

ゲーム的状况下におけるプレイヤーの利得推定モデル

喜多秀行¹・谷本圭志²・福山敬³

¹正会員 工博 鳥取大学教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680-8552 鳥取市湖山町南4丁目101)

²正会員 博(工) 鳥取大学助教授 工学部社会開発システム工学科 (〒680-8552 鳥取市湖山町南4丁目101)

³正会員 Ph.D. 東北大学大学院助教授 情報科学研究科 (〒980-8577 仙台市青葉区片平2丁目1-1)

人間での意思決定に基づく個人の選択行動を分析する道具としてゲーム理論がある。ゲームを用いてある現象の再現を試みる場合には、利得を正確に与える必要がある。しかし、ゲームの分析者は利得を観測しえないため、これをどのように推定するかが問題となる。一方で、ゲームの結果は分析者によって観測可能である。そこで本研究では、同一の利得関数をもつプレイヤーによって行われる2人ゲームを複数回観測した結果を用いて利得の構造を逆解析する方法を提案する。その際、離散選択モデルをベースとし、最尤推定法を用いることで利得を推定しうることを示す。

Key Words: *game theory, non-cooperative game, payoff estimation, inverse analysis, observed behavioral data, maximum likelihood method*

1. はじめに

1960年代以降、交通行動の分析において個人の行動に立脚したアプローチが主流となってきており、これまで多くの研究成果が蓄積されてきた^{1), 2)}。ここでは個人の交通行動が選択可能な交通行動に対する効用の大小関係によって決定されると考えるため、その分析には効用の大きさを特定することが必要となる。しかし、交通行動の分析者は通常個人の効用そのものを観測することができないため、これをいかにして推定するかという問題が生じる。そのための方法として、アンケートなどを用いて被験者に効用を尋ねることが考えられる。しかしその場合、調査票の作成やその収集において多大な労力を要することや被験者が言語上で適切に効用水準を回答することの困難に伴う回答バイアスの混入という問題を分析者は抱えることになる。これに対して、上述のアプローチでは、交通行動を規定する交通環境が個人の効用にどのように影響を及ぼしているかを観測された交通行動から推定するという一種の逆解析によってこの問題に対処している。すなわち、上述のアプローチでは観測された交通行動をもとに効用を推定するためこの問題に直面しないという大きな利点を有している。

これらの研究の多くは、個人は他者の交通行動と独立に交通行動の選択を意思決定するという方法論的個人主義に基づいている³⁾。しかしながら、現実には必ずしもその主義に則った形で個人は交通行動を選択してはならず、他者が選択する交通行動を考慮して意思決定を行う場合が少なくない。例えば、

ミーティングを行う場合の交通行動は相手と出会うことが目的であるため、自らの意思決定は必然的に他者の交通行動と相互に強く依存しあい、その行動を行うか否かは当該行動に関係する複数の個人の間で同時決定されているであろう。

自らの意思決定と他者の意思決定が相互に依存し合っている状況（以後、これを「意思決定に相互依存性がある状況」と言う）を主たる分析対象として発展してきた理論としてゲーム理論がある。その適用は交通行動の分析のみならず、土木計画分野における研究において少なからず見受けられる。例えば、岡田・谷本³⁾による多目的公共事業における事業主体間での費用配分の分析や福山・小林⁴⁾による公共施設の分担整備問題の分析がある。これらは制度的な枠組みの評価、構築を目的とした規範的アプローチに立脚するものである。一方で、高速道路の合流部における車両の挙動を分析した Kita⁵⁾、Kita and Fukuyama⁶⁾や、実験で観測された結果を説明することを目的とした行動ゲーム理論(Behavioral game theory)⁷⁾は現象記述的アプローチに基づいた研究と言える。

ゲームを分析する際には、分析者はゲームの要素を特定しておく必要がある。完備情報下の非協力ゲームについて述べれば、プレイヤーの集合、行動の集合、利得がゲームの要素となる。ゲームの分析者はこれらの要素を特定し、問題を定式化することで始めて分析が可能となる。特に、ゲームを用いてある現象を再現することに関心がある場合には、これらの要素を正確に特定することが求められる。

これらの要素のうち、プレイヤーの集合及び行動

の集合はゲームの分析者が比較的容易に特定しうるのに対し、利得の特定には困難を伴う。これは、プレイヤーの獲得する利得を外部から直接観測しえないことに起因する。よって、ゲーム理論を適用するに際しては利得をどのように推定し、与えるかが大きな問題となる。例えば、道路合流部における合流車と本線走行車をプレイヤーとするゲーム^{5), 6)}について考えてみよう。合流車の行動を「本線に合流する」と「加速車線を走行する」、本線走行車のそれを「走行車線を走行し続ける」と「追越車線に避走する」とする。このとき、各プレイヤーの利得は、実現する結果における車間距離、速度といった車両の走行状態、車種や排気量などの車両の性能、勾配や曲率などの道路環境、その他にも気象状況、ドライバーの健康状況、同乗者や積載荷物の内容など様々な要素が利得に影響を与えているであろう。したがって、利得に影響を与えている要素を抽出し、それらの要素に利得がどれだけの影響を受けているか、すなわち、利得に影響を与える要素を説明変数とした利得の関数（以後、「利得関数」と呼ぶ）を推定した上で利得を与えることが必要となる。もちろん利得をアンケートやインタビューによって推定することも物理的には可能であるが、利得を外部から観測しえないため、ゲームの分析者はアンケートの作成に要する労力や回答バイアスの混入といった困難に直面する。

