

# 応力集中問題に対する特異写像関数

林 正<sup>1</sup>・渡辺 力<sup>2</sup>・齋藤道生<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 長岡技術科学大学 名誉教授

<sup>2</sup>正会員 博士(工学) 函館工業高等専門学校助教授 環境都市工学科 (〒042-8501 函館市戸倉町 14-1)

<sup>3</sup>正会員 川田テクノシステム株式会社 設計部長 (〒116-0013 東京都荒川区西日暮里 2-40-3)

特異点近傍の応力集中問題に対して、大型要素を用いたハイラーキ有限要素法による効率的な高精度の局所応力解析法を提案する。ハイラーキ要素では変位の補間関数に級数を用いるために、特異点があると解の収束性が悪くなるので特異要素を使用する。本研究では、特異写像関数を用いた多特異点曲線要素を開発し、数値計算を行って本解法の精度と有効性を検証する。

**Key Words :** hierarchical finite element, singular mapping function, hierarchical mapping, stress concentration

## 1. まえがき

近年、有限要素法による橋梁構造物の全体解析が行われているが、低次要素を用いる要素細分割法 ( $h$ 法) では応力集中箇所の局所応力を高精度に求めることは困難である。このために、 $h$ 法による局所応力解析では部分構造に対するズームング手法<sup>1)</sup>を用いることが多い。

ハイラーキ有限要素法では、変位の補間関数に級数を用いた大型の高次要素 ( $p$ 法) により、粗い要素分割で構造物の全体解析を効率的に行うことができる。しかし、隅角部などの特異点では級数の収束性が悪くなるので、1/4 写像点を用いた特異要素を使用して解の精度を上げることができる<sup>2),3)</sup>。特異要素による効果は、形状関数の導関数の形状を応力集中のひずみ分布の特異性に適応させたことによるものである。文献 2) で開発したハイラーキ写像の手法により、1/4 写像点<sup>4)</sup>やさらに多くの写像点<sup>5)</sup>を用いる写像方法を  $p$ 法に組み込むことは容易であるので、パラメトリック特異写像の実用的価値は大きい。

しかし、1/4 点などの写像点を用いる特異要素では、要素内に複数個の特異点を生成することは困難で、薄肉構造解析などで多数の隅角部に応力集中が生じるときには多くの要素分割が必要になって計算効率が低下する。また、特異点の一つの場合でも、 $p$ 法による特異点近傍の局所応力解析では細要素分割が行われており、Szabóらによる研究では  $h$ - $p$ 法が用いられている<sup>6)-8)</sup>。このために、大型要素を用いて離散化誤差を少なくした  $p$ 法の特徴が活かされず、大次元問題になる全体構造解析を効率的に行うことができない。

本研究では、ハイラーキ有限要素法において写像関数に特異多項式を用いる手法を提案する。この手法

では、複数の特異点を有する多特異点要素を生成することは容易で、直線要素では特異写像のための写像点の座標値を入力する必要がない。また、1/4 点写像の手法を曲線要素に用いると特異性が消滅するが、本手法では中間写像点を用いたハイラーキ写像により特異曲線要素を生成することができる。さらに、新たに求めた特異写像関数を変位の形状関数で表すことができるので、写像のための特別な関数を必要としない長所がある。なお、変位の補間には通常の形状関数を使用するので、 $h$ 法の標準的な形状関数を用いて本手法を  $h$ 法にも適用することができる。

本研究で定式化する多特異点曲線要素は、特異点が 1 つの直線要素の場合には 1/4 点写像による特異要素の式と完全に一致する。数値計算例で、1/4 点写像では計算が煩雑になる応力集中問題について本解法の精度と有効性を調べる。

## 2. 特異写像関数

### (1) ハイラーキ写像

ハイラーキ要素の一般化変位は変位を級数展開したときの係数で、節点変位とは物理的な意味が異なり変位の補間関数を写像関数に用いることはできない。ハイラーキ写像は変位の補間関数を写像関数に用いて、座標を級数展開するパラメータ写像である。

変位の補間と要素形状の補間に用いるハイラーキ多項式  $f_m$  は次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$f_m(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \xi_0) & (m = 0, 1) \\ (1 - \xi^2)\xi^{m-2} & (m \geq 2) \end{cases} \quad (1)$$

ここに  $m = 0, 1$  は両端の節点、 $m \geq 2$  は節線の形状関数である。また、 $\xi_0 (= \xi_m \xi)$  は変数で、 $\xi$  は図-1の自

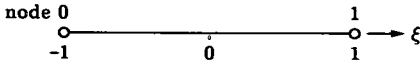


図-1 自然座標系

然座標,  $\xi_m$  は節点  $m$  の座標値  $\pm 1$  である。

四辺形要素と六面体要素の形状関数は, ハイラーキ多項式の二重積または三重積で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_{mn}(\xi, \eta) &= f_m(\xi) \cdot f_n(\eta) \\ N_{mnl}(\xi, \eta, \zeta) &= f_m(\xi) \cdot f_n(\eta) \cdot f_l(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ハイラーキ写像では, 式 (2) の形状関数を写像関数に用いて座標を級数展開する<sup>2)</sup>。

$$x = \sum_{i=1}^I N_i(\xi, \eta) \hat{x}_i, \quad y = \sum_{i=1}^I N_i(\xi, \eta) \hat{y}_i \quad (3)$$

ここに  $(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  はハイラーキ座標値,  $I$  は写像に用いる節点数である。  $N_i$  は式 (2) の形状関数を 1 次元に並べたもので, 添字  $i$  は図-4, 10 の写像点番号に対応する。 3 次元の場合も同様な式で表す。

三角形要素では式 (1) を面積座標  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  に変換したハイラーキ多項式

$$f_m(\xi_j) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2\xi_j(2\xi_j-1)^{m-1} & (m \geq 1) \end{cases} \quad (4)$$

の三重積で形状関数を表す。

$$N_{lmn}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = a f_l(\xi_1) \cdot f_m(\xi_2) \cdot f_n(\xi_3) \quad (5)$$

ここに, 式中の  $a$  は節点 ( $p=l+m+n=1$ ,  $p$  は関数の次数) のみ  $1/2$ ,  $p \geq 2$  の節線項では 1 である。 また, ハイラーキ写像の式は, 式 (3) に式 (5) を用いて得られる。

## (2) 特異多項式

まず, 1 次元問題において, 節線の両端で微係数がゼロになる特異多項式を考える。

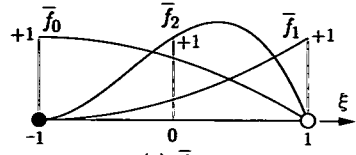
特異多項式は, 図-2 に示すように形状関数の基本的性質を満たし, その導関数が図の●印の特異節点でゼロになる 3 通りの式がある。 また, 曲線要素に写像する場合には, 中間写像点を用いて座標をハイラーキ特異多項式の節線項で級数展開する。

自然座標  $\xi$  の片側または両端の節点で導関数がゼロとなる図-2 のハイラーキ特異多項式をそれぞれ  $\bar{f}_m, \hat{f}_m, \tilde{f}_m$  とすると, 式 (1) の正則な多項式  $f_m$  と補助関数  $f_k^*$  の積として次式で与えることができる。

