

# 離散ひび割れ用のハイブリッドストレス要素を用いたコンクリートの破壊解析

伊良波繁雄<sup>1</sup>・富山潤<sup>2</sup>

<sup>1</sup>正会員 博(工) 琉球大学助教授 環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

E-mail: iraha@tec.u-ryukyu.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 博(工) 琉球大学助手 環境建設工学科 (〒903-0213 沖縄県西原町千原1番地)

本研究ではハイブリッドストレス要素をもとにした12自由度を有する三角形平面要素をコンクリートの破壊解析に応用した。その要素は各々の要素境界の辺中央に節点があるためにコンクリートの離散ひび割れを含め非線形問題を扱うのに有用である。引張軟化を考慮した解析ではsnap-backのような不安定現象が現れるので、このような不安定現象に対しても解析方法が適用できるアルゴリズムの開発も併せて行った。解析方法の妥当性を明らかにするためにCT試験体と切欠きを有するコンクリートはりの破壊シミュレーションを行った。数値解析の結果と実験値との一致は良好であった。

**Key Words :** hybrid stress element, discrete crack, tension softening, mechanics of fracture

## 1. はじめに

コンクリートに引張破壊が生じるときは、ひび割れ先端に破壊進行領域ができ、この領域では応力が引張強度に達した後、ひずみの増加に伴ってひび割れ面に垂直な応力が減少する。このようなひび割れ面での引張軟化を考慮して破壊解析を行うとき、ひび割れモデルとしては分布ひび割れモデルまたは離散ひび割れモデルが用いられる<sup>1)</sup>。これらのひび割れモデルは各々長所や短所があるが本研究では離散ひび割れモデルを用いた解析手法について述べる。

これまで、離散ひび割れモデルを用いた解析手法は多くの研究例がある。例えば、有限要素法では引張軟化曲線の関係式を満たすためにひび割れ面に棒要素やジョイント要素を用いる方法<sup>2)</sup>やひび割れ面の開口変位と結合力間の撓み性方程式に基づく応力法<sup>3)</sup>がある。棒要素を用いる方法は要素境界に長さが零の要素を入れるために変位の自由度が増加し全体剛性行列式の大きさも増加する。このため、あらかじめ、ひび割れの発生が予想されるような要素境界のみに棒要素を配置する方法が行われている。撓み性方程式を用いる方法も同様に、あらかじめ、ひび割れの発生が予想できる場合に有効である。計算手法が複雑であるという欠点はあるがArrea and Ingr-

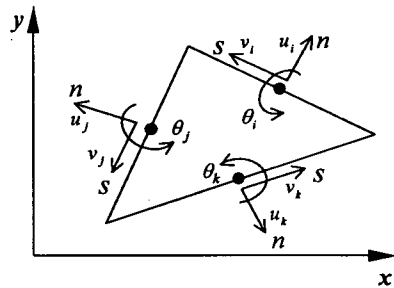


図-1 ハイブリッドストレス要素 (渡辺ら)

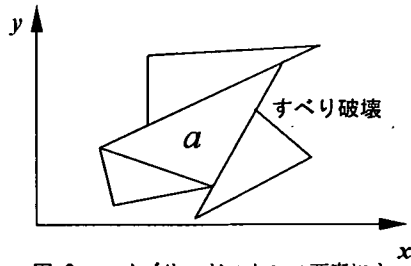


図-2 ハイブリッドストレス要素によるすべり破壊の表現

affea<sup>4)</sup>, 松尾ら<sup>5)</sup>が示したように自動的に要素分割を行い、ひび割れを自動的に進展させる方法もある。また、呉ら<sup>6)</sup>は要素間または要素内ですべり破壊や引張破壊を離散ひび割れとして取扱う為に、混合型の変分原理を用いた解析方法を示している。

破壊面は要素境界に限定されるが、要素境界で容易にすべり破壊と引張破壊を取扱うことができる解析方法として川井によって提案された剛体バネモデル<sup>7)</sup>がある。上田ら<sup>8)</sup>は剛体バネモデルを鉄筋コンクリート構造物の非線形解析に適用し、少ない要素数で構造物の最終の崩壊荷重や崩壊メカニズムを求めている。

剛体バネモデルは川井によって提案されて以来コンクリートのひび割れ解析以外でも骨組、板、地盤等の極限解析に多くの成果を上げている。しかし、剛体バネモデルは構造物の極限解析モデルとして良いモデルであるが、はり要素や軸対称変形リングシェル要素等を除いて、その弾性解の精度の保証は困難といわれている<sup>7)</sup>。

渡辺・川井<sup>9)</sup>は剛体バネモデルの欠点を解決するためハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いて一連の要素モデルを提案している。これらの要素はハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いて導かれたので、ハイブリッドストレスモデル(hybrid stress model)<sup>9)</sup>またはハイブリッドストレス要素(hybrid stress element)<sup>10)</sup>と呼ばれる。渡辺らの提案した三角形平面要素は要素内の応力パラメータを7個、要素境界変位場パラメータは図-1に示すように、要素境界の辺中央のみに3個( $u_i, v_i, \theta_i$ )有しており、剛体バネモデルと同様に要素境界ですべり破壊(図-2)を表すのに便利である。しかし、渡辺らの示した解析方法はすべり破壊の条件を満たした要素境界節点を二重節点に置き換えて要素境界がずれるようにしているため、すべり破壊の条件式としてはトレスカの式のみが使用可能である。

ハイブリッドストレス要素をコンクリートの破壊解析に利用するためには、すべり破壊の条件式としてモール・クーロンの式が使用できるように拡張する必要があるが、筆者はすべり面においてすべり破壊の条件式としてモール・クーロンの式だけでなくトレスカ、ミーゼスの式等を用いた極限解析法<sup>11)</sup>を示した。また、渡辺らの提案した三角形平面要素を改善するために、要素内の応力パラメータを12個、要素境界変位場パラメータが4個( $u_i, v_i, \theta_i, \epsilon_i$ )の新しい高精度ハイブリッドストレス要素(図-3)も開発した<sup>12), 13)</sup>。さらに、筆者は新しいハイブリッドス

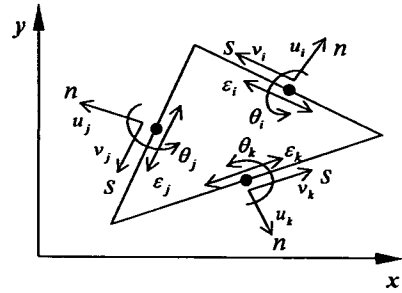


図-3 高精度ハイブリッドストレス要素

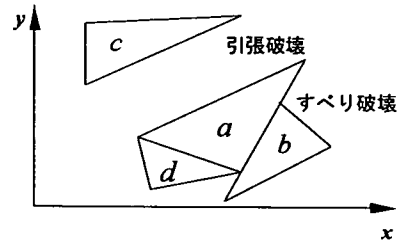


図-4 高精度ハイブリッドストレス要素による破壊の表現

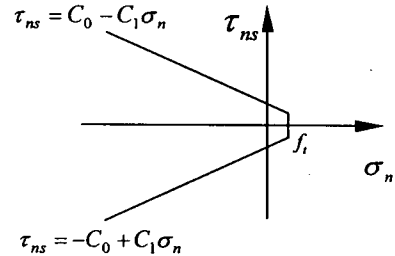


図-5 降伏曲面

トレス要素を用いてすべり破壊だけでなく、図-4に示すようなコンクリートの引張破壊も同時に考慮できる解析方法を示した<sup>14)</sup>。

しかし、この研究では引張軟化曲線として単純応力下の引張軟化曲線、せん断破壊の取扱いも単純な仮定を用いている。このため、本研究では混合モード破壊での引張破壊やせん断破壊の取扱いを、せん断破壊に対しては Lim<sup>15)</sup>の実験、混合モード破壊での引張軟化は Hassanzadeh<sup>16)</sup>の実験を参考に解析する方法を示した。

本研究ではすべりの条件式として図-5に示すモール・クーロンの式を仮定し、モール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理

に導入している。このため、今回新たにハイブリッド型 Hellinger-Reissnerの原理<sup>17)</sup>の停留条件より、ラグランジュの未定乗数の物理的意味を明らかにする。

## 2. 引張破壊およびせん断破壊を考慮した変分原理

### (1) せん断破壊面での変分原理

本研究では、すべり面でモール・クーロンの式を満足させる方法として、ラグランジュの未定乗数を用いる。モール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理に導入したとき、ラグランジュの未定乗数の物理的意味を明らかにするためにハイブリッド型 Hellinger-Reissner の原理<sup>17)</sup>を用いる。

