

# トラス要素およびはり要素を用いたコンクリートの引張軟化の簡易解析法

伊良波繁雄<sup>1</sup>・富山潤<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博(工) 琉球大学助教授 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

E-mail: iraha@tec.u-ryukyu.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 博(工) 琉球大学助手 工学部環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

有限要素法でコンクリートのひび割れ解析をする際、平面要素を用いて引張軟化を考慮し数値解析を行う方法は厳密である。しかし、はり部材が曲げや軸力を受ける場合は、平面要素の代わりにトラス要素やはり要素のような一次要素を用いることができれば、計算コストや入力データ作成の面で大きな軽減になる。そこで、本研究ではトラス要素やはり要素のような一次要素を用いて、コンクリートの引張軟化を考慮した解析方法を示し、コンクリートはりの直接引張試験、コンクリートはりの曲げ試験、低鉄筋コンクリートはりの曲げ試験の数値解析を行った。解析結果と実験値との一致は良好であった。

**Key Words :** finite element method, tension softening, truss element, beam element, fracture mechanics

## 1. はじめに

近年、計算機の飛躍的な進歩に伴い、有限要素法、境界要素法や差分法のような数値解析手法が発展し、固体力学、流体力学、熱伝導問題等のような工学の様々な諸分野の解析に応用されている<sup>1)</sup>。特に有限要素法は1967年にカリフォルニア大学のNgoとScordelisら<sup>2)</sup>が鉄筋コンクリートはりのせん断破壊の問題に適用して以来、現在まで、コンクリートの研究者にも親しまれてきた。

コンクリートはりのひび割れ解析で引張軟化を考慮して数値解析を行うとき、平面要素を用いて数値解析を行う研究は多い<sup>3)</sup>。しかし、はり部材が曲げや軸力を受ける場合は、平面要素の代わりにトラス要素やはり要素のような一次要素を用いることが出来れば、計算コストや入力データ作成の面で大きな軽減になる。

引張軟化の問題を一次元のトラス、はりとして取り扱った研究は従来から多くの例がある。園田<sup>4)</sup>は軟化を示す部材で構成されたトラス構造物を全ポテンシャルエネルギー増分関数の最小化問題として非線形計画法の手法を用いて解析している。吉川<sup>5)</sup>は引張軟化を考慮した単軸部材を用いて安定/不安定

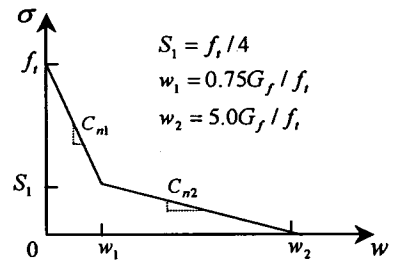


図-1 引張軟化曲線

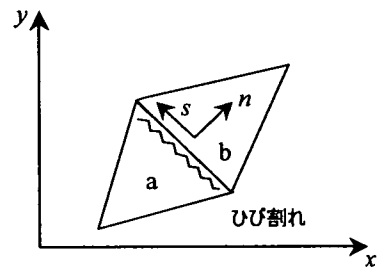


図-2 三角形平面要素での引張破壊

条件について詳しい研究を行っている。内田らはコンクリートはりの寸法効果<sup>6)</sup>や低鉄筋比はりの曲げ破壊<sup>7)</sup>に関する研究を行い、この中で、断面分割法

(または切断法)でひび割れ発生耐力, 鉄筋の降伏耐力や終局耐力を計算で求め, 実験値と比較し良好な結果を得ている. しかし, コンクリートのひび割れや応力-ひずみ関係, 鉄筋の降伏等の非線形性を考慮し組織的に効率よく解を求めるためには有限要素法を用いた方がよいと思われる. また, コンクリートや鉄筋の降伏後の除荷や切欠きを有する部材, 軸力, 曲げモーメントやせん断力等種々の荷重条件下での解析を行うときでも有限要素法を用いる利点は多い.

著者らはハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において, 図-1に示す引張軟化曲線に関する式(増分形で示すと, 図-1の $0 \sim w_1$ で $\Delta\sigma = C_{n1}\Delta w$ ,  $w_1 \sim w_2$ で $\Delta\sigma = C_{n2}\Delta w$ )をラグランジュの未定乗数法で導入し, その停留条件より引張軟化を考慮した剛性方程式を導く方法を示した<sup>8),9)</sup>. 平面問題解析用としては図-2に示すように三角形要素境界面で離散ひび割れを仮定した引張軟化解析が可能である. また, 平面問題でのハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を単軸状態に適用することにより図-3に示すような引張軟化を考慮したトラス要素を導くことができる<sup>8)</sup>.

本研究ではトラス要素やはり要素のような一次元要素を用いて, 引張軟化を図-1に示す二直線モデルで表したひび割れ解析方法<sup>10),11),12)</sup>を示し, 数値解析例より本解析法の有効性を検討した. また, 本研究では, 切欠きを有するコンクリートはりの曲げ破壊解析に必要となるオフセットビーム要素, 引張軟化を考慮して増分法解析を行なうときに有効な山田によって提案された $R_{min}$ 法を応用した解析方法についても述べる.

本研究でははり要素を用いてひび割れ解析を行うとき, 要素内に一本だけの曲げひび割れを仮定しているのので, 要素の長さによって曲げひび割れ発生荷重が異なる. このために, 本研究では平面要素による解とはり要素による解を比較し最適な要素長さについて検討した.

数値解析例としてはトラス要素およびはり要素を用いたコンクリート柱の引張や曲げ破壊への応用例を示した. さらに, 低鉄筋比コンクリートはりへの応用例として, 曲げ破壊解析を行い曲げひび割れ発生耐力や鉄筋の降伏耐力, 終局耐力を求め実験値との比較も行った. また, 低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊実験に見られるような, はりに小数の曲げひび割れが発生して破壊するような現象をはり要素で解析できるか検討する.

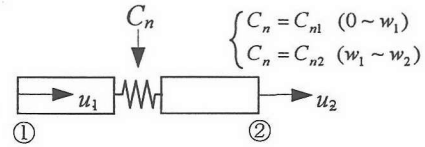


図-3 引張軟化を生じたトラス要素のモデル

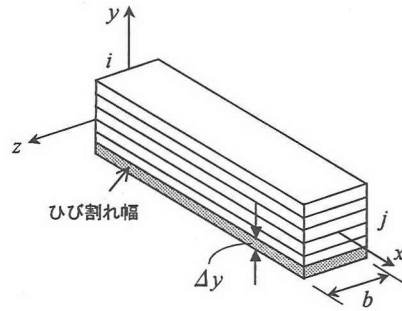


図-4 はり要素の層分割

## 2. 引張軟化を考慮した剛性方程式

### (1) トラス要素の剛性方程式

著者らはハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において, 引張軟化曲線に関する式をラグランジュの未定乗数法で導入し, その停留条件より引張軟化を考慮した剛性方程式を導く方法を示した<sup>8)</sup>. 平面問題解析用としては図-2に示すような三角形要素の要素境界面に離散ひび割れを仮定した引張軟化解析法を示した<sup>8)</sup>.

