

せん断帯分岐モードと強不連続変形の有限変形解析

山川 優樹¹・池田 清宏²・寺田 賢二郎³・佐藤 啓介⁴・鳥居 邦夫⁵

¹正会員 工博 長岡技術科学大学助手 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

²正会員 Ph.D. 東北大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

³正会員 Ph.D. 東北大学助教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

⁴学生会員 工修 長岡技術科学大学 大学院工学研究科材料工学専攻 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

⁵正会員 工博 長岡技術科学大学教授 環境・建設系 (〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

本研究では、材料不安定による不連続せん断帯分岐モードの発生と、それに起因する不連続変位場の進展の有限変形有限要素解析を行った。不連続変形の運動学とその発生条件について述べた上で、有限変形境界値問題と有限要素法の定式化を行った。不連続変位を非適合な拡張自由度として導入する手法を用いて、有限要素法で不連続変位場の進展を運動学的に考慮に入れた。一様な応力・変形場における不連続面の発生条件を調べ、関連流れ則に従うひずみ硬化型材料でもせん断帯が発生しうることを確認した。また、供試体のせん断帯進展解析を行った。不連続変位場を導入した有限要素法による解析結果と、ひずみ軟化型モデルを導入した変位法有限要素法による解析結果との比較を行い、局所化解析における不連続場の運動学的考慮の重要性を示した。

Key Words : shear band bifurcation mode, strong discontinuity, material instability, strain localization, enhanced assumed strain finite element method

1. はじめに

地盤材料の局所の変形現象を論じる際には「せん断帯」という用語が頻繁に用いられる。多くの場合、この呼び方はひずみ集中域やすべり面等を指して広い意味で用いられており、運動学的には曖昧さを含んでいる。弾塑性分岐は、Hill and Hutchinson¹⁾の研究で検討されているように、「拡散型分岐モード」と「不連続せん断帯分岐モード」とに大別される。前者の拡散型分岐モードは支配方程式が楕円型の領域でも発生し、主として系全体の幾何学的不安定性に関わり、供試体の全体的な変形モードを支配するものである。その発生条件は境界条件や供試体形状に依存する¹⁾、一方、後者の不連続せん断帯分岐モードは支配方程式の楕円性喪失により発生し、変位あるいはひずみ(速度)場の不連続性をもたらすものである。その発生条件は前者と異なり境界条件や供試体形状には依存せず^{1),2),3)}、材料自身の特性として構成関係のみによって決定付けられる材料不安定現象と言える。こうした弾塑性分岐の分類を考えることにより、地盤材料の局所化問題における運動学的なメカニズムがより明確となる。拡散型分岐と不連続せん断帯分岐の模式図を、図-1に示す。

地盤材料の局所変形現象に関しては、実験、理論、数値解析の各方面から多くの研究が行われている。Drescher and Vardoulakis⁴⁾は要素試験における荷重不安定挙動は局所変形の発生に起因するものとし、これを“geometric softening”と呼んだ。また、解析的理論解

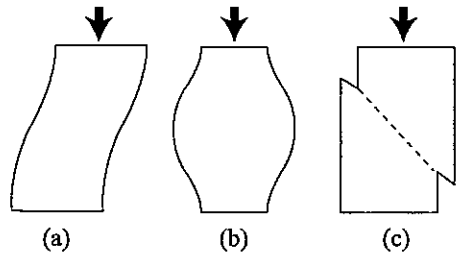


図-1 拡散型分岐 (a), (b) と不連続せん断帯分岐 (c)

を求める研究も行われており、Yatomi and Shibi⁵⁾はCam-clayの円柱供試体や平面ひずみ供試体について、塑性ひずみ速度の非共軸性に関する検討も含めつつ分岐荷重・分岐モード解析を行っているほか、供試体形状の影響も志比ら⁶⁾により検討されている。数値解析では、Yatomi et al.^{7),8)}は非共軸Cam-clayの変形局所化の解析を行っており、Oka et al.⁹⁾は軟化型粘塑性モデルを用いた解析を行っている。また、土骨格・間隙水連成有限要素法を用いた研究が行われており、Asaoka and Noda¹⁰⁾は初期不整の影響による供試体強度や変形モードの変動について検討し、間隙水の移動の重要性を示している。小林ら¹¹⁾は、供試体が次第に低次の変形モードへと漸次的に遷移していく様子の再現に成功している。著者らもこれまで、供試体の分岐挙動、その後の変形局所化と荷重不安定挙動、パスジャンプ挙動について研究を行ってきた¹²⁾。これらの研究は、いづれも拡散型分岐に起因する各種変形モードの発生と、

その後のひずみ集中現象を扱ったものである。

一方、不連続せん断帯分岐モードについては、Hill and Hutchinson¹⁾, Rudnicki and Rice³⁾ 等により古典的解析的手法による研究が行われた。しかし、数値解析的な研究は最近になって行われ始めたばかりである。この先駆的研究として、Ortiz et al.¹³⁾ は変位法に基づく一般的な有限要素法では表現不可能な不連続ひずみ場を非適合モードとして有限要素法に導入する手法を開発した。その後、Enhanced Assumed Strain Method 等と呼ばれる高性能要素の開発^{14),15)} に伴い、この手法に準じた不連続変位場の導入が行われるようになってきている^{16)~27)}。この手法は強不連続 (strong discontinuity) 解析と称され、最近では精度検証²⁸⁾ や比較・評価や体系化²⁹⁾ も行われている。強不連続問題の模式図を 図-2 に示す。強不連続解析法は、ひずみ局所化問題や不連続せん断帯分岐の数値解析に対して有用な手法である。しかしながら、強不連続解析に関する既往の研究の多くは微小変形理論の範疇に留まっており、有限変形の考慮は、不連続場の運動学や局所化条件の定式化^{26),30)} においては多く行われているものの、変形解析では Armero and Garikipati¹⁹⁾, Borja²³⁾ などが行っているだけである。本来、分岐現象は幾何学的非線形現象であり、拡散型分岐はもちろんのこと、不連続せん断帯分岐を論じる際にも有限変形の考慮は不可欠である²³⁾。

地盤材料のせん断帯については、その幅と粒子径との関連についても議論があり、一般にせん断帯は粒子の数个分の有限な幅を有することが観察されている。解析モデル化においては、有限幅と考慮して変位場は連続で、ひずみ場は不連続で有界とする弱不連続の解析法も提案されている^{31),32)}。この場合には、せん断帯の幅 h をパラメータとして規定する必要がある。一方、本研究で取り扱う強不連続解析では $h \rightarrow 0$ とした幅ゼロのせん断帯 (すべり面) を考慮していることとなるが、このとき変位場は不連続で、ひずみ場は非有界で特異分布となる。しかしながら、弱不連続・強不連続の双方ともに解析モデル化の対象としている実現現象はほぼ共通であり、解析モデル化の観点からすると、前者でスケール・パラメータとしての役割をなす h を規定するか、後者で非有界な場を取り扱うかという定式化の手續きの相異に過ぎないと考えられる。

本研究では、近年の弾塑性有限変形理論で主流である変形勾配の乗算型分解と超弾性構成式に基づく弾塑性材料 (multiplicative hyperelasto-plastic material) を対象として、不連続変位場の運動学から無理なく導出される不連続せん断帯分岐の発生条件について簡潔に述べる。また、不連続変位場を含む有限変形境界値問題、およびその有限要素法の定式化を行う。非線形解析において解析の安定性・収束性を確保するためには、非線形つり合い式の線形化を正確に行うこと、および

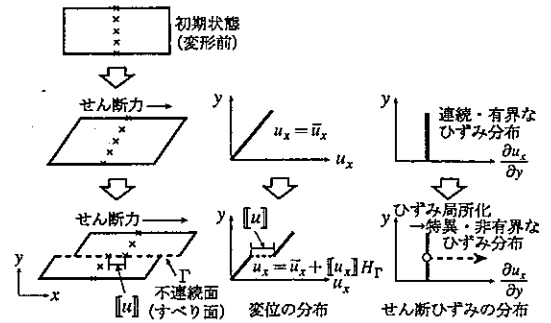


図-2 強不連続問題の簡単な例 (単純せん断問題)

反復解法の手続きが重要となる。本論文では、文献¹⁹⁾ では示されていないこれらの定式化についても詳細に記述する。不連続せん断帯分岐の発生条件に基づき、一様応力・変形場が持続する完全供試体における不連続せん断帯分岐発生条件の判定解析を行う。さらに、不連続変位場を導入した有限要素法を用いて供試体のせん断帯進展解析を行う。初期不整を導入した解析により、不均一な応力・変形場の発生から、せん断帯を形成し、不連続なすべり変形が進展していく一連の過程を再現するとともに、拡散型分岐と不連続せん断帯分岐との関係について疑似分岐解析的に検討する。また、従来のひずみ軟化型モデルを用いた通常の有限要素法による解析結果との比較を行い、本解析手法は、メッシュサイズ依存性が少なく客観性ある解析結果を与え、ひずみ軟化を伴う塑性不安定・局所化解析に対して有用であることを示す。

2. 不連続変形の運動学

本章では、有限変形を考慮した不連続変形の運動学について述べる。変位場に不連続性を含む場合について、変形勾配や速度勾配を導く。定式化の詳細は文献^{19),26),30)} に述べられているので、ここではその成果を適宜引用しつつ、のちの定式化に必要な部分を述べる。

(1) 不連続性を有する変位場と変形勾配

物体 $B \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ 中の物質点 $X \in B$ における運動を表す写像を $\varphi(X) : B \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ とする。点 $X_\Gamma \in B$ で連続変位 $\bar{u}(X)$ と、不連続面 $\Gamma \subset B \cap \mathbb{R}^{n_{dim}-1}$ を横切る不連続変位 $[[u]]$ が生じる状態を考える。点 X_Γ の近傍領域 $\Omega_\Gamma \subset B$ は Γ により 2 領域に分割され、不連続面 Γ の基準配置における単位法線 N_Γ 向きにある方を Ω_Γ^+ 、他方を Ω_Γ^- とする。以下では $X_\Gamma^+ \in \Omega_\Gamma^+$, $X_\Gamma^- \in \Omega_\Gamma^-$ とし、ある諸量の不連続量を $[[\cdot]] = (\cdot)|_{X_\Gamma^+} - (\cdot)|_{X_\Gamma^-}$ と表すこととする。運動の連続部分 $\bar{\varphi}(X)$ は、

$$\bar{\varphi}(X) = X + \bar{u}(X) \quad (1)$$

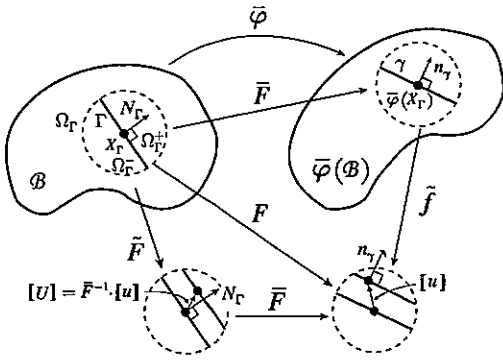


図-3 変位場に不連続性を含む場合の運動学的な概念図

と表される。従って、変形勾配 $F := \varphi \otimes \nabla_X$ ，変位勾配 $H := \mathbf{u} \otimes \nabla_X$ の連続部分はそれぞれ、

$$\bar{F} = \bar{\varphi} \otimes \nabla_X = 1 + \bar{H}, \quad \bar{H} = \bar{\mathbf{u}} \otimes \nabla_X \quad (2)$$

となる。点 $X_\Gamma \in B$ において不連続面 $\Gamma \subset B \cap \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}-1}$ を横切る不連続変位 $[[\mathbf{u}]]$ が生じた状態を考えると、全運動 $\varphi(X)$ は、

$$\varphi(X) = X + \bar{\mathbf{u}}(X) + [[\mathbf{u}]](X)H_\Gamma(X) \quad (3)$$

と表される。 $H_\Gamma(X)$ は Heaviside 関数であり、

$$H_\Gamma(X) = \begin{cases} 0 & \text{if } X \in \Omega_\Gamma^- \\ 1 & \text{if } X \in \Omega_\Gamma^+ \end{cases} \quad (4)$$

と表される。不連続面 Γ が滑らかであると仮定すると、運動の連続部分 $\bar{\varphi}(X)$ ，不連続変位 $[[\mathbf{u}]]$ ，不連続面の方向 N_Γ (単位法線) は、領域 Ω_Γ 内で一定と考えて差し支えない。この場合、変形勾配は、

$$F = \bar{F} + \delta_\Gamma [[\mathbf{u}]] \otimes N_\Gamma \quad (5)$$

と与えられる。Dirac デルタ関数 δ_Γ は超関数として、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\Gamma} \mathbf{a}(X) \cdot \nabla_X H_\Gamma(X) dV &= \int_{\Omega_\Gamma} \mathbf{a}(X) \cdot \delta_\Gamma N_\Gamma dV \\ &= \int_\Gamma \mathbf{a}(X) \cdot N_\Gamma d\Gamma, \quad \forall \mathbf{a}(X) \in [C_0^\infty(\Omega_\Gamma)]^{n_{\text{dim}}} \end{aligned} \quad (6)$$

