

有限要素法および境界要素法による 弾性体のコンプライアンス最小形状の探索

田村 武¹・西藤 潤²

¹フェロー 工博 京都大学教授 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

²学生員 京都大学 大学院工学研究科土木工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

2次元等方弾性体を体積一定の条件下でコンプライアンス最小となるよう最適設計を行う。領域形状の変化を考慮した変分原理により、領域全体のコンプライアンスを最小化するという条件を境界上での別の条件に置き換え、有限要素法と境界要素法を個別に用いて解析をする。これら2つの手法をはりの最適形状問題を解くことにより、はり理論の解と比較して妥当性を確認する。また、外部問題の代表例である空孔問題への適用を試みた。

Key Words : optimization, minimum compliance, variational principle, finite element method, boundary element method

1. はじめに

実際の構造物の最適設計を考えると考慮すべきものとしていくつかの条件が考えられる。機能性、快適性、安全性、耐久性、経済性、景観性などである。これらの条件は互いに密接に関わりあっている。また、互いにトレードオフの関係にあり、これらの要素すべてを同時に最良に満足することは難しい。これら複数の条件の中で、あるものは設計の条件として取り入れ、他のものは重み付けを行い、設計を決定することが多い。この中で部分的であるにせよ、力学的な意味での形状最適設計は大きな意味をもっている。力学の観点から見た「最適形状設計」(Optimal Shape Structural Design)は、「制約条件を満足するよう力学的に最も合理的な構造物の形状を設計すること」と定義できよう。本論文ではこの力学的な意味での最適設計を対象とする。すなわち、「領域体積一定の条件下で、構造物のコンプライアンス (compliance, 式(1)に示す) を最小化する」という観点から、弾性体の形状最適化を議論する。体積一定の条件は材料の量を一定にすることにもなり、経済的な制約条件と考えることもできる。コンプライアンス最小の理論的な考えは Banichuk¹⁾ によってなされているが、具体的な問題は解かれた例が少ない。Tamura²⁾ が有限要素法を用いた定式化を行い、また Motaら³⁾ が境界要素法を用いて簡単な問題を解いている程度である。

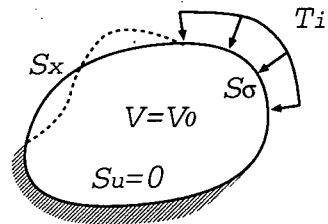


図-1 弾性体領域と境界条件

コンプライアンスは一定の外力のもとで次式で定義される。

$$\text{Compliance} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力； ϵ_{ij} はひずみ； V は領域の体積を表す。また、3次元の場合 $i = 1, 2, 3$ 、2次元の場合 $i = 1, 2$ であり、添字が2度現れる場合には総和規約に従うものとする。すなわち、コンプライアンスは、「一定外力のもとで弾性体内に蓄えられるエネルギー」のことで、「応力のした全仕事」に等しい。また、エネルギー保存則より「外力のなす仕事」に等しいことがいえる。コンプライアンスを最小にすることは、ある外力を加えたときに作用点での変位を荷重を重みとして最小にする、すなわち、同一体積の構造物において変形を平均的に最小にすることを意味する。

図-1に示す弾性体領域の表面 S_u は変位を拘束する変位境界である。また、 S_σ は表面外力 T_i ($T_i = 0$

も含む。)が加えられる応力境界である。\$S_X\$ は応力境界 \$S_\sigma\$ 上の一部で、この境界 \$S_X\$ 上には、トラクションは働かないものとする (\$T_i = 0\$)。この境界 \$S_X\$ を変化させることによって、最適形状の探索を図る。

2. 解析手法

(1) 形状変化を考慮した変分原理

弾性体に用いられる変分原理 (全ポテンシャルエネルギー最小の原理) は、幾何学的に許容な任意の変位 \$\delta u_i\$ のみを考える。(ここで、\$\delta\$ は変分量を意味する。) \$\delta u_i\$ に対して全ポテンシャルエネルギーが停留であれば、その系は真の変位状態にある。これが一般的によく用いられている変分原理である。これを以降では「従来の意味での変分原理」と呼ぶ。ここでは、変位 \$u_i\$ の変分 \$\delta u_i\$ のほかに座標 \$x_i\$ の変分である形状変化 \$\delta x_i\$ を加えて考える。ここで、形状変化とは図-1 で示す境界 \$S_X\$ の変化のことである。これを以降では「形状変化を考慮した変分原理」と呼び、Gelfand ら⁴⁾の方法に従い、Banichuk の考え方を独自に再構成する。

