

デューン-平坦床遷移過程にみられる 亜臨界分岐現象

山口里実¹・泉 典洋²

¹学生会員 工学修士 東北大学大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

²正会員 Ph.D. 東北大学大学院工学研究科

洪水時、流量の比較的小さい領域で発生した河床波は、流量増加に伴って消滅し、流量減少時に再び発生することが知られている。また河床波から平坦床へ遷移する際の流量が、平坦床から河床波に遷移する際の流量と異なるというヒステリシス現象が見られることが知られている。本研究は、弱非線形解析の手法を用いて、ヒステリシス現象の原因の一つが、平坦床から河床波に遷移する際に見られる亜臨界分岐であることを理論的に示したものである。

Key Words : dune, hysteresis, subcritical bifurcation, weakly nonlinear analysis, growth rate expansion method

1. はじめに

流量（底面剪断力）の小さい領域で発生した河床波（デューン）は、流量（底面剪断力）の増加とともに消滅し、減少とともに再び発生する。このような河床波の発生機構や流量の変化による挙動については、河道の抵抗予測という工学的重要性から河川工学の分野において古くより多くの研究が行われてきた。

正弦波擾乱を与えられた河床は、河床形状と流下方向流速の間に位相差が存在するような場合、擾乱に対して不安定となる。このデューン発生機構に関する基本概念を、ポテンシャル流れと線形安定解析の手法を用いて初めて説明したのは Kennedy¹⁾である。しかし位相差の発生まで含めたデューンの発生機構が流れと土砂輸送の方程式から説明されるためには、Engelund²⁾と Smith³⁾の理論を待たねばならなかった。Engelund は流下方向および水深方向二次元の、レイノルズ平均を取った Navier-Stokes 方程式を用いた剪断流モデルから、河床形状と底面剪断力に生じる位相差を初めて合理的に導き、デューンの発生を理論的に説明した。またその後も Fredsøe によって、デューンの発達過程に関する研究が進められている⁴⁾。

線形安定解析の結果、デューンの形成を支配するパラメータはフルード数であること、フルード数が小さい領域では平坦床は不安定となりデューンが発生すること、フルード数が大きい領域では平坦床は安定となり、さらに大きくなるとアンチデューンが発生することなどが明らかとなっている。流量の大小がフルード数の大小に対応しているとすれば、前出の流量とデューン

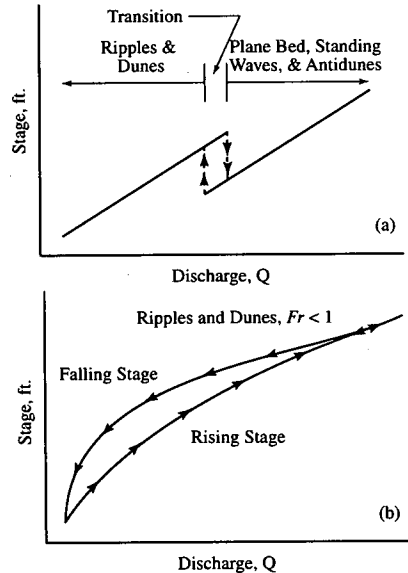


図-1 流量-水深曲線に見られる2種類のヒステリシス現象。(a)では流量増加時に、(b)では流量減少時に河床抵抗が大きくなる。Simons and Richardson⁵⁾による。

形成の関係は大略理論によって説明することができる。

デューンが形成されると河床抵抗が増加するが、それについても古くより多くの研究が行われている。Simons and Richardson⁵⁾は、数多くの実験および現地データから、流量が変化する場合の流量-水深曲線はループを描き、ヒステリシスを示す(図-1参照)ことを指摘している。その際、図-1(a)に示したように流量増加

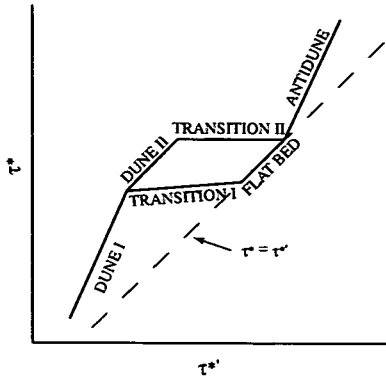


図-2 全剪断力 τ^* と有効剪断力 τ' の関係の概念図。岸・黒木⁸⁾の図を再構成。

時の方が減少時に比べて抵抗が大きく水深が大きくなる場合と、図-1 (b) のように流量増加時の方が抵抗が小さくなる場合がある。また (a) のケースでは通常、河床形状の突然の遷移によって、抵抗も突然変化することを指摘している。

デューンで覆われた河床では、デューンによる形状抵抗によって底面剪断力の一部が受け持たれるため土砂輸送に用いられる有効剪断力が全剪断力より小さくなる。Engelund⁶⁾は、力学的相似の仮定から同一の河床形態では有効剪断力が全剪断力のみ関数で表されるとして、Guy, Simons and Richardson⁷⁾の行った実験データを整理することによって、全剪断力と有効剪断力間の関係を導いている。岸、黒木⁸⁾は、Engelundの考え方を修正し、さらに多くの実験結果を整理することで全剪断力は有効剪断力だけでなく相対水深の関数となることを指摘した。ある相対水深を例にとると岸、黒木の提案した全剪断力と有効剪断力間の関係は図-2のように概念的に表される。デューンから平坦床・アンチデューンへと遷移する過程では、有効剪断力と全剪断力間に二価の関係が存在しており、後述するように図-1と同一の事象を異なる表現で表したとも言えるだろう。

遷移過程に見られる全抵抗と摩擦抵抗間の二価性やヒステリシス現象については、これまで二つの解釈が提出されている。一つは水理条件の変化に伴う河床形状変化の応答遅れによるものであり^{9),10),11),12)}、実験によって、河床の応答に時間がかかることが確かめられている¹³⁾。もう一つは、一つの流量に対して二つの河床形状が存在するというものである¹⁴⁾。平坦床の場合、抵抗が小さくなるため水深が小さくなるのに対して、デューン河床の場合、抵抗が大きくなるため同じ流量でも水深が大きくなることが予想される。したがって流量が同一でも河床形状によって水深が異なる

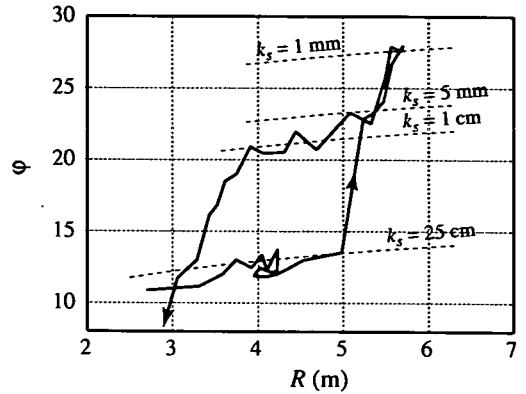


図-3 粗度と水深の間に見られるヒステリシス現象。昭和34年8月洪水において利根川・川俣地点で見られた水位と流速係数の関係。石川¹⁵⁾の図を再構成。

場合が存在する。しかし後者の解釈については未だ合理的な説明は提出されておらず、実験などの検証が行われている前者の解釈が主流となっているのが現状である。

本研究は、後者の考え、すなわち一つの流量に対して二つの河床形状が存在するという観点から、デューンの弱非線形安定解析を行うことによって、その理論的説明を試みたものである。

2. 理論的考察とモデル

(1) 洪水時に見られるフルード数の変化

図-3は昭和34年8月の洪水で観測された利根川・川俣地点における流量観測資料から求められた低水路の抵抗の変化を示している¹⁵⁾。横軸は低水路径深 R を表しており、縦軸は次式で定義される流速係数 φ である。

$$\varphi = V/U_f = 6.0 + 5.75 \log(R/k_s) \quad (1)$$

ここで V および U_f はそれぞれ平均流速および摩擦速度 ($=\sqrt{gRS}$) であり、 k_s は相当粗度、 g は重力加速度 ($=9.8 \text{ m/s}^2$) である。また、 S は平均河床勾配であり、利根川・川俣地点の勾配は $1/3600$ であった。図を見ると流量の増加時には $k_s = 25 \text{ cm}$ もあった相当粗度は、径深が 5 m を超えたところで急激に減少し、 $k_s = 1 \text{ mm}$ にまで達している。その後 $k_s = 5 \text{ mm}$ から 1 cm へとを推移した後、径深が 3 m になってはじめて元の粗度程度まで戻っている様子がわかる。石川¹⁵⁾はこのような変化が見られる原因を、増水期に形成されていたデューンが、ピーク時に平坦床に遷移したこととしている。これは図-1 (a) に相当するヒステリシス現象である。

ここで洪水時におけるフルード数の変化を考えてみ

る。ただし Engelund²⁾や Fredsøe⁴⁾の線形安定解析や本理論で用いられているフルード数は見かけのフルード数ではなく、デューンの存在しない平坦床に対応したフルード数であることに注意しなければならない。線形安定論では平坦床に微小擾乱を与えて、それに対する安定性を調べる。したがって支配パラメータとしてのフルード数は摂動を与えられる前のフルード数、すなわち平坦床に対応したフルード数でなければならない。平坦床では、粗度は粒径にのみ依存するから流速係数の変化は次式に従う。

$$\varphi^f = V^f / U_f^f = 6.0 + 5.75 \log(D^f / mD_s) \quad (2)$$

ここで φ^f および V^f , U_f^f , D^f は、それぞれ平坦床に対応した流速係数および平均流速、摩擦速度 ($= \sqrt{gD^f S}$), 水深であり, m は相当粗度と粒径の関係を表す係数で $m = k_s / D_s$ である。そのとき単位幅当りの流量 Q は次式で表される。

$$Q = D^f (gD^f S)^{1/2} [6.0 + 5.75 \log(D^f / mD_s)] \quad (3)$$

与えられた流量に対して上式を解くと、平坦床に対応する水深 D^f が一意的に得られる。またそのときフルード数は次式で与えられる。

$$Fr = S^{1/2} [6.0 + 5.75 \log(D^f / mD_s)] \quad (4)$$

式 (3) および (4) からわかるように、単位幅流量 Q が増加すると D^f が増加し、同時に平坦床に対応したフルード数も増加することがわかる。

有効剪断力 τ^* は次式で表される。

$$\tau^* = D^f S / R_s D_s \quad (5)$$

ここで R_s は砂の水中比重 ($=1.65$), D_s は砂の粒径である。したがって Fr と τ^* はどちらも河床勾配 S と平坦床に対応した相対水深 D^f / D_s で表されることがわかる。これら S か D^f / D_s のどちらかを一定とすれば, Fr と τ^* は 1 対 1 で対応し, 図-2 はフルード数と河床形態の間に見られる二価の関係を表していると解釈できることがわかる。

(2) 乱流遷移現象との類似

図-3 に類似のヒステリシス現象は、平面 Poiseuille 流れや平板境界層流れの層流-乱流遷移時にも見られることが知られている¹⁶⁾。一般的にレイノルズ数が増加すると層流が乱流に遷移することはいうまでもないが、平面 Poiseuille 流れの場合、層流-乱流遷移時には 5000 以上まで層流でいることが可能であるのに対し、乱流-層流遷移時にはレイノルズ数が 5000 よりかなり小さくなるまで層流には遷移しないことがわかっている。Pekeris and Shkoller¹⁷⁾ は弱非線形安定解析の手法を用いて、臨界レイノルズ数近傍の層流-乱流間の分岐形態が亜臨

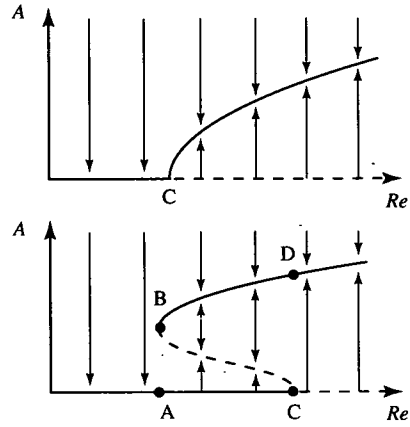


図-4 乱流遷移時に見られる二つの分岐形態。(a) 超臨界分岐, (b) 亜臨界分岐。

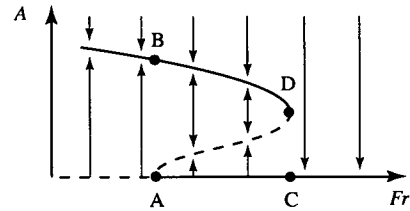


図-5 デューン-平坦床遷移時に予想される分岐形態。

界分岐 (subcritical bifurcation) であることを明らかにした。

図-4 は乱流遷移時に見られる 2 種類の典型的な解の分岐形態の概念図である。図中横軸は乱流遷移を支配するパラメータであるレイノルズ数であり、縦軸は擾乱の振幅 A である。(a) は二次元ジェットに見られる超臨界分岐 (supercritical bifurcation) の場合を表しており、(b) は前述の平面 Poiseuille 流れや平板境界層流れに見られる亜臨界分岐を表している。(a) の超臨界分岐では臨界レイノルズ数 (C 点) までは振幅ゼロの解が安定であったのに対し、臨界レイノルズ数 (C 点) を超えると直ちに有限振幅を有する安定な解 (図中実線) に移行する様子がわかる。それに対し (b) では、臨界レイノルズ数 (C 点) における解の分岐の向きが (a) と逆になっており、臨界レイノルズ数 (C , D 点) とそれより小さいレイノルズ数 (A , B 点) との間に、ひとつの不安定解 (点線 BC) と二つの安定解 (実線 AC および BD) が存在している。解がこのような分岐をしているような場合、レイノルズ数が増加する領域と減少する領域でヒステリシス現象が現れることがわかっている。すなわちレイノルズ数が増加する場合は図中 AC の経路を通り、臨界レイノルズ数 (C 点) で突然 D 点に飛

び移る。したがって AC 間で振幅 0 (層流) の解が現れ、C 点を超えると突然乱流に遷移する。一方レイノルズ数が減少する場合は図中 DB の経路を通るため、有限振幅 (乱流) の解が現れ、B 点を超えた時点で A 点に飛び移ることで突然層流に遷移する。