と定義される。ここで $\mathbf{a}(X)$ は領域 Ω_Γ 上で理想的に滑らかな任意のベクトル場である。従って、

$$\int_{\Omega_\Gamma} \delta_\Gamma dV = \int_\Gamma d\Gamma = S_\Gamma \quad (7)$$

という関係が成り立つ。ここで S_Γ は領域 Ω_Γ を横切る不連続面 Γ の面積である。式 (3), (5) の時間微分を取るとそれぞれ、

$$\dot{\varphi}(X) = X + \dot{\bar{\mathbf{u}}}(X) + [[\dot{\mathbf{u}}]]H_\Gamma(X), \quad (8)$$

$$\dot{F} = \dot{\bar{F}} + \delta_\Gamma [[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes N_\Gamma \quad (9)$$

となる。ここでは $\dot{N}_\Gamma = 0$ であることを用いている。

(2) 変形勾配の乗算型分解と速度勾配の加算分解

式 (5) の変形勾配 F を連続部分 \bar{F} と不連続部分 \bar{F} とに乗算型分解し、

$$F = \bar{F} \cdot \bar{F} \quad (10)$$

と表すと²⁶⁾，不連続部分 \bar{F} は、

$$\bar{F} = 1 + \delta_\Gamma [[U]] \otimes N_\Gamma \quad (11)$$

と与えられる。ここでは、

$$[[U]] := \bar{F}^{-1} \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (12)$$

と定義している。さらに、式 (11) を時間微分すると、

$$\dot{\bar{F}} = \delta_\Gamma [[\dot{U}]] \otimes N_\Gamma \quad (13)$$

となるが、ここで $[[\dot{U}]]$ を詳しく調べると、

$$[[\dot{U}]] = (\bar{F}^{-1} \cdot [[\mathbf{u}]])^\cdot = \bar{F}^{-1} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (14)$$

となる。ここで、速度勾配の連続部分 \bar{l} および $[[\mathbf{u}]]$ の客観速度 $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ をそれぞれ、

$$\bar{l} := \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1} = -\bar{F} \cdot (\bar{F}^{-1})^\cdot, \quad (15)$$

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] := [[\dot{\mathbf{u}}]] - \bar{l} \cdot [[\mathbf{u}]] \quad (16)$$

と定義しているが、式 (12), (14) より、

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \bar{F} \cdot [[\dot{U}]] = \bar{F} \cdot (\bar{F}^{-1} \cdot [[\mathbf{u}]])^\cdot = \mathcal{L}_v [[\mathbf{u}]] \quad (17)$$

となり、式 (16) で定義した客観速度 $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ は Lie 微分 $\mathcal{L}_v [[\mathbf{u}]]$ と等価である。なお、不連続場発生の瞬間では $[[\mathbf{u}]] = 0$, $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq 0$ であり、式 (16) は $[[\dot{\mathbf{u}}]] = [[\dot{\mathbf{u}}]]$ となる。従って、不連続場の発生条件を議論する際には変位速度 $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ を用いることができ、客観速度 $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ を導入する必要は必ずしも無い。しかし、不連続場の発生後は $[[\mathbf{u}]] \neq 0$ であり、 $[[\mathbf{u}]]$ に対する連続変形 \bar{F} の影響により、式 (16) 右辺第 2 項があらわれる。従って本論文のように不連続場の発生後も取り扱う場合には、客観速度 $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ を導入する必要がある^{23), 26)}。

式 (10) とは異なる形式で、

$$F = \bar{f} \cdot \bar{F} \quad (18)$$

と乗算型分解することもできる¹⁹⁾。不連続部分 \bar{f} は、

$$\bar{f} = 1 + \delta_\Gamma [[\mathbf{u}]] \otimes n_\gamma \quad (19)$$

と与えられる。ここで n_γ は、現配置表記の不連続面 $\gamma := \bar{\varphi}(\Gamma)$ の法線 (\bar{F} のストレッチ成分により必ずしも $\|n_\gamma\| = 1$ ではない) であり、

$$n_\gamma := N_\Gamma \cdot \bar{F}^{-1} = \bar{F}^{-T} \cdot N_\Gamma \quad (20)$$

と定義している。以上で述べた、不連続変形の運動学的な概念図を、図-3 に示す。

次に不連続部分を含んだ速度勾配 l を求める。式 (10) の乗算型分解、および式 (13), (17), (20) を用いて、

$$l := \left(\dot{F} \cdot F^{-1} \right) \Big|_{F=\bar{F}} = \dot{\bar{F}} \cdot \bar{F}^{-1} + \delta_\Gamma \mathcal{L}_v [[\mathbf{u}]] \otimes n_\gamma \quad (21)$$

となる。不連続部分 \bar{l} を、

$$\bar{l} := \delta_{\Gamma} \mathcal{L}_v[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n}_{\gamma} \quad (22)$$

と定義すると、式 (15), (21), (22) より速度勾配 l は、

$$l = \bar{l} + \tilde{l} \quad (23)$$

と加算分解の形式で表すことができる。

3. 不連続せん断帯分岐の発生と不連続変位場の進展

本章では、変形勾配の乗算型分解と超弾性構成式および関連流れ則に従う弾塑性材料^{33),34)}を対象とした、不連続せん断帯分岐の発生条件（局所化条件）について述べる。供試体全体の変形モードに関わる拡散型分岐¹²⁾とは異なり、不連続せん断帯分岐の発生条件は境界条件や供試体形状に依存せず、分岐発生の瞬間における連続体の構成関係と応力状態とにより規定される^{1),2)}。有限変形理論に基づく局所化条件については、文献^{26),30)}に詳細な記述があるため、局所化条件の導出過程は補遺 I に示し、ここではその結果とせん断帯分岐後の不連続変位の進展について述べるにとどめる。

(1) 局所化条件

第 2 章で述べたように、変位場の不連続性が生じた場合には変形勾配や速度勾配は非有界で特異分布となるが、応力は有界である。また、不連続面 Γ の両側 (Ω_{Γ}^{+} と Ω_{Γ}^{-}) で力はつり合っていないてはならない。従って、不連続せん断帯分岐の発生条件、すなわち局所化条件は、発生すると考えられる不連続面 Γ における公称応力ベクトル $T_{\Gamma} = P \cdot N_{\Gamma}$ およびその時間微分 $\dot{T}_{\Gamma} = \dot{P} \cdot N_{\Gamma}$ の連続性・有界性から導出される。補遺 I に示す式 (I.15) より局所化条件式は、

$$q^{ep} \cdot \mathcal{L}_v[\mathbf{u}] = 0 \quad (24)$$

と与えられる。ここで q^{ep} は弾完全塑性接線係数 $\bar{\mathbf{a}}^{ep}$ に関するアコースティック・テンソルであり^{19),26)}、式 (I.16) の様に定義される。 $\bar{\mathbf{a}}^{ep}$ は弾塑性接線係数において硬化係数を $H(\xi) = 0$ としたもので、その具体形は文献³³⁾を参照されたい。式 (I.15) で非自明解 $\mathcal{L}_v[\mathbf{u}] \neq 0$ が生じうる条件は、

$$\det[q^{ep}] = 0 \quad (25)$$

と与えられ、この条件を満たした時、 q^{ep} のゼロ固有値に対応する固有ベクトルとして $\mathcal{L}_v[\mathbf{u}]$ の方向が求められる。局所化条件式 (24) は、不連続変位速度場が生じるための必要条件であり、不連続場が生じうる分岐の可能性を示唆するに過ぎない。しかし、有限要素法による局所化解析においてこの条件式を適用するにあたっては、本論文では局所化条件が満たされた場合には必ず不連続場を生じるものとして解析を進めることとし

ており、第 6 章の数値解析でもそのように適用している。すなわち、有限要素法での局所化発生の判定において、式 (24) を必要十分条件として適用していることとなるが、その正当性については検討の余地がある。

(2) 局所化発生後の不連続変位の進展

前節で示した局所化条件によって議論できるのは、連続体の構成関係に基づく局所化発生時点までである。それ以降の不連続変位場が進展していく段階では、連続体の構成関係から離れて別の構成関係として考える必要がある。Oliver³⁵⁾は、局所化が次第に進行して弱不連続から強不連続状態へと遷移する過程を考察し、「不連続変位-表面力関係」としての不連続面の構成式について議論している。

不連続変位速度 $\mathcal{L}_v[\mathbf{u}]$ の進展は、モード I, II, III (それぞれ、引張り開口・面内せん断・面外せん断に相当) といった分類が一般になされる。地盤材料の局所変形挙動では、一般にせん断に伴うダイレイタンスーを示す。しかしながら、明瞭な不連続すべり面を形成し、残留強度を発揮しつつ大きくなすべり変位が進行する状況では、もはや連続変形時とは異なり、モード II に近い挙動と考えられる^{19),23)}。基準配置での Γ の単位接線 M_{Γ} ($M_{\Gamma} \perp N_{\Gamma}$, $\|M_{\Gamma}\| = 1$) を現配置表記して、

$$m_{\gamma}^{\sharp} := \bar{F} \cdot M_{\Gamma} \quad (26)$$

と表すと、これは現配置の法線 n_{γ} と直交する ($m_{\gamma}^{\sharp} \perp n_{\gamma}$)。接線 m_{γ}^{\sharp} に沿う方向のみに $[\mathbf{u}]$ が進展する場合 (すなわち $\mathcal{L}_v[\mathbf{u}]$ の方向 s が m_{γ}^{\sharp} と平行な場合) には、 $[\mathbf{u}]$, $\mathcal{L}_v[\mathbf{u}]$ の大きさをそれぞれ ζ , $\dot{\zeta}$ として、

$$[\mathbf{u}] = \zeta m_{\gamma}^{\sharp}, \quad \mathcal{L}_v[\mathbf{u}] = \dot{\zeta} m_{\gamma}^{\sharp} \quad (27)$$

と表される。第 6 章の数値解析では、不連続変位の進展方向をこのように接線 m_{γ}^{\sharp} 方向に限定して解析を行っている。

4. 有限変形境界値問題の定式化と非適合モードの導入

有限要素法への不連続変位場の導入に先立ち、有限変形境界値問題の定式化と非適合モードの導入について述べる。非適合モードの表現のために開発された Enhanced Assumed Strain (EAS) 有限要素法^{14),15)}に準じ、汎関数の変分原理から出発し、支配方程式を導く。

(1) Hu-Washizu 汎関数への非適合モードの導入

不連続変位による非有界なひずみ場を非適合モードとして有限要素法に導入するため、変形勾配 F 、変位勾配 H に拡張項 \tilde{H} を導入し、

$$F = \bar{F} + \tilde{H} = 1 + H, \quad H = \bar{H} + \tilde{H} \quad (28)$$

という拡張を行う。 \bar{F} , \bar{H} は連続変形に相当する適合部分であり、式 (2) のように与えられる。また、 \bar{H} は非有界なひずみ場の表現のため拡張的に導入された変位勾配の非適合部分である。

有限変形を考慮した u , H , P を場の変数とする一般的な Hu-Washizu 汎関数¹⁵⁾ $\Pi(u, H, P)$ に式 (28) を代入したものを、

$$\bar{\Pi}(\bar{u}, \bar{H}, P) := \Pi(u, \bar{H} + \bar{H}, P) \quad (29)$$

と定義し、汎関数の停留条件 $\delta\bar{\Pi} = 0$ を考えると、

$$\int_B (\delta\bar{u} \otimes \nabla_X) : P \, dV - \int_B \rho_0 b^* \cdot \delta\bar{u} \, dV - \int_{\partial_t B} T^* \cdot \delta\bar{u} \, dS = 0, \quad (30)$$

$$\int_B \delta P : \bar{H} \, dV = 0, \quad (31)$$

$$\int_B \delta \bar{H} : \left(2F \cdot \frac{\partial \mathcal{W}(C)}{\partial C} - P \right) \, dV = 0 \quad (32)$$

という 3 つの支配方程式が弱形式で得られる。ここで $\mathcal{W}(C)$ は超弾性ポテンシャル関数、 $C := F^T \cdot F$ は右 Cauchy-Green 変形テンソルである。領域 B の境界 ∂B に課される幾何学的・力学的境界条件はそれぞれ、

$$u = u^* \text{ on } \partial_u B, \quad T = T^* = P^* \cdot N \text{ on } \partial_t B \quad (33)$$

と与えられる。 u^* は $\partial_u B \subset \partial B$ で与えられる変位、 T^* は $\partial_t B \subset \partial B$ で与えられる公称表面力、 N は $\partial_t B$ の外向き単位法線である。 ρ_0 は基準配置での物体の質量密度、 b^* は単位質量に作用する物体力である。また $\delta\bar{u}$, $\delta\bar{H}$, δP は場の変数の任意の可容変分である。EAS 法では応力場 P と非適合ひずみの可容変分 $\delta\bar{H}$ の場の空間の直交性が条件として課され^{14), 15)}、式 (31) は

$$\int_B P : \delta\bar{H} \, dV = 0 \quad (34)$$

と書き改められる²⁰⁾。さらに、領域 B 内で一樣な応力場 P も解として可容でなくてはならないから³⁶⁾、

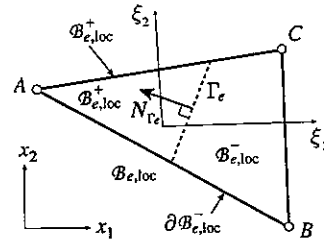
$$P : \left[\int_B \delta\bar{H} \, dV \right] = 0 \Rightarrow \int_B \delta\bar{H} \, dV = \mathbf{0} \quad (35)$$