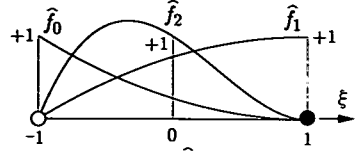
$$\bar{f}_m = f_m f_1^*, \quad \hat{f}_m = f_m f_2^*, \quad \tilde{f}_m = f_m f_3^* \quad (6)$$

ここに,

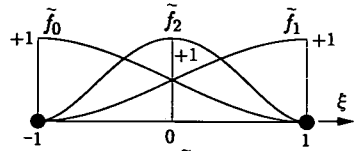
$$f_1^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(3+\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \\ 1+\xi \end{cases}, \quad f_2^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(3-\xi) \\ 1-\xi \end{cases}$$



(a)  $\bar{f}_m$



(b)  $\hat{f}_m$



(c)  $\tilde{f}_m$

○ regular point, ● singular point

図-2 ハイラーキ特異多項式 ( $m \leq 2$ )

$$f_3^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(2+\xi)(1-\xi) & (m=0) \\ \frac{1}{2}(2-\xi)(1+\xi) & (m=1) \\ 1-\xi^2 & (m \geq 2) \end{cases} \quad (7)$$

なお, 高次の節線項 ( $m \geq 2$ ) に対する補助関数は同一で, 特異多項式は正則なハイラーキ多項式より次数が 1~2 次高い。

式 (1) と式 (6) の節点の補間多項式には次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} f_0 + f_1 &= 1, \quad \bar{f}_0 + \bar{f}_1 = 1, \quad \hat{f}_0 + \hat{f}_1 = 1 \\ \tilde{f}_0 + \tilde{f}_1 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$m=0 \sim 2$  項の特異多項式を図-2 に示す。 ○印は正則節点を表す。

三角形要素の特異多項式には, 式 (4) のハイラーキ多項式  $f_m$  と式 (7) を変数変換した次式の補助関数  $f_k^*$  を式 (6) に用いる。 なお, 高次の節線項 ( $m \geq 1$ ) に対する補助関数は同一である。

$$f_1^* = \begin{cases} \xi_j \\ 2\xi_j \end{cases}, \quad f_2^* = \begin{cases} 2-\xi_j \\ 2(1-\xi_j) \end{cases}$$

$$f_3^* = \begin{cases} \xi_j(3-2\xi_j) & (m=0) \\ 4\xi_j(1-\xi_j) & (m \geq 1) \end{cases} \quad (9)$$

## (3) 特異写像関数

特異写像関数は次の条件を満たすように定める。

- ① 形状関数の基本的性質と剛体変位の条件を満足する。

- ② 指示した節点で特異性が生じる.
- ③ 要素内のあらゆる点で Jacobian は非負である.
- ④ 要素境界で他の正則および特異要素と適合する.

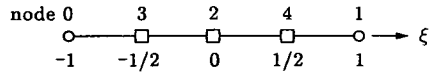


図-3 4次曲線の写像点の配置

特異写像関数  $\hat{N}_{mn}$  は2次元または3次元要素に応じた式(6)の特異多項式の二重積または三重積で与える。これを式(2)の形状関数と補助関数  $f_k^*$  を用いて次式のように表す。

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_{mn} &= N_{mn} f_i^*(\xi) f_j^*(\eta) \\ \hat{N}_{mnl} &= N_{mnl} f_i^*(\xi) f_j^*(\eta) f_k^*(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、非特異方向の補助関数は除くものとする。

式(10)の写像関数には特異多項式の積により、3.で説明するように内部モード(節面・体積モード)の項が生じて剛体変位の条件  $\sum \hat{N}_i = 1$  を満足しない。そこで、補助関数の多重積を和に修正し、形状関数の基本的性質を満たすように次式で補正する。

$$\left. \begin{aligned} f_i^* f_j^* &\Rightarrow f_i^*(\xi) + f_j^*(\eta) - 1 \\ f_i^* f_j^* f_k^* &\Rightarrow f_i^*(\xi) + f_j^*(\eta) + f_k^*(\zeta) - 2 \end{aligned} \right\} \quad (i, j, k = 1 \sim 3) \quad (11)$$

なお、剛体変位  $x_i = c$  (const.) を代入すると節線のハイアラキー座標値はゼロになるので、節点の写像関数の和が剛体変位の条件を満足すればよい。式(11)の妥当性を付録Iに示す。

三角形要素の特異写像関数は、式(5)と式(9)の積で与える。節点の写像関数に内部モードの項が含まれる場合には、節線上での  $\xi_i + \xi_j = 1$  の関係を用いて補助関数を修正する(3.を参照)。

$$\hat{N}_{lmn}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_{lmn} f_k^*(\xi_j) \quad (12)$$

特異写像の式は、式(3)の  $N_i$  に式(10)または式(12)を用いて与えられる。

#### (4) ハイアラキー座標値

ハイアラキー座標値は、座標をハイアラキー多項式で級数展開したときの係数である。したがって、ハイアラキー座標値は各節線ごとに式(1)で1次元展開した次式に写像点のデカルト座標値  $x_i$  と  $\xi_i$  を代入して求められる(面積座標でも同じ値が得られる)。

$$x = f_0 \hat{x}_0 + f_1 \hat{x}_1 + f_2 (\hat{x}_2 + \xi \hat{x}_3 + \dots) \quad (13)$$

図-3に要素周辺の節線を4次曲線で写像する場合の写像点の配置を示す。□印は曲線要素に写像するための節点で、2次曲線に写像する場合には写像点3, 4を省く。

式(13)を解くと、節点のハイアラキー座標値はデカルト座標値と同じ値になる。

$$\hat{x}_0 = x_0, \quad \hat{x}_1 = x_1 \quad (14)$$

両端の節点が正則点のときは、4次曲線(2次曲線の  $\hat{x}_2$  は4次曲線と同じ)について次式が得られる。なお、 $\hat{x}_m$  ( $m \geq 2$ ) は節線項の係数である。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_2 &= x_2 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ \hat{x}_3 &= \frac{2}{3}(x_0 - x_1) - \frac{4}{3}(x_3 - x_4) \\ \hat{x}_4 &= -\frac{2}{3}(x_0 + x_1) + \frac{8}{3}(x_3 + x_4) - 4x_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$\hat{y}_m, \hat{z}_m$  は  $x_m$  を  $y_m, z_m$  に置き換える。

節点0が特異点のときは、式(13)に式(6)の特異多項式を用いた次式

$$x = \bar{f}_0 \hat{x}_0 + \bar{f}_1 \hat{x}_1 + \bar{f}_2 (\hat{x}_2 + \xi \hat{x}_3 + \xi^2 \hat{x}_4) \quad (16)$$

を解いて、式(14)と次の値が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_2 &= x_2 - \frac{1}{4}(3x_0 + x_1) \\ \hat{x}_3 &= \frac{1}{9}(19x_0 - 3x_1) - \frac{8}{9}(3x_3 - x_4) \\ \hat{x}_4 &= -\frac{1}{9}(25x_0 + 3x_1) + \frac{16}{9}(3x_3 + x_4) - 4x_2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

節点1が特異点のときは式(16)に  $\hat{f}_m$  を用いて次の値が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_2 &= x_2 - \frac{1}{4}(x_0 + 3x_1) \\ \hat{x}_3 &= \frac{1}{9}(3x_0 - 19x_1) - \frac{8}{9}(x_3 - 3x_4) \\ \hat{x}_4 &= -\frac{1}{9}(3x_0 + 25x_1) + \frac{16}{9}(x_3 + 3x_4) - 4x_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