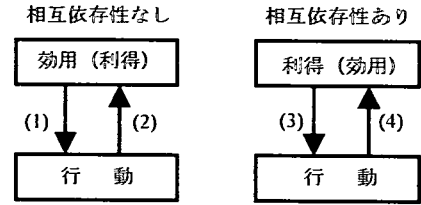
そこで本研究では、同一の利得関数をもつプレイヤーが多数存在する状況を想定し、それらのプレイヤーによって行われる1回繰り返しのゲーム、つまり one-shot のゲームを複数回観測した結果から利得関数を推定する方法を提案する。

以下、第二章では既往の研究レビューを行い、本研究の位置づけを明らかにするとともに、本研究で想定する状況を整理する。第三章においては純粋戦略を前提としたゲームにおける利得推定モデルをまず示し、モデルの基本的な考え方を明らかにした上で、第四章において混合戦略を含めたゲームに適用しうるモデルを示す。第五章では、簡単な数値例を用いて本モデルの有効性を示す。第六章では本研究のまとめと今後の課題について述べる。

2. 本研究の基本的アプローチ

(1) 既往の研究

個人間で相互に関連しあう行動を検討した例として、自動車利用の自粛行動を分析した森川ら⁸⁾の研究、利他的動機、父権的動機に基づく送迎・相乗り



- (1): 効用理論に基づくモデル
 (2): 離散選択モデル (Ben-Akiva *et al.*, McFadden)
 (3): ゲーム理論に基づくモデル (Mishal *et al.*)
 (4): 本モデル

図-1 本モデルの位置づけ

行動を分析した小林ら⁹⁾の研究がある。しかしながら、これらは自身の効用関数に他者の効用水準が反映されるとして、個人による意思決定の結果を観測データとして用いて交通行動を説明している。しかし、結果に至る背後にある個人間の意思決定の相互依存性をとらえてはいない。これに対して、ゲーム理論ではその性質を明確に取り扱っている。

ゲーム理論に基づいて個人や組織の行動を分析した例は多く、例えば、Mishal *et al.*¹⁰⁾はイスラエルとパレスチナの利害対立を分析している。この研究も含め、ゲーム理論に基づいた研究はゲームの分析者が自身の経験等に基づいて大まかな値を利得に与えて分析する場合がほとんどである。この場合、利得の値の妥当性がある程度低くなることを許すことになる。しかしながら、利得はゲームの均衡解を決定づける要素であり、その正確な特定なしに正確な分析はあり得ない。従来は感度分析の実施やいくつかの代替的なシナリオを想定することでこの問題に対処してきた。しかし、シナリオの想定において分析者の恣意性の混入が避けられないという欠点がある。

この欠点に対して、岡田ら¹¹⁾はメタゲーム理論に基づくコンフリクト解析手法¹²⁾において、ある結果が均衡解として成立するための利得の条件を特定するロバストネス分析手法を提案している。そこでは、実現した結果が均衡解であると考え、当該の結果が均衡解であるための利得の大小関係を調べることによって均衡解の安定性を論じている。しかしコンフリクト解析手法は、結果に対する選好順序として利得を与えており、ロバストネス分析手法を用いてどのような要素が利得にどれだけの影響を与えているかを分析することは困難である。

以上を整理すると図-1に示すように、ゲーム的状况にない場合において、効用から行動を推定するアプローチとして効用理論全般が、行動から効用を推定するアプローチとして離散選択モデルがあり、ゲーム的状况下における行動の推定アプローチとして

ゲーム理論がある一方で、ゲーム的狀況下において利得（効用）を推定するアプローチがこれまでに存在しない。本研究は、これまでに研究がなされてこなかったこのアプローチに焦点を当て、利得を推定するためのモデルについて検討する。

(2) 本研究で想定する状況

ゲームは、プレイヤー間でのコミュニケーションが可能で拘束的な合意が可能な協力ゲームとそれらを前提としない非協力ゲームとに大別できるが¹³⁾、本研究では非協力ゲームを対象とする。また、ゲームのルール（ゲームに参加するプレイヤーの集合、選択可能な行動の集合など、ゲームのプレイの進行を定める様々な規定）が共有知識となっているか否かでゲームの種類が異なるが、ここでは全ての要素において不確実性がなく共有知識となっている完備情報ゲームを対象とする。すなわち、プレイヤーはゲームに参加する全てのプレイヤーの利得を正確に認知している。本稿の前半部においては、プレイヤーが純粋戦略を用いることを前提とするが、後半部においては混合戦略を含めたゲームに拡張して議論する。プレイヤーの手番は同時決定的であると仮定する。均衡解はナッシュ均衡解を想定する。

本研究では、同じ利得関数を有するプレイヤーが多数存在し、それらの間で行われるゲームの結果をゲームの分析者が複数回観測する場面を想定する。観測された結果はゲームの均衡解と対応していると考え、その対応関係が満たされるように利得関数を推定する。その際、プレイヤーが利得関数を正確に認知しているのに対し、ゲームの分析者はそれを正確に知ることはできないであろう。また、利得に影響を与える要素を観測する際に観測誤差が伴うことも考えられる。したがって、ゲームの分析者は利得を推定する際に誤差が混入することを明示的に考慮して利得関数を推定する。