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を単軸状態に適用することにより図-3に示すような引張軟化を考慮したトラス要素を導くことができる. トラス要素の引張軟化を考慮した剛性方程式<sup>8)</sup>は次式のようにになる.

$$[K_{op}]\{u\} = \{f\} \quad (1)$$

$$[K_{op}] = \frac{C_n EA}{E + C_n L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで,  $\{f\}$ は外力のベクトル,  $\{u\}$ は図-3の場合 $\{u\} = \{u_1 \ u_2\}$ ,  $L$ は要素の長さ,  $A$ は断面積,  $E$ は

ヤング係数、 $C_n$  は引張軟化曲線の勾配である。

図-3で節点1を固定し節点2に強制変位を与えたときの引張軟化時の応力増分は、引張軟化則が応力とひび割れ幅の関係で与えられるとき、式(1)と式(2)から、次式のように求められる。

$$\Delta\sigma = EC_n / (C_n L + E) \cdot \Delta u_2 \quad (3)$$

式(3)の応力と変位の関係式は式(1)を用いなくても Carpinteri<sup>13)</sup>が示した式からも導くことができる<sup>10)</sup>。すなわち、棒に引張軟化が生じているとき棒全体の伸びを $\delta$ 、全ひび割れ幅 $w$ が図-5に示すように0から $w_c$ の間にあるとする。このとき、棒の伸びは、ひび割れの生じていない弾性体の部分の伸びとひび割れ部分の伸びの和であるから、次式のように表すことができる。

$$\delta = \sigma L / E + w_c (1 - \sigma / f_i) \quad (4)$$

この式で $C_n = -f_i / w_c$ として、棒の伸びの増分と応力増分の関係を求めると、

$$\Delta\sigma = EC_n / (C_n L + E) \cdot \Delta\delta \quad (5)$$

となる。式(5)で $\Delta\delta = (\Delta u_2 - \Delta u_1)$ であり、図-3で節点1は固定されていると仮定しているので、式(3)と式(5)は一致する。従って、式(2)はハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理から導かれた式ではあるが式(2)に含まれる $EC_n / (C_n L + E)$ は式(3)や式(5)から明らかのように、トラス要素内部に負のバネ剛性を有する図-3の要素の剛性と同じであることがわかる。従って、引張軟化を考慮したはり要素の剛性方程式を導くときは、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いなくても、最小ポテンシャルエネルギーの原理や仮想仕事の原理を用い、はり要素を図-4のように層分割し、引張軟化を生じている層の剛性は単位断面積あたり $EC_n / (C_n L + E)$ とすればよいことがわかる。

引張軟化曲線として、図-1のように応力とひび割れ幅ではなく、図-6に示すように応力とひずみの関係で表す場合がある。このために、両者を換算するための関係式を求める。図-6のように引張軟化則が応力とひずみの関係で与えられるときは増分形で示すと次式が成立する。

$$\Delta\sigma = \Delta\varepsilon \cdot (\beta E) = (\beta E / L) \cdot \Delta u_2 \quad (6)$$

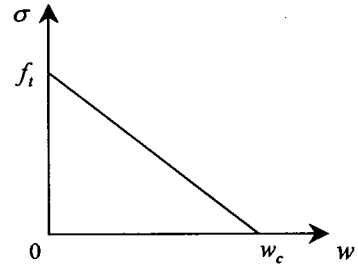


図-5 引張軟化曲線（一直線モデル）

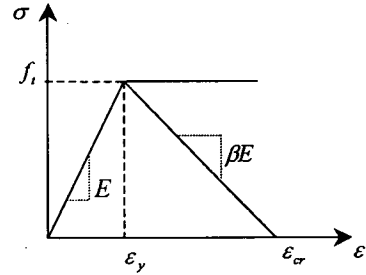


図-6 分布ひび割れの引張軟化モデル

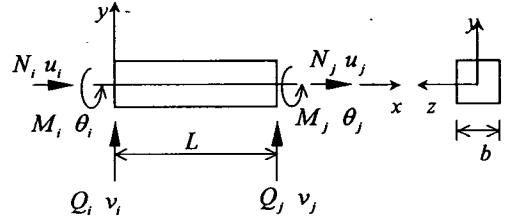


図-7 はり要素

式(5)と式(6)は等しいので、換算するための関係式は次式のようにになる。

$$C_n = \beta / (1 - \beta) \cdot (E / L) \quad (\text{ただし、} \beta < 0) \quad (7)$$

式(1)のトラス要素の剛性方程式の $[K_{ep}]$ は部材座標系で示してあるので、全体座標系で表すためには座標変換行列 $[T]$ を用いて次式のように変換する必要がある。

$$[K'_e] = [T]^T [K_{ep}] [T] \quad (8)$$

## (2) はり要素の剛性方程式

図-4に示すはり要素の引張軟化を考慮した剛性方程式を導くのに鉄筋コンクリートの分野でよく用いられる方法、すなわち、一本のはりを高さ方向に分

割して計算する方法を用いた。図-7に示すように、はりの軸方向にx座標、高さ方向にy座標、xy面に垂直にz座標を仮定する。

はりのポテンシャルエネルギーの原理は $U_c$ をひずみエネルギー、 $V$ を外力によるポテンシャルエネルギーとすると次式のように表すことができる<sup>1)</sup>。

$$\Pi = U_c + V \quad (9)$$

$$U_c = \sum_{i=1}^n \iiint_{V_i} \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz \quad (10)$$

ここで、 $n$ は要素の数、 $\sigma_x$ はx軸に垂直な面に作用する鉛直応力、 $\varepsilon_x$ はx軸方向のひずみである。外力は、はり要素の節点のみに作用していると仮定し、図-7に示してある節点変位や節点力の方向を正とすれば $V$ はつぎのように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} V &= \{U\}^T \{F\} \\ \{U\}^T &= \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ \dots \ u_m \ v_m \ \theta_m\} \\ \{F\}^T &= \{\bar{N}_1 \ \bar{Q}_1 \ \bar{M}_1 \ \dots \ \bar{N}_m \ \bar{Q}_m \ \bar{M}_m\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここで、 $m$ は節点数、 $\bar{\quad}$ は既知量である。平面保持の仮定をすれば、 $\varepsilon_x$ は次式で表せる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y \quad (12)$$

ここで、 $u, v$ はそれぞれx方向とy方向の変位である。式(12)を式(10)に代入すると、ひずみエネルギーは1個の要素については次式のように表される<sup>1)</sup>。

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_V E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y \right)^2 dx dy dz \quad (13)$$

式(13)の変位 $u, v$ は、はり要素の剛性行列を導くときによく用いられるように、 $u$ は一次式、 $v$ は三次式を仮定する。要素両端の節点番号を1, 2とすると

$$u = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \quad (14)$$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 \theta_1 + \alpha_3 v_2 + \alpha_4 \theta_2 \quad (15)$$

となる。ここで、 $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ は

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 - \frac{x}{L}, \beta_2 = \frac{x}{L} \\ \alpha_1 &= 1 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3, \\ \alpha_2 &= \left[ \left( \frac{x}{L} \right) - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \cdot L, \\ \alpha_3 &= 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3, \\ \alpha_4 &= \left[ - \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \left( \frac{x}{L} \right)^3 \right] \cdot L \end{aligned}$$

である<sup>1)</sup>。式(14)と式(15)を式(13)に代入すると

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint_V E \left( u_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial x} - v_1 \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} y - \theta_1 \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} y - v_2 \frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial x^2} y - \theta_2 \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} y \right)^2 dx dy dz \quad (16)$$

となる。さらに、式(16)をマトリックス表示すると次のようになる。

$$U_e = \frac{1}{2} \{u\}^T [K_{ep}] \{u\} \quad (17)$$

従って、引張軟化を考慮した剛性方程式は次式のようになる。

$$[K_{ep}] \{u\} = \{f\} \quad (18)$$

ここで、 $\{f\}$ は外力、 $\{u\} = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2\}$ 、

$$[K_{ep}] = \begin{bmatrix} \frac{E_a}{L} & 0 & -\frac{E_b}{L} & -\frac{E_a}{L} & 0 & \frac{E_b}{L} \\ & \frac{12E_c}{L^3} & \frac{6E_c}{L^2} & 0 & -\frac{12E_c}{L^3} & \frac{6E_c}{L^2} \\ & & \frac{4E_c}{L} & \frac{E_b}{L} & -\frac{6E_c}{L^2} & \frac{2E_c}{L} \\ & & & \frac{E_a}{L} & \frac{E_b}{L} & 0 \\ & & & & & -\frac{E_b}{L} \\ & & & & & \frac{12E_c}{L^3} & -\frac{6E_c}{L^2} \\ & & & & & & \frac{4E_c}{L} \\ & & & & & & & \frac{E_b}{L} \end{bmatrix}$$

$$E_a = \int_A E dA, E_b = \int_A E y dA, E_c = \int_A E y^2 dA$$

である。なお、 $E_a$ 、 $E_b$ 、 $E_c$ はヤング係数 $E$ の断面積分であるが、本研究では、図-4に示すように、コンクリートはりをはり高さ方向に分割して、各層で、圧縮応力による塑性、引張応力による軟化等を考慮する。これらを具体的に示せば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_a &= b \sum_{j=1}^n E_j \Delta y, \\ E_b &= b \sum_{j=1}^n E_j y_j \Delta y, \\ E_c &= b \sum_{j=1}^n E_j y_j^2 \Delta y, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 $b$ ははり幅、 $n$ は層数、はりの高さを $H$ とすると $\Delta y = H/n$ 、 $y_j$ は $j$ 層の $y$ 座標、 $E_j$ は $j$ 層のヤング係数である。 $E_j$ は破壊が進行するにつれて変化するもので、コンクリートに対しては次式を用いた。