また、節点0, 1が特異点の場合には次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_2 &= x_2 - \frac{1}{2}(x_0 + x_1) \\ \hat{x}_3 &= \frac{11}{9}(x_0 - x_1) - \frac{16}{9}(x_3 - x_4) \\ \hat{x}_4 &= -\frac{14}{9}(x_0 + x_1) + \frac{32}{9}(x_3 + x_4) - 4x_2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

#### (5) 写像点の配置

式(6)を写像関数とする1次元のJacobianが非負になるための条件を求める。なお、中間写像点を用いない場合のJacobianは  $\xi$  の変域内 ( $-1 < \xi < 1$ ) で非負である。

中間写像点を用いる場合には写像点の座標値に制約が生じる。まず、一点用いた2次曲線の写像について調べると、正則な写像関数を用いたときには  $x_0 = 0, x_1 = \ell$  とするとき、節点2の座標値  $x_2$  は次の範囲になければならない。

$$\frac{\ell}{4} < x_2 < \frac{3}{4}\ell \quad (20)$$

式(20)から周知の1/4点特異写像が得られる<sup>4)</sup>。特異関数については以下のようになる。

表-1 4次曲線の写像点の座標値 ( $x/\ell$ )

写像点	0	3	2	4	1
○-○	0	1/4	1/2	3/4	1
●-○	0	1/8	3/8	5/8	1
○-●	0	3/8	5/8	7/8	1
●-●	0	1/4	1/2	3/4	1

式 (16) から、節点 0 が特異点の場合の 2 次曲線の Jacobian を求めると次式が得られる。

$$|J| = (1 + \xi) \left[ \frac{\xi}{4} (1 + 3\xi) + (1 - 3\xi) x_2 \right] > 0 \quad (21)$$

$$\therefore \frac{\ell}{8} < x_2 < \frac{\ell}{2} \quad (22)$$

4 次曲線の場合には、3 つの座標の組合せについて一般的な範囲を求めることは困難である。そこで、実用性を考慮して求めた値を表-1 に示す。

節点 1 が特異点の場合と両端とも特異点の場合の 2 次曲線について以下の値が得られる。4 次曲線の値は表-1 に示す。

$$\frac{\ell}{2} < x_2 < \frac{7}{8} \ell \quad (23)$$

$$\frac{5}{16} \ell < x_2 < \frac{11}{16} \ell \quad (24)$$

### 3. 特異要素

#### (1) 多特異点要素

複雑な構造物を効率的に解析するためには、複数の特異点をもつ多特異点要素が必要になる。特異写像関数を用いた手法では、写像関数を組合せて任意の節点を特異点にすることができるので、種々の多特異点要素が容易に求められる。ただし、多特異点要素では要素内の応力変化が激しくなるので、要素分割を工夫しなければならない<sup>†1</sup>。

多特異点直線要素では特異節点間の節線が特異線になり、3 次元要素では特異線に囲まれた節面は特異面になる。なお、特異線や特異面では要素の Jacobian がゼロになるので、線荷重が作用する場合や線支承、部材が結合する隅角線などの応力集中箇所に対して効果がある。しかし、特異節点間の節線が非特異な要素では節線上の応力が求められないので特異写像関数を修正する。

図-4(a),(b) に、全節線を 4 次曲線に写像する場合の四辺形要素と三角形要素の写像点番号を示す。図-5(a) の四辺形要素は 2 特異点を持つ場合で、太線は特異線を表す。図中の丸印は節線番号である。式 (10) を式 (3) に代入した写像の式を式 (1), (6) の多項式で表すと次

<sup>†1</sup> 3 特異点四辺形要素で特異線がある場合に、正則点の内角  $\theta$  が  $\theta < 90^\circ$  であると Jacobian が負になる領域が特異線付近に生じる。

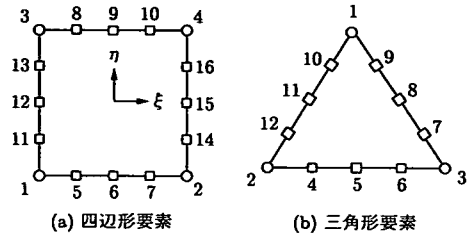


図-4 4次曲線要素の写像点番号

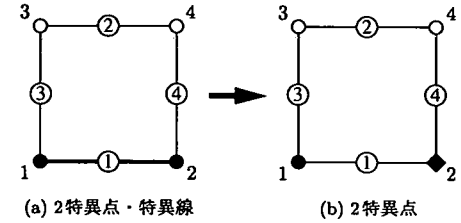


図-5 2 特異点四辺形要素

のようになる。

$$x = \tilde{f}_0 \bar{f}_0 x_1 + \tilde{f}_1 \bar{f}_0 x_2 + f_0 \bar{f}_1 x_3 + f_1 \bar{f}_1 x_4 + \sum_{m=2}^4 \left[ \tilde{f}_m f_0 \hat{x}_{m+3} + f_m f_1 \hat{x}_{m+6} \right] + \sum_{n=2}^4 \left[ f_0 \bar{f}_n \hat{x}_{n+9} + f_1 \bar{f}_n \hat{x}_{n+12} \right] \quad (25)$$

実要素で直線の辺では総和記号の節線項を削除する。なお、節点 1, 2 の特異多項式の二重積は式 (11) で和に修正する。

節点 1-2 間が直線の場合にはこの辺上で特異になるので、非特異線にする場合には一方の写像関数から節線に直交する方向の補助関数を省く。この一方向に特異性をもつ節点を ◆印で表す。図-5(b) の要素では、節点 2, 4 と 14~16 の  $\eta$  方向の補助関数を省略して次のようになる。

$$x = \tilde{f}_0 \bar{f}_0 x_1 + \tilde{f}_1 f_0 x_2 + f_0 \bar{f}_1 x_3 + f_1 f_1 x_4 + \sum_{m=2}^4 \left[ \tilde{f}_m f_0 \hat{x}_{m+3} + f_m f_1 \hat{x}_{m+6} \right] + \sum_{n=2}^4 \left[ f_0 \bar{f}_n \hat{x}_{n+9} + f_1 f_n \hat{x}_{n+12} \right] \quad (26)$$