デューンの場合も、デューンから平坦床への遷移時に見られるヒステリシス現象が、解の分岐形態に起因していることが類推される。ただしデューンの場合、支配パラメータはフルード数 Fr であり、擾乱に対する安定 → 不安定の方がパラメータの増減の方向と逆であるなどの相違点があることに注意する必要がある。したがってデューンの場合の分岐図は図-5 のように表せることが予想される。流量が小さくフルード数が小さい状態では、有限振幅を持つデューンが唯一の安定解であるが、フルード数が臨界フルード数 (B, A 点) を超えてあるフルード数 (D, C 点) に達するまではデューンと平坦床 ($A = 0$) という二つの安定解が現れる。しかもフルード数が増加する場合 BDC の経路を通るのに対して、フルード数が減少する場合は CAB の経路を通ることになる。

もちろんこの考え方では図-1 (b) の方向にループを描く現象は説明できないが、(a) の方向にループを描くこと、また河床形態および河床抵抗の変化が突然に生じること、さらに図-2 に見られるように遷移の生じる水理量が常に一定の範囲に存在することなどを合理的に説明できる。

(3) 増幅率展開法

上述したような解の分岐形態を調べるためには、線形安定解析によって求められる臨界フルード数近傍における解の振る舞いを調べる必要がある。そのために有効な手法が非線形安定解析であり、その代表的な手法が本研究で行われる増幅率展開法である。増幅率展開法では、臨界フルード数のごく近傍の分岐形状を調べるために次のようなパラメータ ν を導入し、すべての変数を ν を用いて展開する。

$$\nu^2 = \frac{|Fr - F_c|}{F_c} \quad (6)$$

上式はフルード数 Fr が F_c より ν^2 程度のオーダーだけ離れていることを意味している。フルード数が臨界フルード数に等しいとき擾乱の増幅率はゼロとなり、臨界フルード数より ν^2 のオーダーだけ離れた領域では、増幅率自身も ν^2 のオーダーとなることが期待できる。したがって ν で展開することは増幅率で展開することと等価であることがわかる。このように増幅率を微小パラメータとして全ての変数を展開すると ν の 3 次のオーダーにおいて振幅の非線形時間発展を記述する、次

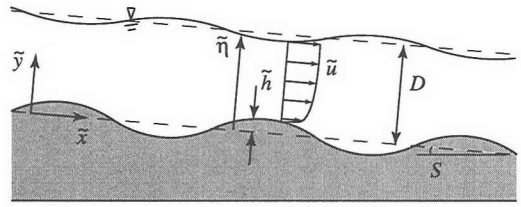


図-6 座標系の概念図。

のようなランダウ方程式が得られる。

$$\frac{dA}{dT} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A + \dots \quad (7)$$

もし振幅が十分小さい場合、上式の第 2 項は非常に小さくなり無視することが可能となる。そのとき式 (7) は容易に解けて、増幅率 α_0 で指数関数的に増幅 ($\alpha_0 > 0$ の場合) あるいは減衰 ($\alpha_0 < 0$) することがわかる。すなわち α_0 は線形安定解析から導かれる成長率に等価であることがわかる。振幅がある程度大きくなると第 2 項は無視しえなくなる。第 2 項の係数 α_1 はランダウ定数として知られており、もし係数 α_1 が正の値を取れば、デューンの遷移過程は亜臨界分岐となり、負の値をとるとき超臨界分岐となる。そして亜臨界分岐のとき、ヒステリシスが現れる。

3. 定式化

(1) 支配方程式

図-6 に示した流れは、レイノルズ平均 (乱流変動に関するアンサンブル平均) を取った二次元の Navier-Stokes 方程式 (以降、レイノルズ方程式と呼ぶ) を用いて記述できる。その際、流れの変動の時間スケールは河床変動の時間スケールに比べると十分に早いので、非定常効果は河床変化式でのみ考慮し、流れは定常とみなして差し支えない (準定常の仮定)。この仮定を用いるとレイノルズ方程式は次式のようになる。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + gS + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (8)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} - g + \tilde{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (10)$$

ここで \tilde{x} および \tilde{y} はそれぞれ流れ方向および深さ方向の座標、 \tilde{u} および \tilde{v} はそれぞれ \tilde{x} および \tilde{y} 方向の流速成分、 ρ は水の密度、 \tilde{p} は圧力、 $\tilde{\epsilon}$ は渦動粘性係数である。式 (9) の重力項における勾配の影響 (S^2 のオーダー) は無視されていることに注意する必要がある。渦動粘性係数 $\tilde{\epsilon}$ は次式で表されると仮定する。

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon U_f D \quad (11)$$

ここで U_f および D はそれぞれ平坦床等流状態における摩擦速度および水深であり、次式が成立する。

$$U_f = \left(\frac{\bar{\tau}_{b0}}{\rho} \right)^{1/2} = (gDS)^{1/2} \quad (12)$$

ここで $\bar{\tau}_{b0}$ は平坦床等流状態における底面剪断応力である。また本研究では Englund²⁾ および Fredsøe⁴⁾ に従い、 ϵ の値を 0.077 とする。

河床高さの時間変化は流砂の連続式によって次のように記述される。

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\frac{1}{1-\lambda_p} \frac{\partial \bar{q}_B}{\partial \bar{x}} \quad (13)$$

ここで \bar{h} は河床高さ、 \bar{t} は時間、 λ_p は砂の間隙率、 \bar{q}_B は単位幅流砂量である。Fredsøe は、デューン形成によって生じる局所勾配の流砂量に対する影響によって、波数の大きい（波長の短い）デューンの形成が抑制されることを示している⁴⁾。その際 Fredsøe は、局所勾配の影響を加味するために Meyer-Peter & Müller 式に底面勾配の影響を取り入れた次式を用いている。

$$\bar{q}_B^* = \frac{\bar{q}_B}{(R_s g D_s^3)^{1/2}} = 8 \left(\tau_b^* - \tau_{ih}^* - \mu^* \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right)^{3/2} \quad (14)$$

ここで τ_{ih}^* は限界シールズストレスである。 τ_b^* はシールズストレスであり、次式で定義される。

$$\tau_b^* = \frac{\bar{\tau}_b}{\rho R_s g D_s} \quad (15)$$

また μ^* は勾配の影響を表すパラメータであり、Fredsøe は 0.1 程度の値であろうと推測している。本研究でも式 (14) を用いることにする。

(2) 境界条件

水面高さを $\bar{\eta}$ で表すと、水面では次式で表されるような運動学的境界条件が成立する。

$$\bar{u} \cdot \bar{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \bar{y} = \bar{\eta} \quad (16)$$

前述したように流れは定常と考えているので、上式でも非定常項は無視している。水面に対して法線方向の応力が大気圧 (= 0) に等しくなる条件は次のように表される。

$$\bar{e}_{ns} \cdot \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \bar{y} = \bar{\eta} \quad (17)$$

また水面では接線方向の剪断力がほぼゼロとなるため次式が与えられる。

$$\bar{e}_{ts} \cdot \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{e}_{ns} = 0 \quad \text{at} \quad \bar{y} = \bar{\eta} \quad (18)$$

ここで \bar{e}_{ts} および \bar{e}_{ns} はそれぞれ水面における接線および法線方向の単位ベクトルであり、次式で表される。

$$\bar{e}_{ts} = \frac{(1, \partial \bar{\eta} / \partial \bar{x})}{\sqrt{1 + (\partial \bar{\eta} / \partial \bar{x})^2}}, \quad \bar{e}_{ns} = \frac{(-\partial \bar{\eta} / \partial \bar{x}, 1)}{\sqrt{1 + (\partial \bar{\eta} / \partial \bar{x})^2}} \quad (19a, b)$$

また \bar{u} および $\bar{\mathbf{T}}$ はそれぞれ流速ベクトルおよび応力テンソルであり、次のように表される。

$$\bar{u} = (\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{\mathbf{T}} = \bar{\tau}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{xx} & \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\tau}_{yy} \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$\bar{\tau}_{xx} = -\bar{p} + 2\rho\epsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \quad \bar{\tau}_{yy} = -\bar{p} + 2\rho\epsilon \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \quad (20b, c)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = \rho\epsilon \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (20d)$$

底面での運動学的境界条件は底面に法線方向の流速がゼロとなる条件であり、次式で表される。

$$\bar{u} \cdot \bar{e}_{nb} = 0 \quad \text{at} \quad \bar{y} = \bar{h} \quad (21)$$

Englund²⁾ および Fredsøe⁴⁾ は底面近傍に剪断力が一定の薄い層を考え、その層上面におけるスリップ流速と剪断力の関係を次のように仮定している。

$$\frac{\rho}{K^2} \bar{u}^2 = \bar{\tau}_b \quad \text{at} \quad \bar{y} = \bar{h} \quad (22)$$

ここで

$$K = 1.9 + 2.5 \ln \left(\frac{D}{k_s} \right) \quad (23)$$

本研究においてもこの仮定を用いる。上記の条件を底面の接線方向に適用すると次式が得られる。

$$\frac{\rho}{K^2} (\bar{u} \cdot \bar{e}_{tb})^2 = \bar{e}_{tb} \cdot \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{e}_{nb} \quad \text{at} \quad \bar{y} = \bar{h} \quad (24)$$

ここで \bar{e}_{tb} および \bar{e}_{nb} はそれぞれ底面に対する接線および法線方向の単位ベクトルであり、次式で表される。

$$\bar{e}_{tb} = \frac{(1, \partial \bar{h} / \partial \bar{x})}{\sqrt{1 + (\partial \bar{h} / \partial \bar{x})^2}}, \quad \bar{e}_{nb} = \frac{(-\partial \bar{h} / \partial \bar{x}, 1)}{\sqrt{1 + (\partial \bar{h} / \partial \bar{x})^2}} \quad (25a, b)$$

(3) 無次元化

次のような無次元化を導入する。

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{U_f}{\epsilon} (u, v), \quad \bar{p} = \rho \left(\frac{U_f}{\epsilon} \right)^2 p \quad (26a, b)$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{h}, \bar{\eta}) = D (x, y, h, \eta) \quad (26c)$$

$$\bar{t} = \frac{(1-\lambda_p) R_s g D^2}{8U_f^3} t \quad (26d)$$

上式を用いると、式 (8)–(10) は次のように無次元化される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (27)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\sigma} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (29)$$

ここで σ は正規化された平均河床勾配 (= S/ϵ^2) である。次式で定義される流関数を導入する。

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (30a, b)$$

このとき、式(27)および(28)は次のように書き直される。

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \epsilon^2 \left(1 - \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}\right) \quad (31)$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\sigma} + \epsilon^2 \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} \quad (32)$$

式(31)および(32)から p を消去して次式を得る。

$$-\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \epsilon^2 \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (33)$$

ここで ∇^2 は次式で表される。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (34)$$

式(13)-(15)を無次元化すると、河床高の時間変化は次のように表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau_b - \theta - \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{3/2} \quad (35)$$

ここで τ_b は平坦床等流状態でのシールズ数で正規化された底面剪断力であり、次式で表される。

$$\tau_b = \frac{\tau_b^*}{\tau_{b0}^*} = \left\{ 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\}^{-1} \left[4 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\} \right]_{x=0} \quad (36)$$

ここで τ_{b0}^* は平坦床等流状態におけるシールズ数である。また μ および θ は正規化された限界シールズ数および μ^* であり、次のように表される。

$$\theta = \frac{\tau_{ih}^*}{\tau_{b0}^*}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\tau_{b0}^*} \quad (37a, b)$$

平坦床等流状態でのシールズ数 τ_{b0}^* は Fr および σ の関数であり、 τ_{ih}^* および μ^* が定数であれば、 θ および μ は Fr と σ によって表されるパラメータとなる。しかし τ_{ih}^* は0.03-0.08程度までの若干の幅を持つ値であり、 μ^* も正確な値が明らかでない。そこで解析を容易にするためにも、ここでは θ および μ を Fr および σ によらない独立のパラメータと考えて解析を進めることとする。またここで境界条件(16)-(18)および(21), (24)についても無次元化が行われるが、これについては次節において座標変換と併せて述べることとする。

(4) 座標変換

デカルト座標系ではデューンの形成された底面やそれによって波状に変位した水面に対し境界条件を直接適用することができない。通常はEngelund²⁾およびFredsoe⁴⁾が行っているように、境界条件を擾乱の振幅で展開し底面および水面での値を平均位置での値に変換することによって間接的に適用できる。ところが後述するように、流れは底面および水面近傍において特異性を有し、流速の高次微分が発散してしまう。したがって高次展開が必要な本理論に先の方法は適用でき

ない。そこでSeminara, Colombini and Parker¹⁸⁾が用いたように、次のような座標変換を導入する。

$$\xi = x, \quad \chi = \frac{y - h(x)}{\eta(x) - h(x)} \quad (38a, b)$$

上式の座標変換によって、底面および水面での境界上における流関数の値を評価することが容易となる。このとき、 x および y による一回微分は座標変換の影響を受けて次のように書き表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta - h} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] \frac{\partial}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} = \frac{1}{\eta - h} \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (40)$$

上式から、擾乱による底面および水面の変形の影響が χ による微分として x および y の微分に含まれていることがわかる。さらに高階微分は、式(39)および(40)の操作を繰り返すことによって得られる。

式(31)および(32)は座標変換後、次のように書き表される。

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \\ &\quad + \epsilon^2 \left[1 - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} - \frac{1}{\sigma} \\ &\quad + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \end{aligned} \quad (42)$$

また、 p を消去した式(33)は次のように座標変換される。

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \\ &\quad - \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_l} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_r} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \xi_k}{\partial x_r} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

ここで x_i および ξ_i はそれぞれ次のとおりである。

$$(x_1, x_2) = (x, y), \quad (\xi_1, \xi_2) = (\xi, \chi) \quad (44a, b)$$

独立変数に添字がついている場合は Einstein の縮約規約が用いられていることに注意する必要がある。

河床高さの時間変化式 (35) および底面剪断力 (36) は座標変換導入後、それぞれ次のように書き表される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau_b - \theta - \mu \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^{3/2} \quad (45)$$

$$\tau_b = \left\{ 1 + (\partial h / \partial \xi)^2 \right\}^{-1} \left[4 \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} + \left\{ 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \right\} \right]_{\chi=0} \quad (46)$$

境界条件 (16)-(18) および (21), (24) は無次元化および座標変換の導入後、次のように表される。

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{ns}^* = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (47)$$

$$\mathbf{e}_{ns}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns}^* = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (48)$$

$$\mathbf{e}_{ts}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{ns}^* = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (49)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{nb}^* = 0 \quad \text{at } \chi = 0 \quad (50)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{tb}^*)^2 = \kappa^2 (\mathbf{e}_{tb}^* \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{nb}^*) \quad \text{at } \chi = 0 \quad (51)$$