[弾性状態]

$$E_j = E \quad (\text{コンクリートのヤング係数})$$

[引張破壊]

応力が引張軟化曲線の第1勾配 ( $C_{n1}$ ) のとき

$$E_j = C_{n1} E L / (E + C_{n1} L)$$

応力が引張軟化曲線の第2勾配 ( $C_{n2}$ ) のとき

$$E_j = C_{n2} E L / (E + C_{n2} L)$$

[圧縮破壊]

$$E_j = E_{c1}, E_{c2}, E_{c3} \quad (\text{図-8に示す接線勾配})$$

鉄筋に対してはひずみ硬化を考慮し応力-ひずみ曲線として圧縮及び引張に対して図-9のように仮定し $E_j$ は、

$$E_j = E_{s1}, E_{s2}, E_{s3}, E_{s4} \quad (\text{図-9に示す接線勾配})$$

を用いた。

コンクリートの破壊エネルギーの試験方法として、切欠きを有するはりの曲げ試験から破壊エネルギーを求める場合がある。切欠きはりでは切欠き部分と

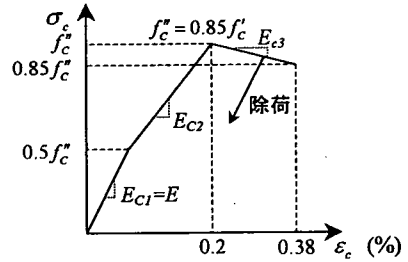


図-8 コンクリートの応力-ひずみ曲線

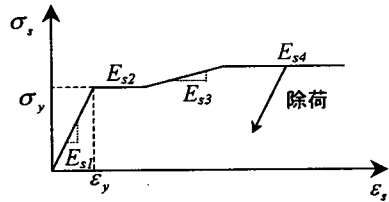


図-9 鉄筋の応力-ひずみ曲線

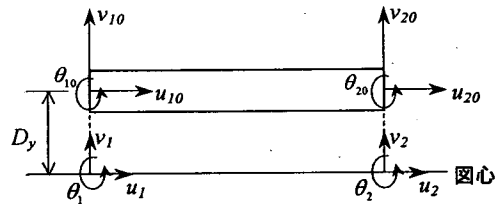


図-10 オフセットビーム要素

切欠きのない部分では図心の位置が異なる。このために、はり要素で切欠きを有するはりの曲げ試験を数値解析するときは図心のずれを考慮したオフセットビーム要素<sup>14)</sup>による解析が必要である。オフセットビーム要素の剛性行列は次のように求めることができる。

図-10に示すように図心での節点変位を $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$ とし、図心から $D_y$ 離れた点の変位を $u_{10}, v_{10}, \theta_{10}, u_{20}, v_{20}, \theta_{20}$ とすれば、平面保持の仮定より、

$$u_{10} = u_1 - D_y \theta_1, u_{20} = u_2 - D_y \theta_2$$

$$v_{10} = v_1, v_{20} = v_2$$

$$\theta_{10} = \theta_1, \theta_{20} = \theta_2$$

の関係が成り立つ。これらの式をマトリックス表示すると、

$$\begin{Bmatrix} u_{10} \\ v_{10} \\ \theta_{10} \\ u_{20} \\ v_{20} \\ \theta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -D_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -D_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [T]\{u\}$$

となる。引張軟化を考慮したオフセットビーム要素の剛性行列を  $[K'_e]$  とすると次のようになる。

$$[K'_e] = [T]^T [K_e] [T] \quad (20)$$

はり要素の引張軟化を考慮した剛性方程式として式(18)，はり要素で図心がずれた場合の式として式(20)を示した。要素の部材座標系と全体座標系で座標変換が必要な場合は，トラス要素と同様に座標変換行列を用いて変換する必要がある。なお，コンクリートや鉄筋が弾性状態の場合の剛性マトリックスは  $[K_e]$  とする。

### 3. 増分法

部材の耐力やひび割れ進展を知るためには，増分法が用いられる。増分法では，各増分段階でひび割れが生じている要素で引張軟化則を満たすように解を求めなければならない。このために，増分法として著者らが提案した  $R_{\min}$  法（山田の方法<sup>15)</sup>）を応用した増分法<sup>9)</sup>を用いて解析した。以下にその方法を示す。

- Step.1: 要素の破壊の状況に応じて  $[K_e]$  や  $[K_{ep}]$  を要素ごとに計算し全体剛性行列  $[K]$  をつくる。
- Step.2: 試験荷重を  $\Delta L_0$  とし，  $[K]\{\Delta u_i\} = \{\Delta L_0\}$  を解く。
- Step.3:  $\Delta u_i$  を用いて要素の応力  $\Delta \sigma_i$  やひび割れ幅  $\Delta w_i$  を求める。
- Step.4: 増分段階  $i-1$  で初めて引張強度に達した要素内のひび割れ幅が  $\Delta w_i > 0$  であるかを確認する。もし  $\Delta w_i < 0$  なら，試験荷重  $\Delta L_0$  を逆向きに作用させる。このときは，新たに剛性方程式を解く必要はない。すなわち，  $\Delta \sigma_i$ ，  $\Delta w_i$  の符号を逆にすればよい。（この操作が必要な理由は，図-11からわかるように，引張強度に達した要素のひび割れ幅が

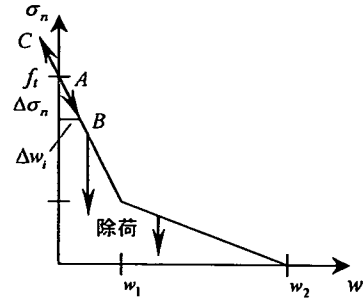


図-11 引張破壊直後の応力の経路

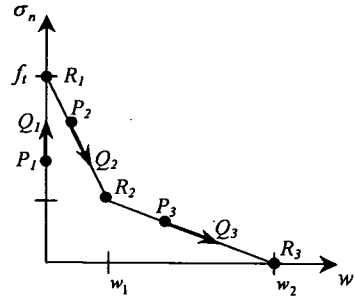


図-12 引張軟化での  $R_{\min}$

$\Delta w_i > 0$  のときは引張軟化則を満たしているが  $(AB)$ ，  $\Delta w_i < 0$  なら  $AC$  で示されるように引張軟化則を満たしていない。このために，引張軟化則を満たすためには試験荷重  $\Delta L_0$  を逆向きに作用させる。

- Step.5: 応力増分  $\Delta \sigma_i$  は，その要素が破壊してなければ 図-12の  $\overline{P_1 Q_1}$  で表される。要素が引張破壊の状態にあるなら応力増分は同図の  $\overline{P_2 Q_2}$  や  $\overline{P_3 Q_3}$  の鉛直成分で表される。そこで，応力増分を何倍すれば引張強度に達するか（例えば図-12で  $\overline{P_1 R_1} / \overline{P_1 Q_1}$ ），引張軟化を起している要素では応力増分を何倍すれば軟化の勾配が変わるか（例えば図-12で  $\overline{P_2 R_2} / \overline{P_2 Q_2}$  や  $\overline{P_3 R_3} / \overline{P_3 Q_3}$ ）を各要素について調べる。そして，これらの内最小の比を  $R_{\min}$  とする。
- Step.6: 増分段階  $i$  での全応力，全変位，全ひび割れ幅はつぎのように求められる。

