimize the expected life cycle costs. The state dependent rules are presented to determine the optimal timing for inspection and repairing based upon the observation of deterioration levels. The paper is concluded by illustrating numerical examples.