ここで κ は正規化された K であり, $\kappa = \epsilon K$ と表される。また \mathbf{e}_{ts}^* および \mathbf{e}_{ns}^* はそれぞれ無次元化された水面に対する接線および法線ベクトル, \mathbf{e}_{tb}^* および \mathbf{e}_{nb}^* はそれぞれ無次元化された底面に対する接線および法線ベクトルであり, 次のように表される。

$$\mathbf{e}_{ts}^* = \frac{(1, \partial \eta / \partial \xi)}{1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2} \quad (52a)$$

$$\mathbf{e}_{ns}^* = \frac{\eta - h}{1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2} (-\partial \eta / \partial \xi, 1) \quad (52b)$$

$$\mathbf{e}_{tb}^* = \frac{(1, \partial h / \partial \xi)}{1 + (\partial h / \partial \xi)^2} \quad (53a)$$

$$\mathbf{e}_{nb}^* = \frac{\eta - h}{1 + (\partial h / \partial \xi)^2} (-\partial h / \partial \xi, 1) \quad (53b)$$

これらのベクトルは, 式 (38) による変換後の座標系において単位ベクトルを成している。さらに \mathbf{u} および \mathbf{T} はそれぞれ無次元化された流速ベクトルおよび応力テンソルであり, 次のように表される。

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \quad (54a)$$

$$\mathbf{T} = \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (54b)$$

$$\tau_{xx} = -\frac{p}{\epsilon^2} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \quad (54c)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{p}{\epsilon^2} + 2 \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \quad (54d)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \quad (54e)$$

式 (52)-(54) を用いて境界条件 (47)-(51) を具体的に書き直すと次のようになる。

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (55)$$

$$-p + \frac{2\epsilon^2}{1 + (\partial \eta / \partial \xi)^2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \left\{ 1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \right] = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (56)$$

$$\left\{ 1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right\} + 4 \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial y} = 0 \quad \text{at } \chi = 1 \quad (57)$$

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} = 0 \quad \text{at } \chi = 0 \quad (58)$$

$$\left(-\frac{\partial \xi_n}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} + \frac{\partial \xi_n}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n} \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 = \kappa^2 (\eta - h) \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial y} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \right)^2 \right\} + 4 \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi_n}{\partial y} \right] \quad \text{at } \chi = 0 \quad (59)$$

(5) 基本解

摂動を与える前の平坦床における基本状態を考える。流れは等流であり, このとき式 (41) において ξ (ξ_1) 方向の微分が全てゼロとなることから次式が得られる。

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial \chi^3} = 1 \quad (60)$$

基本状態を決定する境界条件は式 (57) および (59) より得られ, それぞれ ξ (ξ_1) 方向の微分をゼロとすると次のように表される。

$$\psi''(1) = 0, \quad \psi''(0) = -\kappa^2 \psi''(0) \quad (61a, b)$$

ここで ' は χ による全微分を示している。この表記は以降も本論文を通して適用する。

式 (60) および (61) より基本状態における等流流速分布は次のように求められる。

$$-\frac{\partial \psi_0}{\partial \chi} = U_0(\chi) = -\frac{1}{2}\chi^2 + \chi + \kappa \quad (62)$$

Fredsoe⁴⁾ は上式で表される等流流速を次のようなコサイン関数で近似した。

$$U_0(\chi) = \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \cos[\beta(1-\chi)] \quad (63)$$

上式を $\chi = 1$ のまわりでテーラー展開すると次式が得られる。

$$U_0(\chi) = \kappa + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \beta^2 (1-\chi)^2 + \frac{1}{24} \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \beta^4 (1-\chi)^4 + \dots \quad (64)$$

ここで β を次式で定義する。

$$\beta = \left(\frac{1}{2} + \kappa \right)^{-1/2} \quad (65)$$

そのとき式 (64) の右辺第 3 項までは式 (62) に一致し、 β が 1 より小さい限り式 (63) は厳密解のよい近似となっていることがわかる。そしてそのとき κ は 1/2 以上でなければならない。本研究でも後の解析を容易にするために式 (63) および (65) の近似式を用いることとする。

無次元平均流速 \bar{U} は、式 (62) を積分することで次のように求められる。

$$\bar{U} = \int_0^1 U_0(\chi) d\chi = \frac{1}{3} + \kappa \quad (66)$$

このときフルード数 Fr は次のように表される。

$$Fr = \sigma^{1/2} \left(\kappa + \frac{1}{3} \right) \quad (67)$$

後にわかるようにデューンから平坦床への遷移が生じるのはフルード数が 0.4~0.9 のときである。この領域で κ が 1/2 以上の値であるためには σ は 0.2~1.0 より小さくなくてはならない。この値は $S = 0.0012 \sim 0.0059$ より小さい勾配に対応しており、実河川の勾配としては妥当な範囲にある。

また、有次元平均流速 $\bar{U} (= U_f \bar{U} / \epsilon)$ を用いると、次式の抵抗則が導かれる。

$$\frac{\bar{U}}{U_f} = \frac{1}{3\epsilon} + K = 6.2 + 5.75 \log \left(\frac{D}{k_s} \right) \quad (68)$$

上式は k_s を 1.1 倍に見積もれば、完全に式 (2) と一致する。したがって式 (24) で表されるスリップ速度の仮定は、式 (2) とほぼ同様の抵抗則に対応していることがわかる。

4. 線型理論

弱非線型安定解析を行う前に、次のような摂動展開を導入し、線型安定解析を行う。

$$\psi = \psi_0(y) + Ae^{\Omega t} \psi_1(\chi) E + c.c., \quad (69a)$$

$$\eta = 1 + Ae^{\Omega t} \eta_1 E + c.c., \quad (69b)$$

$$h = Ae^{\Omega t} h_1 E + c.c. \quad (69c)$$

ここで E は次式で表される。

$$E = \exp[i(k\xi - \omega t)] \quad (70)$$

また $c.c.$ は直前の項の複素共役を表し、 Ω および ω 、 k はそれぞれ擾乱の増幅率および角周波数、波数である。このとき擾乱の位相速度は ω/k で表される。式 (69) を式 (43) に代入し A について整理すると、 $O(A)$ について次式が得られる。

$$\begin{aligned} ik \{ U_0 \psi_1'' - (k^2 U_0 + U_0'') \psi_1 \\ - k^2 U_0' [h_1 - (h_1 - \eta_1) \chi] - 2U_0 U_0' (h_1 - \eta_1) \} \\ - \epsilon^2 \{ \psi_1^{iv} - 2k^2 \psi_1'' + k^4 \psi_1 \\ + k^2 (k^2 U_0 - 2U_0'') [h_1 - \chi(h_1 - \eta_1)] \\ - 4k^2 U_0' (h_1 - \eta_1) \} = 0 \end{aligned} \quad (71)$$

この摂動方程式では微分最高次の項に ϵ がかかっており、境界条件を満たすためには $\chi = 0$ (底面) および $\chi = 1$ (水面) 近傍において ϵ の項を無視することができない。これは移流項とレイノルズ応力項における ϵ のオーダーの違いから現れた特異性である (基本解では移流項が現れないため、このような特異性も現れないことに注意)。このような問題は境界層問題として扱われ、特異摂動法によって解かれる^{19),20)}。ここでもその手法を用いる。式 (71) において ϵ の項を無視すると、境界層外部領域について次式が得られる。

$$\begin{aligned} -k^2 \beta^{-2} [h_1 - (h_1 - \eta_1) \chi] \cos \beta(1-\chi) \\ - 2\beta^{-1} (h_1 - \eta_1) \sin \beta(1-\chi) \\ - \psi_1''(\chi) (k^2 - \beta^2) + \frac{d^2 \psi_1'(\chi)}{d\chi^2} = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

ここで上付きの \circ は外部領域における外部解を表している。上式の一般解は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \psi_1''(\chi) = C_1 \exp \left[-\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi \right] \\ + C_2 \exp \left[\sqrt{k^2 - \beta^2} \chi \right] \\ - \beta^{-2} [h_1 - (h_1 - \eta_1) \chi] \cos \beta(1-\chi) \end{aligned} \quad (73)$$

底面 ($\chi = 0$) 近傍の境界層内部領域において次のような内部変数を定義する。

$$\zeta = \chi / \epsilon \quad (74)$$

このとき式 (71) は次のように表される。

$$\frac{d^4 \psi_1^b(\zeta)}{d\zeta^4} - ik\kappa \frac{d^2 \psi_1^b(\zeta)}{d\zeta^2} = O(\epsilon^2) \quad (75)$$

ここで上付きの b は底面近傍の内部領域における内部解を表している。上式において ϵ に関する最低次の一般解は次のように表される。

$$\begin{aligned} \psi_1^b(\zeta) = C_3 \exp \left[-\sqrt{ik\kappa} \zeta \right] + C_4 \exp \left[\sqrt{ik\kappa} \zeta \right] \\ + C_5 \zeta + C_6 \end{aligned} \quad (76)$$

外部解と内部解の接続を考えると、外部解における $\chi \rightarrow 0$ の極限と内部解における $\zeta \rightarrow \infty$ の極限が一致する必要がある、次式で表される接続条件が与えられる。

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} \psi_1^s(\chi) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \psi_1^b(\zeta) \quad (77)$$

したがって C_4 および C_5 , C_6 は次のように求められる。

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = C_1 + C_2 - h_1 \frac{\cos \beta}{\beta^2} \quad (78a, b, c)$$

同様にして水面 ($\chi = 1$) 近傍の内部領域において次のような内部変数を定義する。

$$\gamma = (1 - \chi)/\epsilon \quad (79)$$

このとき式 (71) は次のように表される。

$$\frac{d^4 \psi_1^s(\chi)}{d\gamma^4} - ik \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) \frac{d^2 \psi_1^s(\chi)}{d\gamma^2} = O(\epsilon^2) \quad (80)$$

ここで上付きの s は水面近傍における境界層内部解を表している。上式において ϵ に関する最低次の解は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \psi_1^s(\gamma) = & C_7 \exp \left[-\sqrt{ik(1/2 + \kappa)}\gamma \right] \\ & + C_8 \exp \left[\sqrt{ik(1/2 + \kappa)}\gamma \right] \\ & + C_9 \gamma + C_{10} \end{aligned} \quad (81)$$

内部解と外部解の接続条件は、内部解における $\chi \rightarrow 1$ の極限と外部解における $\gamma \rightarrow \infty$ の極限が等しいという条件であり、次式で与えられる。

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} \psi_1^s(\chi) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \psi_1^s(\gamma) \quad (82)$$

したがって C_8 および C_9 , C_{10} は次のように求められる。

$$C_8 = 0, \quad C_9 = 0, \quad (83a, b)$$

$$\begin{aligned} C_{10} = & C_1 \exp \left[-\sqrt{k^2 - \beta^2} \right] \\ & + C_2 \exp \left[\sqrt{k^2 - \beta^2} \right] - \frac{\eta_1}{\beta^2} \end{aligned} \quad (83c)$$

結局、 $\chi = 0$ から $\chi = 1$ の全領域で成り立つ解 $\psi_1(\chi)$ は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \psi_1(\chi) = & a_1 \exp \left[(k^2 - \beta^2)^{1/2} \chi \right] \\ & + b_1 \exp \left[-(k^2 - \beta^2)^{1/2} \chi \right] \\ & + \epsilon^2 c_1 \exp \left[-(ik\kappa)^{1/2} \frac{\chi}{\epsilon} \right] \\ & + \epsilon^2 d_1 \exp \left[-\left(ik \left(\kappa + \frac{1}{2} \right) \right)^{1/2} \frac{1 - \chi}{\epsilon} \right] \\ & - \beta^{-2} [h_1 - \chi(h_1 - \eta_1)] \cos \beta (1 - \chi) \end{aligned} \quad (84)$$

ここで境界条件より第 3 項および 4 項の係数は ϵ の 2 次以上のオーダーであることが要請されるため、係数に ϵ^2 がついている。

式 (69) を境界条件 (55) および (57)–(59) に代入し、 $O(A)$ について整理するとそれぞれ次式が得られる。

$$\psi_1(1) = 0 \quad (85)$$

$$-k^2 \eta_1 \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) - k^2 \psi_1(1) - \psi_1''(1) = 0 \quad (86)$$

$$\psi_1(0) = 0 \quad (87)$$

$$\begin{aligned} k^2 \kappa \psi_1(0) - 2\psi_1'(0) + \kappa \psi_1''(0) \\ + \kappa (h_1 - \eta_1) + k^2 \kappa^2 = 0 \end{aligned} \quad (88)$$

境界条件 (56) を $O(A)$ のオーダーで整理するためには p に対しても摂動展開を導入する必要がある。 p も次のように展開されるはずである。

$$p = p_0(\chi) + Ae^{\Omega t} p_1(\chi)E + \text{c.c.}, \quad (89)$$

式 (89) を式 (56) に代入すると $O(A)$ について次式が得られる。

$$p_1(1) = -ik\epsilon^2 \left[(h_1 - \eta_1)(1 + 2\kappa) - 2\psi_1'(1) \right] \quad (90)$$

また、式 (89) を式 (42) に代入すると、 $O(A^0)$ について次式が得られる。

$$p_0'(\chi) = -1/\sigma \quad (91)$$

式 (89) および (91) を式 (41) に代入し、 A について整理すると、 $\chi = 1$ において次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{ik\eta_1}{\sigma} + ikp_1(1) \\ + \frac{i}{4} (1 + 2\kappa) \left[(h_1 - \eta_1)(1 + 2\kappa) - 2\psi_1'(1) \right] \\ + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{2} (h_1 - \eta_1) \left[6 + k^2(1 + 2\kappa) \right] \right. \\ \left. - k^2 \psi_1'(1) + \psi_1'''(1) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (92)$$

式 (92) を用いると、境界条件 (90) 中の $p_1(1)$ が消去され次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{\sigma} + \left(\frac{1}{2} + \kappa \right)^2 (h_1 - \eta_1) - \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) \psi_1'(1) \\ + \epsilon^2 \left[-\frac{3i}{k} (h_1 - \eta_1) - 3ik (h_1 - \eta_1) \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) \right. \\ \left. + 3ik \psi_1'(1) - \frac{i\psi_1'''(1)}{k} \right] = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

河床高さの時間変化式 (45) からは次式が得られる。

$$\begin{aligned} h_1(\Omega - i\omega) - \frac{3ik}{2} (1 - \theta)^{1/2} \left[2(\eta_1 - h_1) + k^2 \kappa h_1 \right. \\ \left. + ik\mu h_1 + k^2 \psi_1(0) + \psi_1''(0) \right] = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

式 (84) を式 (85)–(88) および (93), (94) に代入すると、 a_1 および b_1 , c_1 , d_1 , η_1 , h_1 に関する次の連立方程式系が得られる。

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \eta_1 \\ h_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (95)$$

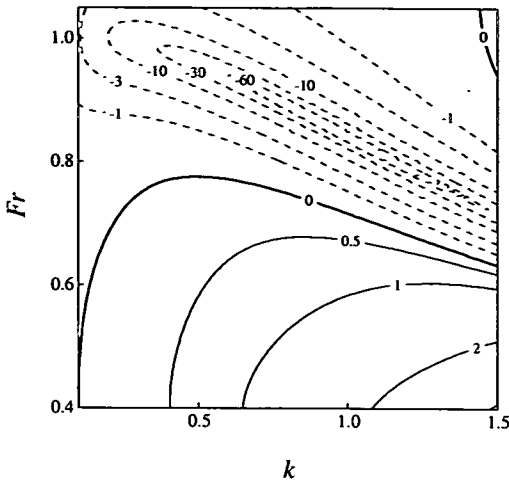


図-7 増幅率 Ω の等高線図 ($\sigma = 0.5$ および $\mu = 0.3$, $\theta = 0.1$).