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ni-1} + R_{\min} \Delta \sigma_{ni}$$

$$u_i = u_{i-1} + R_{\min} \Delta u_i$$

$$w_i = w_{i-1} + R_{\min} \Delta w_i$$

すなわち、引張軟化を考慮したひび割れの進展解析を行うためには、Step.1~Step.6を繰り返し計算すればよい。トラス要素を引張破壊だけの数値解析に利用する場合は上記の方法でよい。

はり要素を用いてコンクリートの引張軟化、圧縮応力域での非線形性や鉄筋の降伏を考慮する場合は、Step.5でこれらを考慮すればよい。コンクリートや鉄筋の応力-ひずみ関係はそれぞれ図-8、図-9のように多直線で表されており、Step.5で説明している図-12のコンクリートの引張軟化も二直線モデルで表されている。このため、コンクリートや鉄筋の $R_{mm}$ はStep.5を参考にすれば容易に計算できる。

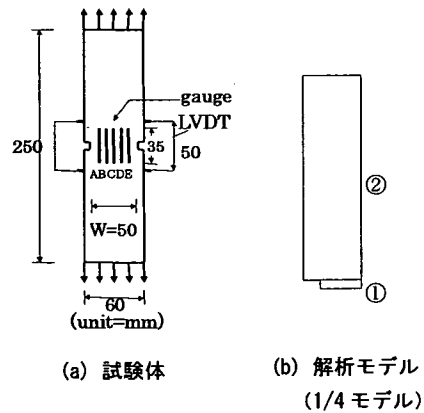


図-13 直接引張試験

#### 4. 数値解析例

ここでは、著者らが示したトラス要素およびはり要素を用いた数値解析例を示す。

##### (1) トラス要素の検証

###### a) 両側切欠を有する棒の直接引張試験

Cornelissenら<sup>16)</sup>の両側切欠を有する長方形断面棒の引張力による破壊実験をトラス要素で解析した例を示す。

コンクリートのヤング係数は $E=39270 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比は $\nu=0.2$ 、引張強度は $f_t=3.2 \text{ N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは $G_f=103.1 \text{ N/m}$ である。引張軟化曲線としては六郷らが提案した二直線モデル( $f_t/4$ の所に折れ曲がりがある)<sup>17)</sup>を用いた。トラス要素を用いて解析するときは、図-13において切欠き部とそれ以外の部分の2要素に分割した。なお、切欠部の要素の長さは $2.5 \text{ mm}$ であり断面積( $50 \text{ mm} \times 50 \text{ mm}$ )に比較すると非常に小さい。図-14には、引張力を作用させ増分法で解析した結果を平均応力 $\sigma$ (軸力を切欠き位置での棒の断面積で割る)とエクステンソメータの伸び $\delta$ の関係で示した。

トラス要素による解は実験値と最大荷重および最大荷重低下領域においても大略一致する。トラス要素による、この計算例は剛性方程式の未知数が2で、増分の回数もわずか3回の手計算で求めている。同図には以前、著者らが開発したハイブリッドストレス要素の三角形平面要素<sup>9)</sup>による解析結果も示してあるが、トラス要素とほぼ同じ結果を示している。このように、両側切欠を有する棒の直接引張試験の数値解析は平面三角形要素を用いなくても単純なトラス要素で良好な結果を得ることができる。

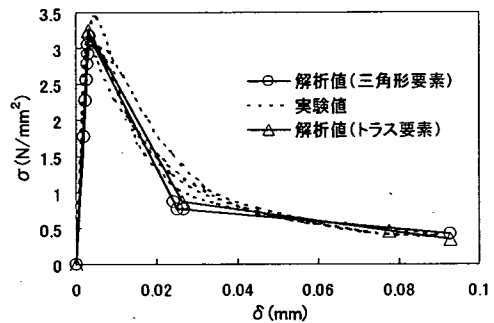


図-14 平均応力-エクステンソメータの伸びの関係

##### (2) はり要素の検証

本研究で提案しているはり要素によって引張軟化解析を行なう方法はひび割れ面の引張応力が比較的一様な場合はひび割れを含む要素の長さが短くても解の精度は良好である。しかし、これから後に示すように、曲げひび割れのようにひび割れ面で応力勾配が大きいときは、要素の長さが長くなるにつれて解が低めになる。このために、要素の長さをどのように取るかは重要な問題となる。著者らは以前ハイブリッドストレス要素の三角形平面要素<sup>9)</sup>を開発し、それをコンクリートの引張軟化解析に適用し良好な結果を得ている。このため、本研究では無筋コンクリートはりの破壊モーメントをハイブリッドストレス要素の三角形平面要素とはり要素で求め比較検討した。

三角形平面要素による破壊モーメントは、単純支持され中央に集中荷重を受ける無筋コンクリートはりの破壊解析から求めた。解析は対称性を利用して行った。このときの要素分割を図-15に示す。はり要素による破壊モーメントは、図-16に示すように3等分点載荷のはりから求めた。このときの要素分

割は図-16の右半分を用いているが、その要素数は3である。ひび割れは三角形平面要素およびはり要素による解析でもはり中央のみに生じるとする。

図-16で斜線を入れた要素はひび割れの発生する要素である。なお、はり要素は高さ方向(y軸)にも100層の分割を行っている。はり要素の最適な要素長さを求めるために、ひび割れの発生する要素長さ(L)は、はり高の1/20から2倍までの範囲で変化させた。

コンクリートの材料特性は  $E=30000 \text{ N/mm}^2$ ,  $f_c=3.33 \text{ N/mm}^2$ ,  $G_f=124 \text{ N/m}$ , 引張軟化曲線は六郷らの提案した二直線モデルを用いた。はり高(H)とスパンの比は常に10であり、はり高は50mm, 100mm, 200mm, 400mm, 600mmの5ケース、はり幅はいずれも50mmである。

解析結果は図-17に示してあるが、同図で縦軸ははり要素による破壊モーメント $M_1$ と三角形平面要素による破壊モーメント $M_2$ の比( $M_1/M_2$ )、横軸は要素の長さ(要素幅)と高さの比(L/H)である。なお、破壊モーメントは三角形平面要素では最大荷重×スパン/4、はり要素では最大荷重×スパン/6で求めた値である。同図よりL/Hが大きくなるにつれて $M_1/M_2$ も小さくなる。すなわち、はり高を一定とすると要素の長さが長くなるにつれてはり要素で求めた破壊モーメントは小さくなる。このためにはり要素を用いるときは、はり高さに応じて要素の長さを決める必要がある。

図-17から、はり高が50mmから400mmでは要素の長さをはり高の1/2程度、はり高が600mmのときは要素の長さをはり高の1/3程度に取れば良いことがわかる。また、要素の長さがはり高の1/3から2/3の範囲では三角形平面要素による解との差は±10%程度である。この結果は一種類のコンクリートに対して得られた結論であるが、以後の解析例ではり要素を用いて解析するときは、ここで得られた結果を参考に要素分割を行った。

#### a) 両側切欠を有する棒の直接引張試験

Cornelissenら<sup>19)</sup>の直接引張試験の数値解析はトラス要素による解析例でも示したが、ここでも提案したはり要素の精度を確認するために直接引張試験の数値解析例を示す。要素分割は図-18に示すように5分割し、各要素は50層に分割している。境界条件は下端Aの変位を拘束し上端Bに引張力を加えた。このとき、引張破壊が一方の切欠き先端から進行するように、上端に微小な水平力(引張力の1/1000)を加えた。