座標 \$x_i\$ の変分を

$$\delta x_i = \varepsilon \phi_i(x_j) \quad (2)$$

と定義する。ここで \$\phi_i(x_j)\$ は表面 \$S_u\$ 上で 0、かつ、表面 \$S_X\$ を除く \$S_\sigma\$ 上で 0 となる \$V\$ 上の任意の滑らかな関数である。\$\varepsilon\$ は十分に小さい値である。これより、\$x_i\$ が領域形状の変化にともない移動した新しい座標 \$x_i^*\$ は、以下のように表される。

$$x_i^* = x_i + \varepsilon \phi_i(x_j) \quad (3)$$

同様に、変位の変分 \$\delta u_i (= u_i^*(x_j^*) - u_i(x_j))\$ を

$$\delta u_i = \varepsilon \psi_i(x_j) \quad (4)$$

と定義する。\$\psi_i(x_j)\$ は表面 \$S_u\$ 上で 0 となるような \$V\$ 上の任意の滑らかな関数である。\$u_i\$ は \$x_j\$ での変位、\$u_i^*\$ は \$x_j^*\$ での変位である。すると、式(4)より変位 \$u_i(x_j)\$ の近傍の関数 \$u_i^*(x_j^*)\$ は以下のようになる。

$$u_i^*(x_j^*) = u_i(x_j) + \varepsilon \psi_i(x_j) \quad (5)$$

a) 変位の 1 階微分の変分

領域の変化を伴う変分原理を考える上では、\$u_{i,j}\$ の変分 \$\delta u_{i,j}\$ の値が必要となる。(ここで、下付きの \$j\$ は、\$x_j\$ 方向に関する偏微分を表す。) その求め方を以下に示す。

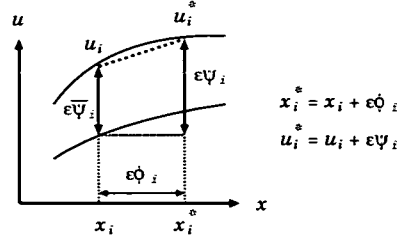


図-2 変位の 1 階微分の変分

形状変化を考慮した変位の変分 \$\varepsilon \psi_i\$ と従来の意味での変位の変分 \$\varepsilon \bar{\psi}_i\$ の関係は次式で表される。

$$\delta u_i = \varepsilon \psi_i = \varepsilon (\bar{\psi}_i + u_{i,k} \phi_k) \quad (6)$$

1 次元でこの関係を表すと図-2 のようになる。式(6)より

$$\psi_i = \bar{\psi}_i + u_{i,k} \phi_k \quad (7)$$

である。式(5)で両辺の増分を考えると

$$\Delta u_i^* = (u_{i,k} + \varepsilon \psi_{i,k}) \Delta x_k \quad (8)$$

となる。\$\Delta\$ は、座標による増分を表す。\$\Delta x_i\$ と \$\Delta x_i^*\$ の関係は、次式で表される。

$$\Delta x_k = (\delta_{kj} - \varepsilon \phi_{k,j}) \Delta x_j^* \quad (9)$$

\$\delta_{ij}\$ はクロネッカーデルタである。上式(9)は、式(3)の増分の関係を表した

$$\Delta x_i^* = (\delta_{ij} + \varepsilon \phi_{i,j}) \Delta x_j \quad (10)$$

から導かれる。式(8)に式(9)を代入すると次式が得られる。

$$\Delta u_i^* = (u_{i,j} + \varepsilon \psi_{i,j} - \varepsilon u_{i,k} \phi_{k,j}) \Delta x_j^* \quad (11)$$

ところが、この式は

$$(u_{i,j})^* = u_{i,j} + \varepsilon (\psi_{i,j} - u_{i,k} \phi_{k,j}) \quad (12)$$

を意味している。よって、\$\delta u_{i,j}\$ は、次式で表される。

$$\delta u_{i,j} = \varepsilon (\psi_{i,j} - u_{i,k} \phi_{k,j}) \quad (13)$$

式(7)を用いると、上式(13)は

$$\delta u_{i,j} = \varepsilon (\bar{\psi}_{i,j} + u_{i,jk} \phi_k) \quad (14)$$

と書ける。これが求める関係であり、座標の変動を考慮した結果、右辺第 2 項が付加されている。

(2) 全ポテンシャルエネルギーの第1変分

ここでは、全ポテンシャルエネルギーの第1変分を考える。弾性体の全ポテンシャルエネルギーは

$$I = \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \quad (15)$$

で与えられる。ここで f_i は物体力を表す。これらは線形弾性体では以下のような関係をもつ。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (16)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (17)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (18)$$

C_{ijkl} は Hooke テンソルで次のような対称性をもつ。

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (19)$$

領域の変分を考慮した I の第1変分 δI は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - f_i \delta u_i - \delta f_i u_i) dV \\ & + \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i \right) \delta(dV) \\ & - \int_{S_\sigma} T_i \delta u_i dS \end{aligned} \quad (20)$$

また式(20)の第1項に出てくる物体力の変分 δf_i は

$$\delta f_i = f_{i,j} \delta x_j \quad (21)$$

である。また、領域の変化に伴う体積の変分の関係は

$$\delta(dV) = \varepsilon \phi_{k,k} dV \quad (22)$$

である。これは、式(3)より導かれる

$$\det \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j} \right) = 1 + \varepsilon \phi_{k,k} \quad (23)$$

からわかる。式(20)に式(6), (14), (21), (22)を代入し、まとめると次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta I = & \varepsilon \int_{S_X} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i \right) \phi_k n_k dS \\ & - \varepsilon \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \bar{\psi}_i dV \\ & - \varepsilon \int_{S_\sigma} (T_i - \sigma_{ij} n_j) \bar{\psi}_i dS \end{aligned} \quad (24)$$