を満足するように可容変分 $\delta\bar{H}$ の形式を定めなければならない。以上で導出した式 (30), (32), (34) はそれぞれ、つり合い式、超弾性構成式、非適合モードと応力との直交性条件を与える。

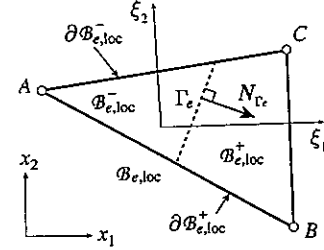
(2) 弱形式の支配方程式の空間表記への変換

前節 4.(1) では物質表記 (基準配置参照型) の支配方程式を導出したが、実際の解析では空間表記 (現配置参照型) が有利である。ここでは支配方程式の諸量を空間表記に書き改めるため、変換

$$\begin{aligned} \tau &= P \cdot F^T, & \delta\tau &= \delta P \cdot F^T, \\ \bar{h} &= \bar{H} \cdot F^{-1}, & \delta\bar{h} &= \delta\bar{H} \cdot F^{-1} \end{aligned} \quad (36)$$



(a) Type-1



(b) Type-2

図-4 不連続面 Γ_e により領域を二分される三角形要素

を用いる。この変換により、式 (30), (34) はそれぞれ、

$$\int_B (\delta\bar{u} \otimes \tilde{\nabla}) : \tau \, dV - \int_B \rho_0 b^* \cdot \delta\bar{u} \, dV - \int_{\partial_t B} T^* \cdot \delta\bar{u} \, dS = 0, \quad (37)$$

$$\int_B \tau : \delta\bar{h} \, dV = 0 \quad (38)$$

と書き改められる。ここでは演算子 $\tilde{\nabla}$ を、

$$(\cdot) \otimes \tilde{\nabla} := [(\cdot) \otimes \nabla_X] \cdot F^{-1} \quad (39)$$

と定義している。以降で行う線形化や有限要素離散化の手続きはこれら空間表記をもとに行う。

5. 不連続変位場を導入した有限要素法

第 3 章に示した局所化条件式により不連続変位 $[[u]]$ の発生が判定された場合、それ以降、要素の拡張自由度として不連続変位を考慮に入れる。この方法は強不連続 (strong discontinuity) 解析法と称されるもので、ここでは有限変形問題に拡張した定式化を行う。

(1) 有限要素への不連続変位場の導入

ここでは、不連続変位 $[[u]]$ の運動学的な考察から出発し、有限要素の形状関数の具体的な形式を導く。要素 $B_{e,loc}$ において、局所化条件式 (I.15) により法線 $N_{\Gamma_e} = \bar{F}^T \cdot n_{\gamma_e}$ 方向の不連続面 Γ_e の発生が判定されたとする。不連続面 Γ_e は要素 $B_{e,loc}$ を横切って 2 領域に分けるが、そのうち法線 N_{Γ_e} 方向にある領域を $B_{e,loc}^+$ 、もう一方を $B_{e,loc}^-$ とする。なお、ここでは要素ごと個別に Γ_e を考えるため、要素 $B_{e,loc}$ は第 2 章で定義した領域

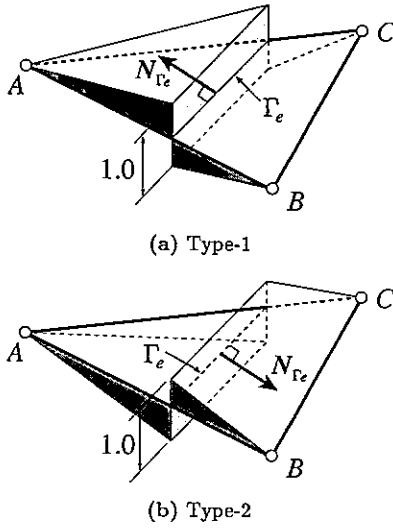


図-5 要素内における関数 $M_{\Gamma_e}(X)$ の様子 (3CST の場合)

Ω_{Γ} に相当する。また、ここでは三角形要素 (3CST) に限定して述べるが、他のタイプの要素でも定式化は可能である^{20),21),22)}。3CST の場合は図-4 に示すように、領域の分け方は法線 N_{Γ_e} の向きによって (a) Type-1, (b) Type-2 の 2 通りある。領域分割によって孤立した節点を A, 他の節点を B, C とする。

a) 要素における不連続変位の表現と非適合な変位勾配局所化が発生した要素 $B_{e,loc}$ 内の変位場 u_e を、

$$u_e(X) = \bar{u}_e(X) + [u_e]M_{\Gamma_e}(X) \quad (40)$$

と表す。ここで形状関数 $M_{\Gamma_e}(X)$ は、

$$M_{\Gamma_e}(X) = H_{\Gamma_e}(X) - f_e(X) \quad (41)$$

なる形式で与えることができる²⁰⁾。関数 $f_e(X)$ は、

$$f_e(X) = \begin{cases} 1 & \text{at node on } \partial B_{e,loc}^+ \\ 0 & \text{at node on } \partial B_{e,loc}^- \end{cases} \quad (42)$$

なる条件を満たす形状関数である。形状関数 $M_{\Gamma_e}(X)$ の様子を Type-1, Type-2 について図-5 に示す。

以上述べた、要素 $B_{e,loc}$ における不連続変形の運動学的考察と形状関数の定義により、変形勾配 F_e は不連続変位による非適合部分を含んだ形で、

$$F_e = \bar{F}_e + \bar{H}_e \quad (43)$$

と表される。第 1 項の \bar{F}_e は適合部分であり、

$$\bar{F}_e = 1 + \bar{H}_e = 1 + \bar{u}_e \otimes \nabla_X \quad (44)$$

と与えられ、 \bar{u}_e は要素節点変位を用いて内挿される。

第 2 項の \bar{H}_e は非適合部分で、式 (40), (41) より、

$$\bar{H}_e = [u_e] \otimes [\delta_{\Gamma_e} N_{\Gamma_e} - \nabla_X f_e(X)] \quad (45)$$

と与えられる。なお、第 2 章での仮定と同様に、不連続面 Γ_e の方向 N_{Γ_e} および不連続変位 $[u_e]$ は要素 $B_{e,loc}$

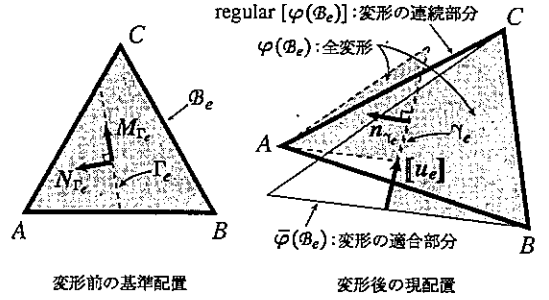


図-6 有限要素に組み込まれた不連続変形の運動学的な概念図

内で一定と仮定している。すなわち、非適合部分では隣接要素間の連続性は保証されなくてもよい。

以上では、変形勾配 F_e を適合・非適合部分に分けて考えたが、Dirac デルタ関数 δ_{Γ} を含むか否かにより、

$$F_e = \text{regular}[F_e] + \text{singular}[F_e], \quad (46)$$

$$\text{regular}[F_e] := 1 + \bar{u}_e \otimes \nabla_X - [u_e] \otimes \nabla_X f_e(X), \quad (47)$$

$$\text{singular}[F_e] := [u_e] \otimes \delta_{\Gamma} N_{\Gamma_e} \quad (48)$$

のように有界・連続部分と非有界・特異部分とに分けることもできる。局所化した要素 $B_{e,loc}$ 以外の要素 B_e では、 $[u_e] = 0$ であり $F_e = \text{regular}[F_e] = \bar{F}_e$ となる。この考え方より、式 (39) で定義した演算子 $\bar{\nabla}$ は、

$$(\cdot) \otimes \bar{\nabla}(\text{regular}) := [(\cdot) \otimes \nabla_X] \cdot (\text{regular}[F])^{-1} \quad (49)$$

と改められる。以上述べた、適合・非適合部分、または連続・特異部分の運動学的な概念図を図-6 に示す。

第 4.(2) 節と同様に、 \bar{H}_e を空間表記に変換すると、

$$\begin{aligned} \bar{h}_e &= \bar{H}_e \cdot (\text{regular}[F_e])^{-1} \\ &= [u_e] \otimes \delta_{\Gamma_e} n_{\Gamma_e} - [u_e] \otimes [\bar{\nabla}(\text{regular}) f_e(X)] \end{aligned} \quad (50)$$

となる。

b) 非適合な変位勾配の可容変分

第 4.(1) 節で述べたように、可容変分 $\delta \bar{H}_e$ には式 (35) の条件が要請される³⁶⁾。しかし、運動学的考察から導かれる式 (45) と同形式の可容変分を仮定すると、条件を満たさない。そこで可容変分として、

$$\delta \bar{H}_e = -\frac{S_{\Gamma_e}}{V_e} (\delta [u_e] \otimes N_{\Gamma_e}) + \delta_{\Gamma_e} (\delta [u_e] \otimes N_{\Gamma_e}) \quad (51)$$

という形式を用いることにより、条件 (35) を満たすことができる^{19),20)}。ただし、こうした形式の可容変分を用いることにより、つり合い式を線形化・離散化した結果得られる接線剛性マトリックスは非対称となる。ここで $\delta [u_e]$ は $[u_e]$ の可容変分、 S_{Γ_e} は要素 $B_{e,loc}$ を横切る Γ_e の基準配置での面積、 V_e は要素 $B_{e,loc}$ の基準配置での体積である。すなわち、

$$\int_{B_{e,loc}} \delta_{\Gamma_e} dV = \int_{\Gamma_e} d\Gamma = S_{\Gamma_e}, \quad \int_{B_{e,loc}} dV = V_e \quad (52)$$

である。ただし 2 次元問題の場合には、 S_{Γ_e} , V_e はそれぞれ Γ_e の長さや $B_{e,loc}$ の面積となる。さて、ここ

でも式 (50) と同様に, $\delta\hat{H}_e$ を空間表記に変換すると,

$$\begin{aligned}\delta\hat{h}_e &= \delta\hat{H}_e \cdot (\text{regular}[F_e])^{-1} \\ &= -\frac{S_{\Gamma_e}}{V_e} (\delta[u_e] \otimes n_{\gamma_e}) + \delta[u_e] \otimes \delta_{\Gamma_e} n_{\gamma_e}\end{aligned}\quad (53)$$

となる.

(2) 局所化が発生した要素 $B_{e,\text{loc}}$ のつり合い式

式 (53) の可変分を式 (38) に代入し, さらに可変分 $\delta[u_e]$ の任意性を考慮すると,

$$-\frac{1}{V_e} \int_{B_{e,\text{loc}} \setminus \Gamma_e} \tau_e \cdot n_{\gamma_e} dV + T_{\Gamma_e} = 0 \quad (54)$$

という, 要素 $B_{e,\text{loc}}$ に関する空間表記の弱形式つり合い式が得られる. ここでは, 式 (52) を用いるとともに, 不連続面 Γ_e 上の公称応力ベクトル T_{Γ_e} について,

$$\tau_e|_{\gamma_e} \cdot n_{\gamma_e} = P_e|_{\Gamma_e} \cdot N_{\Gamma_e} = T_{\Gamma_e} \quad (55)$$

なる関係を用いている. 式 (54) には δ_{Γ_e} や S_{Γ_e} は含まれていない. 従って, 実際には Dirac デルタ関数 δ_{Γ_e} や不連続面の面積 S_{Γ_e} を陽に取り扱う必要はない.