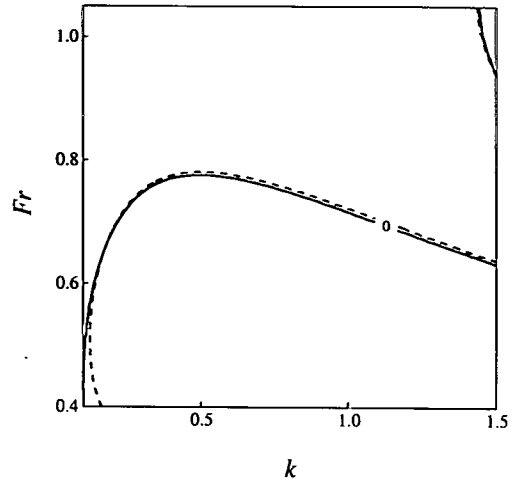


図-8 近似解を用いた場合と厳密解を用いた場合の中立曲線の比較。実線および点線はそれぞれ近似解および厳密解に対応している。 $\sigma = 0.5$, $\mu = 0.3$ および $\theta = 0.1$ 。

ここで \mathbf{R} は 6×6 の行列であり、付録 I として最後に掲載されている。各成分は Ω および ω , k , Fr , σ , θ , μ の関数である。式 (95) が自明な解以外の解を持つための条件は次式で与えられる。

$$|\mathbf{R}| = 0 \quad (96)$$

上式より次式のような関係が得られ、増幅率 Ω の値が求められる。

$$\Omega = \Omega(k, Fr; \sigma, \theta, \mu), \quad \omega = \omega(k, Fr; \sigma, \theta, \mu) \quad (97a, b)$$

図-7 に式 (97) より求められる増幅率 Ω の等高線図を示す。実線および破線はそれぞれ正および負の増幅率を表し、太実線は $\Omega = 0$ の中立曲線を表している。図には $\sigma = 0.5$ ($S = 0.0030$), $\mu = 0.3$ および $\theta = 0.1$ とした場合を示した。図より、フルード数が 0.7-0.8 程度より小さい領域とフルード数および波数の値が比較的大きい領域において Ω は正の値をとることがわかる。河床高さ h および水面高さ η の $O(A)$ の解を調べてみると、前者の領域では h および η がほぼ逆位相になっているのに対して、後者の領域ではほぼ同位相となっていることから、それぞれ河床波の発生領域および反砂堆の発生領域に対応しているものと考えられる。したがって、この場合における河床波発生の臨界フルード数 F_c は 0.7-0.8 程度の値であり、そのときの特性波数 ($k-F_c$ 平面上で F_c が最大となる k) の値は 0.5-0.6 程度となることがわかる。

図-8 に基本解において近似解 (63) を用いた場合と厳密解 (62) を用いた場合の中立曲線を示す。近似解が実線、厳密解が点線に対応している。ここでは $\sigma = 0.5$

および $\mu = 0.3$, $\theta = 0.1$ を用いている。臨界フルード数に相当する中立曲線の上部で、両者の一致は極めてよいことがわかる。

5. 弱非線型安定解析

(1) 摂動展開

弱非線型安定解析の目的は、§2 で導入した ν を用いて各変数を展開し、 ν^3 までの解からランダウ方程式を導くことによって、臨界フルード数 F_c のごく近傍における解の振る舞いを明らかにすることである。式 (6) は次のように書き直される。

$$Fr = F_c - \nu^2 F_c \quad (98)$$

ここで ν^2 につく符号は + と - の両方が可能であるが、ここでは - の場合を考える。このとき線形領域において増幅率は正の実部をもつことになり、その大きさは ν^2 のオーダーとなるのが期待できる。 ν で展開する前に、各変数を次のように基本解と摂動部分に展開し、各方程式を摂動に対する線形部分と非線形部分に分けておくのが便利である。

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \hat{\psi}(x), \quad (99a)$$

$$\eta = 1 + \hat{\eta}, \quad h = \hat{h} \quad (99b, c)$$

$$p(x) = p_0(x) + \hat{p}(x), \quad (99d)$$

式 (99) を式 (41) および (42) に代入すると、摂動部分についてそれぞれ次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \hat{p}_{,\xi} + \hat{\psi}_{,\xi} U'_0 - \hat{\psi}'_{,\xi} U_0 - \left(U_0^2 - \frac{\chi}{\sigma} \right) [\hat{\eta} - \hat{h}]_{,\xi} + \frac{\hat{h}_{,\xi}}{\sigma} \\ & + \epsilon^2 \left\{ \hat{\psi}_{,\chi\xi\xi} + \hat{\psi}_{,\chi\xi\xi} + (U_0 + U'_0 \chi) [\hat{\eta} - \hat{h}]_{,\xi\xi} \right. \\ & \left. + 3 \left(\hat{\eta} - \hat{h} \right) U''_0 + U'_0 \hat{h}_{,\xi\xi} \right\} = \Xi \quad (100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \hat{p}' + \hat{\psi}_{,\xi\xi} U_0 + \frac{1}{\sigma} \left(\hat{\eta} - \hat{h} \right) + U_0^2 \left([\hat{\eta} - \hat{h}]_{,\xi\xi} + \hat{h}_{,\xi\xi} \chi \right) \\ & - \epsilon^2 \left\{ \hat{\psi}_{,\xi\xi\xi} + \hat{\psi}_{,\chi\xi\xi} + (2U'_0 + U''_0) [\hat{\eta} - \hat{h}]_{,\xi} + U''_0 \hat{h}_{,\xi} \chi \right. \\ & \left. + U_0 \left(\hat{h}_{,\xi\xi\xi} + \chi [\hat{\eta} - \hat{h}]_{,\xi\xi\xi} \right) \right\} = \Lambda \quad (101) \end{aligned}$$

ここで下付きの $_{,\xi}$ および $_{,\chi}$ はそれぞれ ξ および χ による偏微分を表している。また Ξ および Λ は $\hat{\psi}$ および $\hat{\eta}$, \hat{h} , \hat{p} , そしてそれらの微分による非線形項を表す。 p が消去された支配方程式(43)は摂動部分について次のように表される。

$$L\hat{\psi} + J\hat{h} + G\hat{\eta} = I \quad (102)$$

ここで I は $\hat{\psi}$ および $\hat{\eta}$, \hat{h} , そしてそれらの微分による非線形項である。また L および J , G はつぎのように表される。

$$L = U_0 \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^{*2} - U''_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - \epsilon \nabla^{*2} \nabla^{*2} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[U_0^2 (1 - \chi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2U_0 U'_0 \right] \\ & - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[(1 - \chi) \left(U_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2U''_0 \right) - 4U'_0 \right] \quad (104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\chi U_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2U_0 U'_0 \right] \\ & - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\chi \left(U_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2U''_0 \right) + 4U'_0 \right] \quad (105) \end{aligned}$$

ここで ∇^{*2} は次式で表される。

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \quad (106)$$

式(99)を境界条件(55)-(59)および河床高の時間変化式(45)に代入すると摂動部分について次式を得る。

$$\hat{\psi}_{,\xi}(1) = 0 \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}(1) + \epsilon^2 \left[\hat{h}_{,\xi} - \hat{\eta}_{,\xi} + 2 \left(\hat{h}_{,\xi} - \hat{\eta}_{,\xi} \right) \kappa - 2\hat{\psi}'_{,\xi}(1) \right] \\ = \hat{M} \quad (108) \end{aligned}$$

$$\hat{\eta}_{,\xi\xi} \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) + \hat{\psi}_{,\xi\xi}(1) - \hat{\psi}''(1) = \hat{N} \quad (109)$$

$$\hat{\psi}_{,\xi}(0) = 0 \quad (110)$$

$$\begin{aligned} -\kappa \hat{\psi}_{,\xi\xi}(0) - 2\hat{\psi}'(0) + \kappa \hat{\psi}''(0) + \kappa \left(\hat{h} - \hat{\eta} \right) - \kappa^2 \hat{h}_{,\xi\xi} \\ = \hat{Q} \quad (111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{3}{2} (1 - \theta)^{1/2} \left[2\hat{h} - 2\hat{\eta} + \hat{\eta}_{,\xi\xi} \kappa - \hat{h}_{,\xi} \mu \right. \\ \left. + \hat{\psi}_{,\xi\xi}(0) - \hat{\psi}''(0) \right]_{,\xi} = \hat{S} \quad (112) \end{aligned}$$

ここで \hat{M} および \hat{N} , \hat{Q} , \hat{S} は $\hat{\psi}$ および $\hat{\eta}$, \hat{h} , そしてそれらの微分による非線形項である。

フルード数が臨界フルード数に一致するとき擾乱の成長率はゼロとなり, 発達も減衰もしない。式(98)で

表されるように臨界フルード数から ν^2 だけずれた領域では, 擾乱の発達率も ν^2 のオーダーになることが予想される。したがって振幅 A の変化する時間も非常に長く ν^{-2} のオーダーとなる。そこで次のような二つの異なるスケールを持った時間変数を導入する。

$$\tilde{t} = t, \quad T = \nu^2 t \quad (113)$$

ここで T は t が ν^{-2} 程度になって初めて1のオーダーになる, “ゆっくりと経過する時間”を表している。そのとき時間微分は次のように変換される。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \nu^2 \frac{\partial}{\partial T} \quad (114)$$

以降表記を簡単にするために \tilde{t} を省略する。上記の変換に合わせて, さらに次式の摂動展開を導入する。

$$\hat{\psi}(\chi) = \nu \hat{\psi}_1(\chi) + \nu^2 \hat{\psi}_2(\chi) + \nu^3 \hat{\psi}_3(\chi) \quad (115a)$$

$$\hat{\eta} = \nu \hat{\eta}_1 + \nu^2 \hat{\eta}_2 + \nu^3 \hat{\eta}_3 \quad (115b)$$

$$\hat{h} = \nu \hat{h}_1 + \nu^2 \hat{h}_2 + \nu^3 \hat{h}_3 \quad (115c)$$

$$\hat{p}(\chi) = \nu \hat{p}_1(\chi) + \nu^2 \hat{p}_2(\chi) + \nu^3 \hat{p}_3(\chi) \quad (115d)$$

(2) $O(\nu)$ の解

線形安定解析では擾乱の振幅 A を微小パラメータとし A のオーダーで線形化を行ったが, 弱非線形解析では ν が展開のための微小パラメータであり, A は“ゆっくりと経過する時間 T ”の関数となる。 $O(\nu)$ では, 線形安定解析で考えたような振幅 A および波数 k , 角周波数 ω の次式で表されるような基本擾乱を考える。

$$\hat{\psi}_1 = A \psi_{11}(\chi) E + \text{c.c.} \quad (116a)$$

$$\hat{\eta}_1 = A \eta_{11} E + \text{c.c.}, \quad \hat{h}_1 = A h_{11} E + \text{c.c.} \quad (116b, c)$$

$$\hat{p}_1 = A p_{11}(\chi) E + \text{c.c.} \quad (116d)$$

そのとき $O(\nu)$ の解は線形安定解析の場合とほぼ同様に解かれる。ここでは後の表記を容易にするいくつかの記号を定義するために解法の一部を示す。

式(115a-c)および(116a-c)を式(102)に代入し, $O(\nu)$ について整理すると次式が得られる。

$$L_1 \psi_{11} + J_1 h_{11} + G_1 \eta_{11} = 0 \quad (117)$$

ここで L_n , J_n および G_n は次式で表される。

$$L_n = \text{ink} [U_0 S_n - U''_0] - \epsilon^2 S_n^2 \quad (118)$$

$$\begin{aligned} J_n &= \text{ink} [-n^2 k^2 (1 - \chi) U_0^2 - 2U_0 U'_0] \\ & + \epsilon^2 n^2 k^2 [(-n^2 k^2 U_0 + 2U''_0) (1 - \chi) - 4U'_0] \quad (119) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n &= \text{ink} [-n^2 k^2 \chi U_0^2 + 2U_0 U'_0] \\ & + \epsilon^2 n^2 k^2 [(-n^2 k^2 U_0 + 2U''_0) \chi + 4U'_0] \quad (120) \end{aligned}$$

また

$$S_n = \frac{d^2}{d\chi^2} - n^2 k^2 \quad (121)$$

式(117)中の ψ_{11} は線型解析で既に求めている ψ_1 において Fr を F_c に置き換えることによって得られ、次のように表される。

$$\begin{aligned}\psi_{11}(\chi) = & a_{11}\phi_{a1} + b_{11}\phi_{b1} + \epsilon c_{11}\phi_{c1} + \epsilon d_{11}\phi_{d1} \\ & - \eta_{11}\beta_c^{-2}\chi \cos[\beta_c(1-\chi)] \\ & - h_{11}\beta_c^{-2}(1-\chi) \cos[\beta_c(1-\chi)]\end{aligned}\quad (122)$$