ハイブリッド型 Hellinger-Reissner の原理の汎関数は平面問題の場合は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 -\Pi_{RH} = & \sum_a \iint_{V_a} [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)u_i] dx dy \\
 & - \sum_{ab} \int_{S_{ab}} u_i (T_i^a + T_i^b) ds \\
 & - \int_{S_\sigma} (T_i - \bar{T}_i) u_i dS - \int_{S_u} \bar{T}_i u_i dS
 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $B(\sigma_{ij})$  : コンプリメンタリエネルギー関数、 $\bar{F}_i$  : 物体力、 $\bar{T}_i$  : 表面力、 $T_i$  :  $\sigma_{ij}, n_j$ ,  $\sigma_{ij}$  : 応力、 $n_j$  : 外向き法線ベクトルの方向余弦、 $u_i$  : 変位、 $\bar{u}_i$  : 既知量、 $a$  : 要素  $a$ ,  $b$  : 要素  $b$ ,  $V_a$  : 要素  $a$  の体積、 $S_{ab}$  : 要素  $a, b$  の境界、 $S_u$  : 幾何学的境界、 $S_\sigma$  : 力学的境界、 $\Sigma_a$  : すべての要素の総和、 $\Sigma$  : すべての要素境界の総和である。

式(1)は全体座標系における変分原理であるので、極限解析に適用しやすいように図-6 に示す局所座標系を用いて変形する。局所座標系は辺中央を原点として  $n$  軸を辺に垂直にとり、 $s$  軸を辺に平行にとる。座標系  $n-s$  の向きは要素  $a$  について示すと、 $n$  が外向きのとき、 $s$  は反時計方向、 $n$  が内向きのときは時計方向とする。 $S_u, S_\sigma$  上では  $n$  を外向き、 $s$  を反時計方向とする。

$n$  軸方向のベクトルの方向余弦を  $l, m$  とすれば応力の変換式は、

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} lm + \sigma_y m^2 \quad (2)$$

表-1 すべり面での条件式

	降伏関数: $f$	塑性条件式
モール・クーロン	$\tau_{ns} \pm c, \sigma_n \mp c_0$	$\Delta \tau_{ns} \pm c, \Delta \sigma_n = 0$
ミーゼス	$\tau_{ns}^2 + \sigma_n^2 / 4 - c^2$	$\Delta \tau_{ns} + \Delta \sigma_n \cdot \sigma_n / 4\tau_{ns} = 0$
トレスカ	$\tau_{ns} \mp c$	$\Delta \tau_{ns} = 0$

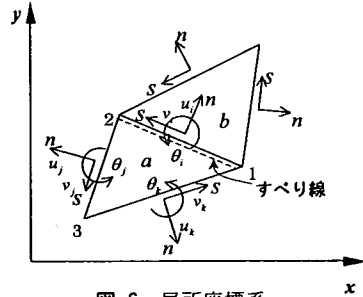


図-6 局所座標系

$$\sigma_s = \sigma_x m^2 + \sigma_y l^2 - 2\tau_{xy} lm \quad (3)$$

$$\tau_{ns} = -(\sigma_x - \sigma_y)lm + \tau_{xy}(l^2 - m^2) \quad (4)$$

で表される。 $x-y$  座標系での  $x, y$  方向の変位をそれぞれ  $u, v$  とし、局所座標系での  $n, s$  方向の変位をそれぞれ  $U, V$  とすれば、これらの変位の間には、それぞれ次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} u &= Ul - Vm \\ v &= Um + Vl \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(1)の右边第 2 項を式(2), (4), (5)を用いて変形すると、

$$\begin{aligned}
 \int_{S_{ab}} u_i (T_i^a + T_i^b) dS &= \int_{S_{ab}} [(\sigma_x^a l + \tau_{xy}^a m)u + (\tau_{xy}^a l + \sigma_y^a m)v] dS \\
 &- \int_{S_{ab}} [(\sigma_x^b l + \tau_{xy}^b m)u + (\tau_{xy}^b l + \sigma_y^b m)v] dS \\
 &= \int_{S_{ab}} (\sigma_n^a U + \tau_{ns}^a V - \sigma_n^b U - \tau_{ns}^b V) dS
 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\sigma_n^b U, \tau_{ns}^b V$  の符号が負になったのは局所座標系  $n$  の正方向ベクトルの方向余弦  $l, m$  を用いたためである。同様な方法で式(1)の右边第 3, 4 項を変換すれば式(1)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -\Pi_{RH} = & \sum_a \iint_{V_a} [B(\sigma_{ij}) + (\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)u_i] dx dy \\
 & - \sum_{ab} \int_{S_{ab}} [(\sigma_n^a - \sigma_n^b)U + (\tau_{ns}^a - \tau_{ns}^b)V] ds \\
 & - \sum_{S_\sigma} [(\sigma_n - \bar{\sigma}_n)U + (\tau_{ns} - \bar{\tau}_{ns})V] ds \\
 & - \sum_{S_u} (\sigma_n \bar{U} - \tau_{ns} \bar{V}) ds
 \end{aligned} \quad (7)$$

剛体バネモデルでは要素境界に作用する垂直応力とせん断応力で降伏条件を表しているが<sup>7)</sup>、本研究でも剛体バネモデルと同様に要素境界の応力 $\sigma_n^a, \tau_n^a$ だけで次式のように降伏条件を仮定する。

$$f(\sigma_n^a, \tau_n^a) = 0 \quad (8)$$

ここで、 $f$  は降伏関数である。表-1に降伏関数の具体的な例を示してある。

要素境界応力が降伏条件に達した後、荷重の増加後も塑性状態を維持しているなら、要素境界で次の塑性条件式を満たさねばならない。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \Delta \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \Delta \tau_n^a = 0 \quad (9)$$

すなわち、図-6に示すように、要素 $a, b$ 境界近傍の要素 $a$ 側にすべりが発生したときは式(9)の付帯条件のもとで式(7)を解けばよい。ここで、ラグランジュの未定乗数： $\Gamma^a$ を用いて付帯条件式を(7)の変分原理に導入すれば、

$$-\Delta \Pi_{RH}^* = -\Delta \Pi_{RH} + \int_{s_{ab}} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \Delta \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \Delta \tau_n^a \right) \Delta \Gamma^a dS \quad (10)$$

となる。ここで、 $\Delta \Pi_{RH}$  は式(7)の変位や応力を増分量で表した式である。

式(10)の $\Gamma^a$ の物理的意味を明らかにするために $\Pi_{RH}^*$ の第一変分を求める必要があるが、簡略化のため増分記号 $\Delta$ を省略して示す。

$\Pi_{RH}^*$ の第一変分の内、 $S_{ab}$ 上の停留条件に関連する項のみを示せば、

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_{RH}^* = & \int_{s_{ab}} \left[ U^a \delta \sigma_n^a + \sigma_n^a \delta U^a + V^a \delta \tau_n^a + \tau_n^a \delta V^a \right. \\ & - U^b \delta \sigma_n^b - \sigma_n^b \delta U^b - V^b \delta \tau_n^b - \tau_n^b \delta V^b \\ & - (\sigma_n^a - \sigma_n^b) \delta U - U \delta \sigma_n^a + U \delta \sigma_n^b \\ & \left. - (\tau_n^a - \tau_n^b) \delta V - V \delta \tau_n^a + V \delta \tau_n^b \right. \\ & + \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \tau_n^a \right) \delta \Gamma^a \\ & + \left( \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \delta \sigma_n^a + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \delta \tau_n^a \right) + \dots \\ = & \int_{s_{ab}} \left[ \left( U^a - U + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \right) \delta \sigma_n^a + (-U^b + U) \delta \sigma_n^b \right. \\ & + \left( V^a - V + \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \right) \delta \tau_n^a + (-V^b + V) \delta \tau_n^b \\ & - (\sigma_n^a - \sigma_n^b) \delta U - (\tau_n^a - \tau_n^b) \delta V \\ & \left. + \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \tau_n^a \right) \delta \Gamma^a \right] dS + \dots \quad (11) \end{aligned}$$

となる。式(11)から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} U^a = U - \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a}, U^b = U \\ V^a = V - \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a}, V^b = V \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\sigma_n^a = \sigma_n^b, \tau_n^a = \tau_n^b \quad (13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \tau_n^a = 0 \quad (14)$$

式(12)はすべり面での変位の適合条件、式(13)はすべり面での応力の釣り合い条件、式(14)は塑性条件式を満たすことを意味する。すべりによって生じた要素のひび割れ幅を $\Delta U$ 、ずれを $\Delta V$ とすると、式(12)より、

$$\Delta U = U^b - U^a = \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \quad (15)$$

$$\Delta V = V^b - V^a = \Gamma^a \frac{\partial f}{\partial \tau_n^a} \quad (16)$$