なお、節点 2-4 間のハイラーキ座標値には式 (15) の値を用いる。

#### (2) 特異多項式の展開

式 (6) の特異多項式を補助関数を用いずに、式 (1) の正則なハイラーキ多項式の和で表す。

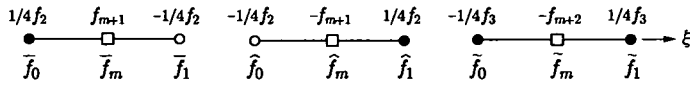


図-6 ハイラーキ多項式の特異項

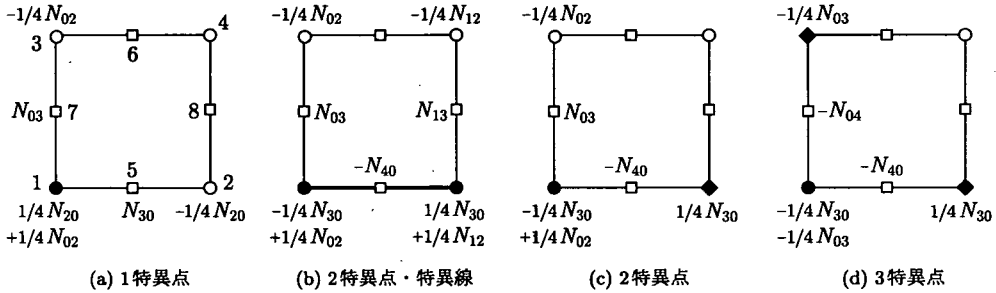


図-7 四辺形要素の特異項

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_0 &= f_0 + \frac{1}{4} f_2, & \bar{f}_1 &= f_1 - \frac{1}{4} f_2, & \bar{f}_m &= f_m + f_{m+1} \\ \hat{f}_0 &= f_0 - \frac{1}{4} f_2, & \hat{f}_1 &= f_1 + \frac{1}{4} f_2, & \hat{f}_m &= f_m - f_{m+1} \\ \tilde{f}_0 &= f_0 - \frac{1}{4} f_3, & \tilde{f}_1 &= f_1 + \frac{1}{4} f_3, & \tilde{f}_m &= f_m - f_{m+2} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(27)の右辺第1項は節点または節線 ( $m \geq 2$ ) の正則な多項式で、第2項は補助関数と同様に特異性を表す。中間写像点が1個の場合について特異多項式とその第2項を図-6に示す。

### (3) 四辺形要素

式(10)の特異写像関数  $\hat{N}_{mn}$  は、式(2)の正則な関数  $N_{mn}$  の和で表すことができる。例えば、 $\xi$  と  $\eta$  に関する式(27)の積を展開して以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_0 f_0 &= N_{00} + \frac{1}{4} N_{20} \\ \bar{f}_0 \bar{f}_0 &= N_{00} + \frac{1}{4} (N_{02} + N_{20}) + \frac{1}{16} N_{22} \\ \hat{f}_0 \tilde{f}_1 &= N_{01} + \frac{1}{4} (N_{03} - N_{21}) - \frac{1}{16} N_{23} \\ f_0 \hat{f}_n &= N_{0n} - N_{0,n+1} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここに、右辺第1項は通常の節点または節線の写像関数であり、第2項が特異性を表す<sup>12</sup>。下線の項は式(27)の右辺第2項の二重積による内部モード(節面モード)の項で、この項があると隅角節点の特異写像関数は剛体変位の条件を満足しないので下線項は削除する。この理由は、2次元要素の写像関数を1次元多項式の積で与えたために、写像に不要な内部モードが生じることによる。この補正は、式(11)の修正と同等である。なお、式(28)の第4式のように、節線の写像関数には特異多項式の二重積を用いないので内部モードの項は現れない(式(25)を参照)。

<sup>12</sup> 第2項は式(2)の節線項で、特異写像関数では節点にも用いる。これらの特異項は式(29)、(30)の [ ] 内の項で互いに相殺する。

式(28)の第2項を、中間写像点が1個(2次元要素)の場合について図-7に示す。二次元要素の特異項は図-6を参照して容易に求められる。

上記の定式化により、ハイラーキ写像による特異写像の式は、式(3)の正則な写像式に図-7の特異項を加えればよい。例えば、図(a)、(b)の要素は次式で与えられる。

$$x = \sum_{i=1}^I N_i \hat{x}_i + \frac{1}{4} [(N_{20} + N_{02}) x_1 - N_{20} x_2 - N_{02} x_3] + N_{30} \hat{x}_5 + N_{03} \hat{x}_7 \quad (29)$$

$$x = \sum_{i=1}^I N_i \hat{x}_i + \frac{1}{4} [(-N_{30} + N_{02}) x_1 + (N_{30} + N_{12}) x_2 - N_{02} x_3 - N_{12} x_4] - N_{40} \hat{x}_5 + N_{03} \hat{x}_7 + N_{13} \hat{x}_8 \quad (30)$$

なお、中間写像点を用いない直線要素では、式(29)、(30)の右辺第1項の  $N_i$  は双1次元要素の形状関数である。また、式(29)で曲線写像の項を削除すると、2個の1/4写像点を用いた特異写像の式と完全に一致する。

### (4) 三角形要素

三角形要素の節点番号と節線番号を図-8のように付け、この番号を循環的に  $i, j, k$  とすると面積座標には次の従属関係がある。

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (31)$$

$$\xi_i + \xi_j = 1 \quad (\xi_k = 0 \text{ on line } k) \quad (32)$$

また、式(5)の正則な形状関数は次式のようになる<sup>2)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \text{節点: } & N_{100} = \xi_1, \quad N_{010} = \xi_2, \quad N_{001} = \xi_3 \\ \text{節線①: } & N_{01n} = 4 \xi_2 \xi_3 (2 \xi_3 - 1)^{n-1} \quad (n \geq 1) \\ \text{節線②: } & N_{l01} = 4 \xi_1 \xi_3 (2 \xi_1 - 1)^{l-1} \quad (l \geq 1) \\ \text{節線③: } & N_{1m0} = 4 \xi_1 \xi_2 (2 \xi_2 - 1)^{m-1} \quad (m \geq 1) \\ \text{節面: } & N_{111} = 8 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

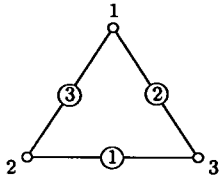


図-8 三角形要素

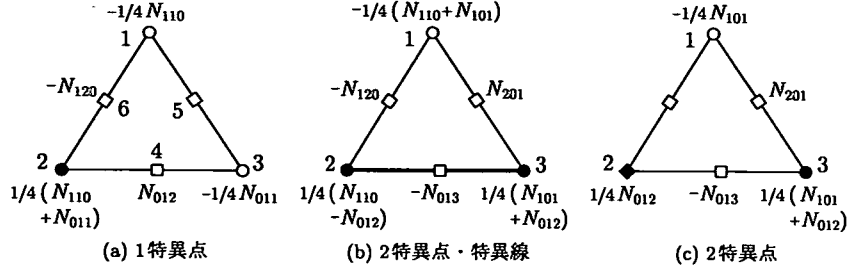


図-9 三角形要素の特異項

表-2 三角形要素の特異項 ( $l, m, n \geq 1$ )

特異点	節点 1	節点 2	節点 3	節線①	節線②	節線③
1	$\frac{1}{4}(N_{110} + N_{101})$	$-\frac{1}{4}N_{110}$	$-\frac{1}{4}N_{101}$	—	$-N_{l+1,01}$	$N_{1,m+1,0}$
2	$-\frac{1}{4}N_{110}$	$\frac{1}{4}(N_{110} + N_{011})$	$-\frac{1}{4}N_{011}$	$N_{01,n+1}$	—	$-N_{1,m+1,0}$
3	$-\frac{1}{4}N_{101}$	$-\frac{1}{4}N_{011}$	$\frac{1}{4}(N_{101} + N_{011})$	$-N_{01,n+1}$	$N_{l+1,01}$	—
1, 2	$\frac{1}{4}(N_{101} - N_{120})$	$\frac{1}{4}(N_{011} + N_{120})$	$-\frac{1}{4}(N_{101} + N_{011})$	$N_{01,n+1}$	$-N_{l+1,01}$	$-N_{1,m+2,0}$
2, 3	$-\frac{1}{4}(N_{110} + N_{101})$	$\frac{1}{4}(N_{110} - N_{012})$	$\frac{1}{4}(N_{101} + N_{012})$	$-N_{01,n+2}$	$N_{l+1,01}$	$-N_{1,m+1,0}$
1, 3	$\frac{1}{4}(N_{110} + N_{201})$	$-\frac{1}{4}(N_{110} + N_{011})$	$\frac{1}{4}(N_{011} - N_{201})$	$-N_{01,n+1}$	$-N_{l+2,01}$	$N_{1,m+1,0}$
1, 2, 3	$\frac{1}{4}(N_{201} - N_{120})$	$\frac{1}{4}(N_{120} - N_{012})$	$\frac{1}{4}(N_{012} - N_{201})$	$-N_{01,n+2}$	$-N_{l+2,01}$	$-N_{1,m+2,0}$