ここで

$$\phi_{an} = \exp\left[(n^2k^2 - \beta_c^2)^{1/2}\chi\right] \quad (123a)$$

$$\phi_{bn} = \exp\left[-(n^2k^2 - \beta_c^2)^{1/2}\chi\right] \quad (123b)$$

$$\phi_{cn} = \exp\left[-(nik\kappa_c)^{1/2}\frac{\chi}{\epsilon}\right] \quad (123c)$$

$$\phi_{dn} = \exp\left[-\left(nik\left(\kappa_c + \frac{1}{2}\right)\right)^{1/2}\frac{1-\chi}{\epsilon}\right] \quad (123d)$$

ここで κ_c は F_c に対応する κ である。また β_c は F_c (または κ_c)に対応する β であり、 $\beta_c = (\kappa_c + 1/2)^{-1/2}$ である。

摂動展開(115)および(116)を境界条件(107)-(111)および河床高の時間変化式(112)に代入し ν のオーダーで整理すると、式(85)-(88)および(93)、(94)の Fr および Ω をそれぞれ F_c および0に置き換えた式が得られる。解(122)をそれらの境界条件に代入すると次の連立方程式系が得られる。

$$\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ b_{11} \\ c_{11} \\ d_{11} \\ \eta_{11} \\ h_{11} \end{bmatrix} = 0 \quad (124)$$

ここで \mathbf{R}_n は線型安定解析で既に得られている \mathbf{R} において、 k および ω 、 Fr 、 Ω をそれぞれ nk および $n\omega$ 、 F_c 、0に置き換えたものである。

(3) $O(\nu^2)$ の解

摂動展開(115)および(116)を式(102)に代入すると $O(\nu^2)$ において次式が得られる。

$$\begin{aligned}L\hat{\psi}_2 + J\hat{h}_2 + G\hat{\eta}_2 \\ = A^2E^2I_{22} + \text{c.c.} + AA^*I_{20}\end{aligned}\quad (125)$$

ここで上付きの*はその項自身の複素共役を表している。上式中右辺は $O(\nu)$ の解からなる $O(\nu^2)$ における非線形項であり、上式中では $\hat{\psi}_2$ および $\hat{\eta}_2$ 、 \hat{h}_2 を含まない非斉次項となっている。また I_{22} は E^2 の係数であり、 ψ_{11} およびその微分、 η_{11} 、 h_{11} によって構成され(付録IIに示す)、 I_{20} は E を含まない項(E^0 の係数)であり、 ψ_{11} および ψ_{11}^* とそれらの微分、 η_{11} 、 η_{11}^* 、 h_{11} 、 h_{11}^* によって構成される(付録IIIに示す)。式(125)

を E^2 および E^0 を因子に持つ項に分けると解は次のような形で表されることがわかる。

$$\hat{\psi}_2 = A^2\psi_{22}(\chi)E^2 + \text{c.c.} + AA^*\psi_{20}(\chi) + \psi_{00} \quad (126a)$$

$$\hat{\eta}_2 = A^2\eta_{22}E^2 + \text{c.c.} + AA^*\eta_{20} + \eta_{00} \quad (126b)$$

$$\hat{h}_2 = A^2h_{22}E^2 + \text{c.c.} + AA^*h_{20} + h_{00} \quad (126c)$$

$$\hat{p}_2 = A^2p_{22}(\chi)E^2 + \text{c.c.} + AA^*p_{20}(\chi) \quad (126d)$$

ここで式(126a)の右辺最後の項 ψ_{00} は、実際のフルード数が $F_c - \nu^2 F_c$ であることによる $O(\nu^2)$ における流量の修正を表している。まずこの ψ_{00} を求める。

式(126)を式(100)に代入し A を含まない項のみ残すと次式が得られる。

$$3(\eta_{00} - h_{00}) + \psi_{00}''' = 0 \quad (127)$$

式(109)および(111)からはそれぞれ次の境界条件が得られる。

$$\psi_{00}''(1) = 0 \quad (128)$$

$$\kappa_c\psi_{00}''(0) - 2\psi_{00}'(0) + 2\sigma^{-1/2}F_c = 0 \quad (129)$$

式(66)および(67)からわかるように無次元流量は $\kappa + 1/3 = \sigma^{-1/2}Fr$ と表される。したがって $Fr = F_c - \nu^2 F_c$ であるとき実際の流量は $-\nu^2\sigma^{-1/2}F_c$ だけ修正されなければならない。そのとき次式が成り立つ。

$$-\int_0^1 \frac{\partial\psi_{00}}{\partial\chi} d\chi = -\sigma^{-1/2}F_c \quad (130)$$

これら全ての条件を満たし、かつ河床の平均高さに変化がないとすると ψ_{00} および η_{00} 、 h_{00} は次のように求められる。

$$\psi_{00} = \sigma^{-1/2}F_c\chi, \quad \eta_{00} = 0, \quad h_{00} = 0 \quad (131a, b, c)$$

式(126a-c)を式(125)に代入し A^2E^2 および AA^* を含む項について整理すると、それぞれ次式が得られる。

$$L_2\psi_{22} + J_2h_{22} + G_2\eta_{22} = I_{22} \quad (132)$$

$$L_0\psi_{20} + J_0h_{20} + G_0\eta_{20} = I_{20} \quad (133)$$

上式の一般解 ψ_{22} および ψ_{20} はそれぞれ次のように得られる。

$$\begin{aligned}\psi_{22}(\chi) = & a_{22}\phi_{a2} + b_{22}\phi_{b2} + \epsilon c_{22}\phi_{c2} + \epsilon d_{22}\phi_{d2} \\ & - \eta_{22}\beta^{-2}\chi \cos[\beta(1-\chi)] \\ & - h_{22}\beta^{-2}(1-\chi) \cos[\beta(1-\chi)] \\ & + f_{22}(\chi)\end{aligned}\quad (134)$$

$$\begin{aligned}\psi_{20}(\chi) = & \frac{\eta_{20} - h_{20}}{2}\chi^3 + a_{20}\chi^2 + b_{20}\chi \\ & + f_{20}(\chi)\end{aligned}\quad (135)$$

ここで解(135)を求める際、(100)が用いられている。また f_{22} および f_{20} はそれぞれ I_{22} および I_{20} に対応する非斉次解である。

式(115)および(116), (126)を境界条件(107)–(111)および河床高の時間変化式(112), さらに式(100), (101)に代入し, $O(\nu^2)$ において $A^2 E^2$ を因子に持つ項をまとめると次式が得られる.

$$\psi_{22}(1) = 0 \quad (136)$$

$$-(\eta_{22} - h_{22}) \left(\frac{1}{4} + \kappa_c + \kappa_c^2 \right) - \frac{\psi'_{22}(1)}{2} - \kappa_c \psi'_{22}(1) + \frac{\eta_{22}}{\sigma} + \epsilon^2 \left[3i(\eta_{22} - h_{22}) \left(\frac{1}{2k} + k + 2k\kappa_c \right) + 6ik\psi'_{22}(1) - \frac{i\psi''_{22}(1)}{2k} \right] = \mathcal{M}_{22} \quad (137)$$

$$-2h_{22}k^2 - 4h_{22}k^2\kappa_c - 4k^2\psi_{22}(1) - \psi''_{22}(1) = \mathcal{N}_{22} \quad (138)$$

$$\psi_{22}(0) = 0 \quad (139)$$

$$-\kappa_c^2(\eta_{22} - h_{22}) + 4k^2\kappa_c^2(\kappa_ch_{22} + \psi_{22}(0)) - 2\kappa_c\psi'_{22}(0) + \kappa_c^2\psi''_{22}(0) = \mathcal{Q}_{22} \quad (140)$$

$$-2i\omega h_{22} + \frac{3}{2}(1-\theta)^{\frac{1}{2}}(3ih_{22}k - 2i\eta_{22}k - 4ih_{22}k^3\kappa_c + 2h_{22}k^2\mu - 4ik^3\psi_{22}(0) - ik\psi''_{22}(0)) = \mathcal{S}_{22} \quad (141)$$

ここで \mathcal{M}_{22} および \mathcal{N}_{22} , \mathcal{Q}_{22} , \mathcal{S}_{22} は ψ_{11} およびその微分, η_{11} , h_{11} によって構成される非斉次項である(付録IIに示す). 式(134)を式(136)–(141)に代入すると, 次の連立方程式系が得られる.

$$\mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} a_{22} \\ b_{22} \\ c_{22} \\ d_{22} \\ \eta_{22} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{22}|_{\chi=1} \\ \mathcal{M}_{22} + \left[\left(\frac{1}{2} + \kappa_c - 6i\epsilon^2 k \right) f_{22} + \frac{i\epsilon^2}{2k} f_{22}'' \right]_{\chi=1} \\ \mathcal{N}_{22} + [4k^2 f_{22} + f_{22}'']_{\chi=1} \\ -f_{22}|_{\chi=0} \\ \mathcal{Q}_{22} - [4k^2 \kappa_c^2 f_{22} - 2\kappa_c f_{22}' + \kappa_c^2 f_{22}'']_{\chi=0} \\ \mathcal{S}_{22} + [6ik^3 f_{22} + \frac{3ik}{2} f_{22}'']_{\chi=0} \end{bmatrix} \quad (142)$$

\mathbf{R}_2 は特異性を持たないため, 上式は容易に解けて6つの未知数が求められる.

同様に式(109)および(112)から, AA^* を含む項についてそれぞれ次式が得られる.

$$-\psi''_{20}(1) = \mathcal{N}_{20} \quad (143)$$

$$-\kappa_c^2(\eta_{20} - h_{20}) - 2\kappa_c\psi'_{20}(0) + \kappa_c^2\psi''_{20}(0) = \mathcal{Q}_{20} \quad (144)$$

ここで \mathcal{N}_{20} および \mathcal{Q}_{20} は ψ_{11}^* および ψ_{11}^* とその微分, η_{11} , η_{11}^* , h_{11} , h_{11}^* によって構成される非斉次項である(付録IIIに示す). 式(135)を見ればわかるように $\psi_{20}(\chi)$ は η_{20} および h_{20} , a_{20} , b_{20} の四つの未定定数を有している. したがってそれらを確定するにはさらに次に述べる2つの条件が必要となる. ここで流量の変化はフルード数に与えた摂動からのみ発生するも

のであり, 擾乱の発達によって生じる流量の変化は無いことから, 次式が条件として与えられる.

$$\int_0^1 \frac{\partial \psi_{20}}{\partial \chi} d\chi = 0 \quad (145)$$

ここで, $\chi=0$ および $\chi=1$ はそれぞれ全ての変動を含む河床底面($y=h$)および水面($y=\eta$)であるため, 上式の積分範囲は η_{20} 等の水深の変化を含んでいることに注意する必要がある. 式(145)から次式が得られる.

$$\psi_{20}(1) - \psi_{20}(0) = 0 \quad (146)$$

さらに平均河床高を一定とすると, 次の条件が得られる.

$$h_{20} = 0 \quad (147)$$

式(143)および(144), (146), (147)を用いて, 式(135)中の未定定数 a_{20} および b_{20} , η_{20} が決定される.

(4) $O(\nu^3)$ の解

式(115)および(116), (126)を式(102)に代入すると $O(\nu^3)$ において次式が得られる.

$$L\hat{\psi}_3 + J\hat{h}_3 + G\hat{\eta}_3 = A^3 E^3 I_{33} + [A^2 A^* I_{31}^{(1)} + A I_{31}^{(2)}] E \quad (148)$$

ここで I_{33} , $I_{31}^{(1)}$ および $I_{31}^{(2)}$ は式(102)中の I から現れる $O(\nu)$ および $O(\nu^2)$ の解からなる項であり, 上式中では $\hat{\psi}_3$ および $\hat{\eta}_3$, \hat{h}_3 に対する非斉次項を形成している. $I_{31}^{(1)}$ および $I_{31}^{(2)}$ については付録IVに示す.

式(148)の非斉次部分の形から解は E^3 および E を因子に持つ項から成り, 次のような形で表されることがわかる.

$$\hat{\psi}_3 = A^3 \psi_{33}(\chi) E^3 + \text{c.c.} + \hat{\psi}_{31}(\chi, T) E + \text{c.c.} \quad (149a)$$

$$\hat{\eta}_3 = A^3 \eta_{33} E^3 + \text{c.c.} + \hat{\eta}_{31}(T) E + \text{c.c.} \quad (149b)$$

$$\hat{h}_3 = A^3 h_{33} E^3 + \text{c.c.} + \hat{h}_{31}(T) E + \text{c.c.} \quad (149c)$$

$$\hat{p}_3 = A^3 p_{33}(\chi) E^3 + \text{c.c.} + \hat{p}_{31}(\chi, T) E + \text{c.c.} \quad (149d)$$

ここで $\hat{\cdot}$ を付けた記号は, 未だ A を含んでおり T の関数であることを示している. 式(149)を式(148)に代入すると E を因子に持つ項について次式が得られる.

$$L_1 \hat{\psi}_{31} + J_1 \hat{h}_{31} + G_1 \hat{\eta}_{31} = A^2 A^* I_{31}^{(1)} + A I_{31}^{(2)} \quad (150)$$

上式の一般解は次のように求められる.

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{31}(\chi) = & \hat{a}_{31} \phi_{a1} + \hat{b}_{31} \phi_{b1} + \epsilon \hat{c}_{31} \phi_{c1} + \epsilon \hat{d}_{31} \phi_{d1} \\ & - \hat{\eta}_{31} \beta^{-2} \chi \cos[\beta(1-\chi)] \\ & - \hat{h}_{31} \beta^{-2} (1-\chi) \cos[\beta(1-\chi)] \\ & + \hat{f}_{31}(\chi) \end{aligned} \quad (151)$$

ここで \hat{f}_{31} は非斉次解であり, 次のように表される.

$$\hat{f}_{31} = A^2 A^* f_{31}^{(1)} + A f_{31}^{(2)} \quad (152)$$

ここで $f_{31}^{(1)}$ および $f_{31}^{(2)}$ はそれぞれ $I_{31}^{(1)}$ および $I_{31}^{(2)}$ に対応した非斉次解であり, 付録IVに示す.