が得られる。すなわち、降伏関数が明らかであれば、ラグランジュの未定乗数 $\Gamma^a$ から $\Delta U$ と $\Delta V$ を求めることができる。降伏関数 $f$ が図-5に示すモール・クーロンの式の場合は、

$$f = \tau_n \pm C_1 \sigma_n \mp C_0 \quad (17)$$

であるから

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_n} = 1, \frac{\partial f}{\partial \sigma_n} = \pm C_1 \quad (18)$$

となる。これを式(15)、(16)に代入すれば、

$$\Delta U = \pm C_1 \Gamma^a, \Delta V = \Gamma^a \quad (19)$$

となり、ラグランジュの未定乗数 $\Gamma^a$ の物理的意味は要素間のずれの量を意味している。

式(10)において、要素内の応力場を釣合応力場に仮定すれば、要素境界で塑性を考慮したハイブリッド型コンプリメンタリエンルギーの原理が次式のように得られる。

$$-\Pi_{CH}^* = -\Pi_{CH} + \int_{S_j} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_n^a} \sigma_n^a + \frac{\partial f}{\partial \tau_{ns}^a} \tau_{ns}^a \right) \Gamma^a dS \quad (20)$$

ここで、 $S_j$  は塑性が生じている要素境界を意味する。なお、これから後は簡略なために総和記号  $\Sigma$  は省略する。  $-\Pi_{CH}$  は、

$$-\Pi_{CH} = \iint_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial V_n} (U\sigma_n + V\tau_{ns}) dS + \int_{S_\sigma} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_{ns}) dS \quad (21)$$

である。ここで、 $\partial V_n$  は要素境界一周を意味する。付帯条件は、

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ij,j} = 0 \quad V_n \text{ 内において} \\ V = \bar{V}, U = \bar{U} \quad S_\sigma \text{ 上において} \end{array} \right\} \quad (22)$$

となる。

## (2) 引張破壊およびせん断破壊を同時に考慮した変分原理

図-7 のように要素の境界で引張破壊とせん断破壊が同時に生じている場合を考える。引張破壊が生じたときは、引張軟化曲線モデルとして図-8 に示すような二直線モデルを仮定する。

引張破壊面に引張応力だけが作用する場合は、引張応力は図-8 の引張軟化曲線の関係式を満たし、せん断応力はその大きさが零であればよい。しかし、引張破壊面にずれが生じるときはひび割れ面に作用する引張応力とせん断応力を考慮に入れて定式化しなければならない。このために、ひび割れ面における条件式を引張応力については式(23)、せん断応力については式(24)を仮定する。

$$\Delta\sigma_n - C_n \Delta W = 0 \quad (23)$$

$$\Delta\tau_{ns} - C_n \Delta Z = 0 \quad (24)$$

ここで、 $C_n$  は引張軟化曲線の勾配(ひび割れ幅に応じて  $C_{n1}$  または  $C_{n2}$  を用いる)、 $\Delta W$  はひび割れ幅、 $C_{ns}$  はせん断剛性、 $\Delta Z$  はずれ、 $\Delta$  は増分である。

せん断破壊については、図-5 に示すように初期降伏面を仮定し、降伏後は Pietruszczak and Mroz<sup>18)</sup> と同様に、ずれの増加と共に降伏面が縮小すると仮定する。すなわち、降伏後の条件式は次のようになる。

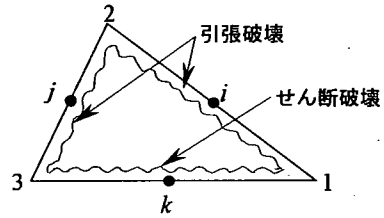


図-7 要素境界でのせん断破壊と引張破壊

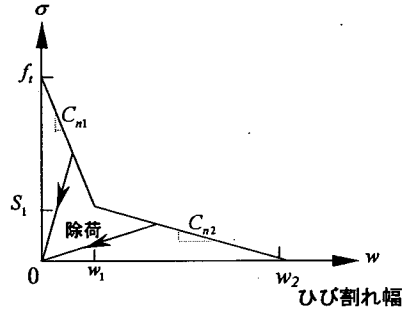


図-8 引張軟化曲線 (二直線モデル)

$$\Delta\tau_{ns} \pm C_1 \Delta\sigma_n - C_2 \Delta Z = 0 \quad (25)$$

ここで、 $C_1$  は摩擦係数、 $C_2$  はせん断軟化曲線の勾配(負)である。

式(23)、(24)、(25)を変分原理に導入する方法について説明する。ラグランジュの未定乗数を  $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\mu$ 、 $\Delta\nu$  とし、式(23)、(24)、(25)をラグランジュの未定乗数法で変分原理に導入すると次式のようなになる。

$$-\Delta\Pi_{CH}^* = -\Delta\Pi_{CH} + \int_{S_c} ((\Delta\sigma_n - C_n \Delta W)\Delta\lambda + (\Delta\tau_{ns} - C_n \Delta Z)\Delta\mu) dS + \int_{S_s} (\Delta\tau_{ns} \pm C_1 \Delta\sigma_n - C_2 \Delta Z)\Delta\nu dS \quad (26)$$

ここで  $S_c$  は引張破壊面、 $S_s$  はすべり破壊面を意味する。式(26)のラグランジュの未定乗数の物理的な意味は  $S_c$ 、 $S_s$  上での停留条件式より求めることができる。すなわち、式(10)、(15)、(16)を参考にすれば、

$$\Delta W = \Delta\lambda, \Delta Z = \Delta\mu \quad S_c \text{ 上において} \quad (27)$$

$$\Delta W = \pm C_1 \Delta\nu, \Delta Z = \Delta\nu \quad S_s \text{ 上において} \quad (28)$$

となる。したがって、引張破壊およびせん断破壊を考慮した変分原理は次のようになる。

$$\begin{aligned}
-\Delta\Pi_{CH}^* &= -\Delta\Pi_{CH} + \int_{S_e} (\Delta\lambda\Delta\sigma_n + \Delta\mu\Delta\tau_n) dS \\
&+ \int_{S_j} \Delta v (\Delta\tau_n \pm C_j \Delta\sigma_n) dS \\
&- \frac{1}{2} \int_{S_e} (\Delta\lambda^2 C_n + \Delta\mu^2 C_n) dS - \frac{1}{2} \int_{S_j} \Delta v^2 C_s dS
\end{aligned} \quad (29)$$

### 3. 有限要素離散化

ひずみ軟化を考慮した剛性方程式を導くためには式(29)の変分原理において応力場、変位場、ラグランジュの未定乗数を仮定する必要がある。ここでは、応力場については式(30)、要素境界の変位 $U$ と $V$ は式(31)のように、それぞれ線形の分布を仮定する。なお、ここからは、式の簡略化のために増分記号を省略して示す。

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x &= \beta_1 + y\beta_4 + x\beta_6 + y^2\beta_8 + x^2\beta_{10} + 2xy\beta_{11} \\
\sigma_y &= \beta_2 + x\beta_3 + y\beta_5 + x^2\beta_9 + y^2\beta_{10} + 2xy\beta_{12} \\
\tau_{xy} &= \beta_3 - y\beta_6 - x\beta_7 - 2xy\beta_{10} - y^2\beta_{11} - x^2\beta_{12}
\end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$U = u_i - \theta_i S, \quad V = v_i - \varepsilon_i S \quad (31)$$

ここで、 $u_i$ と $v_i$ は要素境界中央の節点 $i$ の変位、 $\theta_i$ は要素境界の回転角、 $\varepsilon_i$ は要素境界に平行な方向のひずみ、 $S$ は辺中央からの距離である。ラグランジュの未定乗数は変位と同様に線形の分布を仮定する。辺中央の節点 $i$ に関する式は式(32)に示す。

$$\lambda = \lambda_u - \lambda_{\theta_i} S, \quad \mu = \mu_u - \mu_{\varepsilon_i} S, \quad v = v_u - v_{\varepsilon_i} S \quad (32)$$

式(30)の応力場は式(33)のように表し、ひずみ・応力関係式については、式(34)のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B]\{\beta\} \quad (33)$$

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (34)$$

式(33)と(34)を用いれば、式(29)の $\Delta\Pi_{CH}$ (式(21))の第1項の積分は次のようになる。

$$\iint_{\Omega_m} B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \quad (35)$$