3. 純粋戦略を前提としたゲームにおける利得関数推定モデル

以下では、最も単純なゲームである2x2の完備情報ゲームを対象として利得関数の推定モデルを検討する。ゲームのプレイヤーを1,2とし、その集合を $N=\{1,2\}$ で表す。プレイヤー k の選択可能な行動の集合を A^k と、その要素を $A_i^k \in A^k$ で表す。 i は行動を表す添字であり、 $i=1,2$ である。純粋戦略を前提とすると、各プレイヤーが選択しうる行動が戦略となる。この想定の下で生じうる結果は2x2=4通りであ

表-1 ゲームの利得行列

		プレイヤー2	
		A_1^2	A_2^2
プレイヤー1	A_1^1	(U_{11}^1, U_{11}^2)	(U_{12}^1, U_{12}^2)
	A_2^1	(U_{21}^1, U_{21}^2)	(U_{22}^1, U_{22}^2)

り、その集合は、 $\{A_1^1 \times A_1^2, A_1^1 \times A_2^2, A_2^1 \times A_1^2, A_2^1 \times A_2^2\}$ である。これらの各結果は外部から観測可能である。結果 $A_i^1 \times A_j^2$ が発生した場合にプレイヤー k が獲得する利得（そこには不確実性がない）を U_{ij}^k と表す。任意の結果における利得を表-1に示す。

(1) 利得と最適反応の関係

2x2のゲームにおけるプレイヤー1,2の最適反応は次式で定義される。最適反応とは、相手プレイヤーの行動を所与としたときに自らの利得が最大となる行動である。行動 A_i^1 が行動 A_j^2 に対する最適反応である、行動 A_j^2 が行動 A_i^1 に対する最適反応であるとは、次式のそれぞれが成立することを示す。

$$\begin{aligned} U_{ij}^1 &= \max_i U_{ij}^1 \\ U_{ij}^2 &= \max_j U_{ij}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

どの行動が最適反応になるかは、利得の大小関係で決定される。例えば表-1において、プレイヤー2の行動が A_1^2 の下でのプレイヤー1の最適反応は、 $U_{11}^1 \geq U_{21}^1$ の場合行動 A_1^1 、 $U_{11}^1 \leq U_{21}^1$ の場合行動 A_2^1 となる。

(2) 最適反応と均衡解の関係

ナッシュ均衡解は、任意のプレイヤーの行動が他者の行動に対する最適反応となっている結果である。したがって、当該の結果が均衡解であるための条件とは、その結果を規定する全てのプレイヤーの行動が最適反応であるための条件である。具体的には、以下に示す16通りの利得の大小関係に対応して当該の結果が均衡解となる。なお、以下では結果 $A_i^1 \times A_j^2$ を o_{ij} と記す。以下の16通りのうち1番目における結果を表す場合、これを o_{ij}^1 と示す。また、「なし」とは、当該の利得の大小関係の下で（純粋戦略の下で）均衡解が存在しないことを意味している。

- 1) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$ のとき、 o_{11}
- 2) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$ のとき、 o_{11}
- 3) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$

- のとき, α_{12}
- 4) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, α_{12}
- 5) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$
- のとき, α_{11}
- 6) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, α_{11}, α_{22} (複数均衡)
- 7) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$
- のとき, なし
- 8) $U_{11}^1 \geq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, α_{22}
- 9) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$
- のとき, α_{21}
- 10) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, なし
- 11) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$
- のとき, α_{12}, α_{21} (複数均衡)
- 12) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \geq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, α_{12}
- 13) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$
- のとき, α_{21}
- 14) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \geq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, α_{22}
- 15) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \geq U_{22}^2$
- のとき, α_{21}
- 16) $U_{11}^1 \leq U_{21}^1, U_{12}^1 \leq U_{22}^1, U_{11}^2 \leq U_{12}^2, U_{21}^2 \leq U_{22}^2$
- のとき, α_{22}

注意すべきは、ゲームに複数の均衡解が存在する場合である（以後この場合を「複数均衡」と呼ぶ）。複数均衡解の選択に関する研究は現在進展中であり、利得支配やリスク支配などの様々な選択基準が検討されている（例えば、Selten and Harsanyi¹⁴⁾）。しかしながら、いかなるゲームに対しても成立すると認められる選択基準は今のところ存在しない。本研究を検討するに当たってこの問題は避けて通れないが、この問題は本研究の範囲を超えた課題である。このため、本研究では複数均衡が生じる場合、どの均衡解が選択されるかについては外生的に選択基準が与えられていると考える。つまり、複数均衡が生じる場合であっても、実際に観測される結果と対応する均衡解は予め与えられた基準により一意に決定されるとする。この考え方は、本章以降の全ての議論の前提である。均衡解が存在しない場合についての解釈は以下の通りである。ゲームの結果が観察されるということはその結果に対応する均衡解が存在していることを意味している。したがって、ある結果が観測された場合、均衡解が存在しないという状況に