なお、節面モードの高次項は以下の式では現れないので省略している。

式(9)を式(12)に代入して得られる特異写像関数では、面積座標が従属なために問題が起きる。すなわち、節点に結合する2本の節線の特異性が異なる場合は、式(32)の要素周辺上での従属関係を用いて補助関数の次数を変える。この変数変換により、写像関数は剛体変位の条件を満たして四辺形要素とも適合する。

例えば、図-9(a)の1特異点要素では節点1-2間で写像関数は2次式になるが、節点1-3間では1次式(正則)であるので節点1の特異写像関数は座標 $\xi_1$ または $\xi_3$ について1次でなければならない。

特異点が1~3個の場合について、式(12)の特異写像関数を式(33)の正則な関数の和で表した例を式(34)~(36)に示す。式中の記号 $\rightarrow$ は式(32)を用いて座標 $\xi_i$ の次数を下げたことを意味する。なお、添字 $l, m, n$ を任意に組み合わせた形状関数 $N_{lmn}$ には従属な関数が含まれるので<sup>2)</sup>、式(33)の独立な関数で表すために式(31)を用いて添字を変更する。

節点1が特異点の場合：

$$\begin{aligned} \text{節点 1: } \hat{N}_{100} &= N_{100}f_2^* = \xi_1(2 - \xi_1) = \xi_1(1 + \xi_2 + \xi_3) \\ &= N_{100} + \frac{1}{4}(N_{110} + N_{101}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節点 2: } \hat{N}_{010} &= N_{010}f_1^* = \xi_2^2 \rightarrow \xi_2(1 - \xi_1) \\ &= N_{010} - \frac{1}{4}N_{110} \end{aligned}$$

$$\text{節点 3: } \hat{N}_{001} = N_{001}f_1^* = \xi_3^2 \rightarrow \xi_3(1 - \xi_1)$$

$$= N_{001} - \frac{1}{4}N_{101}$$

$$\begin{aligned} \text{節線②: } \hat{N}_{101} &= N_{101}f_2^* = 8\xi_1\xi_3(1 - \xi_1)(2\xi_1 - 1)^{l-1} \\ &= N_{101} - N_{l+1,01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節線③: } \hat{N}_{1m0} &= N_{1m0}f_1^* = 8\xi_1\xi_2^2(2\xi_2 - 1)^{m-1} \\ &= N_{1m0} + N_{1,m+1,0} \end{aligned} \quad (34)$$

節点1, 2が特異点の場合：

$$\begin{aligned} \text{節点 1: } \hat{N}_{100} &= N_{100}f_3^* = \xi_1^2(3 - 2\xi_1) \\ &\rightarrow \xi_1(1 - \xi_2)(2 - \xi_1 + \xi_2) \\ &= N_{100} + \frac{1}{4}(N_{101} - N_{120}) - \frac{1}{8}N_{111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節点 2: } \hat{N}_{010} &= N_{010}f_3^* = \xi_2^2(3 - 2\xi_2) \\ &\rightarrow \xi_2(1 - \xi_1)(2 + \xi_1 - \xi_2) \\ &= N_{010} + \frac{1}{4}(N_{011} + N_{120}) + \frac{1}{8}N_{111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節点 3: } \hat{N}_{001} &= N_{001}f_1^* = \xi_3^2 \\ &= N_{001} - \frac{1}{4}(N_{101} + N_{011}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節線①: } \hat{N}_{01n} &= N_{01n}f_1^* = 8\xi_2\xi_3^2(2\xi_3 - 1)^{n-1} \\ &= N_{01n} + N_{01,n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節線②: } \hat{N}_{101} &= N_{101}f_2^* = 8\xi_1\xi_3(1 - \xi_1)(2\xi_1 - 1)^{l-1} \\ &= N_{101} - N_{l+1,01} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{節線③: } \hat{N}_{1m0} &= N_{1m0}f_3^* = 16\xi_1\xi_2^2(1 - \xi_2)(2\xi_2 - 1)^{m-1} \\ &= N_{1m0} - N_{1,m+2,0} \end{aligned} \quad (35)$$

節点1, 2, 3が特異点の場合：

$$\text{節点 1: } \hat{N}_{100} = N_{100}f_3^* = \xi_1^2(3 - 2\xi_1)$$

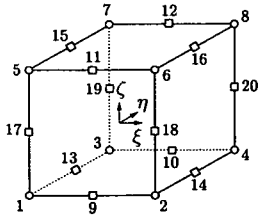


図-10 六面体要素

$$= N_{100} + \frac{1}{4}(N_{201} - N_{120}) - \frac{1}{4} N_{111}$$

$$\begin{aligned} \text{節線①: } \widehat{N}_{01n} &= N_{01n} f_3^* = 16\xi_2\xi_3^2(1-\xi_3)(2\xi_3-1)^{n-1} \\ &= N_{01n} - N_{01,n+2} \end{aligned} \quad (36)$$

式(34)~(36)の右辺第1項は通常の正則な写像に用いる関数で、その他の項が特異性を表す。なお、式(35)、(36)の下線の項は内部モードで、この項があると剛体変位の条件が満たされないので節面モード  $N_{111}$  を削除する。他の節点と節線上の中間写像点に用いる特異項を表-2に示す。この特異項を式(3)に加えると特異写像の式が得られる。図-9(c)のような◆印の特異点の場合は、正則な方向の特異項を表から削除する。

図-9に、中間写像点が1個の場合の特異項を示す。図(a)の写像の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^I N_i \widehat{x}_i + \frac{1}{4} [-N_{110} x_1 + (N_{110} + N_{011}) x_2 \\ &\quad - N_{011} x_3] + N_{012} \widehat{x}_4 - N_{120} \widehat{x}_6 \end{aligned} \quad (37)$$

なお、中間写像点を用いない直線要素では、右辺第1項の  $N_i$  ( $I=3$ ) は式(33)の形状関数  $\xi_i$  で、式(37)は  $1/4$  写像点を用いた特異要素の写像式に一致する。

### (5) 六面体要素

図-10に、2次曲線要素に写像するための写像点の番号を示す。4次曲線要素に写像する場合には図-4のように中間写像点を配置すればよい。

六面体要素の写像関数はハイラーキ多項式の三重積で与えられるので、式(27)の三重積を展開して特異写像関数  $\widehat{N}_{mnl}$  を式(2)の正則な関数で表す。