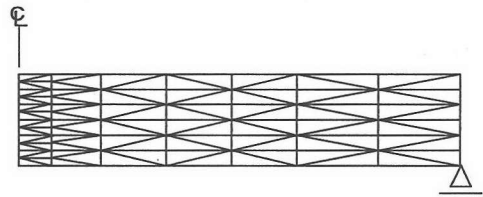


図-15 コンクリートはりの破壊モーメントを求めるための三角形要素による要素分割

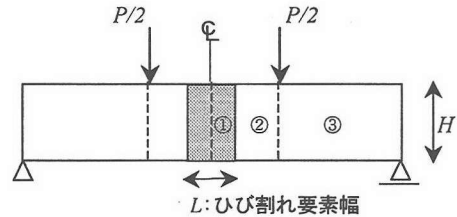


図-16 はり要素による曲げ破壊強度解析

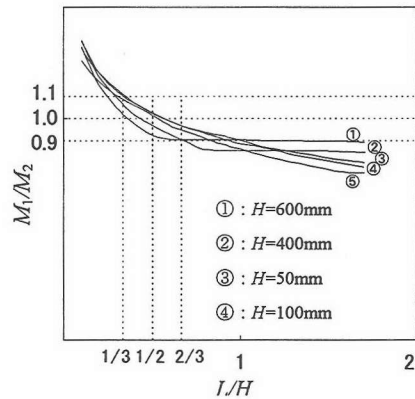


図-17 三角形要素とはり要素による破壊モーメントの比較

解析結果は図-19に平均応力とエクステンソメータの伸びの関係で示してある。上端に微小な水平力を加えているので、破壊は水平力を加えた側が少し早く進行し、トラス要素による解と比較すると、解析値は荷重低下域の一部で実験値よりも少し低いが、曲線は滑らかである。

なお、この計算例ではひび割れが生じた要素の長さは5mmと要素断面に比較して小さいが、ひび割れ面に作用する引張応力はほぼ一様となっているので解の精度も良好となっている。

#### b) コンクリートはりの曲げ強度解析

はり要素によるコンクリートはりの曲げ強度解析の例として、六郷らによる中央集中荷重が作用するはり(図-20)の実験<sup>17)</sup>の数値解析例を示す。切欠



きを有するはりでは、切欠き部分と切欠きのない部分では図心軸の位置が違う。このため、切欠き部分はオフセットビーム要素として計算する必要がある。

はり要素による解析は六郷らの実験の内、断面が  $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ 、長さ  $85\text{cm}$  の試験体と断面が  $15\text{cm} \times 15\text{cm}$ 、長さ  $113\text{cm}$  の試験体の内 4 体だけを解析した。これらの試験体の材料特性は、 $f_t = 3.34\text{N/mm}^2$ 、 $G_f$  は  $172\text{ N/m}$  から  $230\text{ N/m}$  の間である。計算に用いたヤング係数は  $E = 19600\text{ N/mm}^2$  を仮定した。引張軟化曲線は六郷らが提案した二直線モデルを用いた。荷重条件は RILEM で提示しているように、切欠きを有するはりを単純支持し、はり中央に鉛直に集中荷重をかける試験方法（これを鉛直載荷とする）と、はりや支点、荷重を  $90^\circ$  回転させ自重の影響を打ち消した試験法（これを水平載荷とする）の 2 種類を用いている。

解析は対称性を利用しているため、要素分割は切欠き部とそれ以外の部分の 2 要素のみである。なお、ひび割れ要素の長さはいずれもはり高の  $1/2$ 、層分割数は 50 である。

解析結果は荷重とスパン中央のたわみの関係で図-21 に示してある。同図 (a) のはりだけは最大荷重が実験値よりも高いが他の解析結果は最大荷重や荷重低下域でも実験値と良く一致している。

この解析例では剛性行列のサイズはわずか 4 である。また、解析データを作成する上でもはり要素数はわずか 2 個であるから経済的であることがわかる。

### c) コンクリートの曲げ強度の寸法効果

コンクリートの曲げ強度は供試体の寸法の増加に伴って見かけの強度が低下するいわゆる寸法効果がある。寸法効果の原因は強度の確率分布、乾燥収縮や材料分離等が考えられるが、それぞれの原因が定量的にどの程度影響するかは現状では明らかではない。近年、コンクリート強度の寸法効果を説明するのに破壊力学が用いられるようになった。

内田ら<sup>6)</sup>は正方形断面のコンクリートはりを用いて、曲げ強度の寸法効果について実験及び平面三角形要素による解析的な研究を行い、次式の曲げ強度推定式を提案している。

$$f_f / f_t = 1 + 1 / (0.85 + 4.5(h/l_{ch}))$$

ここで、 $f_f$  は曲げ強度、 $h$  は供試体高さ、 $l_{ch} = EG_f / f_t^2$  である。

本研究で示しているはり要素を用いて、内田らの提案した曲げ強度の推定式および実験結果との比較



図-18 要素分割

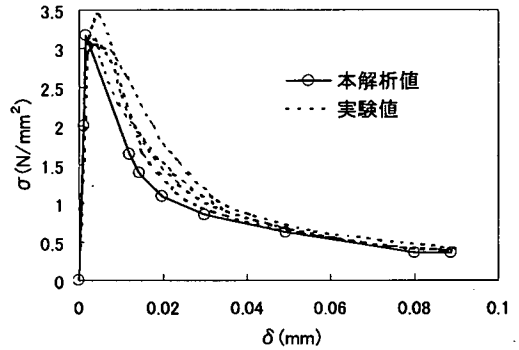


図-19 平均応力-エクステンソメータの伸び

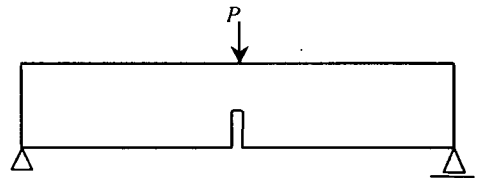


図-20 コンクリートはりの曲げ試験

を行う。

実験に用いているコンクリートの材料特性は  $E = 27500\text{ N/mm}^2$ 、 $f_t = 2.8\text{ N/mm}^2$ 、圧縮強度は  $33\text{ N/mm}^2$  である。解析では、 $G_f = 98.1\text{ N/m}$  と仮定している。

供試体の高さ  $h$  は  $5\text{cm}$ 、 $10\text{cm}$ 、 $20\text{cm}$ 、 $30\text{cm}$ 、 $40\text{cm}$  の 5 種類である。荷重方法は図-16 に示すような 3 等分点載荷である。はり要素による解析を行うときの要素分割は、対称性を利用し図-16 の右半分を用いている。ひび割れ要素の長さはいずれもはり高の  $1/2$ 、層分割数は 100 である。

図-22 には内田らの提案した寸法効果を考慮した曲げ強度の推定式、実験結果の範囲およびはり要素による解も示している。はり要素による解と内田らの曲げ強度の推定式、実験結果との一致は良好である。

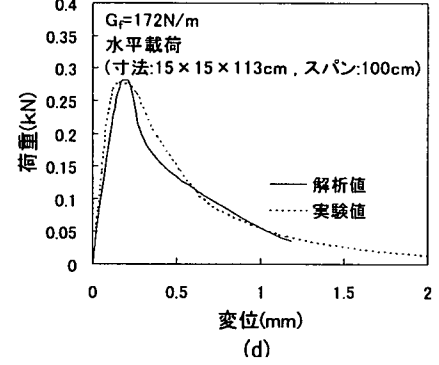
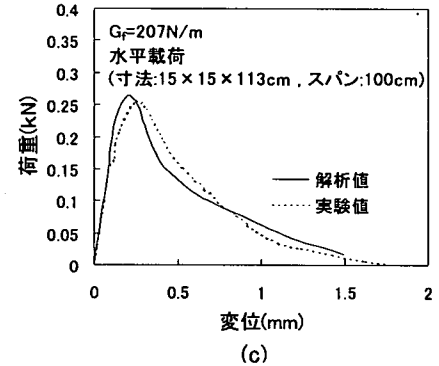
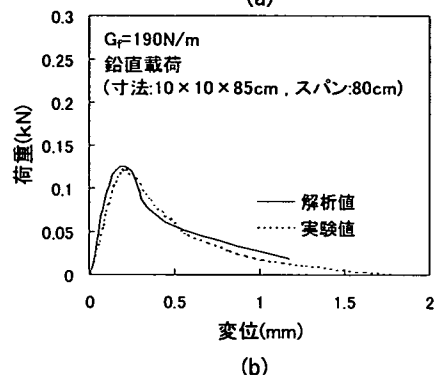
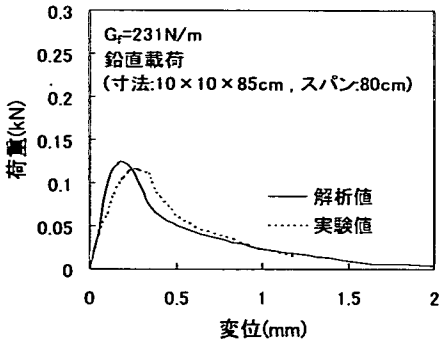