(3) つり合い式の線形化と有限要素離散化

a) つり合い式の線形化

これまでの定式化により, つり合い式 (37), (38) が導出された. Kirchhoff 応力 τ_e の対称性と式 (49) を考慮して, これらを再掲すると,

$$\begin{aligned}G_e &:= \int_{B_e} \text{sym}[\delta\bar{u}_e \otimes \tilde{\nabla}^{(\text{regular})}] : \tau_e dV \\ &\quad - \int_{B_e} \rho_{0e} b_e^* \cdot \delta\bar{u}_e dV - \int_{\partial_t B_e} T_e^* \cdot \delta\bar{u}_e dS = 0,\end{aligned}\quad (56)$$

$$g_e := \int_{B_{e,\text{loc}}} \text{sym}[\delta\hat{h}_e] : \tau_e dV = 0 \quad (57)$$

である. これらの式は変位 \bar{u}_e , $[u_e]$ について非線形であるため, 線形化して反復解法により解く必要がある. ここでは, これらのつり合い式の線形化を行う. 線形化を行う際には, 時刻 t の配置を

$$\varphi_{e,t}(X) = X + \bar{u}_{e,t}(X) + [[u_{e,t}]] [H_{\Gamma_e}(X) - f_e(X)] \quad (58)$$

を基準とする. 時刻 t のつり合い式 (56) を形式的に,

$$G_{e,t} := G_e(\bar{u}_{e,t}, [[u_{e,t}]]; \delta\bar{u}_e, \delta[[u_e]]) = 0 \quad (59)$$

と書いておく. 反復の過程で, 不つり合い状態では式 (59) 右辺はゼロではなく残差が存在する. 反復解法で解くべき線形化つり合い式は,

$$G_{e,t} + D G_{e,t} [\Delta\bar{u}_e, \Delta[[u_e]]] = 0 \quad (60)$$

と表される. 式 (57) の g_e についても同様である. ここで $D G_{e,t}[\Delta\bar{u}_e, \Delta[[u_e]]]$ は, 変位増分 $[\Delta\bar{u}_e, \Delta[[u_e]]]$ に関する関数 $G_{e,t}$ の方向微分を意味する. この方向微分を求めるため, 時刻 t を基準として Δt 間における \bar{u}_e , $[u_e]$ の増分を $\Delta\bar{u}_e$, $\Delta[[u_e]]$ とし, 時刻 $t + \epsilon\Delta t$ にお

ける配置を,

$$\begin{aligned}\varphi_{e,t+\epsilon\Delta t}(X) &= X + (\bar{u}_{e,t}(X) + \epsilon\Delta\bar{u}_e(X)) \\ &\quad + ([[u_{e,t}]] + \epsilon\Delta[[u_e]]) [H_{\Gamma_e}(X) - f_e(X)]\end{aligned}\quad (61)$$

と定義する. また, 時刻 t から $t + \epsilon\Delta t$ までの間における相対変形勾配

$$\begin{aligned}f_{e,t}^{t+\epsilon\Delta t} &:= (\varphi_{e,t+\epsilon\Delta t} \otimes \nabla_X) \cdot (\varphi_{e,t} \otimes \nabla_X)^{-1} \\ &= F_{e,t+\epsilon\Delta t} \cdot F_{e,t}^{-1}\end{aligned}\quad (62)$$

を定義する. この有界・連続部分 $\text{regular}[f_{e,t}^{t+\epsilon\Delta t}]$ を $[\Delta\bar{u}_e, \Delta[[u_e]]]$ について線形化すると,

$$\begin{aligned}D(\text{regular}[f_{e,t}^{t+\epsilon\Delta t}]) [\Delta\bar{u}_e, \Delta[[u_e]]] \\ = \Delta\bar{u}_e(X) - \Delta[[u_e]] \otimes [\tilde{\nabla}_t^{(\text{regular})} f_e(X)]\end{aligned}\quad (63)$$

となる.

b) つり合い式の有限要素離散化

つり合い式 (56), (57) を有限要素離散化し, ベクトル・マトリックス形式で表す. ここでは, 式 (27) のように, 不連続変位は不連続面の接線 m_{γ}^{\sharp} 方向のみに進展する場合に限定して考える. まず, 式 (56) より,

$$R_e = F_e^{\text{int}} - F_e^{\text{ext}} = 0, \quad e = 1, \dots, n_{\text{elem}} \quad (64)$$

という要素 B_e に関するつり合い式を得る. 不つり合い状態では, 残差ベクトルは $R_e \neq 0$ である. ここで, 内カベクトル F_e^{int} , 外力ベクトル F_e^{ext} をそれぞれ,

$$F_e^{\text{int}} := \int_{B_e} b_e^T \tau_e dV, \quad (65)$$

$$F_e^{\text{ext}} := \int_{B_e} \rho_{e0} N_e b_e^* dV + \int_{\partial_t B_e} N_e T_e^* dS \quad (66)$$

と定義している. ここで N_e は一般的なアイソパラメトリック要素の形状関数 N^a ($a = 1, \dots, n_{\text{node}}^e$; n_{node}^e は要素の節点数) をマトリックス形式で適宜並べたものであり, b_e は $\tilde{\nabla}_i^{(\text{regular})} N^a$ ($i = 1, \dots, n_{\text{dim}}$) を成分とするひずみ演算子マトリックスである. また τ_e も適宜ベクトル形式としている.

次に, 局所化した要素 $B_{e,\text{loc}}$ のつり合い式 (57) を考える. ここでは, 式 (27) のように接線 m_{γ}^{\sharp} 方向の不連続変位のみを考えているので, 式 (27), (54) より,

$$\tau_e = f_e^{B_{e,\text{loc}}} - f_e^{\Gamma_e} = 0, \quad e = 1, \dots, n_{\text{elem,loc}} \quad (67)$$

を得る. ここで, $f_e^{B_{e,\text{loc}}}$, $f_e^{\Gamma_e}$ をそれぞれ,

$$f_e^{B_{e,\text{loc}}} := \frac{1}{V_e} \int_{B_{e,\text{loc}} \setminus \Gamma_e} g_e^{\text{int}} \tau_e dV, \quad (68)$$

$$f_e^{\Gamma_e} := T_{\Gamma_e,m} \quad (69)$$

と定義している. ここで, $T_{\Gamma_e,m}$ は不連続面 Γ_e 上の公称応力ベクトル T_{Γ_e} の接線 $m_{\gamma_e}^{\sharp}$ 方向成分であり,

$$T_{\Gamma_e,m} := m_{\gamma_e}^{\sharp} \cdot T_{\Gamma_e} \quad (70)$$

と与えられ, これは分解せん断応力 (resolved shear stress) と呼ばれる³⁷⁾. 式 (67) は各要素 $B_{e,\text{loc}}$ の不連

続面での分解せん断応力のつり合い式となっている。また、 g_e^\dagger はベクトルであり、その成分は後述の式 (84) のように与えられる。

c) 線形化つり合い式の有限要素離散化

式 (60) に基づいてつり合い式 (56), (57) を線形化し、更に有限要素離散化した結果を示すとそれぞれ、

$$K_e^{\bar{u}\bar{u}} \Delta \bar{u}_e + K_e^{\bar{u}\zeta} \Delta \zeta_e = -R_e, \quad (71)$$

$$e = 1, \dots, n_{\text{elem}},$$

$$K_e^{\zeta\bar{u}} \Delta \bar{u}_e + (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m}) \Delta \zeta_e = -r_e, \quad (72)$$

$$e = 1, \dots, n_{\text{elem, loc}}$$

となる。ここでは、式 (27), (54), (70) を用いるとともに、要素接線剛性マトリックス $K_e^{\bar{u}\bar{u}}$, $K_e^{\bar{u}\zeta}$, $K_e^{\zeta\bar{u}}$, $K_e^{\zeta\zeta}$ (但し $K_e^{\zeta\zeta}$ のみスカラー) を、

$$K_e^{\bar{u}\bar{u}} = K_{e, \text{mat}}^{\bar{u}\bar{u}} + K_{e, \text{geo}}^{\bar{u}\bar{u}}, \quad K_e^{\bar{u}\zeta} = K_{e, \text{mat}}^{\bar{u}\zeta} + K_{e, \text{geo}}^{\bar{u}\zeta},$$

$$K_e^{\zeta\bar{u}} = K_{e, \text{mat}}^{\zeta\bar{u}} + K_{e, \text{geo}}^{\zeta\bar{u}}, \quad K_e^{\zeta\zeta} = K_{e, \text{mat}}^{\zeta\zeta} + K_{e, \text{geo}}^{\zeta\zeta}, \quad (73)$$

$$K_{e, \text{mat}}^{\bar{u}\bar{u}} = \int_{B_e \setminus \Gamma_e} b_e^T c_e b_e dV, \quad (74)$$

$$K_{e, \text{geo}}^{\bar{u}\bar{u}} = \int_{B_e \setminus \Gamma_e} b_e^T \underline{\tau}_e \underline{b}_e dV, \quad (75)$$

$$K_{e, \text{mat}}^{\bar{u}\zeta} = - \int_{B_e \setminus \Gamma_e} b_e^T c_e g_e^\dagger dV, \quad (76)$$

$$K_{e, \text{geo}}^{\bar{u}\zeta} = - \int_{B_e \setminus \Gamma_e} b_e^T \underline{\tau}_e g_e^\dagger dV, \quad (77)$$

$$K_{e, \text{mat}}^{\zeta\bar{u}} = \frac{1}{V_e} \int_{B_{e, \text{loc}} \setminus \Gamma_e} g_e^{\dagger T} c_e b_e dV, \quad (78)$$

$$K_{e, \text{geo}}^{\zeta\bar{u}} = \frac{1}{V_e} \int_{B_{e, \text{loc}} \setminus \Gamma_e} g_e^{\dagger T} \underline{\tau}_e \underline{b}_e dV, \quad (79)$$

$$K_{e, \text{mat}}^{\zeta\zeta} = - \frac{1}{V_e} \int_{B_{e, \text{loc}} \setminus \Gamma_e} g_e^{\dagger T} c_e g_e^\dagger dV, \quad (80)$$

$$K_{e, \text{geo}}^{\zeta\zeta} = - \frac{1}{V_e} \int_{B_{e, \text{loc}} \setminus \Gamma_e} g_e^{\dagger T} \underline{\tau}_e g_e^\dagger dV \quad (81)$$

と定義している。添字 mat, geo はそれぞれ材料剛性、幾何剛性であることを示す。ここでは、不連続面の構成式として、分解せん断応力³⁷⁾ $T_{\Gamma, m}$ が接線 m_γ^\dagger 方向の不連続変位 ζ の関数として、

$$T_{\Gamma, m} = T_{\Gamma, m}(\zeta) \quad (82)$$

と与えられるものと考え、その増分型形式が、

$$D T_{\Gamma, m}[\Delta \zeta] = H_{\Gamma, m} \Delta \zeta \quad (83)$$

となることを用いた。ここで $H_{\Gamma, m}$ は不連続面の接線係数である。また、 b_e , \underline{b}_e はひずみ演算子マトリックス、 g_e^\dagger , \underline{g}_e^\dagger , g_e^\dagger , \underline{g}_e^\dagger は変位勾配の非適合部分に関する微分演算子ベクトルであり、それらの成分はそれぞれ、

$$g_{eij}^\dagger = [m_{\gamma_e}^\dagger \otimes n_{\gamma_e}]_{ij} = m_{\gamma_e}^\dagger n_{\gamma_e j}, \quad (84)$$

$$g_{eij}^\dagger = [m_{\gamma_e}^\dagger \otimes \nabla_X f_e(X) \cdot (\text{regular}[F_e])^{-1}]_{ij} \\ = m_{\gamma_e}^\dagger \nabla_X f_e(X) [(\text{regular}[F_e])^{-1}]_{K_j} \quad (85)$$

と与えられる。また、 τ_e , $\underline{\tau}_e$ は Kirchhoff 応力をそれぞれベクトル、マトリックス形式に書き換えたものである。弾塑性解析の場合には、return mapping^{33), 38)} により応力評価を行うとともに、超弾性接線係数 c_e を consistent 接線係数³⁹⁾ c_e^{cp} に置き換えればよい。式 (71), (72) の 2 式をまとめると、

$$\begin{bmatrix} K_e^{\bar{u}\bar{u}} & K_e^{\bar{u}\zeta} \\ K_e^{\zeta\bar{u}} & (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}_e \\ \Delta \zeta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_e \\ -r_e \end{bmatrix} \quad (86)$$

となり、1 行目と 2 行目の式を連立して $\Delta \bar{u}_e$, $\Delta \zeta_e$ について解くこととなる。ただし、2 行目の式は局所化が発生した要素 $B_{e, \text{loc}}$ ($e = 1, \dots, n_{\text{elem, loc}}$) のみについて考えればよく、その他の要素 B_e では 1 行目の式のみとなる。なお、 $(K_e^{\zeta\bar{u}})^T \neq K_e^{\bar{u}\zeta}$ であるから、接線剛性マトリックスは対称とはならない。

(4) 静的縮小法による線形化つり合い式の解法

局所化の進展に伴う $n_{\text{elem, loc}}$ の増加と共に、式 (86) 全体の自由度は変化していく。しかし、一般的な EAS 有限要素法^{14), 15)} と同様に静的縮小法⁴⁰⁾ (static condensation) を用いることができ⁴²⁾、これにより不連続変位の要素拡張自由度 $\Delta \zeta_e$ は、以下に述べる修正された線形化つり合い式を要素毎に解くだけで求められる。

式 (72) を $\Delta \zeta_e$ について解くと、

$$\Delta \zeta_e = -(r_e + K_e^{\zeta\bar{u}} \Delta \bar{u}_e) / (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m}) \quad (87)$$

となる。これを式 (71) に代入すると、

$$\begin{aligned} [K_e^{\bar{u}\bar{u}} - K_e^{\bar{u}\zeta} (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m})^{-1} K_e^{\zeta\bar{u}}] \Delta \bar{u}_e \\ = -R_e + K_e^{\bar{u}\zeta} (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m})^{-1} r_e \end{aligned} \quad (88)$$

となる。ここで、修正された接線剛性マトリックス K_e^* と内力ベクトル $F_e^{\text{int}*}$ をそれぞれ、

$$K_e^* := K_e^{\bar{u}\bar{u}} - K_e^{\bar{u}\zeta} (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m})^{-1} K_e^{\zeta\bar{u}}, \quad (89)$$

$$F_e^{\text{int}*} := F_e^{\text{int}} - K_e^{\bar{u}\zeta} (K_e^{\zeta\zeta} - H_{\Gamma_e, m})^{-1} r_e \quad (90)$$