はなかつたものとする。

(3) 利得関数の定式化

本研究では、ゲームの結果の下でプレイヤーがおかれている状況によって当該プレイヤーの獲得する利得が決定されると考える。プレイヤーがおかれている状況は、いくつかの要素から構成されていると考えられる。したがって利得は、状況特徴づけるいくつかの要素の関数となる。結果 α_j の下での状況の要素ベクトルを $X_{ij} = (x_{ij}^1, x_{ij}^2, \dots, x_{ij}^M)$ で、ベクトル $(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$ を X で表す。これらの要素と利得との対応関係を本研究では利得関数と呼び、 f^k で表す。この関数について線形性を仮定すると、次式で表される。ただし、 $\theta^k = (\theta_0^k, \theta_1^k, \dots, \theta_M^k)$ はパラメータである。また、以後 (θ^1, θ^2) を θ と表す。利得をアフィン変換したゲームはもとのゲームと同等であるため、あるパラメータを基準化する必要があることに留意が必要である。

$$f^k(X_{ij}) = \theta_0^k + \sum_{m=1}^M \theta_m^k x_{ij}^m \quad (2)$$

この $f^k(X_{ij})$ はあくまでゲームの分析者が知る利得への影響の要素のみから成る関数であり、プレイヤーが認識する利得 U_{ij}^k の構造とは異なる。換言すれば、 f^k は分析者が想像するプレイヤーの利得関数である。分析者は、この想像が必ずしもプレイヤーの実際の利得関数ではないことをわきまえているものとする。そこで、ゲームの分析者は、自身にとって特定可能な利得 ($f^k(X_{ij})$) に特定不可能な利得として誤差を加えることで利得 \bar{U}_{ij}^k を与えるとする。ただし、このような取り扱いはあくまでゲームの分析者にとっての認識であり、各プレイヤーにとってはこのような不確実性はもとより存在せず、利得は確定的にプレイヤー全員の共通認識（完備情報）となっていることに留意されたい。プレイヤーが認識する利得の確定項を $V_{ij}^k (= f^k(X_{ij}))$ 、誤差項を ε_{ij}^k で表すと、分析者が認識する利得 \bar{U}_{ij}^k は次式で表される。

$$\bar{U}_{ij}^k = V_{ij}^k + \varepsilon_{ij}^k \quad (3)$$

誤差項の分布形を以下に示す任意の i, j, k に関して互いに独立で同一平均 μ 、同一分散 $\pi^2/6\omega^2$ を有した二重指数分布（ガンベル分布）と仮定する。なお、 $Pr()$ は () 中の条件が成立する確率を表している。

$$\begin{aligned} \psi(\eta^k) &= Pr(\varepsilon_{ij}^k \leq \eta^k) \\ &= \exp[-\exp\{-\omega(\eta^k - \mu)\}] \end{aligned} \quad (4)$$

本研究では、 ω, μ をそれぞれ1, 0に基準化する。

(4) 結果が均衡解となる確率の導出

結果 o_{11}^1 が均衡解となる確率を例として、その導出方法について述べる。ゲームの分析者は o_{11}^1 が均衡解となる条件を \bar{U}_j^s の大小関係により以下のように特定する。

$$\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1, \bar{U}_{12}^1 > \bar{U}_{22}^1, \bar{U}_{11}^2 > \bar{U}_{12}^2, \bar{U}_{21}^2 > \bar{U}_{22}^2 \quad (5)$$

まず、 $\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1$ が成立する確率を求めよう。この条件を利得の確定項と誤差項に分解して表すと、以下ようになる。

$$V_{11}^1 + \varepsilon_{11}^1 > V_{21}^1 + \varepsilon_{21}^1 \quad (6)$$

誤差項がガンベル分布に従うとの仮定より、上式が成立する確率は次式のロジットモデルで表される。

$$Pr(\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1) = \frac{1}{1 + \exp(V_{21}^1 - V_{11}^1)} \quad (7)$$

同様に、式(5)が成立する確率、すなわち結果 o_{11}^1 が均衡解となる確率 $P(o_{11}^1)$ は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} P(o_{11}^1) &= Pr(\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1, \bar{U}_{12}^1 > \bar{U}_{22}^1, \bar{U}_{11}^2 > \bar{U}_{12}^2, \bar{U}_{21}^2 > \bar{U}_{22}^2) \\ &= \frac{1}{1 + \exp(V_{21}^1 - V_{11}^1)} \cdot \frac{1}{1 + \exp(V_{22}^1 - V_{12}^1)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{1 + \exp(V_{12}^2 - V_{11}^2)} \cdot \frac{1}{1 + \exp(V_{22}^2 - V_{21}^2)} \end{aligned} \quad (8)$$

同様の議論により、結果 o_{11} が均衡解となる確率 $P(o_{11})$ は次式により導出される。

$$\begin{aligned} P(o_{11}) &= P(o_{11}^1) + P(o_{11}^2) + P(o_{11}^5) + P(o_{11}^6) \quad (9) \\ &= Pr(\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1, \bar{U}_{12}^1 > \bar{U}_{22}^1, \bar{U}_{11}^2 > \bar{U}_{12}^2, \bar{U}_{21}^2 > \bar{U}_{22}^2) \\ &\quad + Pr(\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1, \bar{U}_{12}^1 > \bar{U}_{22}^1, \bar{U}_{11}^2 > \bar{U}_{12}^2, \bar{U}_{21}^2 < \bar{U}_{22}^2) \\ &\quad + Pr(\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1, \bar{U}_{12}^1 < \bar{U}_{22}^1, \bar{U}_{11}^2 > \bar{U}_{12}^2, \bar{U}_{21}^2 > \bar{U}_{22}^2) \\ &\quad + \delta Pr(\bar{U}_{11}^1 > \bar{U}_{21}^1, \bar{U}_{12}^1 < \bar{U}_{22}^1, \bar{U}_{11}^2 > \bar{U}_{12}^2, \bar{U}_{21}^2 < \bar{U}_{22}^2) \end{aligned}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{..複数均衡において } o_{11}^6 \text{ が選択されるとき} \\ 0 & \text{..複数均衡において } o_{22}^6 \text{ が選択されるとき} \end{cases}$$