関数 ϕ_k と $\bar{\psi}_k$ が独立であることに注意しながら、全ポテンシャルエネルギー I が停留値をとる条件 ($\delta I = 0$) を考える。体積一定の条件を課せば

$$V = V_0 \quad (\text{constant}) \quad (25)$$

すなわち

$$\varepsilon \int_{S_X} \phi_k n_k dS = 0 \quad (26)$$

である。これは体積一定の条件を反映した ϕ_k に関する1つの制約である。これを満足する任意の ϕ_k に対し、式(24)の右辺第1項が0であるためには

$$W = \lambda \quad (\text{constant}) \quad \text{on } S_X \quad (27)$$

を満たす必要があることがわかる。ただし

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i \quad (28)$$

である。また、 λ はいわゆる Lagrange 乗数である。 W はエネルギー密度に相当する次元を持つ。また、式(24)の右辺第2項、第3項において停留条件を考えると、 $\bar{\psi}_i$ が任意の関数であるので

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{in } V \quad (29)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{on } S_\sigma \quad (30)$$

でなければならない。これらはそれぞれつりあい式と応力境界条件である。式(27), (29), (30)が式(15)に対するオイラーの方程式であり、全ポテンシャルエネルギー I が式(25)のもとで停留値をとる条件である。

(3) コンプライアンス最小と W の関係

上記の変分原理より以下に示す(2)が(1)の必要条件であることを示す。

- (1) つりあいの条件を満たしながら、コンプライアンスが最小となること
- (2) 式(27)が成立すること

従来の意味での変分原理を用いて、つまり、変位のみを考慮した変分原理を用いると、全ポテンシャルエネルギーの第1変分 δI は次のようになる。

$$\delta I = -\varepsilon \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \bar{\psi}_i dV - \varepsilon \int_{S_\sigma} (T_i - \sigma_{ij} n_j) \bar{\psi}_i dS \quad (31)$$

式(31)の停留条件 $\delta I = 0$ は変位に関して以下のように全ポテンシャルエネルギーを最小化することを意味している。

$$\min_{u_i} \left\{ \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \right\} \quad (32)$$

また、式(31)に対するオイラー方程式は、つりあい条件を示した式(29), (30)となる。これを式(15)

に代入し部分積分を施すと、コンプライアンスの負の値が得られる。

$$I = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = -\text{Compliance} \quad (33)$$

これを領域の形状変化により最大化することは、コンプライアンスを最小にすることを意味する。よって、つりあい条件のもとで形状に関してコンプライアンスを最小にすることは次式のように書ける。

$$\max_{S_X} \min_{u_i} \left\{ \int_V \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i \right) dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS \right\}$$

sub to $V = V_0$ (34)

この式は $\delta I = 0$ となる停留値を求めることに相当するが、式(25)のもとで $\delta I = 0$ が 0 となる必要条件是、式(24)に関連して説明したように、つりあい式(29)、(30)および式(27)であった。これで本節の目的が達せられた。

以上が Gelfand らの方法による Banichuk の考え方の著者らによる再構成である。

(4) 問題の定式化

a) 境界上の W を用いた定式化

つりあい系を対象として問題を定式化する。「与えられた一定外力のもと、体積一定の条件下で、境界を変動させることによって、コンプライアンスを最小にすること」を式で表すと以下のようなになる。

$$\text{目的関数} \quad \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \rightarrow \min \quad (35)$$

$$\text{制約条件} \quad V = V_0 \quad (36)$$

$$\text{設計変数} \quad S_X \text{の形状} \quad (37)$$

(3)節で示したように、変分原理を通じて「境界 S_X 上の W が一定であること」は「コンプライアンスが最小であること」の必要条件であることがいえるので、目的関数は式(28)の W を用いて、次のような最適化規準に置き換わる。

$$\text{最適化規準} \quad W = \text{constant} \quad (\text{on } S_X) \quad (38)$$

さらに、2次元問題を対象とする場合、式(36)は

$$\text{制約条件} \quad S = S_0 \quad (\text{constant}) \quad (39)$$

となる。 S は構造物の面積、 S_0 は一定となる面積である。これにより、解くべき問題は次のように定式化された。

$$\text{最適化規準} \quad W = \text{constant} \quad (\text{on } S_X) \quad (40)$$

$$\text{制約条件} \quad S = S_0 \quad (41)$$

$$\text{設計変数} \quad S_X \text{の形状} \quad (42)$$

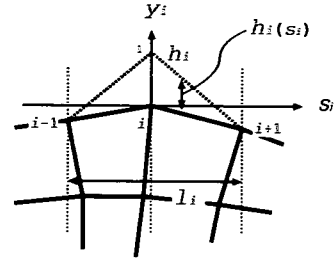


図-3 境界上の節点の変分

b) 離散化した問題の定式化

数値解析法で解くために離散化すると式(41)および(42)はそれぞれ次のようになる。

$$\text{制約条件} \quad S(\hat{x}_i) = S_0 \quad (43)$$

$$\text{設計変数} \quad \hat{x}_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (44)$$