と定義すると、式 (88) は、

$$K_e^* \Delta \bar{u}_e = -R_e^*, \quad R_e^* := F_e^{\text{int}*} - F_e^{\text{ext}} \quad (91)$$

と書き改められる。局所化していない要素 B_e では、 $K_e^* = K_e^{\bar{u}\bar{u}}$, $F_e^{\text{int}*} = F_e^{\text{int}}$ となる。なお、 $(K_e^{\zeta\bar{u}})^T \neq K_e^{\bar{u}\zeta}$ であるから K_e^* は非対称マトリックスである。式 (91) を $\Delta \bar{u}_e$ について解き、それを式 (87) に代入して $\Delta \zeta_e$ が求められる。反復ごとの修正量 $\Delta \bar{u}_e$, $\Delta \zeta_e$ を用いて、

$$\bar{u}_e^{(k+1)} = \bar{u}_e^{(k)} + \Delta \bar{u}_e, \quad \zeta_e^{(k+1)} = \zeta_e^{(k)} + \Delta \zeta_e \quad (92)$$

と更新していき、残差が $\|R_e\| < \text{TOL}$, $|r_e| < \text{TOL}$ を

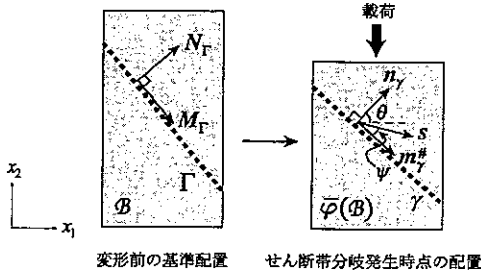


図-7 不連続面および不連続変位速度の方向の定義

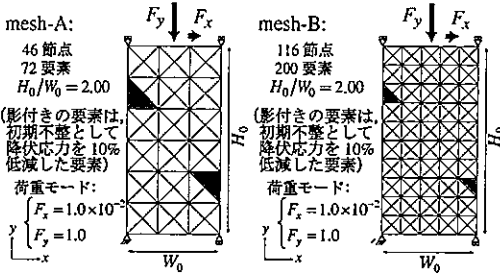


図-8 有限要素解析モデル (mesh-A, mesh-B)

表-1 せん断帯モードの判定解析ケース

	β_ϕ	m	h (kPa)	
Case-1	0.55	0.03	0.0	ひずみ硬化型
Case-2	0.55	0.00	0.0	完全塑性
Case-3	0.55	0.00	-50.0	ひずみ軟化型
Case-4	0.00	0.03	0.0	ひずみ硬化型
Case-5	0.00	0.00	0.0	完全塑性
Case-6	0.00	0.00	-50.0	ひずみ軟化型

満たすまで反復を繰り返す。ここで TOL は収束条件であり、次章の数値解析では $TOL = 1.0 \times 10^{-10}$ とした。

6. 圧縮せん断供試体におけるせん断帯形成の数値解析

この章では、圧縮せん断供試体におけるせん断帯形成挙動の数値解析を行う。第 6.(1) 節では局所化条件式 (I.15) に基づき、一様な応力・変形場が持続する完全供試体におけるせん断帯モード発生時の判定解析を行う。第 6.(2) 節では、前章で述べた有限要素法を用いてせん断帯形成とすべり進展の有限変形解析を行い、ひずみ軟化・局所化問題に対する本手法の有用性・客観性を示す。不連続面や不連続変位の方向などは、図-7 に示すように定義しておく。また、本章で用いる圧縮せん断供試体の有限要素解析モデル (mesh-A, mesh-B) を図-8 に示しておく。供試体の形状比は一般的な $H_0/W_0 = 2.00$ とした。有限要素は定ひずみ三角形要素 (3CST) である。

(1) 一様場における局所化条件の判定解析

ここでは、不連続変形の発生条件式 (I.15) に基づき、平面ひずみ供試体におけるせん断帯発生時の判定解析を行う。局所化発生時点に式 (I.15) から求められる $L_v[u]$ の方向 s と接線 $m^{\#}$ とのなす角 ψ は一般にダイレイタンシー角と呼ばれる。ここでは、一様応力・変形場が持続する完全供試体における不連続面発生時の判定解析を行う。こうした条件下では解析的理論解も求められ、必ずしも変形解析を行う必要はないが、現実の圧縮変形状態における局所化挙動を調べるため、ここでは mesh-A を用いて有限要素解析を行い、その下で局所化条件の判定を行った。一様応力・変形場を再現するため、図-8 のような初期不整は入れずに初期状態で均質材料とし、 $F_x = 0$ として圧縮荷重のみ作用させた。

弾塑性材料は Hencky 超弾性モデル

$$\tau = \sum_{A=1}^3 \left[\lambda(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) + 2\mu\varepsilon_A^e \right] n_{(A)} \otimes n_{(A)} \quad (93)$$

と Drucker-Prager 降伏規準

$$\phi(\tau, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\|\text{dev}[\tau]\| + g(\bar{\tau}) \right] - [\hat{\tau}_{y0} - q(\xi)] \leq 0 \quad (94)$$

に基づく関連流れ則に従う材料とした。ここで $\varepsilon_A^e, n_{(A)}$ ($A = 1, 2, 3$) は弾性対数ひずみの主ひずみと主軸、 λ, μ は Lamé 定数である。 $\bar{\tau}, \|\text{dev}[\tau]\|$ は Kirchhoff 応力 τ の等方・偏差不変量で、それぞれ $\bar{\tau} := \frac{1}{3} \text{tr}[\tau]$, $\|\text{dev}[\tau]\| := \sqrt{\text{dev}[\tau] : \text{dev}[\tau]}$, $\text{dev}[\tau] := \tau - \bar{\tau} \mathbf{1}$ と定義される。 $\hat{\tau}_{y0}$ は初期降伏応力である。式 (94) 中の関数 $g(\bar{\tau})$ は β_ϕ を定数として、

$$g(\bar{\tau}) = \beta_\phi \bar{\tau} \quad (95)$$

という形式とした。また、塑性硬化関数は、

$$q(\xi) = -\left[\hat{\tau}_{y0} \left(1 + \frac{\xi}{\varepsilon_{y0}} \right)^m + h\xi - \hat{\tau}_{y0} \right] \quad (96)$$

という形式とした。ここで ε_{y0} は初期降伏ひずみ、 h, m は定数である。材料定数は、Lamé 定数 $\lambda = 11.54 \text{ MPa}$, $\mu = 7.69 \text{ MPa}$ とし、内部摩擦角の影響を調べるため $\beta_\phi = 0.55, \beta_\phi = 0.00$ の 2 通りとした。 $\beta_\phi = 0$ では von Mises 降伏規準となる。また、ひずみ硬化・軟化の影響も調べるため、塑性硬化関数 (96) の定数を表-1 に示す Case-1~6 のように変化させた。他の定数は $\hat{\tau}_{y0} = 100 \text{ kPa}$, $\varepsilon_{y0} = 0.005$ とした。以上の材料定数は土質試験等により求めたものではないが、地盤材料の一般的なオーダでこのように設定した。反復計算の収束条件は $TOL = 1.0 \times 10^{-10}$ とした。

各荷重ステップのつり合い点で、局所化条件式 (I.15) を判定した。また、幾何学的非線形性による影響を調べるために微小変形理論の局所化条件²⁰⁾と比較することとし、式 (I.16) に含まれる幾何学的非線形性による項を省略して、超弾性接線係数 \mathbf{a}, \mathbf{b} を線形弾性

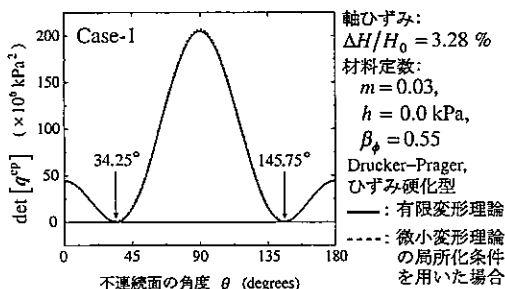


図-9 不連続面の方向 θ と $\det[q^{ep}]$ との関係 (Case-1)

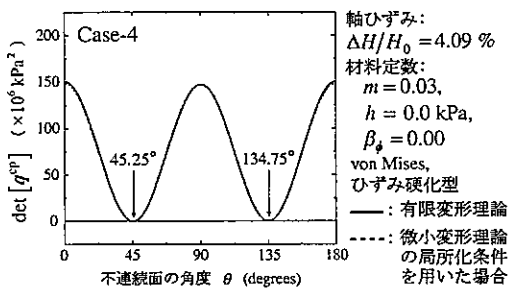


図-10 不連続面の方向 θ と $\det[q^{ep}]$ との関係 (Case-4)

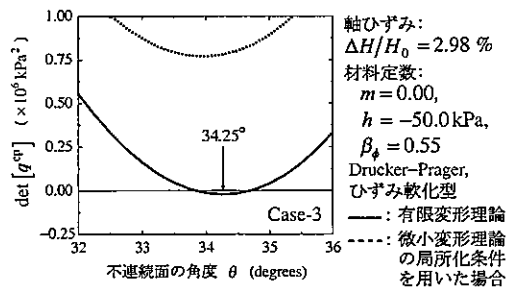


図-11 $\det[q^{ep}]$ の極小点付近の拡大図 (Case-3)

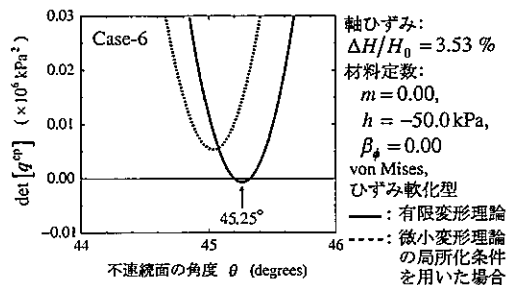


図-12 $\det[q^{ep}]$ の極小点付近の拡大図 (Case-6)

体の接線係数 c^* に置き換えて,

$$q^{ep} = n_{\gamma} \cdot \bar{c}^{ep*} \cdot n_{\gamma}, \bar{c}^{ep*} = c^* - \frac{(c^* : \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}) \otimes (\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} : c^*)}{\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} : c^* : \frac{\partial \phi}{\partial \sigma}} \quad (97)$$

としたものを用いて微小変形理論の局所化条件とした。ここで \bar{c}^{ep*} は微小変形理論における弾完全塑性接線係数である。なお、式 (93) の Hencky 超弾性モデルは、変形が無い基準配置では線形弾性体に一致する⁴¹⁾。

解析結果のうち、例として Case-1, 4 について 図-

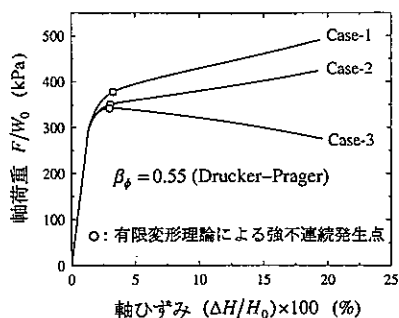


図-13 つり合い経路上の局所化発生日点 (Case-1~3)

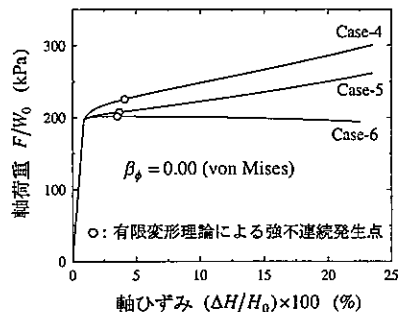


図-14 つり合い経路上の局所化発生日点 (Case-4~6)

9, 10 に示す。図には、有限変形理論の式 (I.15) で局所化発生が判定された時点について、不連続面の角度 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) に対する $\det[q^{ep}]$ の値を、有限変形理論、微小変形理論それぞれについて示した。その他の Case-2, 3, 5, 6 でも同図の同様の結果であった。有限変形理論では全ケースとも軸ひずみ 3~4% 付近という比較的早い段階で局所化が発生した。局所化発生日点は硬化型・軟化型にはさほど依存せず、最も早いもので軸ひずみ 2.98% (Case-3)、最も遅いもので 4.09% (Case-4) で、軟化型の方が僅かに早くなるだけであった。全ケースとも $\det[q^{ep}]$ の極小点では、微小変形理論の値は有限変形理論よりも僅かに大きい、図ではその差は分かりにくいので、例として Case-3, 6 について極小点付近の拡大図を図-11, 12 に示す。軸ひずみが 20% に達するまで解析を進めたが、微小変形理論では $\det[q^{ep}]$ の値はゼロに漸近するもの負値となることはなく、局所化発生は確認されなかった。これは強不連続の局所化条件として弾完全塑性接線係数のアコースティック・テンソルの特異性を判定しているためと考えられるが、弾塑性接線係数で弱不連続の条件³⁰⁾として判定した場合には、微小変形理論でもひずみ軟化型では局所化が発生することは知られている³⁾。