(5) 結果の生起確率の導出

純粋戦略の前提下では、観測される結果が均衡解

と一対一に対応している。したがって、ある結果が均衡解となる確率そのものが当該の結果の生起確率である。

(6) 利得関数の同定

N 回のゲームから成る観測データに基づき、最尤推定法を用いて $f^k(X_{ij})$ のパラメータを推定する。任意の結果 o_{ij} の観測数をそれぞれ $n(o_{ij})$, $(\sum_{ij} n(o_{ij}) = N)$ とすると、尤度関数 L は次式で与えられる。

$$L = \prod_{i,j} P(o_{ij})^{n(o_{ij})} \quad (10)$$

L を最大にするパラメータのベクトル θ が最尤推定値である。すなわち、最尤推定値 θ^* は次式によって求められる。

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} L \quad (11)$$

したがって、パラメータの最尤推定値 θ^* によって関数 f^k が規定される。

4. 混合戦略を前提としたゲームへの一般化

(1) 利得と最適反応の関係

混合戦略を前提としたゲームでは、各プレイヤーの行動の選択確率が戦略となる。このため、当該のプレイヤーの最適反応は、相手プレイヤーの行動の選択確率を所与としたときの自らの期待利得を最大とする行動の選択確率として定義される。プレイヤー1が行動 A_1^1 をとる確率を p , $(0 \leq p \leq 1)$ 、行動 A_2^1 をとる確率を $1-p$ とする。また、プレイヤー2が行動 A_1^2 をとる確率を q , $(0 \leq q \leq 1)$ 、行動 A_2^2 をとる確率を $1-q$ とする。表-1に示すゲームの利得行列を仮定すると、任意の選択確率の組み (p, q) に対するプレイヤー k の期待利得 $EU^k(p, q)$ は次式で表される。

$$EU^1(p, q) = p\{qU_{11}^1 + (1-q)U_{12}^1\} + (1-p)\{qU_{21}^1 + (1-q)U_{22}^1\} \quad (12)$$

$$EU^2(p, q) = q\{pU_{11}^2 + (1-p)U_{21}^2\} + (1-q)\{pU_{12}^2 + (1-p)U_{22}^2\} \quad (13)$$

プレイヤー1の最適反応は、相手の行動の選択確率 q に対する自らの期待利得が最大となるような p として導出される。最適反応グラフの形状は、 EU^1 を p で偏微分することで吟味できる。 EU^1 を p で偏微分した式を以下に示す。

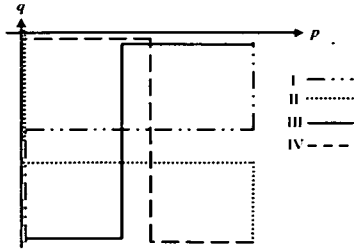


図-2 最適反応グラフ

$$\frac{\partial EU^1(p, q)}{\partial p} = q\{U_{11}^1 - U_{21}^1\} + (1-q)\{U_{12}^1 - U_{22}^1\} \quad (14)$$

$$= q(U_{11}^1 - U_{21}^1 - U_{12}^1 + U_{22}^1) + (U_{12}^1 - U_{22}^1)$$

ここで、上式が0となる場合の q を Q とすると、 Q は次式で表される。

$$Q = \frac{U_{22}^1 - U_{12}^1}{(U_{22}^1 - U_{12}^1) + (U_{11}^1 - U_{21}^1)} \quad (15)$$

ここに、 Q は確率の値を表す変数ではなく、0 以下ないし 1 以上の値をとる変数であることに留意を要する。式(14)において q の係数が正、すなわち Q の分母が正の場合、 $q=1$ の近傍において最適反応は $p=1$ であることから、図-2の I に示すような最適反応グラフが描かれる。一方負であれば、II に示す関数となる。最適反応グラフの導出方法の詳細については付録を参照されたい。

プレイヤー2 についても、その期待利得を偏微分した式が次式で与えられる。

$$\frac{\partial EU^2(p, q)}{\partial q} = p\{U_{11}^2 - U_{12}^2\} + (1-p)\{U_{21}^2 - U_{22}^2\} \quad (16)$$

$$= p(U_{11}^2 - U_{21}^2 - U_{12}^2 + U_{22}^2) + (U_{21}^2 - U_{22}^2)$$

上式が0となる p を P と表すと、 P は次式のようになる。

$$P = \frac{U_{22}^2 - U_{21}^2}{(U_{22}^2 - U_{21}^2) + (U_{11}^2 - U_{12}^2)} \quad (17)$$