ここで \hat{x}_i は、境界 S_X 上の節点の座標を示す。 N は境界 S_X 上にある節点の数である。図-3のように、境界 S_X の節点における探索方向とそれと直交する方向に、 \hat{x}_i が原点となるような新しい座標をとり、その座標軸をそれぞれ y_i 、 s_i と定める。 y_i 軸上で節点を単位の長さだけ動かしたときの境界の変化量を $h_i(s_i)$ と表すと、面積一定の条件式(43)は、 y_i 軸の摂動 δy_i を用いて次式で表される。

$$\sum_{i=1}^N \delta y_i \int_{l_i} h_i ds_i = 0 \quad (45)$$

ここで、 l_i は座標軸 y_i と 2つの隣り合う節点との s_i 軸上の距離の和を表す。式(45)は δy_i の制約条件であり、式(26)に相当する。 S_X における W の変動、すなわち、式(24)の第1項は次のように表現できる。

$$\sum_{i=1}^N \delta y_i \int_{l_i} W h_i ds_i \quad (46)$$

δI が停留値をとるためには、式(45)を満足するようななどのような δy_i に対しても、式(46)は 0 でなければならない。

$$\sum_{i=1}^N \delta y_i \int_{l_i} W h_i ds_i = 0 \quad (47)$$

これより Lagrange 定数 λ を用いて次式が導かれる。

$$\int_{l_i} W h_i ds_i = \lambda \int_{l_i} h_i ds_i \quad (48)$$

これは式(27)の弱形式表現であり、 W が S_X 上で平均的な意味で一定となることを意味している。

この非線形問題を Newton-Raphson 法を用いて解く。ただし、この問題は凸性が保証されないため、初期形状の選択によっては解が収束しないこともある。

面積 S , W は、境界移動量 y_i の関数なので、式 (43), (48) は、以下のように増分 y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) および $\Delta\lambda$ を用いた形式で表せる。

$$S(y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \dots, y_N + \Delta y_N) = S_0 \quad (49)$$

$$\int_{l_i} W(y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2, \dots, y_N + \Delta y_N) h_i dx_i = (\lambda + \Delta\lambda) \int_{l_i} h_i ds_i \quad (50)$$

これらを 1 次近似すると

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta y_i \int_{l_i} ds_i = S_0 - S \quad (51)$$

$$\sum_{j=1}^N \Delta y_j \int_{l_i} \frac{\partial W}{\partial y_j} h_i ds_i - \Delta\lambda \int_{l_i} h_i ds_i = \lambda \int_{l_i} h_i ds_i - \int_{l_i} W h_i ds_i \quad (52)$$

となり、未知量 Δy_i ($i = 1, 2, \dots, N$) と $\Delta\lambda$ の線形方程式になる。この方程式を解くためには、 W の y_i に関する微分、つまり、 W の y_i による感度解析が必要となる。

(5) 感度解析の手法

感度解析として以下の 2 つの手法が考えられる。

(1) 数値微分による方法

$$\frac{\partial W}{\partial y_k} = \frac{W(\dots, y_k + \Delta y_k, \dots) - W(\dots, y_k, \dots)}{\Delta y_k} \quad (53)$$

(2) 解析的に微分する方法

$$\frac{\partial W}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - f_i u_i \right) \quad (54)$$

このうち (1) は、特に工夫も要らず単純であるが、数値的に微分を行うため誤差が大きな問題となる。また、計算量も多いという欠点をもつ。一方 (2) は、定式化は煩雑となるが、空間離散化による誤差が抑えられる特徴をもつ。

a) 有限要素法による感度解析の定式化

以下の有限要素法では、「(2) 解析的に微分する方法」によって、 W の境界移動量 y_k に関する微分を評価する。有限要素法の場合、 W を次のように表すことができる。

$$W = \frac{1}{2} \epsilon^T D^e \epsilon - f^e T u \quad (55)$$

ここで、上つきの添字 e , T はそれぞれ、要素番号、転置を表す。また、 ϵ , D , f , u はそれぞれひずみベクトル、弾性マトリックス、物体力ベクトル、全体節点変位ベクトルを表す。なお、以下では簡単のため物体力は作用しないものとする。式 (55) を境界移動量 y_k で微分することを考える。

まず、有限要素法の全体剛性方程式：

$$K u = F \quad (56)$$

を y_k で微分する。ここで K は全体剛性行列、 F は全体荷重ベクトルを表す。 F は物体力および境界 S_X 上のトラクションを含まないため、 y_k に依存しない。したがって、次式を得る。

$$\frac{\partial K}{\partial y_k} u + K \frac{\partial u}{\partial y_k} = 0 \quad (57)$$

これより、以下のことがわかる。

$$\frac{\partial u}{\partial y_k} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial y_k} u \quad (58)$$

また、変位-ひずみ関係：

$$\epsilon = B^e u \quad (59)$$

を y_k で微分すると（ここで B は B マトリックスを表す）

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial y_k} = \frac{\partial B^e}{\partial y_k} u + B^e \frac{\partial u}{\partial y_k} \quad (60)$$