ここで、 $[H] = \iint_{\Omega_m} [B]^T [C] [B] dx dy$ 、 $\{\beta\}$ は式(30)の応力パ

ラメータが12の応力場を用いるので $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{12}\}^T$ である。 $\Delta\Pi_{CH}$ の第2項の積分は全体座標系と局所座標系の応力の変換式および式(33)を用いれば次のようになる<sup>13)</sup>。

$$\int_{\Omega_m} (U\sigma_n + V\tau_n) dS = \{\beta\}^T [G] \{\mu\} \quad (36)$$

$\Delta\Pi_{CH}$ の荷重項は $\{\bar{F}\}$ を荷重ベクトルとすれば次のようになる。

$$\int_{\Omega_m} (U\bar{\sigma}_n + V\bar{\tau}_n) dS = \{\mu\}^T \{\bar{F}\} \quad (37)$$

式(29)の右辺第2項については式(32)、(33)および全体座標系と局所座標系の応力の変換式を用いて

$$\int_{S_e} (\lambda\sigma_n + \mu\tau_n) dS = \{\beta\}^T [G_1] \{\bar{r}_a\} \quad (38)$$

となる。図-7のように、要素境界 $i, j$ の2箇所に引張破壊が生じている場合を示せば、 $\{\bar{r}_a\} = \{\lambda_u, \mu_u, \lambda_{\theta_i}, \mu_{\varepsilon_i}, \lambda_{v_j}, \mu_{\varepsilon_j}, \lambda_{\theta_j}, \mu_{\varepsilon_j}\}$ となる。式(29)の右辺第3項は、式(32)、(33)および応力の変換式を用いて、

$$\int_{S_j} (\tau_n \pm C_j \sigma_n) dS = \{\beta\}^T [G_2] \{\bar{r}_b\} \quad (39)$$

となる。図-7のように、要素境界 $k$ の1箇所にせん断破壊が生じている場合を示せば $\{\bar{r}_b\} = \{v_u, v_{\varepsilon_k}\}$ となる。式(29)の右辺第4項については、式(32)より次のように求められる。

$$\frac{1}{2} \int_{S_e} (\lambda^2 C_n + \mu^2 C_n) dS = \frac{1}{2} \{\bar{r}_a\}^T [G_3] \{\bar{r}_a\} \quad (40)$$

ここで、図-7の場合について示すと、 $[G_3]$ の $i$ 行 $j$ 列を $G_{ij}$ と定義すれば、

$$[G_3] = \begin{bmatrix}
G_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
sym & & & & G_{66} & 0 & 0 & 0 \\
G_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_{88} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

となる。ここで、

$$G_{11} = C_n I_{12}, \quad G_{22} = C_n I_{12}, \quad G_{33} = C_n I_{23}^2 / 12, \quad G_{44} = C_n I_{12}^3 / 12, \\ G_{55} = C_n I_{23}, \quad G_{66} = C_n I_{23}, \quad G_{77} = C_n I_{23}^3 / 12, \quad G_{88} = C_n I_{23}^3 / 12$$

$I_{12}, I_{23}$  は図-7 に示す三角形の節点 1 と 2 および節点 2 と 3 の辺の長さである。式(29)の右辺第 5 項についても、式(32)を用いて次のように表される。

$$\frac{1}{2} \int_{SV} v^2 C_s dS = \frac{1}{2} \{r_b\}^T [G_4] \{r_b\} \quad (41)$$

ここで、図-7 の場合について示すと、 $[G_4]$  の  $i$  行  $j$  列を  $G_{ij}$  とすると、

$$[G_4] = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{bmatrix}$$

ここで、 $G_{11} = C_n I_{11}$ 、 $G_{22} = C_n I_{11}^3 / 12$  である。計算に便利なように、式(38)と式(39)を次のようにまとめる。

$$\{\beta\}^T [G_1] \{r_a\} + \{\beta\}^T [G_2] \{r_b\} = \{\beta\}^T [G^*] \{r\} \quad (42)$$

ここで、

$$[G^*] = [[G_1][G_2]] \quad \{r\} = \{\{r_a\}\{r_b\}\} \text{である。}$$

式(40)と式(41)も同様にまとめると、

$$\{r_a\}^T [G_3] \{r_a\} / 2 + \{r_b\}^T [G_4] \{r_b\} / 2 = \{r\}^T [G^{**}] \{r\} / 2 \quad (43)$$

ここで、 $[G^{**}]$  は、

$$[G^{**}] = \begin{bmatrix} [G_3] & [0] \\ [0] & [G_4] \end{bmatrix}$$

である。したがって式(29)に式(35)、(36)、(37)、(42)、(43)を代入すれば次のようになる。

$$-\Pi_{CH} = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} \\ + \{\beta\}^T [G^*] \{r\} - \{r\}^T [G^{**}] \{r\} / 2 \quad (44)$$

式(44)で  $\{\beta\}$ 、 $\{r\}$ 、 $\{u\}$  についての停留条件を求めれば次式が得られる。

$$\{r\} = [G^{**}]^{-1} [G^*]^T \{\beta\} \quad (45)$$

$$\{\beta\} = ([H] + [G^*][G^{**}]^{-1}[G^*]^T)^{-1} [G] \{u\} \quad (46)$$

$$[K_{op}] \{u\} = \{\bar{F}\} \quad (47)$$

$$[K_p] = [G]^T ([H] + [G^*][G^{**}]^{-1}[G^*]^T)^{-1} [G] \quad (48)$$

ここで、式(47)は引張破壊およびせん断破壊を考慮した剛性方程式である。また、ひび割れが生じていない場合は式(48)から明らかなように、弾性剛性行列は次のようになる。

$$[K_p] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (49)$$

#### 4. 混合モード破壊の条件式と引張軟化

##### (1) せん断破壊および引張破壊の条件式

せん断破壊や引張破壊の判定は要素境界の応力  $\sigma_n, \tau_{ns}$  を用いる。そのとき、せん断破壊に対しては図-5 のようにモール・クーロンの式を仮定する。引張破壊については要素境界の応力  $\sigma_n$  が引張強度  $f_t$  に達したときを引張破壊とする。せん断破壊に対しては式(50)<sup>15)</sup> または式(51)<sup>19)</sup> を用いた。

$$\tau_{ns} = 0.14 f_c' - 1.37 \sigma_n \quad (\text{N/mm}^2) \quad (50)$$

$$\tau_{ns} = 0.25 f_c' - \tan 37^\circ \sigma_n \quad (\text{N/mm}^2) \quad (51)$$

ここで、 $f_c'$  はコンクリートの一軸圧縮強度である。要素境界がせん断破壊を起こした後の条件式は式(25)を用いる。なお、除荷は図-8 に示すような経路を仮定する。

##### (2) 混合モード破壊での引張軟化

混合モード破壊での引張軟化の実験的研究は、純引張応力のみでの引張軟化に関する研究よりも非常に

少ない。ここでは、Hassanzadeh<sup>16)</sup>によって行なわれた実験をもとに、せん断応力を考慮に入れた引張軟化解析を行った。Hassanzadeh が実験で用いた供試体は 70mm×70mm の正方形の断面でその高さは 60mm である(図-9)。供試体の高さの 1/2 の位置に切欠きがあり、破壊断面は 40mm×40mm となっている。

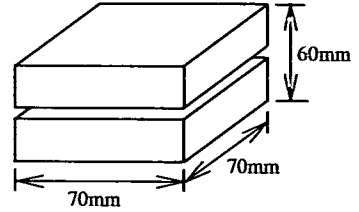


図-9 供試体

本研究では Hassanzadeh の行った実験の内、ひび割れ幅( $W$ )とずれ( $Z$ )の比( $\tan \alpha$ )が一定の条件で行われた実験結果を参考にする。図-10 は引張力で破壊面の応力が  $f_t$  に達したあと、 $\tan \alpha = W/Z$  が一定になるようにせん断力を加えて破壊させたときの、ひび割れ面に垂直な応力とひび割れ幅の関係を示した実験結果である。この図からは、垂直応力とひび割れ幅関係に及ぼすせん断応力の影響は、破壊の初期(垂直応力が約 1.5kN/mm<sup>2</sup> 付近まで)では影響が小さく、その後は  $\alpha$  が小さくなるにつれて、せん断応力の影響により、引張応力の低下が急になることがわかる。

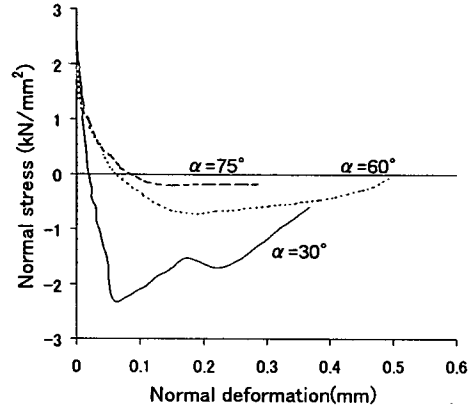


図-10 複合応力のもとでの垂直応力とひび割れ幅の関係

本研究では引張軟化曲線として図-8 に示すような二直線モデルを用いているために、せん断応力の影響により引張応力が急に低下する現象は二直線モデルの第二直線部分(引張応力が  $S_1$  から零の間)で考慮する。