式 (115) および (116), (149) を式 (107)–(112) および (100), (101) に代入し, $O(\nu^3)$ において E を因子に持つ項だけ残すと次式が得られる.

$$\hat{\psi}_{31}(1) = 0 \quad (153)$$

$$\begin{aligned} & -(\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) \left(\frac{1}{4} + \kappa_c + \kappa_c^2 \right) - \frac{\hat{\psi}'_{31}(1)}{2} - \kappa_c \hat{\psi}'_{31}(1) \\ & + \frac{\hat{\eta}_{31}}{\sigma} + \epsilon^2 \left[3i \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{2} + k\kappa_c \right) (\hat{\eta}_{31} - \hat{h}_{31}) \right. \\ & \quad \left. + 3ik\hat{\psi}'_{31}(1) - \frac{i\hat{\psi}'''_{31}(1)}{k} \right] \\ & = A^2 A^* \mathcal{M}_{31}^{(1)} + A \mathcal{M}_{31}^{(2)} \quad (154) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hat{\eta}_{31} k^2}{2} - \hat{\eta}_{31} k^2 \kappa_c - k^2 \hat{\psi}_{31}(1) - \hat{\psi}''_{31}(1) \\ & = A^2 A^* \mathcal{N}_{31}^{(1)} + A \mathcal{N}_{31}^{(2)} \quad (155) \end{aligned}$$

$$\hat{\psi}_{31}(0) = 0 \quad (156)$$

$$\begin{aligned} & \hat{h}_{31} \kappa_c^2 - \hat{\eta}_{31} \kappa_c^2 + \hat{h}_{31} k^2 \kappa_c^3 + k^2 \kappa_c^2 \hat{\psi}_{31}(0) \\ & - 2\kappa_c \hat{\psi}'_{31}(0) + \kappa_c^2 \hat{\psi}''_{31}(0) = A^2 A^* \mathcal{Q}_{31}^{(1)} + A \mathcal{Q}_{31}^{(2)} \quad (157) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\omega \hat{h}_{31} + h_{11} \frac{dA}{dT} + 3(1-\theta)^{\frac{1}{2}} (i\hat{h}_{31}k - i\hat{\eta}_{31}k \\ & - \frac{ik^3 \kappa_c}{2} \hat{h}_{31} + \frac{\hat{h}_{31} k^2 \mu}{2} - \frac{ik^3}{2} \hat{\psi}_{31}(0) - \frac{ik}{2} \hat{\psi}''_{31}(0)) \\ & = A^2 A^* \mathcal{S}_{31}^{(1)} + A \mathcal{S}_{31}^{(2)} \quad (158) \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{M}_{31}^{(i)}$ および $\mathcal{N}_{31}^{(i)}$, $\mathcal{Q}_{31}^{(i)}$, $\mathcal{S}_{31}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) については付録 IV に示す.

式 (151) を式 (153)–(158) に代入すると, 次式が得られる.

$$\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \hat{a}_{31} \\ \hat{b}_{31} \\ \hat{c}_{31} \\ \hat{d}_{31} \\ \hat{\eta}_{31} \\ \hat{h}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{311} \\ \hat{m}_{31} \\ \hat{n}_{31} \\ \hat{f}_{310} \\ \hat{q}_{31} \\ \hat{s}_{31} \end{bmatrix} \quad (159)$$

ここで

$$\hat{f}_{311} = -\hat{f}_{31}|_{x=1}, \quad (160a)$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{31} &= A^2 A^* \mathcal{M}_{31}^{(1)} + A \mathcal{M}_{31}^{(2)} \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} + \kappa_c - 3i\epsilon^2 k \right) \hat{f}'_{31} + \frac{i\hat{f}'''_{31}}{k} \right]_{x=1}, \quad (160b) \end{aligned}$$

$$\hat{n}_{31} = A^2 A^* \mathcal{N}_{31}^{(1)} + A \mathcal{N}_{31}^{(2)} + \left[k^2 \hat{f}_{31} + \hat{f}''_{31} \right]_{x=1}, \quad (160c)$$

$$\hat{f}_{310} = -\hat{f}_{31}|_{x=0}, \quad (160d)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{31} &= A^2 A^* \mathcal{Q}_{31}^{(1)} + A \mathcal{Q}_{31}^{(2)} \\ & - \left[k^2 \kappa_c^2 \hat{f}_{31} - 2\kappa_c \hat{f}'_{31} + \kappa_c^2 \hat{f}''_{31} \right]_{x=0}, \quad (160e) \end{aligned}$$

$$\hat{s}_{31} = A^2 A^* \mathcal{S}_{31}^{(1)} + A \mathcal{S}_{31}^{(2)} - h_{11} \frac{dA}{dT}$$

$$+ \frac{ik}{2} \left[k^2 \hat{f}_{31} + \hat{f}''_{31} \right]_{x=0} \quad (160f)$$

式 (124) より \mathbf{R}_1 の行列式がゼロであることから, 式 (159) が解を持つ条件は, \mathbf{R}_1 のいずれかの一列を右辺の列ベクトルで入れ替えた行列の行列式がゼロとなることである. この条件は次式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & \hat{f}_{311} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & \hat{m}_{31} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & \hat{n}_{31} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & \hat{f}_{310} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & \hat{q}_{31} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & \hat{s}_{31} \end{bmatrix} = 0 \quad (161)$$

上式より次式のランダウ方程式が導かれる.

$$\frac{dA}{dT} = \alpha_0 A + \alpha_1 |A|^2 A \quad (162)$$

6. 結果および考察

(1) 亜臨界分岐の出現と σ および μ の影響

表-1 に, $\sigma = 0.1$ ($S = 0.0006$) および 0.5 ($S = 0.003$), 1.0 ($S = 0.006$) の場合における結果を示す. 表には角速度 ω および式 (162) より求められた $\text{Re}(\alpha_0)$, $\text{Im}(\alpha_0)$, 第一ランダウ定数 α_1 の実部および虚部の値を示している. 河床波が発生するような流れでは, 等流状態において底面に働くシールズストレスが限界シールズストレスの 10 倍程度となると考え, θ の値は 0.1 とした. μ は式 (37) によって正規化された μ^* であり, 流砂量公式 (14) において局所勾配の影響を表すパラメータである. μ^* の値については明確にはなっていないが, Fredsøe⁴⁾ によると 0.1 程度であるとされており, このとき μ は 0.1–1.0 程度の値をとることになる.

表を見るとほとんどのケースでランダウ定数が正となり, 解の分岐形態は, 図-5 のような亜臨界分岐となることがわかる. $(\sigma, \mu) = (0.1, 0.2)$ および $(0.5, 0.6)$ のケースではそれぞれ $(k, F_c) = (0.30, 0.835)$ および $(0.48, 0.756)$ の時, ランダウ定数が負の値をとり, 超臨界分岐となる. すなわち μ の値が大きくなるにしたがって超臨界分岐が, 特性波数 (最大の臨界フルード数となる波数) 付近から現れはじめる傾向にあることがわかる. これは局所勾配の影響が大きくなるにしたがって亜臨界分岐が現れにくくなることを意味している. また超臨界と亜臨界の閾値となる μ の値は σ の値とともに大きくなることがわかる.

上述の結果は, 平均勾配が大きく局所勾配の影響が小さい領域で亜臨界分岐が生じることを意味している. このことは一見すると矛盾しているように思われるが, 実は次のようなことを意味している. 平均勾配自体は通常 0.01 以下であるため, デューンの発生および挙動

表-1 k - F_c 平面上の中立曲線上 ($\Omega = 0$) の点 (k, F_c) における, 式 (162) 中の α_0 およびランダウ定数 α_1 ($\theta = 0.1$).

σ	μ	k	F_c	ω	$\text{Re}(\alpha_0)$	$\text{Im}(\alpha_0)$	$\text{Re}(\alpha_1)$	$\text{Im}(\alpha_1)$
0.1	0.0	0.20	0.835	3.15	1.05	14.6	4840	37100
0.1	0.0	0.34	0.850	6.22	2.11	36.1	1080	43900
0.1	0.0	0.50	0.840	9.38	3.27	58.5	2670	60600
0.1	0.1	0.20	0.830	3.07	0.96	13.7	3550	34400
0.1	0.1	0.32	0.843	5.53	1.65	29.5	470	37800
0.1	0.1	0.50	0.829	8.71	2.45	48.6	1500	45100
0.1	0.2	0.20	0.825	2.98	0.861	12.8	2290	31800
0.1	0.2	0.30	0.835	4.90	1.29	24.0	-125	33000
0.1	0.2	0.40	0.829	6.59	1.57	33.1	46.9	31200
0.5	0.0	0.40	0.785	5.48	4.11	18.5	1520	10000
0.5	0.0	0.52	0.792	7.86	6.57	31.0	1510	12600
0.5	0.0	0.70	0.780	11.3	10.9	50.8	4740	21400
0.5	0.3	0.40	0.771	5.16	3.27	15.7	829	8480
0.5	0.3	0.51	0.776	7.12	4.77	24.5	684	9750
0.5	0.3	0.70	0.762	10.2	7.40	38.8	2360	13700
0.5	0.6	0.30	0.731	3.21	1.63	7.36	1060	4870
0.5	0.6	0.48	0.756	6.07	3.19	17.6	-31.5	7440
0.5	0.6	0.60	0.748	7.79	4.02	23.4	326	7690
1.0	0.0	0.50	0.721	5.44	4.50	12.7	1300	3410
1.0	0.0	0.67	0.738	8.50	9.42	25.4	1690	5080
1.0	0.0	0.80	0.732	10.8	14.3	36.4	4210	7580
1.0	0.5	0.50	0.686	4.90	2.94	9.65	794	2590
1.0	0.5	0.68	0.706	7.72	6.03	19.1	741	3510
1.0	0.5	0.80	0.702	9.52	8.47	25.7	1723	4260
1.0	1.0	0.60	0.650	5.54	2.40	9.74	26.9	2120
1.0	1.0	0.70	0.653	6.79	3.22	12.7	40.6	2230
1.0	1.0	0.80	0.648	7.95	4.00	15.4	289	2250

に大きな影響を与えることはない。平均勾配の影響は実は正規化された σ の形で無次元化された水深方向の運動方程式 (28) に現れる。この式を見れば明らかなように、 σ は水深方向の重力の影響を表している。これは無次元化の際に重力 g を $(U_f/\epsilon)^2/D (= gS/\epsilon^2)$ で割ることによって現れたものであり、そのため平均勾配が大きくなるほど、水深方向の重力は相対的に小さくなることを意味している。したがって σ が小さくなればなるほど水深方向の重力の影響が大きくなることがわかる。これはより大きな復元力が水面に働くことを意味しており、そのような場合水面における波の形成

が抑制されることが予想される。デューンの発達には水面に波状の変位が生じることが不可欠であるので、 σ が小さくなるほどデューンの発達は抑制されることになる。デューンの発達と図-5 中の BD のような解の出現には何らかの関係があり、 σ が小さくなるほど BD のような解の出現が抑制される可能性が考えられる。その詳細なメカニズムの解明については今後の課題である。一方局所勾配の影響が大きくなると、デューン背後の順勾配区間において流砂量が増加することになり、この場合もデューンの形成を抑制する方向に働く。したがって σ の減少と μ の増加は同様の影響を持つもの

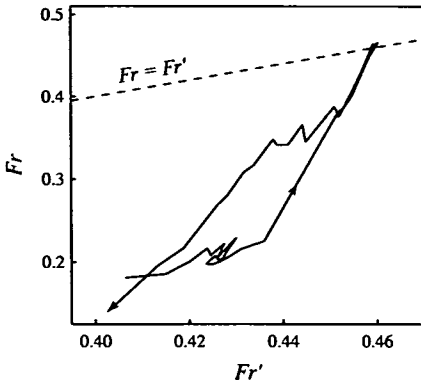


図-9 図-3に見られる Fr と Fr_d の関係

と推測される。

式(37)によれば、平坦床等流状態におけるシールス数が大きくなると μ の値が小さくなる。すなわち Fredsøe の流砂量式を用いると、シールス数が大きくなって土砂輸送が活発になればなるほど、局所勾配の影響は小さくなり亜臨界分岐が生じやすくなることを意味している。

(2) 実現象への適用

図-3に示したような利根川・川俣地点に見られる河床形状の遷移現象に本理論を適用してみる。利根川・川俣地点における勾配は $1/3600$ 、河床材料の粒径は 0.4 mm とされており、このとき $\sigma = 0.047$ となる。図-9に式(4)を用いて求められた平坦床に対応するフルード数 Fr と実際の流速および水深から求められるフルード数 Fr_d との関係を示す。図中点線は $Fr_d = Fr$ を示し、デューンによる河床抵抗の上昇が生じているとき、実際のフルード数 Fr_d はこの線より下に現れることになる。図からわかるように、平坦床からデューンへの遷移が発生する平坦床でのフルード数 Fr は $0.41 \sim 0.43$ 程度である。またこれに対応する平坦床等流状態での水深は 3 m 程度であると推定され、シールス数は 1.3 程度となる。したがって限界シールス数を 0.05 、勾配の影響を表すパラメータ μ^* を 0.1 とすると $\theta = 0.04$ および $\mu = 0.08$ となる。このとき理論からは表-2のような結果が得られる。

表からわかるように亜臨界分岐が生じており、ヒステリシスが生じた原因がこの分岐形態にあることが示唆される。ただし臨界フルード数を見ると 0.860 となっており、理論的にはこのフルード数で平坦床からデューンに遷移するはずであるが、実際は図-9に示したように、 $0.41 \sim 0.43$ 程度とかなり小さいフルード数で遷移が生じている。

表-2 利根川・川俣地点に適用した理論の結果。 $\sigma = 0.047$, $\theta = 0.025$, $\mu = 0.05$ 。

k	F_c	$Re(\alpha_0)$	$Re(\alpha_1)$
0.1	0.818	0.310	10700
0.25	0.860	0.936	291
0.5	0.835	1.49	1540

このような不一致が生じる原因としては浮遊砂の影響が考えられる。Engelund²⁾および Fredsøe¹⁰⁾の結果によれば、浮遊砂はデューンの発達を抑制し臨界フルード数を小さくする働きをもつ。本理論では掃流砂しか考慮していないため臨界フルード数が大きく見積もられてしまうことが考えられる。実際はデューンから平坦床への遷移が生じるような状況では底面剪断力もかなり大きくなっているのが普通である。しかも利根川の場合、河床材料の粒径は 0.4 mm であるから、活発な浮遊砂が生じていると考えるべきであろう。実現象とさらに良好な一致をみるためには浮遊砂まで含めた理論の構築が必要となる。今後の課題である。