を得る。つまり、式 (54) は式 (55)(58)(60) より、次式で表される。

$$\frac{\partial W}{\partial y_k} = \epsilon^T D^e \left(\frac{\partial B^e}{\partial y_k} u - B^e K^{-1} \frac{\partial K}{\partial y_k} u \right) \quad (61)$$

が得られる。

$\frac{\partial K}{\partial y_k}$ は以下のように計算される。 K は次式で表される。

$$K = \sum_e \sum_g (B_g^{eT} D^e B_g |J_g|) w_g \quad (62)$$

ここで、下つきの添字 g は、ガウスポイントを意味し、 $|J_g|$, w_g はそれぞれ、アイソパラメトリッ

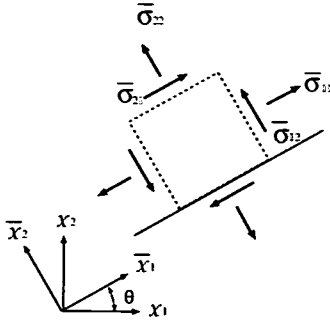


図-4 2次元応力の座標変換

クによる写像のヤコビアン， Gaussポイントの重みを表す． K の y_k による微分は以下のように展開できる．

$$\frac{\partial K}{\partial y_k} = \sum_e \sum_g \left(2 \frac{\partial B_g^{eT}}{\partial y_k} D^e B_g^e |J_g| + B_g^{eT} D^e B_g^e \frac{\partial |J_g|}{\partial y_k} \right) w_g \quad (63)$$

これを式(61)に代入するが， K^{-1} は1回しか現れないので1度だけ剛性方程式を解けば全ての y_k に関する感度分析ができることになる．

b) 境界要素法による感度解析の定式化

境界要素法を用いて問題を解く場合， 解析的に感度解析を行なうと式が煩雑となるため， 本研究では容易にプログラムを作成することができる数値微分を用いた．

境界要素法での W の感度解析を行うためには， W を求める必要がある． その方法を示す． (28) の左辺第2項は， 物体力が無い ($f_i = 0$) という仮定より0である． つまり， W は， ひずみエネルギー密度 W'

$$W' = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (64)$$

と与えられる．

このひずみエネルギー密度は， 接線に沿った座標 (図-4) で考えたときの応力 $\bar{\sigma}_{ij}$ ， ひずみ $\bar{\varepsilon}_{ij}$ を用いて， 式(64)と同様に次の式で表される．

$$W' = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (65)$$

S_X 上にはトラクションが働かないため

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = 0 \quad \bar{\sigma}_{22} = 0 \quad (66)$$

である．

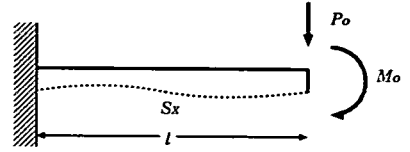


図-5 片持ちばりの問題設定

接線方向に沿ったひずみ $\bar{\varepsilon}_{11}$ は次式で計算できる．

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial N_P(\xi)}{\partial \xi} u_P \quad (67)$$

ここで $N(\xi)$ は1次元の内挿関数， \bar{u} は接線方向の変位， 下付きの P は要素内の節点番号である． また， 接線方向に沿った応力は $\bar{\sigma}_{11}$ を用いて

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \bar{\varepsilon}_{11} \quad (68)$$

である． E は Young 率， ν は Poisson 比である．

よって式(65)-(68)より， W は

$$W' = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{2} \frac{E}{1 - \nu^2} \bar{\varepsilon}_{11}^2 \quad (69)$$

となる． これを数値微分すると $\partial W / \partial y_k$ を求めることができる．

3. 解析結果

解析では平面ひずみを想定し， 材料は等方弾性体と仮定し， Young 率 E を 1， Poisson 比 ν を 0.333 とする． また， 有限要素法では 4 節点アイソパラメトリック要素を用い， 境界要素法では 1 要素 2 節点の線形要素を用いて解析を行った．

(1) 片持ちばりの形状最適化問題

プログラムの有効性を確認するために， 初等はり理論によって解の得られる長方形断面の片持ちばりの例をとりあげる． 図-5 のような部材長 l の片持ちばりの自由端に鉛直荷重 P_0 ， モーメント荷重 M_0 を加えたときのはりの最適形状を求める問題を考える． 部材下縁を S_X とし (図-5 の点線で表された境界)， この境界形状を変化させて最適形状を探索する． 固定端は S_u に， 部材上端と右端が S_X を除いた S_o にそれぞれ相当する． つまり， この問題では部材下縁の W の値を一定にすることを考える．

a) はり理論に基づく解析解

数値解析法との比較を行うため、はり理論に基づいて理論解を算出する。ただし、はり理論では、平面保持の仮定のもとで曲げによる応力について検討するため、はり高さによる影響や軸力を考慮しない。そのため、はり理論による下記に示す解は本問題の1つの近似解である。

軸方向の応力 σ 、ひずみ ϵ の関係式

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (70)$$

より、最適化基準である式(38)は

$$\sigma\epsilon = \frac{\sigma^2}{E} = \text{constant} \quad \text{on } S_X \quad (71)$$