図-21 切欠きを有するはりの曲げ試験荷重とスパン中央のたわみの関係

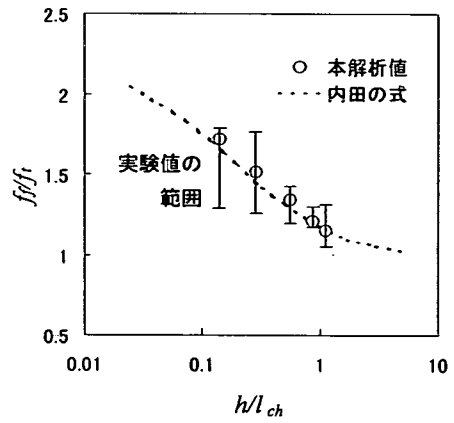


図-22 曲げ強度の寸法効果

d) 低鉄筋比はりの破壊実験の数値解析

構造物の大型化に伴い、鉄筋コンクリート部材断面も大きくなっている。このため、曲げモーメントの小さい部分では必要とされる軸方向引張鉄筋がきわめて小さくなる場合がある。しかし、引張鉄筋を極端に小さくすると破壊が脆性的なものとなる。島ら<sup>18)</sup>は、鉄筋比が0.050-0.20%という低鉄筋比のはりを製作して、それらの破壊挙動を詳細に観察し、引張鉄筋の最小量について実験的に考察を行っている。また、池田ら<sup>19)</sup>は、低鉄筋比のはりを製作して、それらの破壊実験を行うとともに降伏耐力が通常の計算で求められる値よりかなり大きくなること、降伏後、耐力が大きく変動することを示した。そして、これらの原因を、実験および数値解析より、ひび割れ部での鉄筋の局部的なひずみ硬化と付着破壊で説明した。

内田らも低鉄筋比のはりを製作して、それらの破壊実験を行うとともに、内田らが提案している寸法依存性を考慮した無筋コンクリートはりの耐力算定方法を、低鉄筋比コンクリートはりの断面分割法を用いたひび割れ耐力および降伏耐力の計算に適用している<sup>7)</sup>。

ここでは、引張軟化を考慮したはり要素を内田らの実験の数値解析に適用し、解析結果と実験値を比較検討する。これまでの数値解析例では、コンクリートに生じる圧縮応力が小さいために、圧縮側での応力-ひずみ関係の非線形性の影響は小さい。しかし、これから示す解析例は鉄筋コンクリートはりの曲げ破壊解析であるから、図-8に示すようなコンクリートの圧縮側での非線形な応力-ひずみ関係、図-9に示すような鉄筋の降伏やひずみ硬化の影響が大きくなる。

解析では鉄筋コンクリートはりを、単純に鉄筋層とコンクリート層で層状に分割し、鉄筋とコンクリートの付着は

表-1 供試体の緒元

	供試体寸法 (cm)	鉄筋	鉄筋比 (%)	スパン (cm)
	$b \times h \times L$ d			
A-0718	7.5 × 18 × 170	2D6	0.54	150
A-1018	10 × 18 × 170		0.40	
A-2018	20 × 18 × 170		0.20	
A-3018	30 × 18 × 170		0.13	
A-4018	40 × 18 × 170		0.10	
A-5018	50 × 18 × 170		0.08	

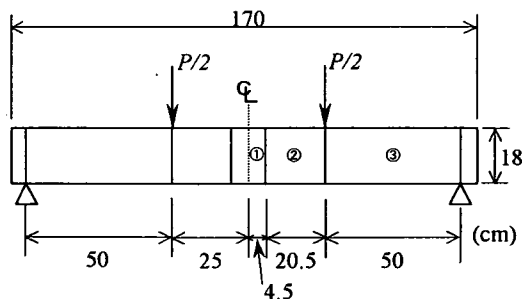


図-23 鉄筋コンクリートはりの曲げ試験

表-2 コンクリートの材料特性

強度 (N/mm <sup>2</sup> )			弾性係数 × 10 <sup>4</sup> (N/mm <sup>2</sup> )
圧縮	引張	曲げ	
31.5	2.79	5.15	2.79

表-3 ひび割れ発生耐力, 降伏耐力, 終局耐力の比較

供試体	ひび割れ(kN)				降伏 (kN)				終局 (kN)			最終破壊
	実験		計算値		実験		計算値		実験		計算値	
	値	(内田)	値	(本解析)	値	(内田)	値	(本解析)	値	(内田)	(本解析)	
	$P_{cr}$	$P_{cr1}/P_{cr}$	$P_{cr2}/P_{cr}$	$P_{cr3}/P_{cr}$	$P_f$	$P_{f1}/P_f$	$P_{f2}/P_f$	$P_{f3}/P_f$	$P_u$	$P_{u1}/P_u$	$P_{u2}/P_u$	
A-0718	7.75	1.08	0.90	0.90	17.27	0.89	0.93	0.92	19.13	0.88	0.90	圧縮
A-1018	10.20	1.09	0.88	0.88	17.67	0.88	0.93	0.93	20.31	0.86	0.89	圧縮
A-2018	16.38	1.36	1.04	1.04	18.34	0.87	0.97	0.97	21.68	0.91	0.98	圧縮+鉄筋破断
A-3018	27.27	1.22	0.92	0.92	20.40	0.78	0.93	0.94	23.15	0.94	0.92	鉄筋破断
A-4018	32.12	1.39	1.03	1.03	19.42	0.83	1.04	1.04	22.56	0.97	0.94	鉄筋破断
A-5018	34.24	1.62	1.20	1.20	20.60	0.79	1.03	1.04	23.35	0.95	0.90	鉄筋破断

完全付着を仮定する。

内田らの実験に用いられた供試体はすべて単鉄筋長方形断面はりで、はりの種類および寸法は、表-1、コンクリートの材料特性を表-2に示す。

内田らの実験は鉄筋量を一定として断面の幅を変化させたAシリーズと、鉄筋比を一定として有効高さを変化させたBシリーズの2種類があるが、数値解析の比較は表-1に示したAシリーズだけで行う。鉄筋は2D6、降伏点強度は421 N/mm<sup>2</sup>、引張強度は559 N/mm<sup>2</sup>、破断時の伸びは24%である。鉄筋の応力-ひずみは図-9のようにひずみ硬化を仮定している。また、荷重は3等分点荷重となっている。

数値解析は対称性を利用して図-23に示すように、はりの右半分だけを用いて解析した。要素分割は同図に示すように、はりの長手方向に3分割し、はり

高方向の層分割数を100とした。なお、ひび割れ要素の長さは対称性を考慮して解析しているのはり高の1/4とした。

解析では、コンクリートの引張軟化曲線を六郷らが提案した二直線モデル、コンクリートの圧縮領域での応力-ひずみ曲線を図-8、また、破壊エネルギーは $G_f=100\text{N/m}$ として解析した。

表-3に曲げひび割れ発生耐力、鉄筋の降伏耐力、終局耐力について、はり要素を用いた解析値と内田らの実験結果および内田らの計算値の比較を示した。

表-3の内田らのひび割れ発生耐力、降伏耐力、終局耐力の算定方法<sup>7)</sup>は従来法と曲げ強度の寸法依存性を考慮した算定法の2通りの方法で求められているので両者を簡単に説明する。

ひび割れ発生耐力 $P_{cr1}$ は引張線の応力が $10 \times 10 \times 40\text{cm}$ 標準曲げ供試体から得られる曲げ強度にちょうど等しくなる荷重として求めた値である。鉄筋の

降伏荷重  $P_y$  は圧縮領域でのコンクリートの非線形の応力-ひずみ関係を仮定し、通常の RC はりの曲げ計算と同様に平面保持の仮定の下で求めた値である。終局耐力  $P_u$  はコンクリート標準示方書に示されているはり部材の終局断面耐力の計算方法に従って求めた値である。しかし、低鉄筋コンクリートはりの場合は終局時にはひずみ硬化域に入るので、ひずみ硬化を考慮して求めた値である。以上が従来法である。