解析では引張応力が  $f_t$  から  $S_1$  の間ではひび割れ面での条件式として式(23)、(24)を用い、 $C_n =$ 二直線モデルの第一直線の勾配、 $C_m = G$  とする。Gはせん断弾性係数である。引張応力が  $S_1$  から零では、 $C_n =$ 二直線モデルの第二直線の勾配、 $C_m = G$  とする。しかし、垂直応力が引張強度に達した後、引張軟化曲線の第二勾配に達した図-11に示すようなA点の応力増分はせん断応力と垂直応力の比が  $\overline{AB}$  よりも大きい  $\overline{AE}$  の場合、せん断応力の影響による垂直応力の低下を考慮する。すなわち、応力増加の方向を  $\overline{AE}$  から  $\overline{AB}$  の方向に変えることにする。なお、 $\overline{AB}$  は直線  $\overline{AF}$  に重なっており、F点はせん断破壊の条件式(式(50)または式(51))とPaulayらのひび割れ幅一定経路でのせん断試験<sup>20)</sup>から得られる直線  $\overline{OF}$  の交点として求められる。応力増分を  $\overline{AE}$  から  $\overline{AB}$  の方向に変えて引張応力を低下させた理由は、引張応力の低下が実験的に十分に明らかにされていないために、このような簡略化した仮定を用いた。なお、用いる条件式は、式(25)で  $C_l = \tan \theta$  とする。

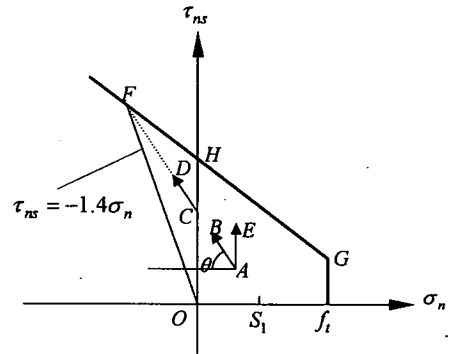


図-11 引張軟化域での応力増分

(3) 引張破壊により完全にひび割れが開口したときのせん断応力の伝達

完全に開口したひび割れ面にせん断応力が作用

すると、ひび割れ面にはせん断応力と同時に圧縮応力が作用する。Paulay らのひび割れ幅一定経路でのせん断試験<sup>20)</sup>によれば、せん断応力と圧縮応力の関係は、図-11の直線  $\overline{OF}$  で表される。同図の直線  $\overline{GF}$  はせん断破壊の条件であるが、ひび割れ面でのせん断応力と圧縮応力の関係は常に  $\overline{GF}$  を越えることはない。すなわち、ひび割れ面ですべりが生じているときの応力は常に  $\overline{OF}$  と  $\overline{HF}$  に挟まれる領域の値をとる。このために本研究では、図-11のC点のようにひび割れ面上でせん断応力が作用しているときは、簡略化し  $\overline{CD}$  の方向に応力が増加すると仮定する。このときに用いる条件式は式(25)で  $C_l = \tan \theta$  とする。



## 5. 数値解析法

部材の耐力やひび割れの進展を知るためには、増分法が用いられるが、本研究では増分法の一つである山田の方法<sup>21)</sup>( $R_{\min}$ ともいう)を応用した増分解析方法を用いた。その増分解析方法の具体的な手順を次に示す。

- step1 要素境界の破壊の状況に応じて $[K_e]$ や $[K_{ep}]$ を要素ごとに計算し全体剛性行列 $[K]$ をつくる。
- step2 試験荷重を $\Delta L_0$ とし、 $[K]\{\Delta u_i\} = \{\Delta L_0\}$ を解く。
- step3  $\Delta u_i$ を用いて要素境界の平均応力 $\Delta\sigma_{ni}$ 、 $\Delta\tau_{nsi}$ やひび割れ幅 $\Delta W_i$ を求める( $\Delta\sigma_{ni}$ 、 $\Delta\tau_{nsi}$ は節点力を要素境界の長さで割った値に等しい)。
- step4 増分段階 $i-1$ で引張強度に達した要素境界のひび割れ幅が $\Delta W_i > 0$ であるかを確認する。もし $\Delta W_i < 0$ なら、試験荷重 $\Delta L_0$ を逆向きに作用させる。このときは、新たに剛性方程式を解く必要はない。すなわち、 $\Delta\sigma_{ni}$ 、 $\Delta\tau_{nsi}$ 、 $\Delta W_i$ の符号を逆にすればよい。(この操作が必要な理由は、図-12の $\overline{AB}$ に示すように、引張強度に達した要素境界のひび割れ幅が $\Delta W_i > 0$ のとき、応力は引張軟化曲線上にあるが、 $\Delta W_i < 0$ なら $\overline{AC}$ で示されるように引張軟化曲線からはずれる。このために、引張軟化曲線上に応力がくするためには試験荷重 $\Delta L_0$ を逆向きに作用させる。)

- step5 応力増分 $\Delta\sigma_{ni}$ 、 $\Delta\tau_{nsi}$ は、その要素境界が破壊していなければ図-13の $\overline{P_1Q_1}$ や $\overline{P_2Q_2}$ で表される。要素境界がすべりを起こしているなら応力増分は図-13の $\overline{P_3Q_3}$ で表される。要素境界が引張軟化の状態にあるなら応力増分は図-14の $\overline{P_1Q_1}$ や $\overline{P_2Q_2}$ の鉛直成分で表される。そこで、応力増分を何倍すれば破壊面に達するか(たとえば図-13で $\overline{P_1R_1}/\overline{P_1Q_1}$ )、引張軟化を起こしている境界面では応力増分を何倍すれば軟化の勾配は変わるか(たとえば図-14で $\overline{P_1R_1}/\overline{P_1Q_1}$ )を各要素境界面について比を求める。そして、これらの内最小の比を $R_{\min}$ とする。

- step6 増分段階 $i$ での全応力、全変位、全ひび割れ幅は次のように求められる。なお、 $\Delta W < 0$ のとき除荷となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ni} &= \sigma_{ni-1} + R_{\min} \Delta\sigma_{ni}, \quad \tau_{nsi} = \tau_{nsi-1} + R_{\min} \Delta\tau_{nsi} \\ u_i &= u_{i-1} + R_{\min} \Delta u_i, \quad W_i = W_{i-1} + R_{\min} \Delta W_i \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

すなわち、ひび割れの進展を考慮した解析を行うた

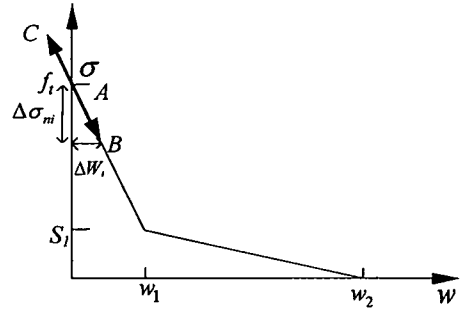


図-12 引張破壊直後の応力経路

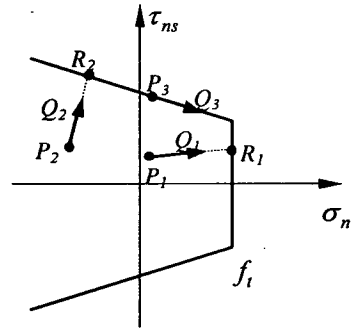


図-13 初期破壊での $R_{\min}$

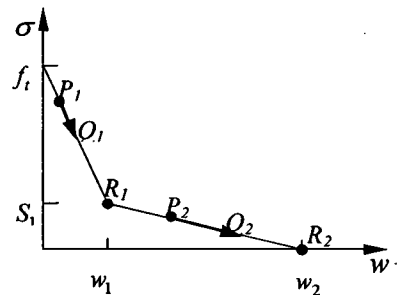


図-14 引張軟化域での $R_{\min}$

めには、step1~step6をくりかえし計算すればよい。ここに示した計算stepで完全弾塑性体の計算stepと大きく異なる点はstep4である。つまり、応力が引張軟化曲線上に存在するためには、引張強度に達した要素境界は次のstepでひび割れが開くように荷重を加える必要がある。なお、ここで説明した解析方法はstep2で示しているように荷重を与えて解析する場合を示したが、それ以外でも変位を与えて解析を行うことも可能である。