一例を示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \widehat{f}_0 \widehat{f}_1 f_0 &= N_{010} + \frac{1}{4}(N_{210} + N_{020}) + \frac{1}{16} N_{220} \\ \widehat{f}_0 \widehat{f}_0 \widehat{f}_1 &= N_{001} - \frac{1}{4}(N_{201} + N_{021} - N_{003}) \\ &\quad + \frac{1}{16}(N_{221} - N_{023} - N_{203}) + \frac{1}{64} N_{223} \\ \widehat{f}_m f_0 f_0 &= N_{m00} - N_{m+2,00} \quad (m \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここで下線の項は式(27)の右辺第2項の二重積と三重積による節面または体積モードであるので、四辺形要素と同じ理由により削除する。この修正は式(11)と同等である。

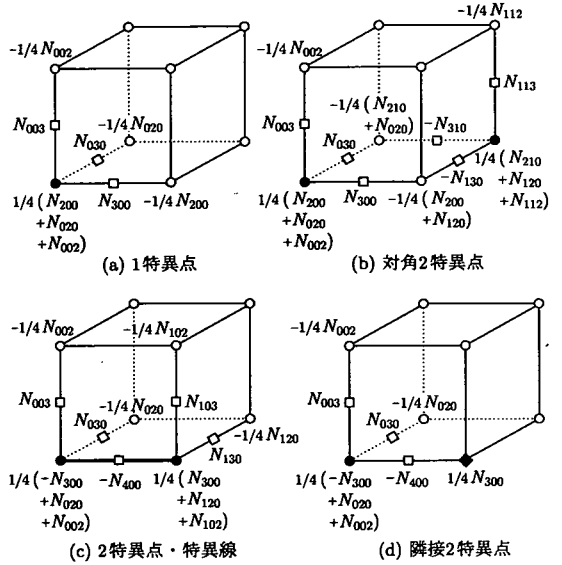


図-11 六面体要素の特異項

特異写像関数の定式化では、図-6に示した特異項を式(3)に加えて容易に求められる。特異点を1, 2個用いたときの特異項を図-11に示す。図では正則な中間写像点の□印を省略している。なお、図(d)では節点1-2間の節線を非特異にするために、節点2の  $\eta, \zeta$  に関する特異項とこれに対応する節点4, 6と節線の特異項を削除している(図(c)と比較されたい)。

図(a)の写像の式は次式のようになり、直線要素では  $1/4$  点写像による特異要素に一致する。

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^I N_i \widehat{x}_i + \frac{1}{4} [(N_{200} + N_{020} + N_{002}) x_1 \\ &\quad - N_{200} x_2 - N_{020} x_3 - N_{002} x_5] \\ &\quad + N_{300} \widehat{x}_9 + N_{030} \widehat{x}_{13} + N_{003} \widehat{x}_{17} \end{aligned} \quad (39)$$

## 4. 数値計算例

### (1) 片持ち板

等分布荷重  $q$  を受ける図-12の片持ち板の平面応力解析により、特異要素の精度を調べる。解析モデルは一辺が  $a$  の正方形板で、ポアソン比は  $\nu=0.3$  とし、境界条件は  $x=0$  の線上で完全固定(節点・節線変位を  $u=v=0$ ) とする。

この計算例では2つの特異点が現れて、全ての節線上で正則である。そこで、2特異点要素を用いて、◆印での特異写像関数には  $y$  軸方向のみに特異性を与える。多項式には8次式を使用する。また、図-13の図中に示す  $y=a/2$  の線で2要素に分割した非特異要素と、これに特異点を設けた1特異点要素に8次式を用いた計算結果を解析解<sup>9)</sup>と比較する。解析解では3~4桁の応力

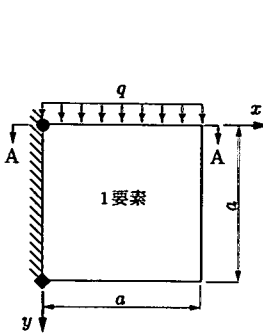
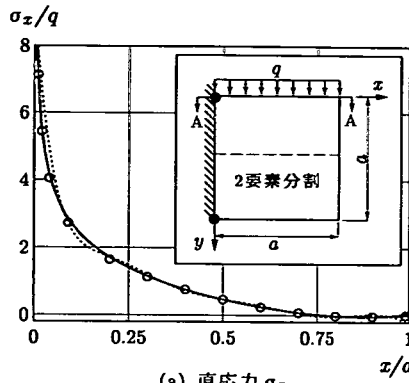
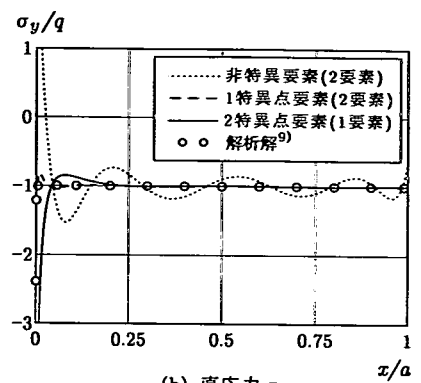


図-12 片持ち板  
(2特異点要素)

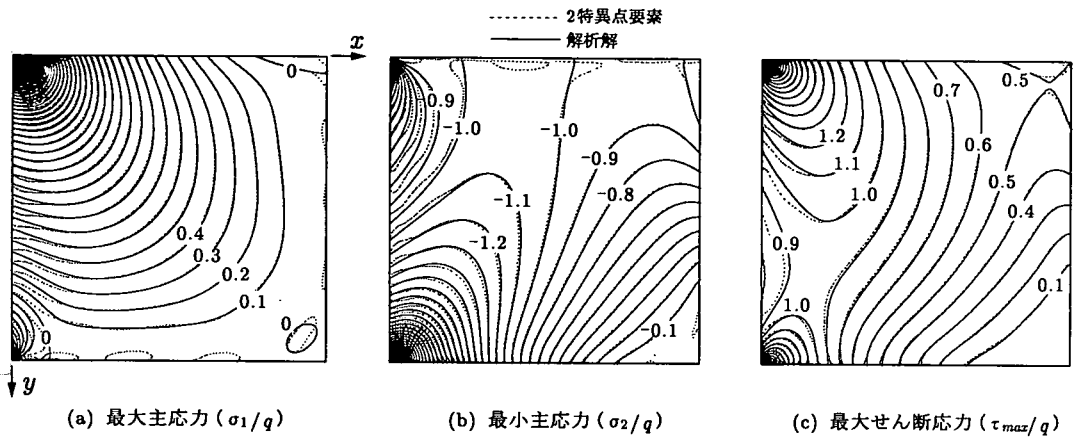


(a) 直応力  $\sigma_x$



(b) 直応力  $\sigma_y$

図-13 A-A 線上の応力



(a) 最大主応力 ( $\sigma_1/q$ )

(b) 最小主応力 ( $\sigma_2/q$ )

(c) 最大せん断応力 ( $\tau_{max}/q$ )

図-14 2特異点要素による主応力と最大せん断応力分布

の収束値を求めるために 1500 項の級数を用いている。

図-13に、 $q$ で無次元化した A-A 線上の直応力  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$  を示す。非特異要素では  $\sigma_x$  の誤差は少ないが、 $\sigma_y$  は要素内で激しく振動して収束していない。これに対して、特異要素の値は解析解に良く一致しており、 $\sigma_y$  は厳密値 1.0 が得られている。なお、1特異点要素に比べると2特異点要素の値は固定端で僅かながら悪いが、要素分割を必要としないので自由度数はほぼ半分である。