また、同表の  $P_{cr2}$  は内田らの提案している曲げ強度の寸法依存性を考慮した式を利用し、切断法<sup>6)</sup>で求めた値である。計算では圧縮縁のひずみを漸増させながら切断法によりひび割れ断面におけるモーメント曲率関係を求め、鉄筋降伏前に現れるピークモーメントをひび割れ発生耐力とし、鉄筋の降伏が開始する点を降伏耐力  $P_{y2}$  としている。

はり要素による解析結果は表-3 に曲げひび割れ発生耐力  $P_{cr3}$ 、降伏耐力  $P_{y3}$ 、終局耐力  $P_{u3}$  について示した。

表-3 で、ひび割れ発生耐力については従来法と内田らの切断法を用いた方法を比較すると、曲げ強度の寸法依存性を考慮した式を利用した内田らの方法が良好な結果を得ている。筆者らのはり要素による解は内田らの解析結果に一致している。しかし、両解析結果とも供試体 A-5018 については実験値との差は大きい。その差の原因として、内田らは支点反力が幅方向に一樣でなかったこと、あるいは、載荷点のローラーの幅 (20cm) が供試体の幅 (50cm) よりも小さいため、板的な効果が影響したことを上げている<sup>7)</sup>。

降伏耐力については表-3 より、はり要素による解と内田らの解との差は最大 0.01 とほぼ一致している。

終局耐力については、はりの幅が小さい供試体 A-0718, A-1018, A-2018 についてははり要素による解が内田らの解析結果よりも実験結果との一致は良好である。しかし、はりの幅が大きい供試体 A-3018, A-4018, A-5018 については内田らの解析結果の方が実験結果との一致は良好である。しかし、両者の差は最大でも 0.05 と小さい。この差の原因は数値計算を行うときの、コンクリートや鉄筋の応力-ひずみ曲線のモデル化の違いによるものと思われる。本研究で提案しているはり要素を用いた解析方法は曲げひび割れ発生耐力、鉄筋の降伏耐力、終局耐力について、内田らの切断法とほぼ同じ結果を得ることができることがわかった。

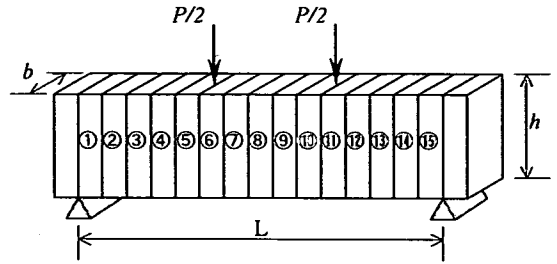


図-24 要素分割

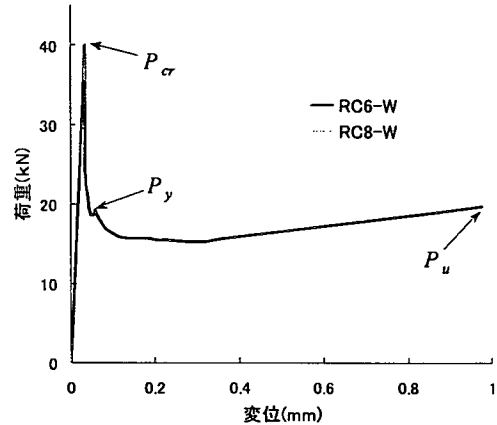


図-25 荷重-変位曲線 (RC6, 8-W)

#### e) 低鉄筋比コンクリートはりの曲げひび割れの局所化

鉄筋比が極端に小さい鉄筋コンクリートはりが曲げ破壊をおこすとき、小数の曲げひび割れだけが発生し、脆性的な破壊性状を示す。ここでは、本研究で示しているはり要素を用いて、低鉄筋比コンクリートはりが小数の曲げひび割れによって破壊をおこす現象が解析できるかどうか検討する。

コンクリートの圧縮域での除荷は図-8、鉄筋の塑性域での除荷は図-9 に示すように応力-ひずみ曲線の初期勾配に等しいとする。また、コンクリートに引張軟化が生じているときの除荷は図-11 に示すような仮定を用いた。

解析には表-1 の内田らが行った低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊実験の内、比較的鉄筋量が少なく曲げひび割れが 1 本だけ生じたはり (供試体番号 A-5018) を用いた。このはりは、最も試験体の幅が大きく板のような効果がおこった為に実験値と解析値との差が最も大きくなっている。しかし、ここでは低鉄筋比コンクリートはりが小数の曲げひび割れによって破壊をおこす現象が解析できるかどうかを検討することが目的であるので、このはりを用

いることにする。

要素分割は図-24に示すようにスパンを15分割、層分割は計算時間を節約するために、数値解析例d)の層分割数100よりもかなり粗い25分割で解析を行った。モーメントスパン内のはり下面の引張応力は一定であるので、どの要素からでも最初にひび割れが発生する可能性はある。このために、最初にひび割れを導入するために要素番号⑥に導入するケースと要素番号⑧に導入する場合と2ケースについて解析を行った。

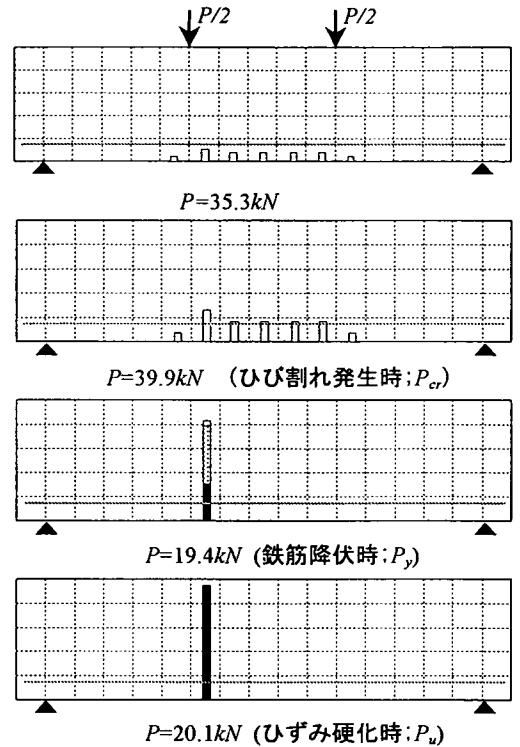
ひび割れを導入する方法としては要素の底面にはり高さの1%の切欠きを入れた。このために、切欠きを入れた部分はオフセットビーム要素を用いた。

解析例として図-25に要素番号⑥に切欠きがある場合(RC6-W)と要素番号⑧に切欠きがある場合(RC8-W)の2ケースについて荷重と変位の関係を示してあるが両者の差は小さい。同図で $P_{cr}$ はひび割れ発生荷重、 $P_y$ は鉄筋の降伏荷重、 $P_u$ は鉄筋がひずみ硬化領域に達したときの荷重を示している。同図より最大荷重に達した後、荷重はひび割れ発生後急激に低下し同時にスナップバックも生じている。その後鉄筋が降伏し、ひずみの増加に伴って鉄筋のひずみ硬化が生じ荷重も少し増加して行くことがわかる。

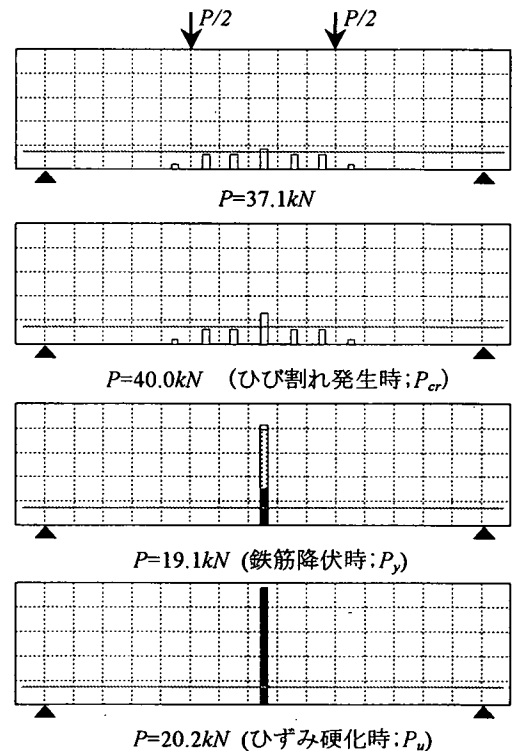
図-26は要素番号⑥に切欠きがあるときのひび割れ状況を示した。ひび割れは最初、要素番号⑥だけに生じるが、荷重が35.3kNのときはモーメントスパン内の全ての要素およびせん断スパンの要素⑤番に発生する。最大荷重39.9kNのとき全てのひび割れは引張軟化曲線の第一勾配の領域に達し、その後、初期ひび割れを入れた要素番号⑥だけのひび割れのみが進展し他のひび割れには除荷が生じた。このような、最大荷重に達した後の急激なひび割れ発生および荷重の低下は内田らの低鉄筋比コンクリートはり実験の傾向とほぼ一致する。また、実験によれば発生したひび割れも1本であるので、本計算結果と一致する。