Q と同様に、 P は確率の値を表す変数ではなく、0 以下 1 以上の値をとる変数であることに留意を要する。プレイヤー1 の場合と同様に最適反応グラフを描くと、 P の分母が正の場合図-2の III、負の場合 IV のようになる。

プレイヤーは全員の利得を正確に知っているため、 Q, P は確定的に決定される。一方でゲームの分析者は利得を確定的には知り得ない。ゲームの分析者にとっての「プレイヤー1の期待利得の偏微分の値が0となる q 」及び「プレイヤー2の期待利得の偏微分の値が0となる p 」をそれぞれ \bar{Q}, \bar{P} で表すと、それらは次式で示される。

$$\bar{Q} = \frac{\bar{U}_{22}^1 - \bar{U}_{12}^1}{(\bar{U}_{22}^1 - \bar{U}_{12}^1) + (\bar{U}_{11}^1 - \bar{U}_{21}^1)} \quad (18)$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{U}_{22}^2 - \bar{U}_{21}^2}{(\bar{U}_{22}^2 - \bar{U}_{21}^2) + (\bar{U}_{11}^2 - \bar{U}_{12}^2)} \quad (19)$$

\bar{Q}, \bar{P} (の分母) は確率変数であることから、図-2の I~IV に示すそれぞれの形状ごとに最適反応グラフの生起確率が与えられる。すなわち、図-2の I~IV に示す形状の最適反応グラフが生起する確率をそれぞれ $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ と表すと、以下ようになる。

$$\zeta^1(\theta, X) = Pr(\bar{U}_{11}^1 - \bar{U}_{21}^1 - \bar{U}_{12}^1 + \bar{U}_{22}^1 > 0)$$

$$\zeta^2(\theta, X) = Pr(\bar{U}_{11}^1 - \bar{U}_{21}^1 - \bar{U}_{12}^1 + \bar{U}_{22}^1 < 0)$$

$$\zeta^3(\theta, X) = Pr(\bar{U}_{22}^2 - \bar{U}_{21}^2 - \bar{U}_{12}^2 + \bar{U}_{11}^2 > 0)$$

$$\zeta^4(\theta, X) = Pr(\bar{U}_{22}^2 - \bar{U}_{21}^2 - \bar{U}_{12}^2 + \bar{U}_{11}^2 < 0) \quad (20)$$

プレイヤー1 の最適反応グラフとプレイヤー2 のその組み合わせで、合計4つの「最適反応グラフの組」が存在する。最適反応グラフの組 I×III, I×IV, II×III, II×IV をそれぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 と表すこととし、最適反応グラフの組 C_i の生起確率を $P(C_i)$ で表すと、それは以下のように表される。

$$P(C_1) = \zeta^1(\theta, X) \times \zeta^3(\theta, X)$$

$$P(C_2) = \zeta^1(\theta, X) \times \zeta^4(\theta, X)$$

$$P(C_3) = \zeta^2(\theta, X) \times \zeta^3(\theta, X)$$

$$P(C_4) = \zeta^2(\theta, X) \times \zeta^4(\theta, X) \quad (21)$$

(2) 最適反応と均衡解の関係

双方のプレイヤーの最適反応グラフの組を所与とすれば、基本的には各プレイヤーの最適反応グラフの交点を均衡解として導出できる。しかし、 P, Q が0以下、もしくは1以上になる場合も考えられる。この場合についての各プレイヤーの最適反応は、純粋戦略として与えられる(表-2~5 参照)。例えば(1,0)は $p=1, q=0$ が最適反応であることを意味しており、結果として α_{12} が均衡解となる。ただし、表-2~5 はそれぞれ最適反応グラフの組 C_1, C_2, C_3, C_4 の下での均衡解を示している。一方で、ゲームの分析

表-2 最適反応グラフの組 C_1 の下での均衡解

	$Q \leq 0$	$0 \leq Q \leq 1$	$Q \geq 1$
$P \leq 0$	(1,1)	(1,1)	(0,1)
$0 \leq P \leq 1$	(1,1)	(0,0), (P,Q), (1,1)	(0,0)
$P \geq 1$	(1,0)	(0,0)	(0,0)

表-3 最適反応グラフの組 C_2 の下での均衡解

	$Q \leq 0$	$0 \leq Q \leq 1$	$Q \geq 1$
$P \leq 0$	(1,0)	(0,0)	(0,0)
$0 \leq P \leq 1$	(1,0)	(P,Q)	(0,1)
$P \geq 1$	(1,1)	(1,1)	(0,1)

表-4 最適反応グラフの組 C_3 の下での均衡解

	$Q \leq 0$	$0 \leq Q \leq 1$	$Q \geq 1$
$P \leq 0$	(0,1)	(0,1)	(1,1)
$0 \leq P \leq 1$	(0,0)	(P,Q)	(1,1)
$P \geq 1$	(0,0)	(1,0)	(1,0)

表-5 最適反応グラフの組 C_4 の下での均衡解

	$Q \leq 0$	$0 \leq Q \leq 1$	$Q \geq 1$
$P \leq 0$	(0,0)	(1,0)	(1,0)
$0 \leq P \leq 1$	(0,1)	(1,0), (P,Q), (0,1)	(1,0)
$P \geq 1$	(0,1)	(0,1)	(1,1)