図-14に2特異点要素による主応力分布図を示す。固定辺付近で誤差が生じているが、要素内部では高精度の値が得られている。なお、式(11)または式(28)により内部モードを削除しないと全体的に精度は悪くなる。図では応力の平滑化などの補正を行わずに1要素で応力集中点近傍の値が求められていることに着目されたい。

## (2) L 形板

図-15(a)に示す自由辺に等分布荷重  $p$  が作用する L

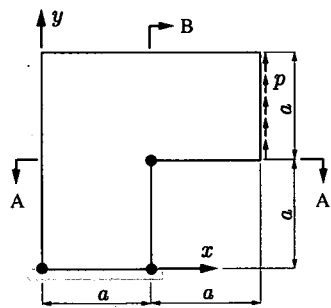
形板について計算する。このモデルでは固定端の両側とはりと柱の隅角点の特異になる。

数値計算では3つのモデルを用いて特異要素の効果を調べる。Model-Aでは正則な3要素に分割し、多項式には6次式を用いる。Model-BはModel-Aに3つの特異点を設け、要素1には3特異点要素を使用して◆印の特異写像関数は  $y$  軸方向のみに特異性を与える。Model-Cは比較解を得るために要素分割を細かくし、全要素に10次式を用いる。また、3つの特異点に対して5つの1特異点要素を使用する。ポアソン比は  $\nu=0.3$  とする。

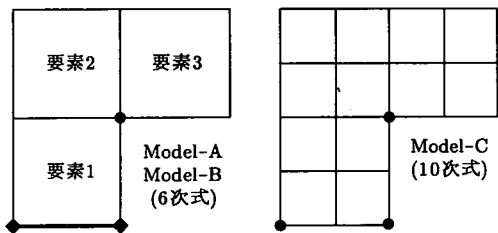
図-16に、A-A線上とB-B線上の無次元化した応力  $\sigma_y$  を示す。図より、Model-Aの非特異要素では特異点近傍の正確な応力が求められていないが、Model-BではB-B線上の2つの特異点間で要素を分割することなく良い値が得られている。

図-17に、Model-B、-Cの主応力分布図を示す。応力がほぼゼロの付近を除けば3要素のModel-Bで良い値が得られることが分かる。



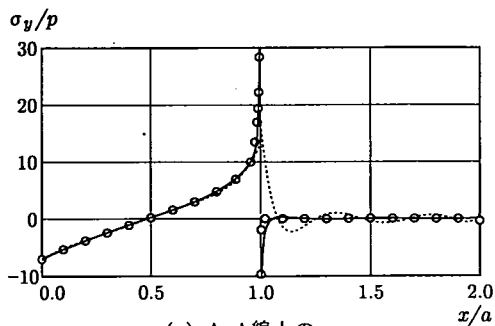


(a) 計算モデル

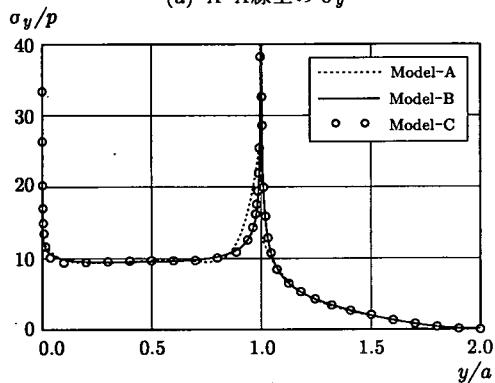


(b) 要素分割と次数

図-15 L形板

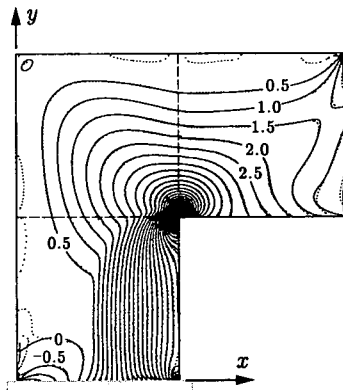


(a) A-A線上の  $\sigma_y$

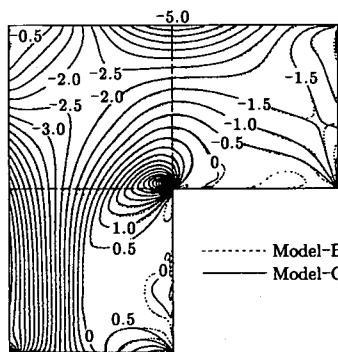


(b) B-B線上の  $\sigma_y$

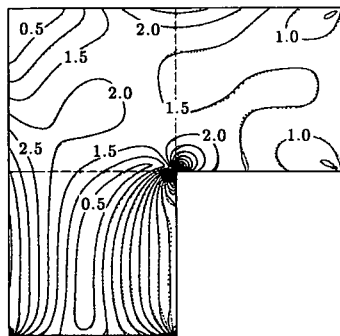
図-16 断面上の応力分布



(a) 最大主応力 ( $\sigma_1/p$ )



(b) 最小主応力 ( $\sigma_2/p$ )



(c) 最大せん断応力 ( $\tau_{max}/p$ )

図-17 主応力分布

### (3) 円弧アーチ

図-18(a)に示す等分布荷重  $q$  が作用する固定円弧アーチについて計算する。円弧の中心角は  $\pi/2$  とし、 $1/2$  領域について2つのモデルを用いて特異曲線要素の効果を調べる。

図(b)のModel-Aでは、1個の特異点を有する曲線要素に10次式を用いて、固定辺は完全固定とし対称条件は節点と節線の  $x$  軸方向変位を拘束する。比較解を得るために、図(c)のModel-Bでは縮退三角形要素<sup>2)</sup>を用いて固定辺下端を特異点にして、多項式の次数に

は10次式を使用する。なお、各要素の円弧を4次曲線で近似するが十分な精度を有する<sup>3)</sup>。また、ポアソン比は  $\nu=0.3$  とする。

図-19に、主応力分布図を示す。Model-Aの値は要素全域に渡り細分割したModel-Bの値と良く一致しており、本手法の特異要素は曲線要素においても特異性が失われぬ。また、図には示していないが、非特異要素を用いた場合には、固定端で応力集中が起きるために内側の円弧上で  $\sigma_r$  が振動して誤差が生じる。