図-13, 14 には、Case-1~3, Case-4~6 それぞれについて、一様変形時のつり合い経路上で局所化発生が確認された時点を示した。前述のように、有限変形理論では硬化型・軟化型に関わらず、ほぼ同じ軸ひずみで局所化が発生しており、軟化型の場合でも荷重ピーク点

表-2 圧縮せん断供試体のせん断帯進展解析ケース

Case	解析方法	mesh	β_ϕ	塑性モデル		m	h (kPa)	$H_{\Gamma,m}$ (kPa/m)
1	不連続	A	0.55	Drucker-Prager	硬化型	0.03	0.0	-20.0
2	不連続	B	0.55	Drucker-Prager	硬化型	0.03	0.0	-20.0
3	不連続	A	0.00	von Mises	硬化型	0.03	0.0	-10.0
4	不連続	B	0.00	von Mises	硬化型	0.03	0.0	-10.0
5	連続	B	0.55	Drucker-Prager	硬化型	0.03	0.0	—
6	連続	B	0.00	von Mises	硬化型	0.03	0.0	—
7	連続	A	0.55	Drucker-Prager	軟化型	0.00	-30.0	—
8	連続	B	0.55	Drucker-Prager	軟化型	0.00	-30.0	—
9	連続	A	0.00	von Mises	軟化型	0.00	-30.0	—
10	連続	B	0.00	von Mises	軟化型	0.00	-30.0	—
11	連続	B(※)	0.55	Drucker-Prager	硬化型	0.00	0.0	—
12	連続	B(※)	0.00	von Mises	硬化型	0.00	0.0	—

(※) は初期不整を入れない完全系であることを示す。

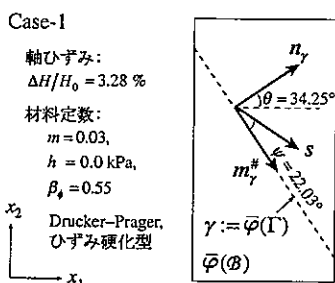


図-15 局所化条件より予測された不連続面と不連続変位速度の方向 (Case-1)

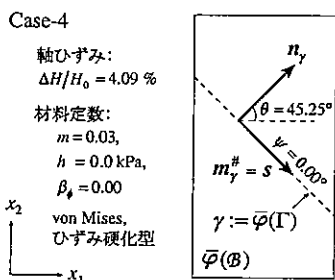


図-16 局所化条件より予測された不連続面と不連続変位速度の方向 (Case-4)

以前に発生している。なお、局所化条件式 (I.15) からは、不連続変位速度 $L_v[u]$ の方向 s も求められる。例として Case-1 と Case-4 の結果を、図-15, 16 に示す。微小変形理論の場合、不連続面の角度 θ やダイレイタンシー角 ψ は材料の内部摩擦角に相当するパラメータ β_ϕ により決まる⁴²⁾。それによると $\beta_\phi = 0.55$ の場合は $\theta = 33.2^\circ$, $\psi = 23.5^\circ$ であり、 $\beta_\phi = 0.00$ の場合は $\theta = 45.0^\circ$, $\psi = 0.0^\circ$ と求められ、本解析結果はこれと概ね一致しているが、僅かな差があるのは幾何学的非線形性の影響によるものと考えられる。

以上より、有限変形理論ではひずみ硬化型で関連流れ則に従う材料でも局所化が発生するという、Yatomi⁴³⁾

による報告と同様の結果が確認された。Rudnicki and Rice³⁾ は幾何学的非線形性による影響項を省略して検討を行っているが、それによると硬化型材料では非関連流れ則でなければ局所化は発生しないとしている。このことから、幾何学的非線形性による項が局所化条件に対して重要な影響を持っており、材料不安定問題においても有限変形の考慮が不可欠であることが分かる。

(2) 圧縮せん断供試体のせん断帯進展解析

ここでは、第 5 章で述べた有限要素法を用いて、圧縮せん断供試体におけるせん断帯進展挙動の数値解析を行う。ここでは不連続変位 $[u]$ の進展を式 (27) のように接線 m_y^s 方向のみに限定しているため、局所化発生後の不連続面での挙動は $\psi = 0^\circ$ である。メッシュサイズ依存性を検討するため、mesh-A, mesh-B を用いて解析を行った。材料定数は前節 6.(1) に準じ、表-2 に示す Case-1~12 のように設定した。また、不連続面 Γ の構成式 (83) は、接線係数 $H_{\Gamma,m} \leq 0$ を定数とした速度型の線形軟化則

$$\dot{T}_{\Gamma,m} = H_{\Gamma,m} \dot{\zeta} \quad (98)$$

を仮定した。定数 $H_{\Gamma,m}$ の設定に際しては、参照すべき適切な土質試験結果を持ち合わせていないため、解析結果の軸ひずみ-軸荷重関係が現実的な挙動となるよう設定し、Drucker-Prager の場合 $H_{\Gamma,m} = -20.0$ kPa/m, von Mises の場合 $H_{\Gamma,m} = -10.0$ kPa/m とした。不連続変位場を導入した有限要素法 (以下では不連続解析と称する) と比較を行うため、変位法に基づく一般的な有限要素法 (以下では連続解析と称する) による解析も行った。不連続解析 (Case1~4) では、連続体の構成モデルは全ケースでひずみ硬化型を用いた。連続解析では、ひずみ硬化型 (Case-5, 6, 11, 12) とひずみ軟化型 (Case-7~10) について解析を行った。ここでは拡散型分岐モードの解析¹²⁾は行わず、初期不整を与えて所望の位置にせん断帯を誘発させた。すなわち、図-

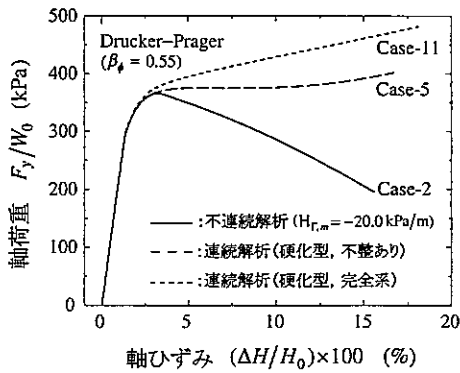


図-17 つり合い経路 (Case-2, 5, 11: Drucker-Prager)

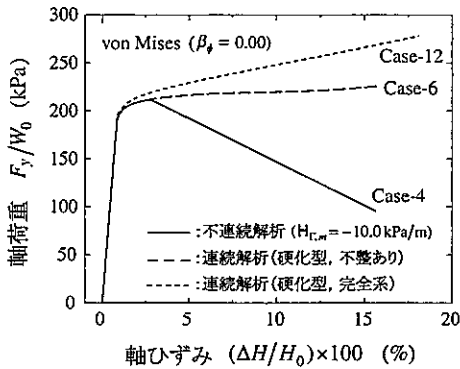


図-18 つり合い経路 (Case-4, 6, 11: von Mises)

8 中の影付き要素の降伏応力 $\hat{\tau}_{y0}$ を 10% 低減させて $\hat{\tau}_{y0} = 90 \text{ kPa}$ とし、圧縮荷重 F_y の 1% の大きさの水平荷重 F_x を作用させた。この初期不整により、反対称 1 次モード (いわゆる 1 次の座屈モード) に類似した変形モードが誘発される。また、比較のために初期不整を入れない完全系の解析を Case-11, 12 で行った。

はじめに、mesh-B と硬化型モデルにより不連続解析と連続解析の解析結果を比較する。Drucker-Prager モデル (Case-2, 5, 11), von Mises モデル (Case-4, 6, 12) のつり合い経路をそれぞれ図-17, 18 に示す。ひずみ硬化型であり、また圧縮に伴う断面増加のため、完全系 (一様変形) の Case-11, 12 では荷重極大点は表れていない。しかし、初期不整を導入した Case-5, 6 では、初期不整による不均一場の進展の影響により、つり合い経路の勾配が緩やかになる付近で完全系の経路から離脱していく。不連続解析・連続解析ともに連続体の構成モデルは全く同一であるため、不連続変形の発生までは両者 (Case-2 と Case-5; Case-4 と Case-6) は全く同じ経路である。不連続解析では、完全系の経路から離脱を始めた少し後から不連続変形が発生し始め、不連続面の軟化に伴い連続解析の経路から離脱し、その少し後に荷重極大点をむかえ、それ以降ほぼ直線的に荷重が低下していく。本解析は、初期不整により

特定の位置にせん断帯を誘発させたもので、一様場からのせん断帯分岐モードの発生挙動を再現したものではない。しかし、以上の疑似分岐解析結果から、完全供試体でせん断帯分岐モードが発生する場合には、完全に一様な応力・変形場からの発生は現実的には考えにくく (なぜなら、供試体のどの部分にせん断帯を形成するかが一意に定まらないため)、実際には拡散型分岐が先行し、不均一場の進展開始に少し遅れてせん断帯分岐が発生し、供試体中のある決まった位置にせん断帯を形成すると考えるのが自然であろう。

次に、局所変形解析に対する不連続解析の有用性を調べるため、軟化型モデルを用いた連続解析の結果との比較を行う。連続解析では、軸ひずみ-軸荷重関係で不連続解析と同程度の荷重不安定挙動を連続体の構成式で表現しようとする軟化パラメータ $h < 0$ を設定した。ここでは mesh-A, B それぞれについて Drucker-Prager モデル (Case-1, 2, 7, 8) と von Mises モデル (Case-3, 4, 9, 10) を用いた解析を行った。軸ひずみ 3~4%, 15% 付近での変形状態 (実寸) とひずみ分布を、ここでは mesh-B のみについて図-19, 20, 21, 22 に示す。ひずみは対数ひずみ ϵ の偏差 (せん断) 不変量 $\epsilon_s := \sqrt{2/3} \|\text{dev}[\epsilon]\|$ で示してある。また、局所化の様子を比較するため、不連続解析で局所化が判定された要素の分布と、連続解析での負荷・除荷域の分布を、Drucker-Prager モデル, von Mises モデルそれぞれについて図-23, 24, 25, 26 に示す。不連続解析では局所化が判定された要素を影付きで示してあり、連続解析では塑性負荷状態の要素を影付きで、弾性除荷を白色で示してある。

連続解析での塑性負荷域は、狭いバンド状の領域に集中している。一方、これらの図を見る限りでは不連続解析でも同様の変形集中が見られる。しかしながら、図-6 に示したように、不連続解析では、局所変形の表現方法が連続解析と本質的に異なる。すなわち、連続解析では狭い領域にひずみが集中しても、あくまで連続体として変形を表現する。一方、不連続解析では局所変形域にある要素の変形は、その連続部分は比較的小さく、要素の変形の大部分は不連続変位 $[u]$ による。このことは、不連続解析のひずみ分布が連続解析でのひずみ量の 1/10 程度とかなり小さいことから分かる。不連続解析における不連続変位 ζ の進行状況を、軸ひずみとの関係として Case-1, 2 について図-27 に示す。ここでは、供試体中央の要素での ζ の値を高さ H_0 で無次元化して示した。同図より「すべり」変位は軸ひずみと同程度のオーダーであり、上述の考察と整合している。以上より、不連続解析では局所変形の大部分を不連続変位 (要素拡張自由度) により幅ゼロのせん断帯 (すべり面) として表現しており、メッシュサイズ依存の要因を排除できていることが分かる。

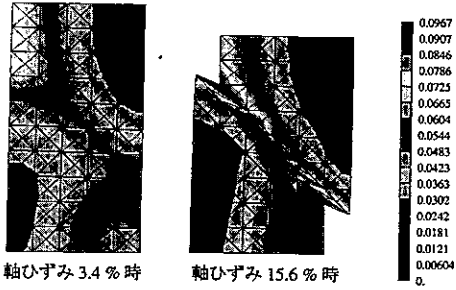


図-19 変形状態とひずみ分布 (Case-2: 不連続解析, mesh-B, Drucker-Prager)

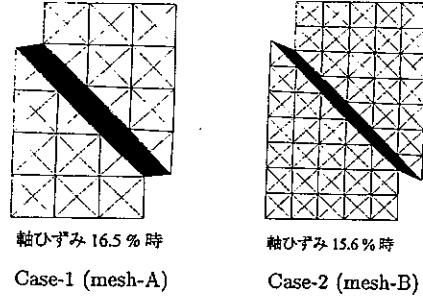


図-23 不連続変形が発生した要素の分布 (Case-1 と Case-2: 不連続解析, Drucker-Prager)

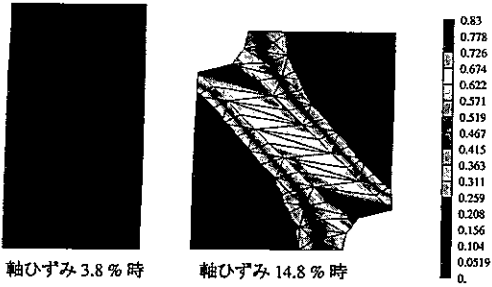


図-20 変形状態とひずみ分布 (Case-8: 連続解析, mesh-B, Drucker-Prager, ひずみ軟化型)