図-27は要素番号⑧に切欠きがあるときのひび割れ状況を示した。この場合も最終的に切欠きを入れた要素番号⑧だけにひび割れが発生する。ひび割れの発生状況や荷重低下の状況は要素番号⑥だけに切欠きを入れた場合とほぼ同じである。

本解析結果より、低鉄筋比コンクリートはりが小数の曲げひび割れによって破壊をおこす現象が解析できることがわかった。



ひび割れ幅 (□:  $0 \sim w_1$ , ▨:  $w_1 \sim w_2$ , ■:  $w_2$ 以上)  
図-26 曲げひび割れ図 (RC6-W)



ひび割れ幅 (□:  $0 \sim w_1$ , ▨:  $w_1 \sim w_2$ , ■:  $w_2$ 以上)  
図-27 曲げひび割れ図 (RC8-W)

## 5. まとめ

本研究では、トラス要素およびはり要素を用いてコンクリートの引張軟化の解析を行う方法について述べた。得られた結論を述べるとつぎのようになる。

- 1) トラス要素を用いた数値解析例として無筋コンクリート柱の直接引張試験の数値解析例を示した。計算は要素数も少ないために手計算で求めた値であるが、小数の要素数でも実験値との一致は良好であることがわかった。
- 2) 引張軟化を考慮したはり要素によるひび割れ解析法を提案したが、はり要素を用いるときには要素分割に注意が必要である。すなわち、ひび割れ面を含む要素の長さは、はり高さが 50mm から 400mm では要素の長さをはり高さの 1/2 程度、はり高が 600mm のときは要素の長さをはり高さの 1/3 程度に取る必要がある。また、要素の長さがはり高さの 1/3 から 2/3 の範囲では三角形平面要素による解との差は±10%程度である。なお、この結果は一種類のコンクリートに対して得られた結論である。
- 3) はり要素を用いて切欠きを有するコンクリートはりの曲げ強度解析にオフセットビーム要素を適用したが実験結果との一致は良好であった。
- 4) コンクリートの曲げ強度の寸法効果の解析では、はり要素による解は内田らの推定式および実験結果と良好に一致した。
- 5) はり要素を用いて、低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊解析を行い曲げひび割れ発生耐力や鉄筋の降伏耐力、終局耐力を求め内田らの実験値や切断法による計算結果との比較を行った。はり要素による解は曲げひび割れ発生耐力、降伏耐力、最終耐力とも内田らの実験結果や計算結果にほぼ一致した。
- 6) 低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊実験に見られる小数のひび割れによって脆性破壊する現象をはり要素で解析できるか検討した。その結果、単純なはり要素による計算でも、小数のひび割れによって脆性破壊する現象が現れることがわかった。
- 7) トラス要素による無筋コンクリートの直接引張試験のひび割れ解析例やはり要素による無筋コンクリートのひび割れ解析、低鉄筋比コンクリートはりの曲げ破壊の数値解析は、わずか 3 または 5 個の要素で解析している。これは、平面要素を用いた解析に比べ、入力データの作成や

計算コストの点で大きな利点である。

謝辞：本研究をまとめるに当たり、東京大学前川宏一教授、堀井秀之教授、高知工科大学岡村甫教授から貴重な御助言をいただきました。岐阜大学六郷恵哲教授からは多くの貴重な文献をいただきました。ここに、御世話になった関係各位に心から感謝の意を表します。

## 参考文献

- 1) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, 1981.
- 2) Ngo, D. and Scordelis, A.C.: Finite element analysis of reinforced concrete beams, ACI, pp.152-163, March, 1967.
- 3) 破壊力学の応用研究委員会報告書: 日本コンクリート工学協会, 1993.
- 4) 園田恵一郎: ひずみ軟化構造の非線形解析に対する最小エネルギー探索法, 土木学会第35回年次講演概要集, 第1部, pp.73-74, 1980.
- 5) 吉川弘道, 西岡真帆: ひずみの局所化領域を有するコンクリート単軸部材の変形挙動と安定/不安定条件, コンクリート工学論文集, 第6巻, 第1号, pp.89-101, 1995.
- 6) 内田祐市, 六郷恵哲, 小柳洽: コンクリートの曲げ強度の寸法効果に関する破壊力学的検討, 土木学会論文集, No.442/V-16, pp.101-107, 1992.
- 7) 内田祐市, 瀬古繁喜, 六郷恵哲, 小柳洽: 寸法依存性に着目した低鉄筋比RCはりの曲げ破壊性状, 土木学会論文集, No.451/V-17, pp.129-138, 1992.
- 8) 伊良波繁雄: 有限要素法によるコンクリートのひずみ軟化解析, Vol.11, pp.387-392, 1989.
- 9) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるひずみ軟化解析法, JCIコロキウム, コンクリート構造物の破壊力学に関する研究, 1990.
- 10) 伊良波繁雄: ハイブリッドストレスモデルによるコンクリートの引張軟化解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.12, No.2, pp.753-758, 1990.
- 11) 伊良波繁雄: はり要素による引張軟化の解析的研究, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.14, No.2, pp.897-901, 1992.
- 12) 伊良波繁雄, 和仁屋晴謙, 具志幸昌: はり要素によるコンクリートの破壊解析, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.16, No.2, pp.15-20, 1994.
- 13) Carpinteri, A.: Decrease of apparent tensile and bending strength with specimen size: two different explanation based on fracture mechanics, Int.J.Solids Structures, Vol25, No.4,

1989.

14)川井忠彦, 三本木茂夫: 薄板構造解析, 培風館

15)山田嘉昭: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A,培風館,1972.

16)Cornelissen, H.A.W., Hordijk, D.A. and Reinhardt, H.W.: Experiments and theory for the application of fracture mechanics to normal and lightweight concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, edited by F.H.Wittmann, Elsevier, pp565-575, 1986.

17)Rokugo, K., Iwasa, M. Suzuki, T. and Koyanagi, W.: Testing methods to determine tensile softening curve and

fracture energy of concrete, International Workshop on Fracture Toughness and Fracture Energy Test for Concrete and Rock, pp.128-138, Oct, 1988.

18)島弘, 二羽淳一郎, 岡村甫: 曲げを受ける低鉄筋比はりにおける脆性破壊の防止に関する検討, 土木学会論文集, No.378/V-6, pp.231-237, 1987.

19)池田尚治, 山田隆裕, 後藤康之: 鉄筋比の小さい鉄筋コンクリートはりの曲げ挙動に関する研究, コンクリート工学論文集, 第1巻, 第1号, pp.51-59, 1990.

(2002.9.11 受付)

## SIMPLE TENSION SOFTENING ANALYSIS OF CONCRETE BY USE OF TRUSS ELEMENT AND BEAM ELEMENT

Shigeo IRAHA and Jun TOMIYAMA

This paper shows the analytical method for strain softening using a one-dimensional element (the truss element and beam element). In numerical analysis considered the tension softening, we can obtain excellent results by using the plane element, when the bending moment or the axis force acts on the beam member. However, if the one-dimensional element can be used instead of the plane element, the cost of calculation or making data is reduced. Therefore, we proposed the analytical method, and showed the simulation of the fracture of the plain concrete and lightly reinforced concrete beams. Their results are in good agreement with the experimental ones.