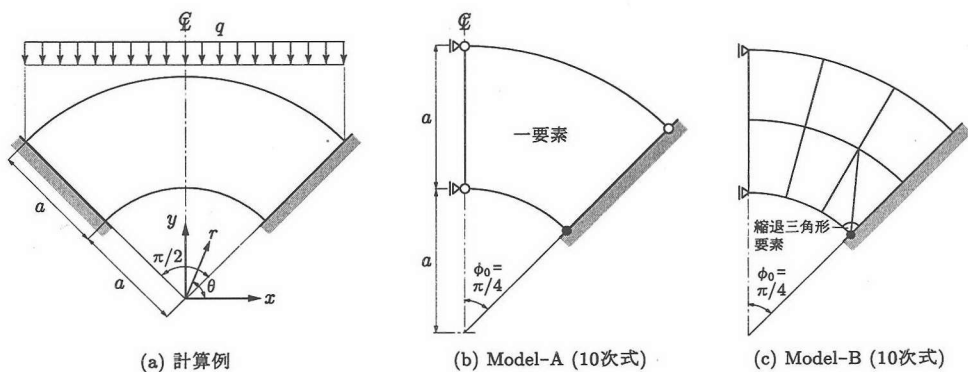


図-18 固定円弧アーチ

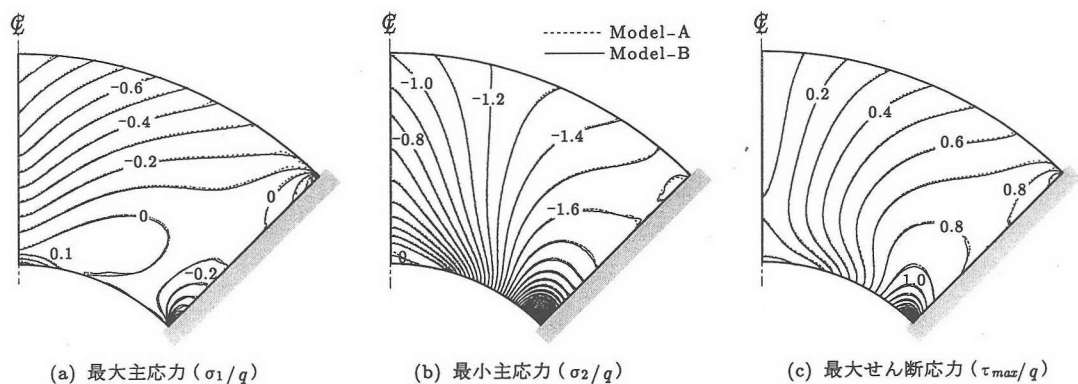


図-19 特異曲線要素による主応力と最大せん断応力分布

## 5. 結 論

本研究では、特異点近傍の応力集中問題に対して有効なハイアラーキ特異要素を開発した。本解法は  $h$  法にも適用できるもので、以下の特徴を有する。

- (1) ハイアラーキ写像に特異写像関数を用いて、特異曲線要素を定式化した。
- (2) 正則な写像関数に特異項を加えて種々の特異性をもつ特異写像関数が得られる。
- (3) 特異項には変位の形状関数を用いるので、新たな関数を必要としない長所がある。
- (4) 応力集中問題において安定した解を得るのに特異要素は有効で、多特異点要素を用いた粗い要素分割でもって高精度の値を求めることができる。

## 付録 I 式 (11) の証明

写像点は要素周辺のみに配置して要素内部には設けないので、式 (10) の特異写像関数において補助関数の積は隅角節点のみに現れる (式 (25) を参照)。したがって、先に述べたように、剛体変位の条件は隅角節点の写像関数についてのみ考えればよい。

そこで、式 (7) の補助関数を節点項のみに着目して

$$f_1^* = \begin{cases} 1 + f_1 \\ 1 - f_0 \end{cases}, \quad f_2^* = \begin{cases} 1 - f_1 \\ 1 + f_0 \end{cases}$$

$$f_3^* = \begin{cases} 1 - \xi f_1 & (m=0) \\ 1 + \xi f_0 & (m=1) \end{cases} \quad (I.1)$$

と変形し、 $k=1\sim 3$  に対して一般的に次式のように表す。

$$f_k^* = 1 \pm h_m \quad (m=0, 1) \quad (I.2)$$

まず、四辺形要素について式 (10) に式 (I.2) を代入して和を求める。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \hat{N}_i &= \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 \hat{N}_{mn} \\ &= \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 N_{mn} [1 \pm h_m(\xi)] [1 \pm h_n(\eta)] \\ &= \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 f_m f_n (1 \pm h_m \pm h_n \pm h_m h_n) \end{aligned} \quad (I.3)$$

右辺の括弧を展開すると第 1 項は正則な形状関数、第 2~4 項の  $f_m h_m$  または  $f_n h_n$  は式 (1) の 2, 3 次のハイ

アラーキ多項式  $f_2, f_3$  で表すことができる。

$$k = 1, 2 : f_m h_m = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} f_2 & (m = 0) \\ \mp \frac{1}{4} f_2 & (m = 1) \end{cases}$$

$$k = 3 : f_m h_m = \begin{cases} -\frac{1}{4} f_3 & (m = 0) \\ \frac{1}{4} f_3 & (m = 1) \end{cases} \quad (I.4)$$

ここで、式 (I.4) の特異項は両端 ( $m=0,1$ ) で対になって現れて、かつ逆符号であるので (図-6参照)、式 (I.3) の第2,3項の和はゼロになる (図-7参照)。これらの項は式 (27) の右辺第2項である。また、正則な形状関数  $N_{mn}$  の和は1であることから、式 (I.3) は次のようになる。

$$\sum_{i=1}^4 \hat{N}_i = 1 \pm \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^1 f_m h_m f_n h_n$$

$$= 1 + \frac{1}{16} \sum_{i=1}^4 (\pm N_{mn}) \neq 1 \quad (I.5)$$

下線の項の添字  $m, n$  はともに2以上 ( $k=3$  のときは3) であるので、内部モード (節面モード) である。

式 (I.3) において式 (11) の修正を行うと  $h_m h_n$  の積は現れないので剛体変位の条件は満足されることが分かる。

六面体要素についても補助関数の二重積と三重積に

対して式 (11) の修正を行うと、同様な式の展開により剛体変位の条件が満足されることが確かめられる。

#### 参考文献

- 1) 横山正明：高精度計算力学，朝倉書店，pp.151-168,1998.
- 2) 林 正，山中素直，加瀬部弘，佐藤敏亮：ハイアラーキ要素による有限要素解析の効率化，土木学会論文集，No.591/I-43，pp.71-84，1998.
- 3) 林 正，渡辺 力，齋藤道生：ハイアラーキ要素による薄肉構造の局所応力解析，土木学会論文集，No.654/I-52，pp.105-119，2000.
- 4) 鷲津久一郎，宮本 博，山田嘉昭，山本善之，川井忠彦編：有限要素法ハンドブック I，基礎編，培風館，pp.416-421，1981.
- 5) Akin, J.E. : *Finite Elements for Analysis and Design*, Academic Press, pp.280-285, 1994.
- 6) Szabó, B.A. and Babuška, I. : *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, pp.188-192, 1991.
- 7) Szabó, B.A. : Mesh design for the p-version of the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.55, pp.181-197, 1986.
- 8) Szabó, B.A. : Computation of stress field parameters in areas of steep stress gradients, *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol.2, pp.133-137, 1986.
- 9) 小林道明，石川博将，泰 謹一：短い片持ばりの二次元応力問題について，日本機械学会論文集 (第1部)，Vol.42，No.357，pp.1355-1364，1976.

(2002. 6. 12 受付)

## SINGULAR MAPPING FUNCTION FOR STRESS CONCENTRATION

Masa HAYASHI, Chikara WATANABE and Michio SAITOH

An efficient and highly accurate method by using hierarchical finite elements is presented for the analysis of local stresses that are caused by the stress concentration in the vicinity of singular points. Singular elements are used to prevent the deterioration of convergence of the solution in the case of having singular points. In this study, hierarchical curved elements with many singular points are developed by using singular mapping functions. The accuracy and availability of these elements are demonstrated by numerical examples.