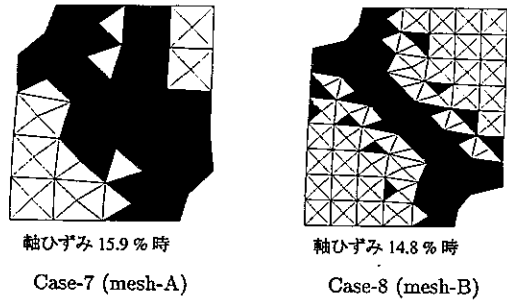


図-24 除荷・負荷領域の分布 (Case-7 と Case-8: 連続解析, Drucker-Prager, ひずみ軟化型)

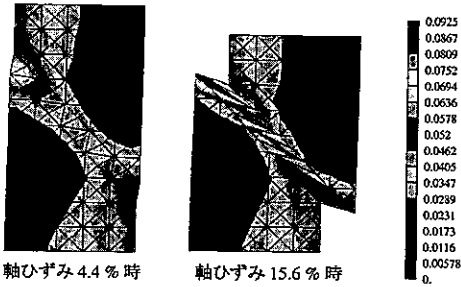


図-21 変形状態とひずみ分布 (Case-4: 不連続解析, mesh-B, von Mises)

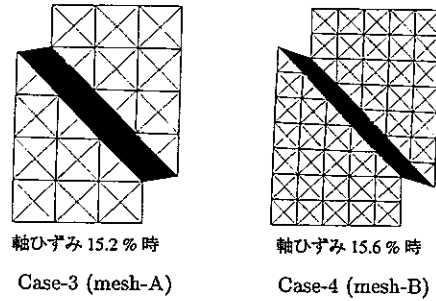


図-25 不連続変形が発生した要素の分布 (Case-3 と Case-4: 不連続解析, von Mises)

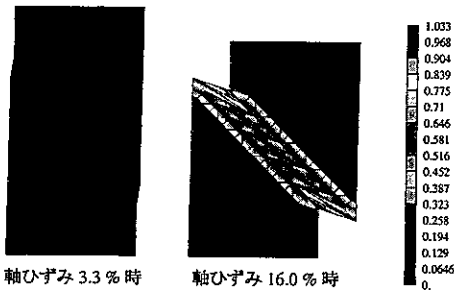


図-22 変形状態とひずみ分布 (Case-10: 連続解析, mesh-B, von Mises, ひずみ軟化型)

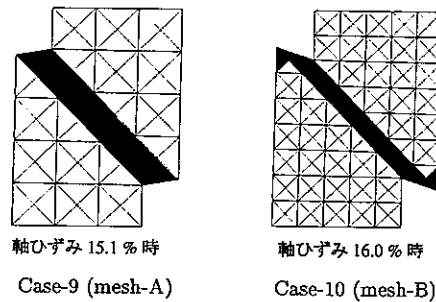


図-26 除荷・負荷領域の分布 (Case-9 と Case-10: 連続解析, von Mises, ひずみ軟化型)

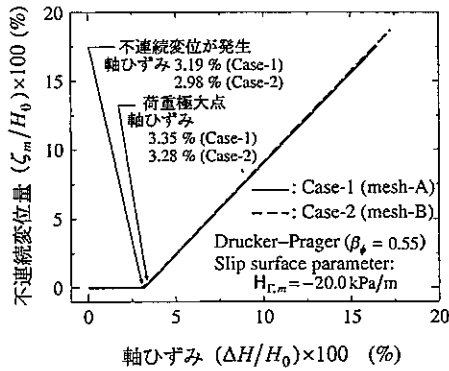


図-27 軸ひずみに伴う不連続変位の進行 (Case-1, 2)

次に、軸ひずみ-軸荷重関係に及ぼす要素分割の影響を調べるため、つり合い経路を図-28, 29, 30, 31に示す。Drucker-Prager モデル、von Mises モデルともに、不連続解析では荷重極大点以降でもメッシュサイズ依存は少なく、mesh-A, B がほぼ同じ勾配で荷重が低下していく。一方、軟化型モデルの連続解析では、mesh-A, B で同じ軟化パラメータ h を用いているにも関わらず、荷重極大点以降では異なる挙動を示し、異なる勾配で荷重が低下しており、軸ひずみ 15% の段階では著しく荷重値が異なっている。以上の結果から、連続体モデルとしてひずみ軟化を導入せず、連続変形の領域ではひずみ硬化が持続あるいは弾性除荷となるものとし、不連続面の発生と不連続変位の進展を運動学的に表現し、不連続面上のみで軟化が生じると考える不連続解析法は、局所化解析においてメッシュサイズに依存しない客観的な解析結果を与えることを確認した。

7. 結論

本研究では、弾塑性分岐の一種である不連続せん断帯分岐とそれに起因する不連続変位場の発生について、分岐発生後の不連続変位場の進展を表現可能な有限変形有限要素法の定式化を行った。特に、非線形解析において解析の安定性・収束性を確保する上で重要である、非線形つり合い式の線形化の過程と反復計算の手続きに関しては、詳細に定式化を示した。

はじめに、有限変形を考慮した不連続場の運動学、ならびに不連続せん断帯分岐の発生条件の定式化について述べた。次に、不連続変位の「すべり」を運動学的に有限要素法に取り入れ、変位法に基づく一般的な有限要素法では不可能であった不連続せん断帯分岐後の挙動も解析可能な有限変形有限要素法の定式化を行った。定式化に際しては、非有界な特異分布のひずみ場を有界・連続として近似せずに、Dirac デルタ関数を用いた特異分布形式のまま定式化を進め、変位場の不連続性を厳密に考慮した。特に非線形解析では重要となる、

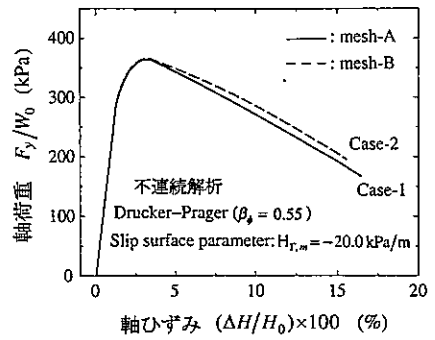


図-28 つり合い経路 (Case-1, 2: 不連続解析, Drucker-Prager)

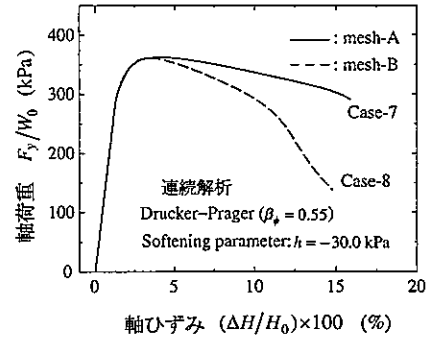


図-29 つり合い経路 (Case-7, 8: 連続解析, Drucker-Prager, ひずみ軟化型)

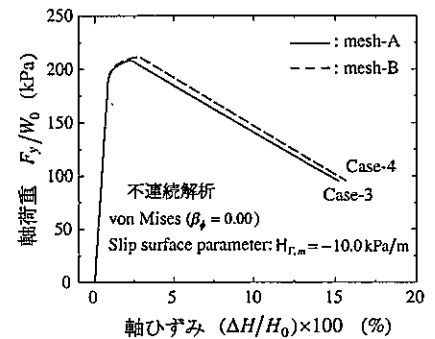


図-30 つり合い経路 (Case-3, 4: 不連続解析, von Mises)

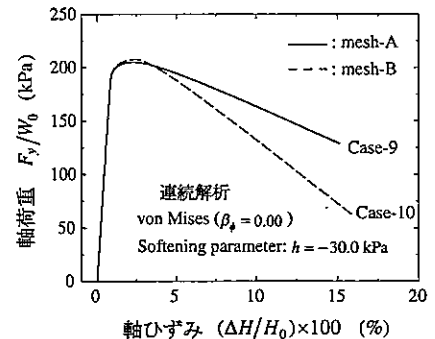


図-31 つり合い経路 (Case-9, 10: 連続解析, von Mises, ひずみ軟化型)

つり合い式の線形化のプロセスならびに反復計算の手続きについては詳細に記述した。この解析手法では、連続体の構成関係としてひずみ軟化を取り入れるのではなく、変形の連続性が保たれている領域ではあくまで塑性ひずみ硬化が持続あるいは弾性除荷となっているものと考え、不連続せん断帯分岐により不連続面という新たなメカニズムが発生することにより、不連続面上だけでひずみ軟化が発生し始めるという考え方に基づいている。

以上の定式化を行った上で、数値解析を行った。まず、一様な応力・変形場からの不連続面発生条件の判定解析を行った。その結果、有限変形を考慮した場合には、関連流れ則に従うひずみ硬化型材料であっても不連続変位場が発生しうることが確認された。このことは、材料不安定問題を扱う上でも、有限変形の考慮が必要であることを示すものである。次に、供試体のせん断帯進展解析を行った。ここでは、従来のように一般的な変位法有限要素法においてひずみ軟化型モデルを用いた解析結果との比較を行い、本解析手法が、ひずみ軟化を伴う塑性不安定・局所化解析において、メッシュサイズに依存しない客観性のある解析結果を与えることを示した。ここでは疑似分岐解析により供試体の特定の位置にせん断帯を誘発させる方法を用いたが、不均一な応力・変形場の発生から、せん断帯を形成して不連続なすべり変形が進展していく供試体の一連の変形過程を再現した。さらに、完全系の解析結果との比較により、完全供試体の一様場から不連続せん断帯分岐モードが発生する場合には、拡散型分岐モードの発生が先行し、それに遅れて不連続せん断帯分岐モードが発生するとの推察が導かれた。

付録 I 不連続せん断帯分岐の発生条件

ここでは、変形勾配の乗算型分解と超弾性構成式および関連流れ則に従う弾塑性材料^{33),34)}を対象とし、不連続せん断帯分岐の発生条件^{26),30)}を導出する。

(1) 不連続面における応力ベクトルの連続性と有界性

不連続面 Γ の両側 (Ω_+^* と Ω_-^*) で力のつり合いより、基準配置の Γ 上の公称応力ベクトル T_Γ やその時間微分 \dot{T}_Γ は Γ を横切っても連続であるから、

$$[\dot{T}_\Gamma] = [\dot{P} \cdot N_\Gamma] = [[\dot{P}]] \cdot N_\Gamma = 0 \quad (I.1)$$

が成立し、かつ有界である。ここで P は第 1 Piola-Kirchhoff 応力である。なお、現配置の γ 上の真応力ベクトル $t_\gamma = \sigma \cdot n_\gamma^*$ と公称応力ベクトル T_Γ とは $T_\Gamma d\Gamma = t_\gamma d\gamma$ なる関係があり、その速度形式は $\dot{T}_\Gamma d\Gamma = \dot{t}_\gamma d\gamma$ である。ここで Kirchhoff 応力は $\tau = P \cdot F^T$ 、Cauchy 応力は $\sigma = \tau/J$ 、 $J = \det F$ で、 $n_\gamma^* = n_\gamma / \|n_\gamma\|$ は式 (20) の n_γ を正規化したものである。また、 $\dot{T}_\Gamma =$

$\dot{P} \cdot N_\Gamma$ であり、 $\dot{t}_\gamma = \frac{1}{J} \dot{\tau} \cdot n_\gamma^*$ は公称応力速度ベクトル、 $\dot{\tau} = \dot{P} \cdot F^T$ は Kirchhoff 応力の公称速度である。以上の関係式より、基準配置表記の条件式 (I.1) は、変換を経て現配置表記で $[\dot{t}_\gamma] = 0$ と書くこともできる。

ひずみ・応力オーダの内部変数をそれぞれ ξ , $q(\xi)$ とし、降伏関数を $\phi(\tau, q)$ とする。この時、関連型の流れ則と ξ の発展則は塑性乗数 $\dot{\lambda}$ を用いてそれぞれ、

$$d^P = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial \tau}, \quad \dot{\xi} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial q} \quad (I.2)$$

と表される。ここでは変形速度 d を弾性・塑性部分に加算分解して $d = d^e + d^P$ と考えている。なお、スピン $w := \text{skew}[d] = w^e + w^P$ については、局所化問題では特に塑性スピン w^P を規定する別の構成式⁴⁴⁾を設けて考慮に入れることもあるが²³⁾、ここでは一般的に行われているように $w^P = 0$ と仮定し全スピンを弾性部分として取り扱う^{33),45)}。また、塑性ひずみ硬化則は、

$$\dot{q}(\xi) = \frac{\partial q(\xi)}{\partial \xi} \dot{\xi} = -H(\xi) \dot{\xi} \quad (I.3)$$

と与えられる。ここで $H(\xi) := -\partial q(\xi) / \partial \xi$ は硬化係数である。不連続面 Γ 上の塑性変形が、連続・不連続変形の双方を含む一般的な場合を考え、

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}^+ + \dot{\lambda}^-; \quad \dot{\lambda}^+ \geq 0, \quad \dot{\lambda}^- = \dot{\lambda}_\Gamma \delta_\Gamma, \quad \dot{\lambda}_\Gamma \geq 0 \quad (I.4)$$