となる。つまり、部材下縁で応力とひずみの積を一定にすればよい。固定端が原点となるように部材の軸方向に x 軸をとると、下縁端の応力は次式で与えられる。

$$\sigma(x) = \frac{M(x) h(x)}{I(x) 2} \quad (72)$$

$M(x)$, $I(x)$, $h(x)$ はそれぞれ座標 x での部材にはたらくモーメント、断面2次モーメント、および未知関数であるはり高さを表す。奥行きを1とする。と、断面2次モーメントは次式で表される。

$$I = \frac{h^3(x)}{12} \quad (73)$$

である。式(71)-(73)から次の式を得る。

$$\sigma\epsilon = \frac{(6M(x))^2}{Eh^4(x)} = \text{constant} \quad (74)$$

さらに式(39)を満足するためには

$$\int_1 h(x) dx = S_0 \quad (75)$$

でなければならない。式(74), (75)より、はり高さは以下ようになる。

$$h(x) = \frac{S_0}{\int_1 \sqrt{|M(s)|} ds} \sqrt{|M(x)|} \quad (76)$$

この問題においては、モーメントが

$$M(x) = P_0x + M_0 \quad (77)$$

で与えられるので、式(76)は

$$h(x) = \frac{S_0}{\int_1 \sqrt{|P_0s + M_0|} ds} \sqrt{|P_0x + M_0|} \quad (78)$$

となる。

式(76)からわかるように $M(x)$ の値が0になるとはり高さが0となる。これを避けるために $M_0 \neq 0$ となるような荷重系のみを考える。



図-6 FEM の初期形状

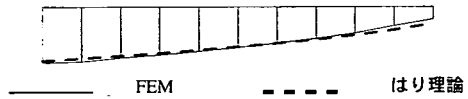


図-7 FEM による解析解とはり理論による解

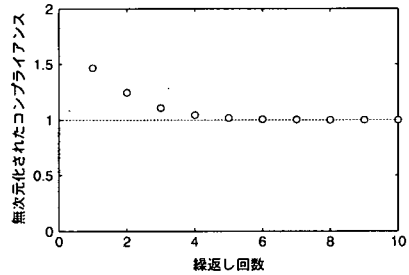


図-8 無次元化されたコンプライアンスと繰返し回数

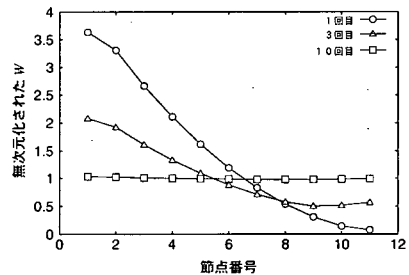


図-9 節点における無次元化された W



図-10 FEM による解析解とはり理論による解 (2)

b) 有限要素法による解

有限要素法による片持ちばりの解析結果を示す。片持ちばりは長さ $l = 10$ 、初期形状のはりの高さ $h(x) = 1$ とする。10要素(縦10横1要素)22節点に分割した片持ちばり(図-6)を考える。この部材に鉛直荷重 $P_0 = 1$ 、モーメント $M_0 = 1$ を加え、そのときの最適形状を求める。

有限要素法による解析手法を用いて形状最適化を行うと図-7のような形状を得る。点線ははり理論の解である。はり理論と有限要素法で得られた解は自由端付近で少し差があるものの、概ね近い値をであるといえる。自由端での差は要素分割が粗いことに起因するもので、十分細かく要素分割を行えば有限要素法の解とはり理論の解はほぼ一

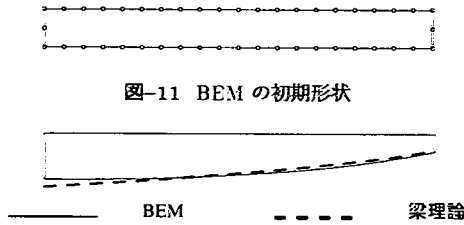


図-11 BEMの初期形状

図-12 BEMによる解析解とはり理論による解

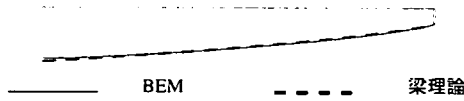


図-13 BEMによる解析解とはり理論による解(2)

致する(図-10)。

図-8に繰返し計算によってコンプライアンスが収束する様子を示す。縦軸の「無次元化されたコンプライアンス」は、コンプライアンスの値を収束するコンプライアンスの値で除したものである。また、図-9に下縁の $W(=W')$ が、一定の値に変化する様子を示す。縦軸の「無次元化された W 」は W の値を一定となる W の値で除したものである。Newton-Raphson法に用いた緩和係数は0.2である。

c) 境界要素法による解

境界要素法による片持ちばりの解析結果を示す。片持ちばりは有限要素法と同様、長さ $l=10$ 、初期形状のはり高さ $h(x)=1$ のものを用いる。

境界要素法では要素分割が粗いと式(67)、(68)の方法では応力やひずみの評価が正確にできない。そのため、ここでは要素をやや細かく分割する。横20要素、縦2要素に分割した44要素の片持ちばりを考える(図-11)。この部材を境界要素法による解析手法を用いて最適化を行うと、図-12のような形状が得られる。点線ははり理論の解である。