表-2 引張軟化曲線の特性値

	Large	Medium	Small
$b(\text{mm})$	600.0	300.0	150.0
$f_t(\text{N/mm}^2)$	4.487	4.487	4.487
$S_1(\text{N/mm}^2)$	1.122	1.122	1.122
$w_1(\times 10^{-3})$	2.76	2.54	2.03
$w_2(\times 10^{-3})$	16.36	17.97	12.92

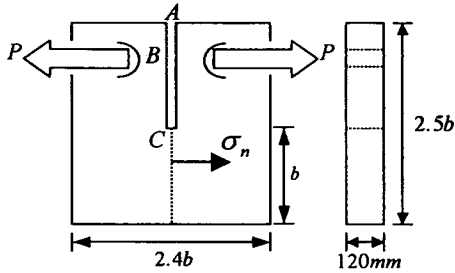


図-15 CT試験体

## 6. ひずみ軟化材料の破壊に関する数値解析と検証

### (1) CT試験体のひずみ軟化解析

本研究で示した解析手法を図-15に示すCT試験体のひずみ軟化解析に適用する。このようなCT試験体の実験および有限要素解析は野村・和泉<sup>3)</sup>、六郷<sup>22)</sup>によって行われており、本手法の精度確認のためには良い例題である。六郷らの実験のコンクリートは $W/C=0.43$ 、圧縮強度は $42.9\text{N/mm}^2$ であり、ひずみ軟化の諸定数は表-2に示す通りである。表-2のCT試験体のリガメントの長さは600mm, 300mm, 150mmの三種類で、これらを各々Large, Medium, Smallの試験体と称している。

要素の大きさが解に与える影響を調べるために、図-16と図-17に示すようにリガメント上の要素分割を変えて解析した。図-16の粗分割の場合にはリガメント上のCD間の分割数は12分割、図-17の細分割の場合にはCD間の分割数は24分割となっている。なお、切欠き幅は8mmである。

解析結果は図-18と図-19に荷重と開口変位(COD)の関係で示した。図-18はリガメント上の要素分割が粗い場合の計算例で、Large, Medium, Smallの各試験体に対し同じ分割を用いているために、荷重段階ごとのひび割れ進展長さもそれぞれ50mm, 25mm, 12mmとなっている。このために、ひび割れ進展長さの長いLarge, Medium, Smallの順に解の変動が激しくなっている。特にLargeの供

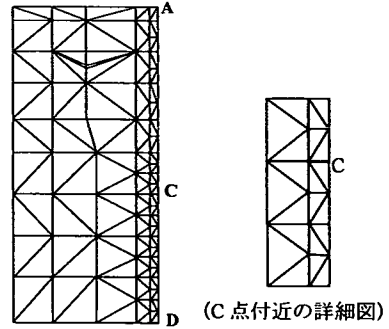


図-16 CT試験体の要素分割(粗分割)

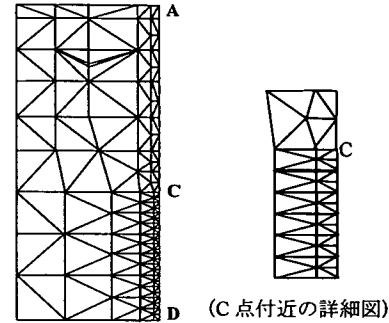


図-17 CT試験体の要素分割(細分割)

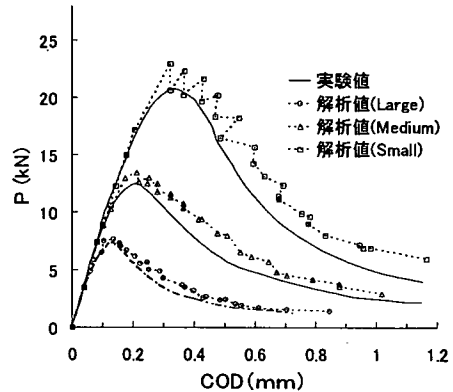


図-18 荷重と開口変位の関係(粗分割)

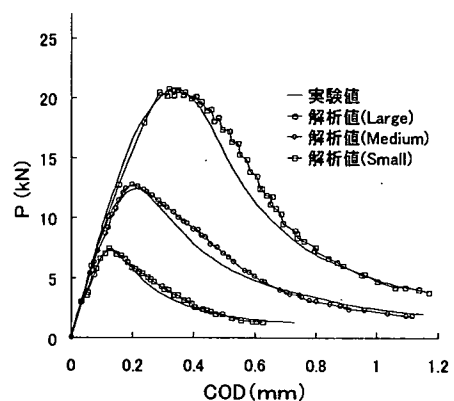
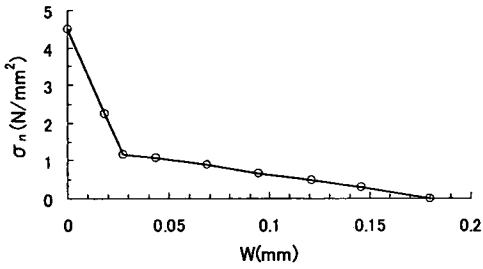
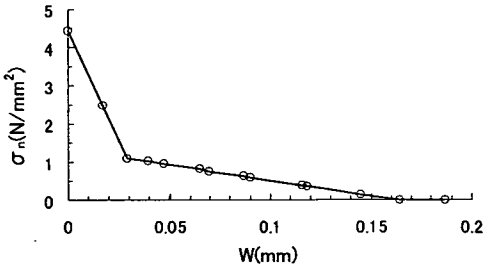


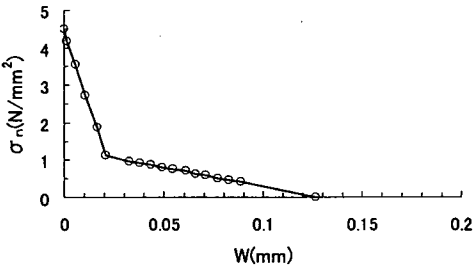
図-19 荷重と開口変位の関係(細分割)



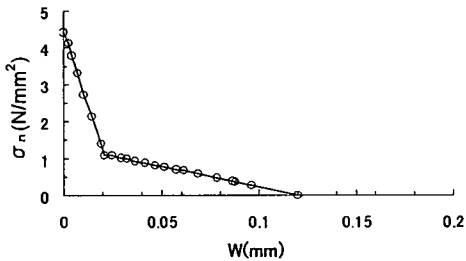
(a) Large 供試体, 粗分割, COD=0.7240mm



(b) Large 供試体, 粗分割, 最初にひび割れの生じた点



(c) Small 供試体, 細分割, COD=0.3018mm



(d) Small 供試体, 細分割, 最初にひび割れの生じた点

図-20 ひび割れ面上の応力とひび割れ幅の関係

試体の荷重変動は激しいが数値計算は発散することなく安定した解を得ている。図-19 はリガメント上の要素分割が細かい場合の計算例で, Large, Medium, Small の各試験体ともに実験値と解析値との一致は良好である。

ひび割れ面上で応力が引張軟化曲線上に存在して

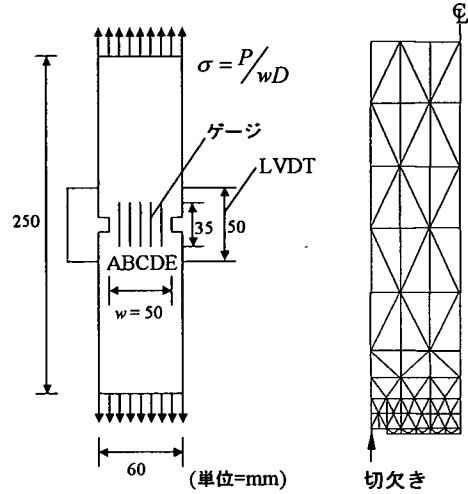


図-21 直接引張試験および要素分割 (1/4 図)

いるか否かのチェックを各荷重段階ごとに行ったが、全て、十分満足していることがわかった。なお、このような例題として、図-20 (a)にLarge試験体で要素分割が粗いときの計算例で、CODが0.7240mmのときの各ひび割れ面上での応力とひび割れ幅の関係を示してある。この図からひび割れ面上の応力は引張軟化曲線上にあることがわかる。図-20 (b)にはLarge試験体で要素分割が粗いときの計算例で、最初にひび割れが生じた点 (C点に近い要素)の荷重段階ごとの応力とひび割れ幅の関係を示している。この図より応力はいずれも引張軟化曲線上にあることがわかる。同様な例をSmall試験体で要素分割が細かい場合を示したのが、図-20 (c), (d)である。Small試験体でもひび割れ面上の応力は引張軟化曲線上に存在していることがわかる。