者が予測する利得には不確実性が混入しているため、各均衡解の生起を確定的に特定することはできない。これについては以下で述べる。

(3) 均衡解の生起確率の導出

ゲームの分析者は均衡解の生起を確定的に特定することができないが、各均衡解が生起する確率を求めることはできる。すなわち、最適反応グラフの組 C_1, C_2, C_3, C_4 の下での均衡解の生起確率は、 \bar{P} と \bar{Q} の値の条件として与えることができる。ここに、 \bar{P}, \bar{Q} は確率変数であることに注意を要する。 \bar{P}, \bar{Q} が 0 以下、0 以上 1 以下、1 以上となる確率をそれぞれ以下のように表す。

$$\begin{aligned}
 p_1(\theta, X) &= Pr(\bar{P} < 0) \\
 p_2(\theta, X) &= Pr(0 < \bar{P} < 1) \\
 p_3(\theta, X) &= Pr(\bar{P} > 1) \\
 q_1(\theta, X) &= Pr(\bar{Q} < 0) \\
 q_2(\theta, X) &= Pr(0 < \bar{Q} < 1) \\
 q_3(\theta, X) &= Pr(\bar{Q} > 1)
 \end{aligned} \tag{22}$$

すると、例えば最適反応グラフの組 C_1 の下で均衡解(1,1)が生起する確率 $P((1,1)|C_1)$ は、複数均衡にお

表-6 結果の生起確率 (最適反応グラフの組 C_1)

	A_1^2	A_2^2
A_1^1	$P_1q_1+p_1q_2+p_2q_1+p_2q_2$	P_3q_1
A_2^1	p_1q_3	$p_2q_3+p_3q_2+p_3q_3$

表-7 結果の生起確率 (最適反応グラフの組 C_2)

	A_1^2	A_2^2
A_1^1	$p_3q_1+p_3q_2$ $+ \int_D \bar{P} \bar{Q} g(\epsilon) d\epsilon$	$p_1q_1+p_3q_1$ $+ \int_D \bar{P} (1-\bar{Q}) g(\epsilon) d\epsilon$
A_2^1	$p_1q_1+p_1q_2$ $+ \int_D (1-\bar{P}) \bar{Q} g(\epsilon) d\epsilon$	$p_2q_1+p_3q_1$ $+ \int_D (1-\bar{P})(1-\bar{Q}) g(\epsilon) d\epsilon$

表-8 結果の生起確率 (最適反応グラフの組 C_3)

	A_1^2	A_2^2
A_1^1	$p_1q_3+p_2q_3$ $+ \int_D \bar{P} \bar{Q} g(\epsilon) d\epsilon$	$p_3q_2+p_3q_3$ $+ \int_D \bar{P} (1-\bar{Q}) g(\epsilon) d\epsilon$
A_2^1	$p_2q_3+p_3q_3$ $+ \int_D (1-\bar{P}) \bar{Q} g(\epsilon) d\epsilon$	$p_1q_2+p_1q_2$ $+ \int_D (1-\bar{P})(1-\bar{Q}) g(\epsilon) d\epsilon$

表-9 結果の生起確率 (最適反応グラフの組 C_4)

	A_1^2	A_2^2
A_1^1	p_3q_3	$p_1q_2+p_1q_3+p_2q_2+p_2q_3$
A_2^1	$p_2q_1+p_3q_1+p_3q_2$	p_1q_1

いては(1,1)が選択されているとする場合、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 P((1,1)|C_1) &= Pr(\bar{P} < 0)Pr(\bar{Q} < 0) \\
 &\quad + Pr(\bar{P} < 0)Pr(0 < \bar{Q} < 1) \\
 &\quad + Pr(0 < \bar{P} < 1)Pr(\bar{Q} < 0) \\
 &\quad + Pr(0 < \bar{P} < 1)Pr(0 < \bar{Q} < 1) \\
 &= p_1q_1+p_1q_2+p_2q_1+p_2q_2
 \end{aligned} \tag{23}$$

(4) 結果の生起確率の導出

以上の考え方に基づくと、各結果の生起確率は表-6~9で示される。表-6~9はそれぞれ各最適反応グラフの組の下での各結果の生起確率を表している。第 i 行第 j 列は結果 o_{ij} の生起確率を示している。ただし、最適反応グラフの組 C_1 における複数均衡の場合は(1,1)が、 C_4 における複数均衡の場合は(1,0)が選択されると仮定している。また、 $d\epsilon_{11}^1 d\epsilon_{12}^1 \dots d\epsilon_{22}^2$ を便宜的に $d\epsilon$ と表している。

なお、 C_1 において複数均衡の場合に (P, Q) が選択

されるとすると、結果 $A_1^1 \times A_1^2$ の生起確率における p_2q_2 が消去されて各結果の生起確率として C_2 にある P, Q に関する積分の項が追加され、 $(0,0)$ が選択されたとすると、結果 $A_1^1 \times A_1^2$ の生起確率における p_2q_2 が消去されて結果 $A_2^1 \times A_2^2$ の生起確率に p_2q_2 が追加される。 C_4 についても同様である。