という形式で、連続・不連続変形それぞれに対応する有界部分 $\dot{\lambda}^+$ と非有界部分 $\dot{\lambda}^-$ とに分けて表す。 $\dot{\lambda}^+$, $\dot{\lambda}_\Gamma$ は有界とする。式 (I.2)₂, (I.3), (I.4) から導かれる式

$$\frac{1}{\frac{\partial \phi(\tau, q)}{\partial q}} \frac{1}{H(\xi)} \dot{q}(\xi) = -(\dot{\lambda}^+ + \dot{\lambda}_\Gamma \delta_\Gamma) \quad (I.5)$$

について、次の 2 つの簡単な場合を考える。第 1 は $\dot{\lambda}^+ \geq 0$, $\dot{\lambda}_\Gamma = 0$ の場合で、これは連続な塑性変形のみ生じている状態である。第 2 は $\dot{\lambda}^+ = 0$, $\dot{\lambda}_\Gamma \geq 0$ の場合で、非有界な塑性ひずみが生じている状態である。このとき、 $\frac{\partial \phi}{\partial q}$ および \dot{q} は有界であるが、 $-\dot{\lambda}_\Gamma \delta_\Gamma$ は非有界であり、式 (I.5) が成立するためには、

$$\frac{1}{H(\xi)} = \frac{1}{\dot{H}(\xi)} \delta_\Gamma \quad (I.6)$$

という形式を取らなければならず、硬化係数 $H(\xi)$ は特異分布となる。ここで $\dot{H}(\xi)$ は不連続面 Γ 上の有界な硬化係数である。以上の考察より、以下では、

$$\dot{\lambda}^+ = 0, \quad \dot{\lambda} = \dot{\lambda}^- \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\lambda}_\Gamma \delta_\Gamma, \quad \dot{\lambda}_\Gamma > 0 \quad (I.7)$$

というように、 Γ の近傍 Ω_Γ では Γ 上だけに塑性変形が局所化して生じ、それ以外の領域 $\Omega_\Gamma \setminus \Gamma$ では弾性除荷となる場合に限定して考える。これと同様の考察は、Simo et al.¹⁶⁾, Oliver³⁵⁾ によりなされている。なお、以上の議論は物質点 X_Γ の近傍 Ω_Γ での局所的な議論であり、例えば供試体に相当する領域 B 全体の挙動に言及している訳ではないことに注意されたい。式

(23), (I.6), (I.7) と考え併せると,

$$l^p = \bar{l}^p + \tilde{l}^p, \quad \bar{l}^p = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad l^p = \tilde{l}^p \quad (\text{I.8})$$

という関係を得る.

(2) 局所化条件式の導出

公称応力ベクトル T_T の時間微分 \dot{T}_T を求めると,

$$\begin{aligned} \dot{T}_T &= \overset{\square}{t}_\gamma \frac{d\gamma}{d\Gamma} = (\mathbf{a} : l - \mathbf{b} : l^p) \cdot n_\gamma \\ &= (\mathbf{a} : \bar{l}) \cdot n_\gamma + (\mathbf{a} : \tilde{l} - \mathbf{b} : \tilde{l}^p) \cdot n_\gamma \quad (\text{I.9}) \end{aligned}$$

となる. ここで超弾性接線係数 \mathbf{a} , \mathbf{b} は,

$$a_{ijkl} = c_{ijkl} + \delta_{ik} \tau_{jl}, \quad b_{ijkl} = c_{ijkl} + \delta_{ik} \tau_{jl} + \tau_{il} \delta_{jk} \quad (\text{I.10})$$

という関係があり, 各種応力速度を用いた速度型構成式は $\overset{\square}{\tau} = \mathbf{a} : l - \mathbf{b} : l^p$, $\dot{\tau} = \mathbf{b} : (l - l^p)$, $\mathcal{L}_v \tau = \mathbf{c} : d - \mathbf{b} : l^p$ と表される^{33),41)}. 超弾性接線係数 \mathbf{c} の具体形については文献^{33),46)}を参照されたい. 式 (I.9) 最右辺の第 1 項は有界であるが, 式 (22), (I.7), (I.8) より第 2 項には δ_Γ が含まれ非有界である. 第 2 項に式 (22), 関連流れ則 (I.2)₁ および式 (I.7) を代入し, $w^p = \mathbf{0}$ なる仮定を考慮すると, \dot{T}_T が有界であるためには,

$$\left[\mathbf{a} : (\mathcal{L}_v[u] \otimes n_\gamma) - \mathbf{b} : \dot{\lambda}_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right] \cdot n_\gamma = 0 \quad (\text{I.11})$$

でなくてはならない. ところで, 式 (22), (23), (I.2)₁ を使い, また式 (I.8) より $\bar{l} = \tilde{l}$ であることを考慮すると, 塑性適応条件 $\dot{\phi}(\dot{\tau}, q) = 0$ は,

$$\dot{\phi}(\tau, q) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b} : \bar{l} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} \right] + \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b} : (\tilde{l} - \tilde{l}^p) \right] = 0 \quad (\text{I.12})$$

となる. 式 (15), (22) より, 式 (I.12) 中の括弧 $[\cdot]$ でくくられた第 1 項は有界であるが, 第 2 項には δ_Γ が含まれるから, 式 (I.12) が成立するためには各々の括弧内がゼロでなければならず, 式 (22), (I.2)₁, (I.7) を代入し, $w^p = \mathbf{0}$ なる仮定を考慮すると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b} : \bar{l} + \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q} = 0, \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b} : (\mathcal{L}_v[u] \otimes n_\gamma) - \frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b} : \dot{\lambda}_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{I.14})$$

となる. 式 (I.13) は通常の連続変形時の塑性適応条件と同形式である. 一方, 式 (I.14) を $\dot{\lambda}_\Gamma$ について解き, それを式 (I.11) に代入することにより, 局所化条件式

$$q^{\text{ep}} \cdot \mathcal{L}_v[u] = \mathbf{0} \quad (\text{I.15})$$

を得る. ここで q^{ep} は,

$$q^{\text{ep}} = n_\gamma \cdot \bar{\mathbf{a}}^{\text{ep}} \cdot n_\gamma, \quad \bar{\mathbf{a}}^{\text{ep}} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{b} : \frac{\partial \phi}{\partial \tau}) \otimes (\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b})}{\frac{\partial \phi}{\partial \tau} : \mathbf{b} : \frac{\partial \phi}{\partial \tau}} \quad (\text{I.16})$$

という $\bar{\mathbf{a}}^{\text{ep}}$ に関する 2 階のアコースティック・テンソルであり^{19),26)}, $\bar{\mathbf{a}}^{\text{ep}}$ は弾完全塑性接線係数である.

参考文献

- Hill, R. and Hutchinson, J. W.: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- Rice, J. R.: The localization of plastic deformation, in: Koiter, W. T. (ed.), *Theoretical and Applied Mechanics*, North-Holland, pp. 207-220, 1976.
- Rudnicki, J. W. and Rice, J. W.: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 23, pp. 371-394, 1975.
- Drescher, A. and Vardoulakis, I.: Geometric softening in triaxial tests on granular material, *Géotechnique*, Vol. 32, No. 4, pp. 291-303, 1982.
- Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, in: Asaoka, A., Adachi, T. and Oka, F. (eds.), *Deformation and Progressive Failure in Geomechanics, Proc. of IS-Nagoya '97*, Nagoya, Japan, pp. 9-14, 1997.
- 志比 利秀, 矢富 盟祥, 亀井 健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響, *土木学会論文集*, No. 666/III-53, pp. 181-192, 2000.
- Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 3, pp. 41-53, 1989.
- Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: Shear bands formation numerically simulated by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 4, pp. 1-13, 1989.
- Oka, F., Adachi, T. and Yashima, A.: A strain localization analysis using a viscoplastic softening model for clay, *International Journal of Plasticity*, Vol. 11, No. 5, pp. 523-545, 1995.
- Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
- 小林 一三, 飯塚 敦, 太田 秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, *土木学会論文集*, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 山川 優樹, 寺田 賢二郎, 池田 清宏, 鳥居 邦夫: 圧縮場における弾塑性体の分岐解析とパスジャンプ挙動, *土木学会論文集*, No. 701/III-58, pp. 73-86, 2002.
- Ortiz, M., Leroy, Y. and Needleman, A.: A finite element method for localized failure analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 61, pp. 189-214, 1987.
- Simo, J. C. and Rifai, M. S.: A class of mixed assumed strain method and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 29, pp. 1595-1638, 1990.
- Simo, J. C. and Armero, F.: Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1413-1449, 1992.
- Simo, J. C., Oliver, J. and Armero, F.: An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent solids, *Computational Mechanics*, Vol. 12, pp. 277-296, 1993.
- Oliver, J.: Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 3575-3600, 1996.

- 18) Oliver, J.: Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, pp. 3601–3623, 1996.
- 19) Armero, F. and Garikipati, K.: An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 20–22, pp. 2863–2885, 1996.
- 20) Regueiro, R. A. and Borja R. I.: A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 33, pp. 283–315, 1999.
- 21) Regueiro, R. A. and Borja, R. I.: Plane strain finite element analysis of pressure sensitive plasticity with strong discontinuity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 3647–3672, 2001.
- 22) Borja, R. I. and Regueiro, R. A.: Strain localization in frictional materials exhibiting displacement jumps, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 2555–2580, 2001.
- 23) Borja, R. I.: Finite element simulation of strain localization with large deformation: capturing strong discontinuity using a Petrov-Galerkin multiscale formulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2949–2978, 2002.
- 24) Larsson, R., Runesson, K. and Ottosen, N. S.: Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 2087–2105, 1993.
- 25) Larsson, R. and Runesson, K.: Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity—Theory and FE-analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 33, No. 20–22, pp. 3081–3101, 1996.
- 26) Steinmann, P., Larsson, R. and Runesson, K.: On the localization properties of multiplicative hyperelastoplastic continua with strong discontinuities, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 8, pp. 969–990, 1997.
- 27) 吳智深, 町田篤彦, 高東劭: 一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発, *土木学会論文集*, No. 598/I-44, pp. 149–159, 1998.
- 28) 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥: 経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する研究, *応用力学論文集*, Vol. 3, pp. 351–362, 2000.
- 29) Jirásek, M.: Comparative study on finite elements with embedded discontinuities, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 188, pp. 307–330, 2000.
- 30) Borja, R. I.: Bifurcation of elastoplastic solids to shear band mode at finite strain, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 5287–5314, 2002.
- 31) Garikipati, K. and Hughes, T. J. R.: A study of strain localization in a multiple scale framework—The one-dimensional problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 159, pp. 193–222, 1998.
- 32) Garikipati, K. and Hughes, T. J. R.: A variational multiscale approach to strain localization—formulation for multidimensional problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 188, pp. 39–60, 2000.
- 33) Simo, J. C.: Numerical analysis and simulation of plasticity, in: Ciarlet, P. G. and Lions, J. L. (eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. VI, Elsevier Science, pp. 183–499, 1998.
- 34) Simo, J. C. and Hughes, T. J. R.: *Computational Inelasticity*, Springer, New York, 1998.
- 35) Oliver, J.: On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and constitutive equations, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 7207–7229, 2000.
- 36) Taylor, R. L., Simo, J. C., Zienkiewicz, O. C. and Chan, C. H.: The patch test—A condition for assessing FEM convergence, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, pp. 39–62, 1986.
- 37) Asaro, R. J.: Micromechanics of Crystals and Polycrystals, in: Hutchinson, J. W. and Wu, T. Y. (eds.), *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 23, pp. 1–115, 1983.
- 38) Simo, J. C.: Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 99, pp. 61–112, 1992.
- 39) Simo, J. C. and Taylor, R. L.: Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, pp. 101–118, 1985.
- 40) Wilson, E. L.: The static condensation algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 198–203, 1974.
- 41) Bonet, J. and Wood, R. D.: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge, 1997.
- 42) Regueiro, R. A. and Borja, R. I.: A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 33, pp. 283–315, 1999.
- 43) Yatomi, C.: Conditions for the localization of deformation in finite elastic-plastic deformations, *Proc. of the 4th International Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks*, Gifu, Japan, pp. 209–218, 1998.
- 44) Defalias, Y. F.: The plastic spin, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 52, pp. 865–871, 1985.
- 45) Defalias, Y. F.: Plastic spin: necessity or redundancy?, *International Journal of Plasticity*, Vol. 14, No. 9, pp. 909–931, 1998.
- 46) Simo, J. C. and Taylor, R. L.: Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 85, pp. 273–310, 1991.

(2002. 7.12 受付)

FINITE DEFORMATION ANALYSIS FOR SHEAR BAND BIFURCATION MODE AND PROGRESS OF DISCONTINUOUS DISPLACEMENT FIELD

Yuki YAMAKAWA, Kiyohiro IKEDA, Kenjiro TERADA, Keisuke SATOH and Kunio TORII

The shear band bifurcation mode and the progress of the discontinuous displacement field are numerically analyzed with a finite-element method. Kinematics and criteria of shear band bifurcation mode in multiplicative hyperelasto-plastic materials are presented, and a finite-element method for finite deformation with enhanced incompatible mode, which can kinematically express the discontinuous field, is adopted. Examination of the localization criteria reveals that the shear band mode can be detected even in the associative strain-hardening materials. Several numerical results show the significance and the effectiveness of the consideration to the shear band kinematics in the numerical analysis for strain localization problems.