## (2) 両側切欠きを有する棒の直接引張試験

Reinhardtら<sup>23)</sup>やCornelissenら<sup>24)</sup>は両側切欠きを有する長方形断面柱の引張力による静的および繰返し荷重試験を行い、引張軟化曲線に関する研究を行っている。Rots<sup>25)</sup>は両側切欠きを有する長方形断面柱の引張力による静的試験をシミュレートし、snap-backが生じる場合について、詳しい考察を加えている。ここでは、最初にRotsがシミュレートしたsnap-backを生じる場合との比較検討を行い、次にCornelissenらの行った実験を本解析方法でシミュレートし比較検討する。ここでは、Rotsの解析例の内、対称な引張破壊について本研究で示した解析方法で解析し比較する。なお、Rotsはアイソパラメトリック要素を用い、ひび割れは分布ひび割れを仮定し増分法はsnap-backが生じても解を得ることの

できる弧長法を用いている。

試験体は図-21 に示すように、断面は幅が 60mm、厚さが 50mm、長さは 250mm の長方形断面の棒である。棒の中央には幅 5mm、深さ 5mm の切欠きが両側についている。コンクリートのヤング係数は  $E=18000\text{N/mm}^2$ 、ポアソン比は  $\nu=0.2$ 、引張強度は  $f_t=3.4\text{N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは  $G_f=59.3\text{J/m}^2$ 、引張軟化は二直線モデルで  $f_t/3$  の所に折れ曲がりがある。なお、この解析ではひび割れ面でのせん断応力は零であるので、せん断に関する材料特性は省略する。図-21 の A から E はエクステンソメータで、その長さは 35mm である。

Rots の解析では、試験体の全体を要素分割しているが、ここでは対称な引張破壊について比較するので、図-21 に示すように 1/4 のみ要素分割を行い解析に用いた。境界条件は下端（切欠きの中央）の鉛直方向の変位と右端（棒の中心線）の水平変位を拘束し、上端には変位を与えて引張力を生じさせている。図-22 には、平均応力  $\sigma$ （軸力を切欠き位置での棒の断面積で割る）と軸全体の伸び  $\delta_{tot}$  の関係を示した。本解析法による結果は丸印で示してあるように、Rots の解に一致する。次に、破壊の状況を簡単に説明する。破壊は最初に切欠き先端に起こり、その後、中心部に向かって進行していく。最大荷重  $\sigma=2.9179\text{N/mm}^2$  が作用しているときは、ひび割れ先端は切欠き先端から 15mm である。最大荷重に達した後は  $\sigma=2.9093\text{N/mm}^2$  のときに snap-back が起こり、ひび割れ面の応力は最終的に引張軟化曲線の折れ曲がりの位置まで低下する。その後、変位の増加と共に応力が低下する。

図-23 には平均応力とエクステンソメータの伸び  $\delta$  の関係を示した。ここでも、本研究で示した解析法による結果は丸印で示してあるが、Rots の解に一致することがわかる。

Cornelissen らの行った実験を本解析方法でシミュレートし比較検討する。

試験体は図-21 に示すように Rots が行った両側切欠きを有する長方形断面柱と同じであるので要素分割や境界条件は前の計算例と同じである。

解析に用いたコンクリートのヤング係数は  $E=39270\text{N/mm}^2$ 、ポアソン比は  $\nu=0.2$ 、引張強度は  $f_t=3.2\text{N/mm}^2$ 、破壊エネルギーは  $G_f=103.1\text{J/m}^2$  である。引張軟化曲線は引張強度の 1/4 点に折れ曲がりを有する二直線モデルを用いた。

解析例は図-24 に、平均応力  $\sigma$  とエクステンソメータの伸び  $\delta$  の関係を示した。この図より最大応力や引張軟化に伴う応力低下領域でも実験結果とほ

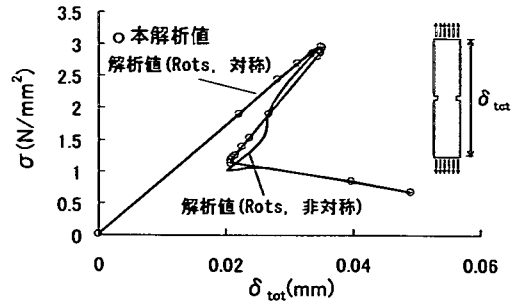


図-22 平均応力と棒全体の伸びの関係

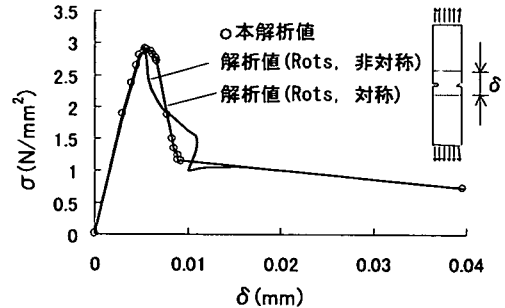


図-23 平均応力とエクステンソメータの伸びの関係

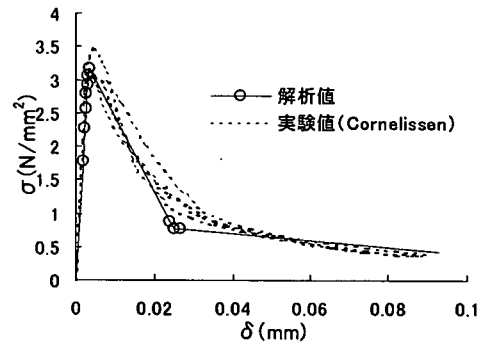


図-24 平均応力 - エクステンソメータの伸び

ぼ一致することがわかる。なお、本解析は要素分割が粗い場合の CT 試験体の解析例（図-18）に見られるような snap-back もなく実験値との一致も良好である。

### (3) 片側切欠きに有するはりのせん断試験

Arrea&Ingraffea<sup>4)</sup>らは図-25 に示すような切欠きを有するはりのせん断試験の実験および解析的研究を行っている。Rots<sup>25)</sup>も同じ問題を分布ひび割れモデルと離散ひび割れモデルを用いて解析しているので、Rots の解との比較も行う。

コンクリートの材料特性は  $E=24800\text{N/mm}^2$ 、 $\nu=0.18$ 、 $f_t=2.8\text{N/mm}^2$ 、 $G_f=100\text{N/m}$ 、引張軟化曲線は

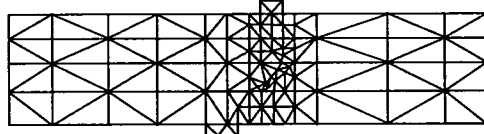
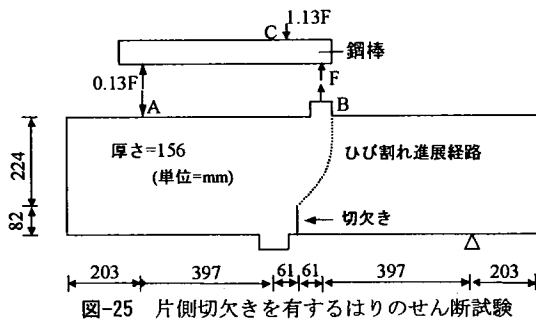


図-26 要素分割

引張強度の1/4点に折れ曲がりをもつ二直線モデルを用いた。せん断降伏についてはせん断軟化に関する影響を無視しモール・クーロンの式(数値計算では式(25)で  $c_s=0.001$  と小さな値を仮定した)を用いた。実験では図-25に示すように、鉄製のはりを通してコンクリートはりに荷重を加えているが、ここでは、Rotsと同じようにA点とB点にそれぞれ0.13FおよびFの割合で荷重制御で計算した。実験によれば、図-25に示すように切欠き部と載荷点Bを結ぶひび割れによって破壊が起こるので、要素分割はこのひび割れパターンを含むように分割した。要素分割は図-26に示す。解析結果は図-27に荷重Fとクラック肩口すべり(CMSD:crack mouth sliding displacement)の関係で表した。本解析手法による計算は、せん断破壊に対しては式(50)、(51)の2ケースについて行った。

筆者は既報<sup>14)</sup>で同じ問題を解析している。既報で示した解析では、引張軟化が生じているときに、ひび割れ面のせん断力を単純に開放した解析例を示した。この場合、最大荷重は実験結果とほぼ一致するが、荷重低下域では図-27に示しているRotsの解析結果(分布ひび割れモデルを仮定しひび割れ面ではせん断力の保持がない、すなわち $\beta=0$ と仮定した解)にほぼ一致し、破壊が進行しても約30kNの荷重を保持している。これに対して、今回の解析結果は図-27に示すように、最大荷重および荷重低下域で実験結果にほぼ一致し、CMSD=0.07mm付近で急激な破壊(snap-back)が生じている。なお、ひび割れの進展状況は図-26に示すような切欠き部と載荷点Bを結ぶひび割れによって破壊が生じている。