これよりはり理論の解と概ね一致していることがわかる。固定端付近のずれは要素分割の粗さによるもので、十分に細かく要素分割を行なうとはり理論の解とほぼ一致する(図-13)。

d) 有限要素法と境界要素法の比較

有限要素法、境界要素法による解析解とはもとはり理論の解と近い値をとった。有限要素法と境界要素法による解に少し差異のある理由の1つは有限要素法では外力を集中荷重で与えるが、一方で境界要素法では、外力を分布荷重として与えるからであると考えられる。

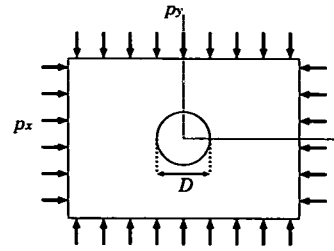


図-14 対象とする空孔問題

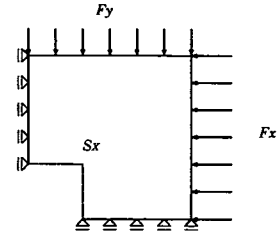


図-15 有限要素法に用いた解析領域

(2) 空孔の形状最適化問題

「2軸応力状態の空孔問題」を考える。問題を図-14に示す。 p_x は水平方向にかかる圧縮応力、 p_y は鉛直方向にかかる圧縮応力である。弾性体中の空孔の形状を最適化する。問題の対称性により図-14に示す点線部の内側の領域だけ考えればよい。空孔の初期形状は正方形とする。

a) 有限要素法による解

有限要素法では、有限領域を扱うことしかできない。そのため、適当な大きさの弾性体を考えて扱う。問題の対称性により解くべき問題は図-15のようになる。空孔境界が S_x である。実際に取り扱う問題の初期形状を図-16に示す。48要素63節点で外部の弾性体は正方形とする。内部の正方形の一辺に対する外部の正方形の一辺の比は10とした。節点は図-16の放線状の直線上を移動させた。

$p_x : p_y = 1 : 1$ の応力場を考え問題を解く。このときの最適形状を図-17に示す。この図からわかるように空孔はほぼ円形になった。実際、円形の空孔が存在する弾性体に $p_x : p_y = 1 : 1$ となる応力を加えると、空孔境界の応力が一定になることは明らかであり数値解の妥当性が確認された。

次に $p_x : p_y = 1 : 2$ となる場合を考える。解析結果を図-18に示す。空孔は楕円に近い形になった。

b) 境界要素法による数値解析解

ここでは、空孔問題を外部問題として解く。対象とする問題は正方形を要素数6節点数7に分割

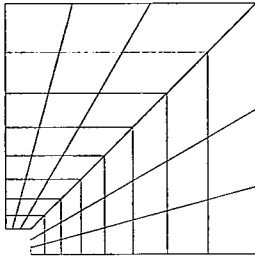


図-16 初期形状

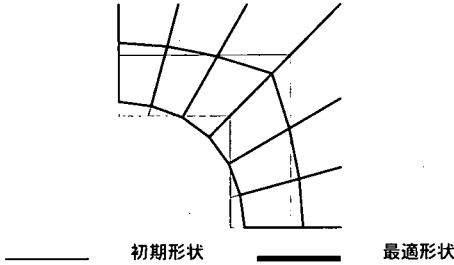


図-17 最適形状 (FEM : $p_x : p_y = 1 : 1$)

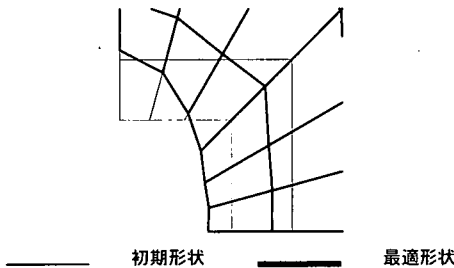


図-18 最適形状 (FEM : $p_x : p_y = 1 : 2$)

し、解析を行う。

外部問題では無限領域を扱うため、有限要素法による解析のように外部から力を加えることができない。そのため、「空孔(境界)にトラクションを加える問題」と「空孔のない2軸応力状態での無限領域の問題」とに分けて考える。この2つの問題を重ね合わせると、空孔境界上にはトラクションは働いていない。

境界要素法では空孔問題を解くとき、最適形状に近い形状を初期形状としなければ、計算が収束せず発散することがしばしばあった。そのため、この問題においては最適形状が空孔の内側に凹になると仮定し、凸の形状が生じた場合にはそれを滑らかな曲線になるよう補正した。有限要素法では、このような処理を行うことなく最適形状が得られた。この違いは

(a) 境界要素法が角点での計算の精度が低いため、

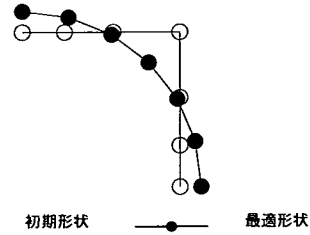


図-19 最適形状 (BEM : $p_x : p_y = 1 : 1$)