(3) 流砂量公式の影響

局所勾配の影響を取り入れた流砂量公式としては他にも Kovacs and Parker²¹⁾によって提案されたものが存在する。彼らは Bagnold 仮説から力学的な考察によって方向および大きさが任意の勾配に適用可能な流砂量公式をベクトル形式で導いている。その式を流下方向にのみ勾配を有するような場合について書き下すと次のようになる。

$$q_B^* = \frac{a^{1/2}}{\mu_C + h_{,x}} \left[\tau_b^* - \tau_{th}^* \left(1 + \frac{h_{,x}}{\mu_C} \right) (1 + h_{,x})^{-1/2} \right] \times \left[\tau_b^{*1/2} - \tau_{th}^{*1/2} \left(1 + \frac{h_{,x}}{\mu_C} \right)^{1/2} \right] \quad (163)$$

ここで a は砂粒子近傍の流速と底面付近の代表流速を関係付けるパラメータである。 μ_C はクーロン摩擦係数であり、Fredsøe の式の μ^* と異なって物理的意味がより明確なパラメータである。また μ と違って局所勾配の分母に存在するため、 μ_C が大きいほど局所勾配の影響は小さくなることに注意する必要がある。Kovacs & Parker の式では勾配がゼロの時、芦田・道上²²⁾公式に一致する。

表-3に式(163)を用いた場合の結果を示す。計算では Kovacs & Parker にならって $a^{1/2} = 11.9$ および $\tau_{th}^* = 0.035$ の値を用いている。 μ_C として Kovacs & Parker が用いた 0.84 を用いると σ が 0.1 および 0.5 の場合に波数 k が大きい領域で α_1 が負になることがわ

かる。このとき超臨界分岐が生じている。 μ_C の値を1.0~5.0と大きくした場合の結果を併せて示す。平均勾配が大きく局所勾配の影響が小さい領域で亜臨界分岐が生じるという点で Fredsøe の式を用いた場合の結果と同じ傾向を示すが、 σ が0.1および0.5のとき、 μ_C がそれぞれ5.0および2.0程度と通常言われている値よりかなり大きくならないと亜臨界分岐が生じないことがわかる。

また Kovacs & Parker の式ではシールズ数を大きくしても勾配の影響が小さくなることはない。これは式(163)の分母に存在する μ_C によるものである。Fredsøeの提案式では μ は平坦床等流状態でのシールズ数が大きくなると小さくなるが、Kovacs & Parkerの式では流砂量全体に μ_C^{-1} がかかるためシールズ数によらず流砂量に対する局所勾配の影響はほとんど変化しない。このような性質から Kovacs & Parker の式を前述の利根川の場合に適用しても、超臨界分岐が現れヒステリシスが生じなくなってしまう。

果たしてどちらの流砂量式が実現象をより正確に表しているのだろうか？ Fredsøeの式は、経験式である Meyer-Peter & Müller 式にやや直感的な考察から流下方向勾配の影響を加味したものであるのに対して、Kovacs & Parkerの式は、Bagnold 仮説を基礎に厳密な力学的考察から導かれた理論式である。このように述べると後者の式がより精度が高いように思われるが、いずれの式も未だ実験や観測による検証が行われていないのが現状である。したがってどちらの結果がより現実を表しているのかについては断定できないが、本解析において Kovacs & Parker の式を用いると勾配の影響が過大評価される可能性についていくつか言及しておく。

Kovacs & Parker 式で分母に現れる μ_C は底面上における掃流層に対する力の釣り合いから出てくるものである。実際にデューン-平坦床が生じるようなシールズ数の大きな状況下では流砂が活発になり saltation から浮遊砂に近い掃流形態が現われる。そのような状況下では局所勾配の影響は小さくなるが予想される。

またデューン背後で河床は流下方向に大きな勾配(順勾配)を持っており、この影響で Fredsøe, Kovacs & Parker, いずれの式を用いても流砂量は平坦床の場合より大きく見積もられる。流砂量に対する勾配の影響がもっとも大きく現れるのが、デューン背後と言っても過言ではない。ところが実際はデューンの背後で剥離が生じるため、剥離域で生じた逆流のために底面剪断力はかなり小さくなる(場合によっては逆方向に働く)と考えられる。この剥離の影響については本理論では全く考慮されていないため、理論では実際より大きな順方向の剪断力が生じており、さらに勾配の影響によ

表-3 Kovacs & Parker の掃流砂量式(163)を用いた場合の α_0 およびランダウ定数 α_1 。 $\tau_{th}^* = 0.035$ 。

σ	μ_c	k	F_c	$Re(\alpha_0)$	$Re(\alpha_1)$
0.1	0.84	0.10	0.742	0.191	944
0.1	0.84	0.17	0.772	0.279	-2860
0.1	0.84	0.30	0.698	0.169	-3170
0.5	0.84	0.30	0.714	1.08	496
0.5	0.84	0.43	0.733	1.68	-314
0.5	0.84	0.60	0.717	2.12	-181
1.0	0.84	0.50	0.649	1.54	503
1.0	0.84	0.68	0.671	3.01	236
1.0	0.84	0.80	0.666	4.03	500
0.1	2.0	0.10	0.762	0.244	2770
0.1	2.0	0.26	0.821	0.689	-872
0.1	2.0	0.40	0.804	0.720	-629
0.1	5.0	0.20	0.828	0.727	2530
0.1	5.0	0.31	0.840	1.17	183
0.1	5.0	0.50	0.824	1.67	866
0.5	1.0	0.30	0.723	1.19	754
0.5	1.0	0.43	0.745	1.95	-87.6
0.5	1.0	0.60	0.734	2.64	78.5
0.5	2.0	0.40	0.767	2.47	682
0.5	2.0	0.50	0.772	3.46	456
0.5	2.0	0.60	0.768	4.42	861

て流砂量も実際よりかなり大きくなっていると考えられる。すなわち実際の現象はむしろ河床勾配の影響を小さく見積もった流砂量式に近いことが予想される。

(4) 理論が有するその他の限界

本理論はデューンの遷移現象を理論的に扱うために非常に単純化された流れの方程式を解いている。既に述べたように実際のデューンではデューンの背後付近で流れが剥離することが知られているが、本理論で用いた流れのモデルでは剥離の効果は全く考慮されていない。剥離は流砂量にのみならず流れ自体にも大きな影響を及ぼす。剥離が発生すると大きな形状抵抗となり、平坦床とデューンの場合の河床抵抗の違いをより強調する結果となる。このこともヒステリシス現象をより強調する方向に働くことが予想される。剥離の影響まで考慮に入れた解析については今後の課題である。

最初に述べたように本理論で説明できるのは図-1(a)

のヒステリシス現象のみであり、(b)の現象を説明することはできない。本理論は河床形状の応答遅れという考え方を否定するものではなく、ヒステリシス現象の一部を補完的に説明する理論と考えるべきであろう。河床形態と河床抵抗の急激な変化や図-2に見られるような遷移する際の水理量が常にある一定の範囲に存在するような現象は応答遅れの考え方だけでは説明できない。そのような遷移現象は本理論で提案したような亜臨界分岐を用いて説明可能であると考えられる。

7. 結論

デューンの形成時に見られる流量と河床形状に見られる二価性およびそれによって発生するヒステリシス現象を説明するために、二次元レイノルズ方程式および局所勾配の影響を加味した流砂量公式、流砂の連続式を用いて線形安定解析および弱非線形安定解析を行った。その結果次のようなことが明らかとなった。

1. 流砂量における局所勾配の影響が小さい領域では、デューン河床から平坦床への遷移は亜臨界分岐となることが明らかとなった。これによって、流量と河床形態の間の関係に見られる二価性とそれによって発生するヒステリシスの原因が、デューン河床、平坦床遷移が亜臨界分岐であることに起因している可能性が示された。
2. 亜臨界分岐は、平均勾配が大きければ大きいほど、局所勾配の影響が小さければ小さいほど現われ易くなることが明らかとなった。

付録 I

$$R = r_{ij} \quad (I.1)$$

$$r_{11} = e^{-\sqrt{k^2 - \beta^2}}, \quad r_{12} = e^{\sqrt{k^2 - \beta^2}}, \quad (I.2a, b)$$

$$r_{13} = \epsilon \exp \left[-\sqrt{ik\kappa} \frac{1}{\epsilon} \right], \quad r_{14} = \epsilon, \quad (I.2c, d)$$

$$r_{15} = -1/\beta^2, \quad r_{16} = 0 \quad (I.2e, f)$$

$$r_{21} = e^{-\sqrt{k^2 - \beta^2}} \sqrt{k^2 - \beta^2} \left(\frac{1}{2} - 2i\epsilon^2 k - \frac{i\epsilon^2 \beta^2}{k} + \kappa \right), \quad (I.3a)$$

$$r_{22} = -e^{\sqrt{k^2 - \beta^2}} \sqrt{k^2 - \beta^2} \left(\frac{1}{2} - 2i\epsilon^2 k - \frac{i\epsilon^2 \beta^2}{k} + \kappa \right), \quad (I.3b)$$

$$r_{23} = -\exp \left[-\sqrt{ik\kappa} \frac{1}{\epsilon} \right] \left(\frac{1}{2} - 3i\epsilon^2 k \right) \sqrt{ik\kappa}, \quad (I.3c)$$

$$r_{24} = 3i\epsilon^2 k \sqrt{ik(1/2 + \kappa)}, \quad (I.3d)$$

$$r_{25} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\beta^2} + \frac{3i\epsilon^2 k}{2} - \frac{3i\epsilon^2 k}{\beta^2}$$

$$-\kappa + \frac{\kappa}{\beta^2} + 3i\epsilon^2 k \kappa - \kappa^2 + \frac{1}{\sigma}, \quad (I.3e)$$

$$r_{26} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\beta^2} - \frac{3i\epsilon^2 k}{2} + \frac{3i\epsilon^2 k}{\beta^2} + \kappa - \frac{\kappa}{\beta^2} - 3i\epsilon^2 k \kappa + \kappa^2 \quad (I.3f)$$

$$r_{31} = e^{-\sqrt{k^2 - \beta^2}} (-2k^2 + \beta^2), \quad (I.4a)$$

$$r_{32} = -e^{\sqrt{k^2 - \beta^2}} (-2k^2 + \beta^2), \quad (I.4b)$$

$$r_{33} = -\exp \left[-\sqrt{ik\kappa} \frac{1}{\epsilon} \right] \left(-\epsilon k^2 + \frac{ik\kappa}{\epsilon} \right), \quad (I.4c)$$

$$r_{34} = -\frac{ik}{2\epsilon} - \epsilon k - \frac{ik\kappa}{\epsilon}, \quad (I.4d)$$

$$r_{35} = -1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{\beta^2} - k^2 \kappa, \quad r_{36} = 0 \quad (I.4e, f)$$

$$r_{41} = 1, \quad r_{42} = 1, \quad r_{43} = \epsilon, \quad (I.5a, b, c)$$

$$r_{44} = \epsilon \exp \left[-\sqrt{ik(1/2 + \kappa)} \frac{1}{\epsilon} \right], \quad (I.5d)$$

$$r_{45} = 0, \quad r_{46} = -\frac{\cos \beta}{\beta^2}, \quad (I.5e, f)$$

$$r_{51} = 2\sqrt{k^2 - \beta^2} + (2k^2 - \beta^2) \kappa, \quad (I.6a)$$

$$r_{52} = -2\sqrt{k^2 - \beta^2} + (2k^2 - \beta^2) \kappa, \quad (I.6b)$$

$$r_{53} = \epsilon k^2 \kappa + \frac{ik\kappa^2}{\epsilon} + 2\sqrt{ik\kappa}, \quad (I.6c)$$

$$r_{54} = \epsilon \exp \left[-\sqrt{ik(1/2 + \kappa)} \frac{1}{\epsilon} \right] \times \left[\frac{ik\kappa}{2\epsilon} + \epsilon k^2 \kappa + \frac{ik\kappa^2}{\epsilon} - 2\sqrt{ik(1/2 + \kappa)} \right], \quad (I.6d)$$

$$r_{55} = -\kappa + \frac{2 \cos \beta}{\beta^2} - \frac{2 \kappa \sin[\beta]}{\beta}, \quad (I.6e)$$

$$r_{56} = \kappa + k^2 \kappa^2 - \frac{2 \cos \beta}{\beta^2} + \kappa \cos \beta - \frac{k^2 \kappa^2 \cos \beta}{\beta^2} + \frac{2 \sin[\beta]}{\beta} + \frac{2 \kappa \sin[\beta]}{\beta}, \quad (I.6f)$$

$$r_{61} = \frac{3ik}{\kappa} \sqrt{k^2 - \beta^2} \sqrt{1 - \theta} \quad (I.7a)$$

$$r_{62} = -\frac{3ik}{\kappa} \sqrt{k^2 - \beta^2} \sqrt{1 - \theta}, \quad (I.7b)$$

$$r_{63} = \frac{3ik}{\kappa} \sqrt{ik\kappa} \sqrt{1 - \theta}, \quad (I.7c)$$

$$r_{64} = -\frac{3ik\sqrt{1 - \theta}}{\kappa} \sqrt{ik(1/2 + \kappa)} \times \exp \left[-\sqrt{ik(1/2 + \kappa)} \frac{1}{\epsilon} \right], \quad (I.7d)$$

$$r_{65} = ik\sqrt{1 - \theta} \left(-\frac{9}{2} + \frac{3 \cos \beta}{\beta^2 \kappa} \right), \quad (I.7e)$$

$$r_{66} = \Omega - i\omega + ik\sqrt{1 - \theta} \left(\frac{9}{2} + \frac{3k\mu}{2} - \frac{3 \cos \beta}{\beta^2 \kappa} + \frac{3 \sin[\beta]}{\beta \kappa} \right) \quad (I.7f)$$