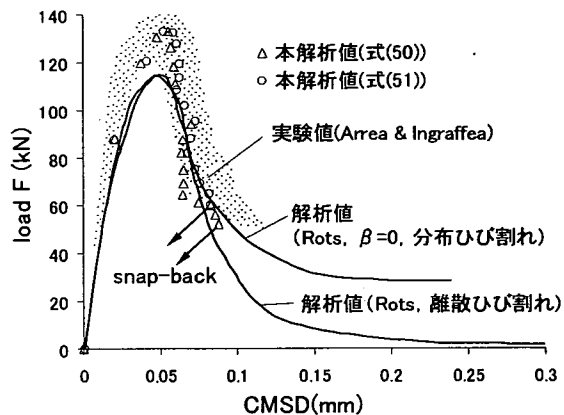


図-27 荷重とCMSDの関係

## 7. まとめ

本研究ではハイブリッドストレス要素を用いて離散ひび割れ解析を行う方法を提案した。破壊箇所は三角形平面要素境界のみに限定されるが、どの要素境界でも引張破壊やせん断破壊を取り扱うことが可能である。今回得られた結論をまとめると次のようになる。

- 1) 本研究ではすべりの条件式としてモール・クーロンの式を仮定し、モール・クーロンの式を付帯条件として、ラグランジュの未定乗数を用いてハイブリッド型コンプリメンタリエネルギー原理に導入している。ラグランジュの未定乗数の物理的意味はハイブリッド型 Hellinger-Reissner の原理の停留条件より、要素境界に平行なずれであることがわかった。
- 2) 引張軟化を解析するための増分法のアルゴリズムを提案した。提案した方法は snap-back が生じても安定して解を求めることができる。
- 3) 提案した解析手法を CT 試験体の実験のシミュレーションに適用した。要素の大きさが解に与える影響を調べるために、リガメント上の要素分割を変えた解析を行った。解は要素分割が粗いほど変動が激しくなったが、発散することなく安定した解を得ている。また、実験値と解析値との一致は良好であった。
- 4) 提案した解析手法を両側切欠きを有する長方形断面の棒の引張力による静的破壊の問題に適用した。本研究で示した解析法による結果と Rots の解は破壊が対称な場合は、最大荷重および snap-back が起こり荷重が低下する領域でも一致した。また、両側切欠きを有する長方形断面棒を

用いた Cornelissen らの実験との比較でも本解析方法と実験結果との一致は良好であった。

- 5) 混合破壊の解析例として、切欠きを有するはりのせん断試験の破壊のシミュレーションの例を示した。解析結果は最大荷重および荷重低下域でも実験結果にほぼ一致した。

謝辞：本論文をまとめるに当たり、東京大学前川宏一教授、堀井秀之教授、高知工科大学岡村甫教授から貴重な御助言をいただきました。岐阜大学六郷恵哲教授からは多くの貴重な文献をいただきました。ハイブリッドストレス要素の定式化については東京大学名誉教授川井忠彦先生、広島大学近藤一夫助教授から貴重なご助言をいただきました。ここに、御世話になった関係各位に心から感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) 日本コンクリート工学協会：破壊力学の応用研究委員会報告書、(社)日本コンクリート工学協会、1993。
- 2) Pertersson, P.E.: Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plane Concrete and Similar Materials. Report TVBM-1006, Lund Univ. Sweden. 1984.
- 3) 野村希晶, 和泉正哲：コンクリートの引張軟化構成則の推定問題に関する基礎的検討, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.9, No.2, pp.97-102, 1987.
- 4) Arrea, M. and Ingraffea, A.R. : Mixed mode Crack Propagation in Mortar and Concrete, Report 81-13, Dept. Struct. Engng, Cornell Univ, Ithaca, New York, 1982.
- 5) 松尾真紀, 日比野憲太, 高木宣章, 児島孝之：コンクリートのひび割れを表現する離散モデルとその基本特性, 土木学会論文集, No.655/V-48, pp.1-12, 2000.
- 6) 吳智深, 町田篤彦, 高東劭：一般的な不連続変形を考慮した混合型有限要素解析法の開発, 土木学会論文集, No.598/I-44, pp.149-159, 1998.
- 7) 川井忠彦：離散化極限解析法概論, 培風館, 1991.
- 8) 上田眞稔, 毛井嵩博, 川井忠彦：離散化極限解析法による鉄筋コンクリート構造物の非線形解析, RC 構造の有限要素解析に関するコロキウム論文集, 日本コンクリート工学協会, pp.179-186, 1984.
- 9) 渡辺正明, 川井忠彦：ハイブリッドストレスモデルによるすべり線, 塑性関節, 塑性関節線の表現, 日本造船学会論文集, pp.297-305, 1980.
- 10) Spilker, R.L., Maskeri, S.M. and Kania, E. : Plane Isoparametric Hybrid-Stress Elements: invariance and optimal sampling, Int.J.Num.Meth.Engng, Vol.17, pp.1469-1496, 1981.
- 11) 伊良波繁雄：2次元ハイブリッドストレスモデルに

よる非線形構造解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp.133-138, 1985.

- 12) 伊良波繁雄：自由度として、回転及びひずみを有する三角形平面要素について、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, pp.134-139, 1986.
- 13) 伊良波繁雄：修正されたハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析, 構造工学論文集, Vol.32A, pp.249-254, 1986.
- 14) 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによるひずみ軟化解析法, コンクリート構造の破壊力学に関するコロキウム, JCI, pp. II 19-26, 1990.
- 15) Lim, T.B., Li, B. and Maekawa, K. : Shear Fracture and Deformation of Concrete Subjected to Combined Effect of Inplan Shear and Normal Compression, 41st Annual Conference of JSCE, 5, Kyushu, pp.241-242, 1986.
- 16) Hassanzadeh, M.: Determination of Fracture Zone Properties in Mixed Mode I and II, Engineering Fracture Mechanics, Vol.35, No.4/5, pp.846-853, 1990.
- 17) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論, コンピュータによる構造工学講座II-3-A, 培風館, 1972.
- 18) Pietruszczak, S. and Mroz, Z. : Finite Element Analysis of Deformation of Strein-Softening Material, Int.J.Num.Meth Engng, Vol 17, pp.327-334, 1981.
- 19) 末永保美, 石丸麟太郎：組み合わせ応力を受けるコンクリート材の動力学的解析, 日本建築学会論文報告集, No.220, pp.1-7, 1974.
- 20) Paulay, T. and Leober, P.T. : Shear Transfer by Aggregate Interlock, ACI, SP-42, Vol.1, pp.1-15, 1974.
- 21) 山田嘉昭：塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座II-2-A, 培風館, 1972.
- 22) Rokugo, K., Wittmann, F.H., Roelfstra, P.E., and Brunwiler, E. : Different Methods to Determine Fracture Energy and Strain Softening of Concrete, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.9, No.2, pp.663-668, 1987.
- 23) Reinhardt, H. W., Cornelissen, H.A.W. and Hordijk, D.A. : Tensile Tests and Failure Analysis of Concrete, J.Struct.Engng, ASCE, Vol.112, No.11, pp. 2464-2477, 1986.
- 24) Cornelissen, H.A.W., Hordijk, D.A. and Reinhardt, H.W. : Experiments and Theory for the Application of Fracture Mechanics to Normal and Lightweight Concrete, Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, edited by F.H.Wittmann, Elsevier, pp.565-575, 1986.
- 25) Rots, J.G.: Computational Modeling of Concrete Fracture, Dissertation, Delft Univ of Techn, 1988.

(2002.9.11 受付)

# A HYBRID STRESS ELEMENT FOR DISCRETE CRACK AND ITS APPLICATION TO FRACTURE OF CONCRETE

Shigeo IRAHA and Jun TOMIYAMA

In this study, a triangular plane element with 12 degrees of freedom based on hybrid stress element is applied to fracture analysis of concrete. This element is useful for treating non-linear problem including discrete crack because it has a node at midpoint of the each boundary side. In numerical analysis by which the tension softening is considered, the unstable phenomenon such as snap-back is often appeared. Therefore, authors developed the algorithm which can apply the analysis for an unstable phenomenon. To clarify the validity of this method, the fracture of the CT specimen and notched concrete beam were simulated by proposed method. The analytical results are in good agreement with the experimental ones.