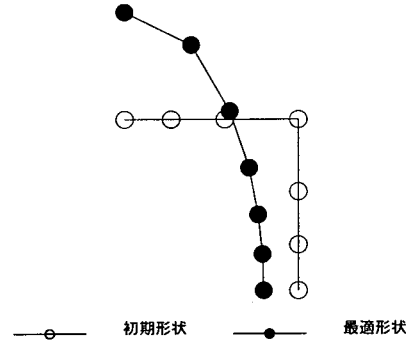


図-20 最適形状 (BEM : $p_x : p_y = 1 : 2$)

計算の仮定で凸凹の形状が生じると発散してしまう。

(b) 数値微分による感度解析の精度が低くなり収束しにくくなる。

などの理由が考えられる。

$p_x : p_y = 1 : 1$ の解析結果を示す。最適化形状を図-19に示す。(図-14の四角で点線内の部分だけを示している。) ほぼ円形の形が得られた。

つづいて、 $p_x : p_y = 1 : 2$ の場合を考える。最適化形状を図-20に示す。楕円に近い形状が得られた。

c) 有限要素法と境界要素法の比較

有限要素法で得られた解と境界要素法で得られた解を比較する。 $p_x : p_y = 1 : 1$ の場合と $p_x : p_y = 1 : 2$ の場合をそれぞれ、図-21と図-22に示す。この図より、有限要素法の解と境界要素法の解はよく一致していることがわかる。

4. まとめ

本研究で得られた結論を以下に述べる。

- (a) コンプライアンス最小という条件を境界上での別の条件に置き換え、その後者の問題に基づいて数値解析法を示した。
- (b) はり理論の解と比較することにより有限要素

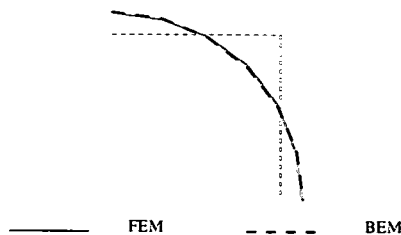


図-21 FEMとBEMの比較 $p_x : p_y = 1 : 1$

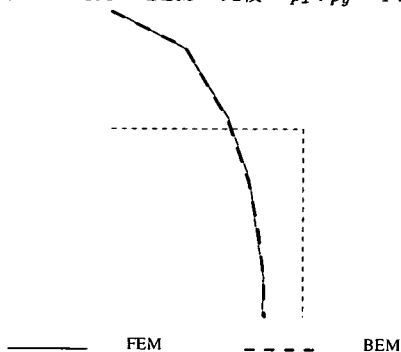


図-22 FEMとBEMの比較 $p_x : p_y = 1 : 2$

法および境界要素法を用いてコンプライアンス最小となる最適形状が数値解析的に得られることを確認した。また、2つの手法で解析した結果がほぼ一致した。これにより、本研究の定式化と2つのプログラムの妥当性がいえる。

(c) とくに境界要素法を用いると外部問題における形状最適化問題を解くことができる。

有限要素法と境界要素法は競合するものではなく、互いに補間的なものであるため優劣をつける

ことはしないが、これらの2つの方法はそれぞれに長所、短所があり適用範囲が異なることも事実である。また、これらをうまく組み合わせて最適化問題に適用していくことが望ましい。例えば、非均質材料の領域に有限要素法を用いて均質材料の領域に境界要素法を用いる方法、または外部問題に部分的に有限要素法を用いて境界要素法と組み合わせる方法などが考えられる。さらに、境界要素法を用いると、半無限領域の問題を解くことができる。これによって、地下構造物などの形状最適化を考えることができる。

境界要素法では感度の計算を数値微分によって行った。しかし、これを有限要素法と同様に解析的に行うと、計算量は減少し、また、精度が上がる。そのため、解析的に感度の計算を行うことが望ましい。

参考文献

- 1) Banichuk, N. V. : *Problems and methods of optimal structural design*, Plenum Press, 1983.
- 2) Tamura, T. : A fundamental study on shape optimization of continuum, Proc. Korea-Japan Joint Seminar on Structural Optimization, pp.199-127, 1992.
- 3) Mota Soare, C. A., Rodrigues, H. C. and Choi, K. K. : Shape optimal structural design using boundary elements and minimum compliance techniques, *J. Mech. Transmiss. Autom. Des.*, Vol.106, No.4, pp.518-523, Dec.1984.
- 4) Gelfand, I. M. and Fomin, S. V. : 変分法, 関根智明訳, 総合図書, 1970.
- 5) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. : *The Finite Element Method* (volume 1), McGraw-Hill, 1988.
- 6) Bonnet, M. : *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*, John Wiley and Sons, 1998.

(2003.5.29 受付)

SHAPE OPTIMIZATION BASED ON MINIMUM COMPLIANCE BY MEANS OF FEM AND BEM

Takeshi TAMURA and Jun SAITO

The shape of 2-dimensional elastic body is optimized to minimize the compliance under the condition of the constant volume. The optimization problem is formulated based on the variational principle which considers the change of domain shape and analyzed using the finite element method and the boundary element method. The optimization of the height of cantilever is discussed to confirm the validity of the present theory and the numerical procedure. The optimal design of the shape of hole under the biaxial stress is solved as a representative example of the exterior problem.