付録 II

$$\begin{aligned}
 I_{22} = & 7ih_{11}^2 k^3 U_0^2 + 8ih_{11}^2 k U_0 U_0' \\
 & - 2ih_{11}^2 k^3 U_0 U_0' - 7ih_{11}^2 k^3 U_0^2 \eta_{11} \\
 & - 16ih_{11} k U_0 U_0' \eta_{11} + 8ik U_0 U_0' \eta_{11}^2 \\
 & - 7ih_{11}^2 k^3 U_0^2 \chi + 4ih_{11}^2 k^3 U_0 U_0' \chi \\
 & + 14ih_{11} k^3 U_0^2 \eta_{11} \chi - 4ih_{11} k^3 U_0 U_0' \eta_{11} \chi \\
 & - 7ik^3 U_0^2 \eta_{11}^2 \chi - 2ih_{11}^2 k^3 U_0 U_0' \chi^2 \\
 & + 4ih_{11} k^3 U_0 U_0' \eta_{11} \chi^2 - 2ik^3 U_0 U_0' \eta_{11}^2 \chi^2 \\
 & + ih_{11} k^3 U_0 \psi_{11}(\chi) + 3ih_{11} k U_0' \psi_{11}(\chi) \\
 & - 3ik U_0'' \eta_{11} \psi_{11}(\chi) - ih_{11} k^3 U_0 \chi \psi_{11}(\chi) \\
 & + ik^3 U_0' \eta_{11} \chi \psi_{11}(\chi) - 7ih_{11} k^3 U_0 \psi_{11}'(\chi) \\
 & - 2ih_{11} k U_0' \psi_{11}'(\chi) + 2ik U_0' \eta_{11} \psi_{11}'(\chi) \\
 & + 7ih_{11} k^3 U_0 \chi \psi_{11}'(\chi) - 7ik^3 U_0 \eta_{11} \chi \psi_{11}'(\chi) \\
 & - 5ih_{11} k U_0 \psi_{11}''(\chi) + 5ik U_0 \eta_{11} \psi_{11}''(\chi) \\
 & + ik \psi_{11}'(\chi) \psi_{11}''(\chi) - ik \psi_{11}(\chi) \psi_{11}'''(\chi) \\
 & + \epsilon^2 \left(15h_{11}^2 k^4 U_0 + 24h_{11}^2 k^2 U_0' \right. \\
 & \quad - 7h_{11}^2 k^4 U_0' - 18h_{11}^2 k^2 U_0'' \\
 & \quad - 15h_{11} k^4 U_0 \eta_{11} - 48h_{11} k^2 U_0' \eta_{11} \\
 & \quad + 18h_{11} k^2 U_0'' \eta_{11} + 24k^2 U_0' \eta_{11}^2 \\
 & \quad - 15h_{11}^2 k^4 U_0 \chi + 14h_{11}^2 k^4 U_0' \chi \\
 & \quad - 15k^4 U_0 \eta_{11}^2 \chi + 18k^2 U_0'' \eta_{11}^2 \chi \\
 & \quad - 7h_{11}^2 k^4 U_0' \chi^2 + 14h_{11} k^4 U_0' \eta_{11} \chi^2 \\
 & \quad + 18h_{11}^2 k^2 U_0'' \chi + 30h_{11} k^4 U_0 \eta_{11} \chi \\
 & \quad - 14h_{11} k^4 U_0' \eta_{11} \chi - 36h_{11} k^2 U_0'' \eta_{11} \chi \\
 & \quad - 7k^4 U_0' \eta_{11}^2 \chi^2 - 15h_{11} k^4 \psi_{11}'(\chi) \\
 & \quad + 15h_{11} k^4 \chi \psi_{11}'(\chi) - 15k^4 \eta_{11} \chi \psi_{11}'(\chi) \\
 & \quad - 16h_{11} k^2 \psi_{11}''(\chi) + 16k^2 \eta_{11} \psi_{11}''(\chi) \\
 & \quad + 6h_{11} k^2 \psi_{11}'''(\chi) - 6h_{11} k^2 \chi \psi_{11}'''(\chi) \\
 & \quad + 6k^2 \eta_{11} \chi \psi_{11}'''(\chi) + 4h_{11} \psi_{11}^{\text{IV}}(\chi) \\
 & \quad \left. - 4\eta_{11} \psi_{11}^{\text{IV}}(\chi) \right) \quad (\text{II.1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{22}(\chi) = & \sqrt{k^2 - \beta_c^2} (h_{11} - h_{11}\chi + \eta_{11}\chi) \\
 & \times \left(-a_{11} \exp \left[-\sqrt{k^2 - \beta_c^2} \chi \right] \right. \\
 & \quad \left. + b_{11} \exp \left[\sqrt{k^2 - \beta_c^2} \chi \right] \right) \\
 & - \frac{1}{2} \beta_c^{-1} \sin [\beta_c (1 - \chi)] \left[h_{11} (\chi - 1) - \eta_{11} \chi \right]^2 \\
 & + \epsilon C_{22}^b \exp \left[-\sqrt{ik\kappa_c} \frac{\chi}{\epsilon} \right] \\
 & + \epsilon D_{22}^b \exp \left[-\sqrt{ik \left(\frac{1}{2} + \kappa_c \right)} \frac{1 - \chi}{\epsilon} \right] \quad (\text{II.2})
 \end{aligned}$$

$$C_{22}^i = c_{11} \left(\eta_{11} - h_{11} + \frac{C_{11}^o \sqrt{ik\kappa_c}}{\kappa_c} \right) \quad (\text{II.3a})$$

$$D_{22}^i = d_{11} \left(\eta_{11} - h_{11} - \frac{D_{11}^o \sqrt{ik \left(\frac{1}{2} + \kappa_c \right)}}{\frac{1}{2} + \kappa_c} \right) \quad (\text{II.3b})$$

$$C_{11}^o = a_{11} + b_{11} - \beta_c^{-2} h_{11} \cos \beta_c \quad (\text{II.3c})$$

$$\begin{aligned}
 D_{11}^o = & a_{11} \exp \left[-\sqrt{k^2 - \beta_c^2} \right] \\
 & + b_{11} \exp \left[\sqrt{k^2 - \beta_c^2} \right] - \beta_c^{-2} \eta_{11} \quad (\text{II.3d})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{22} = & -\frac{h_{11} k^2 \eta_{11}}{2} + \frac{k^2 \eta_{11}^2}{2} \\
 & - h_{11} k^2 \eta_{11} \kappa + k^2 \eta_{11}^2 \kappa + k^2 \eta_{11} \psi_{11}'(1) \\
 & + 2h_{11} \psi_{11}''(1) - 2\eta_{11} \psi_{11}''(1) \quad (\text{II.4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{22} = & -2h_{11}^2 \kappa^2 + 4h_{11} \eta_{11} \kappa^2 \\
 & - 2\eta_{11}^2 \kappa^2 + 2h_{11}^2 k^2 \kappa^3 - 2h_{11} k^2 \eta_{11} \kappa^3 \\
 & + 2h_{11} k^2 \kappa \psi_{11}(0) + h_{11} k^2 \kappa^2 \psi_{11}(0) \\
 & - k^2 \eta_{11} \kappa^2 \psi_{11}(0) + 4h_{11} \kappa \psi_{11}'(0) \\
 & - 4\eta_{11} \kappa \psi_{11}'(0) - h_{11} k^2 \kappa^2 \psi_{11}''(0) - \psi_{11}''(0)^2 \\
 & - h_{11} \kappa^2 \psi_{11}''(0) + \eta_{11} \kappa^2 \psi_{11}''(0) \quad (\text{II.5})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{22} = & -\frac{3h_{11}^2}{8} + \frac{3h_{11} \eta_{11}}{4} - \frac{3\eta_{11}^2}{8} \\
 & + \frac{k^2 \eta_{11}^2}{8} - \frac{3h_{11}^2 \kappa_c}{2} + 3h_{11} \eta_{11} \kappa_c - \frac{3\eta_{11}^2 \kappa_c}{2} \\
 & + \frac{k^2 \eta_{11}^2 \kappa_c}{2} - \frac{3h_{11}^2 \kappa_c^2}{2} + 3h_{11} \eta_{11} \kappa_c^2 \\
 & - \frac{3\eta_{11}^2 \kappa_c^2}{2} + \frac{k^2 \eta_{11}^2 \kappa_c^2}{2} + \frac{k^2 \eta_{11} \psi_{11}(1)}{4} \\
 & + \frac{k^2 \eta_{11} \kappa_c \psi_{11}(1)}{2} + h_{11} \psi_{11}'(1) - \eta_{11} \psi_{11}'(1) \\
 & + 2h_{11} \kappa_c \psi_{11}'(1) - 2\eta_{11} \kappa_c \psi_{11}'(1) - \frac{\psi_{11}'(1)^2}{2} \\
 & + \frac{\psi_{11}(1) \psi_{11}''(1)}{2} + \epsilon^2 \left(\frac{3ih_{11}^2}{k} + 3ih_{11}^2 k \right. \\
 & \quad - \frac{6ih_{11} \eta_{11}}{k} - 6ih_{11} k \eta_{11} + \frac{3i\eta_{11}^2}{k} \\
 & \quad + 2ik\eta_{11}^2 - \frac{5i}{4} k^3 \eta_{11}^2 + 6ih_{11}^2 k \kappa_c \\
 & \quad - 12ih_{11} k \eta_{11} \kappa_c + 6ik\eta_{11}^2 \kappa_c - \frac{5i}{2} k^3 \eta_{11}^2 \kappa_c \\
 & \quad - \frac{5i}{2} k^3 \eta_{11} \psi_{11}(1) - 6ih_{11} k \psi_{11}'(1) \\
 & \quad + 6ik\eta_{11} \psi_{11}'(1) + \frac{3ih_{11} \psi_{11}''(1)}{2k} \\
 & \quad \left. + 2ik\eta_{11} \psi_{11}''(1) - \frac{3i\eta_{11} \psi_{11}''(1)}{2k} \right) \quad (\text{II.6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{22} = & \frac{3ik\eta_{11}^2(-4+3\theta)}{\sqrt{1-\theta}} \\
& + \frac{3h_{11}k\eta_{11}[8i-i\theta(6+k^2\kappa_c)+k\mu]}{\sqrt{1-\theta}} \\
& - \frac{3ih_{11}^2k}{4\sqrt{1-\theta}}[16-12\theta+k^4\kappa_c^2+2ik^3\kappa_c\mu \\
& \quad - 4ik\mu - k^2(4+4\theta(-1+\kappa_c)+\mu^2)] \\
& - \frac{3ik^3\eta_{11}\psi_{11}(0)}{\sqrt{1-\theta}} + 3ih_{11}k^3\sqrt{1-\theta}\psi'_{11}(0) \\
& + \frac{3h_{11}k^3(2i-ik^2\kappa_c+k\mu)\psi_{11}(0)}{2\sqrt{1-\theta}} \\
& - \frac{3ik^5\psi_{11}(0)^2}{4\sqrt{1-\theta}} + \frac{3ik\eta_{11}(-3+2\theta)\psi'_{11}(0)}{\sqrt{1-\theta}} \\
& + \frac{3h_{11}k(6i-4i\theta-ik^2\kappa_c+k\mu)\psi'_{11}(0)}{2\sqrt{1-\theta}} \\
& - \frac{3ik^3\psi_{11}(0)\psi'_{11}(0)}{2\sqrt{1-\theta}} - \frac{3ik\psi'_{11}(0)^2}{4\sqrt{1-\theta}} \quad (II.7)
\end{aligned}$$

付録 III および IV, V についてはスペースの都合上割愛した。別冊として用意してあるので、著者らに問い合わせられたい。

参考文献

- 1) Kennedy, J. F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, pp. 521-544, 1963.
- 2) Engelund, F.: Instability of erodible beds, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 42, pp. 225-244, 1970.
- 3) Smith, J. D.: Stability of sand dune bed subjected to a shear flow of low Froude number, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 75, pp. 5928-5940, 1970.
- 4) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 1-16, 1974.
- 5) Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Forms of bed roughness in alluvial channels, *Journal of the Hydraulics Division, Proc. ASCE*, Vol. 87, No.3, pp. 87-105, 1961.
- 6) Engelund, F.: Closure to "Hydraulic Division, ASCE, Vol. 117, Paper NO. 2528, 1952."

- 7) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V.: Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61, Geological Survey Professional Paper, 462-I, U.S. Government Printing Office, Washington, 1966.
- 8) 岸力, 黒木幹男: 移動床流れにおける河床形状と流体抵抗 (I), 北海道大学工学部研究報告, pp. 1-23, 1972.
- 9) Fredsøe, J.: Unsteady flow in straight alluvial streams. Part 1. Modification of individual dunes, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 91, Part 3, pp. 497-512, 1981.
- 10) Fredsøe, J.: Unsteady flow in straight alluvial streams. Part 2. Transition from dunes to plane bed, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 102, pp. 431-453, 1981.
- 11) 中川博次, 辻本哲郎: Lower regime における非定常移動床流れの抵抗の遅れ性状, 第 25 回水理講演会論文集, pp. 1-7, 1981.
- 12) 中川博次, 辻本哲郎: 河床波を伴う非定常流れの特性, 第 27 回水理講演会論文集, pp. 665-671, 1983.
- 13) 澤井健二: 水理量の時間変化に伴う河床波の変形過程に関する研究, 第 31 回水理講演会論文集, pp. 647-652, 1987.
- 14) 吉川秀夫, 石川忠晴: 移動床流れの水位と流砂量の予測に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 289 号, pp. 67-76, 1979.
- 15) 石川忠晴: 利根川・江戸川の河道粗度係数について, 土木研究所資料, 第 1943 号, pp. 46, 1983.
- 16) 流体力学ハンドブック, 第 2 版, 日本流体力学会編, 丸善, 1998.
- 17) Pekeris, C. and Shkoller, B.: Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 29, pp. 31-38, 1967.
- 18) Seminara, G., Colombini, M. and Parker, G.: Nearly pure sorting waves and formation of bedload sheets, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 312, pp. 253-278, 1996.
- 19) Nayfeh, A.: *Perturbation method*, John Wiley, New York, 1973.
- 20) 山口里実, 泉典洋: 侵食性河床におけるステップ発生の線形安定性理論, 水工学論文集, Vol. 45, pp. 751-756, 2001.
- 21) Kovacs, A. and Parker, G.: A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channel, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 267, pp. 153-183, 1994.
- 22) 芦田和男, 道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第 206 号, pp. 59-69, 1972.

(2002. 10. 18 受付)

SUBCRITICAL BIFURCATION OBSERVED IN THE TRANSITION BETWEEN DUNE AND FLAT BED REGIMES

Satomi YAMAGUCHI and Norihiro IZUMI

In the transition process of dune formation, a hysteresis is observed between flow depth and discharge, which is analogous to the multiple-valued relations between the total Shields stress and the effective Shields stress found in experiments. In this study, a weakly nonlinear stability analysis is performed in order to provide a theoretical explanation for the hysteresis observed in the transition of dunes. The growth rate expansion method is used to derive a nonlinear amplitude equation, which shows that when the average bed slope is large and the effect of the local bed inclination is small, the transition of dune formation is characterized by the subcritical bifurcation. This implies that the hysteresis is caused by the subcritical bifurcation.