均衡解が純粋戦略 (i,j) の場合、確率 1 で結果 o_{ij} が観測される。一方、均衡解が混合戦略 (\bar{P}, \bar{Q}) の場合、確率 $\bar{P}\bar{Q}$ で結果 o_{11} が、確率 $\bar{P}(1-\bar{Q})$ で結果 o_{12} が観測される。それらの結果の生起確率は、 $0 < \bar{Q} < 1$, $0 < \bar{P} < 1$ を条件とした確率 (条件付き確率) で与えられる。例えば、最適反応グラフの組 C_1 の下で均衡解が (\bar{P}, \bar{Q}) の場合における結果 o_{11} の生起確率は、次式に示すように C_1 の下で均衡解 (\bar{P}, \bar{Q}) が生起する場合の確率 $P((\bar{P}, \bar{Q})|C_1)$ と均衡解 (\bar{P}, \bar{Q}) の下で結果 o_{11} が生起する場合の確率 $P(o_{11}|\bar{P}, \bar{Q})$ の積で与えられる。ただし、誤差項のベクトルを $\varepsilon = (\varepsilon_{11}^1, \dots, \varepsilon_{22}^2)$ で表し、 $0 < \bar{Q} < 1$, $0 < \bar{P} < 1$ を満たす ε の領域を D , ε に関する周辺確率密度関数を g で表す。

$$P(o_{11}|\bar{P}, \bar{Q})P((\bar{P}, \bar{Q})|C_1) = \int_D \bar{P}\bar{Q}g(\varepsilon)d\varepsilon_{11}^1 d\varepsilon_{12}^1 \dots d\varepsilon_{22}^2 \quad (24)$$

最適反応グラフの組 C_1 の下で均衡解が (\bar{P}, \bar{Q}) の場合における結果 o_{12} の生起確率についても上と同様に次式で与えられる。

$$P(o_{12}|\bar{P}, \bar{Q})P((\bar{P}, \bar{Q})|C_1) = \int_D \bar{P}(1-\bar{Q})g(\varepsilon)d\varepsilon_{11}^1 d\varepsilon_{12}^1 \dots d\varepsilon_{22}^2 \quad (25)$$

その他の結果が観測される確率も同様に求める。以上より、最適反応グラフの組 C_h の下での結果 o_{ij} の生起確率 $P(o_{ij}|C_h)$ は次式で表される。ただし、先述のように $P(o_{ij}(i,j)) = 1$ であることに留意を要する。

$$P(o_{ij}|C_h) = P(o_{ij}(i,j))P((i,j)|C_h) + P(o_{ij}|\bar{P}, \bar{Q})P((\bar{P}, \bar{Q})|C_h) \quad (26)$$

以上より、各最適反応グラフの組の下で任意の結果 o_{ij} が生起する確率 $P(o_{ij})$ は以下ようになる。

$$P(o_{ij}) = \sum_{h=1}^4 P(C_h)P(o_{ij}|C_h) \quad (27)$$

$P(o_{ij})$ を用いて尤度関数を以下のように導出できる。

$$L = \prod_{i,j} P(o_{ij})^{\varepsilon_i} \quad (28)$$

以後は、純粋戦略を前提としたゲームと同様に最尤法により利得関数を推定することができる。なお、ここで定式化する尤度関数の大域的凸性は保証されておらず、最適化計算においてはその点を留意しつつ計算する必要がある。

5. 数値例

ここではミーティングを行う交通行動を対象とし、仮想的な数値例を用いて上に示した利得関数の推定モデルの適用を試みる。

(1) 利得関数の想定

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2\}$ とし、プレイヤー 1, 2 はそれぞれ都市 a, b に居住しているものとする。任意の都市を $\tau (\in \{a, b\})$ で表す。どちらかが事前に相手にコンタクトをして、ミーティングを行うか否かを決定する場面を想定しよう。その際、双方のプレイヤーは純粋戦略をとるものとする。このとき、双方のプレイヤーは、「都市 a でミーティングを行うことを表明する」と「都市 b でミーティングを行うことを表明する」の二つの行動 (戦略) を有しているとする。前者を行動 A_a , 後者を行動 A_b と記す。ミーティングを行わなかった場合の確定利得を 0 に基準化し、行った場合のそれをミーティングそのものから得る満足度とそのミーティングを実現するために要する交通費用との差で構成すると仮定する。都市 τ でミーティングを行った場合、双方のプレイヤーはミーティングを行ったことによる満足度 u_τ を得る。満足度 u_τ は次式のように都市 τ のミーティング施設の整備水準 x_τ に依存する。ただし θ はパラメーター (スカラー) である。また、全てのプレイヤーは同一の利得関数を有するものとする。

$$u_\tau = \theta x_\tau \quad (29)$$

交通費用については、自らが居住している都市でミーティングを行う場合には、(当該プレイヤーには) 交通費が不要で、そうでない場合には交通費を要すると仮定する。都市 b でミーティングを行う場合にプレイヤー 1 が要する交通費用を c_{ab} , 都市 a でミーティングを行う場合にプレイヤー 2 が要するそれを c_{ba} で表す。双方のプレイヤーが自らの居住地でのミーティング開催を表明した結果ミーティングが

表-10 ミーティング行動における利得行列

行動	A_b^2	A_a^2
A_a^1	$(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$	$(u_a + \varepsilon_2, u_a - c_{ba} + \varepsilon_6)$
A_b^1	$(u_b - c_{ab} + \varepsilon_3, u_b + \varepsilon_7)$	$(-R - c_{ab} + \varepsilon_4, -R - c_{ba} + \varepsilon_8)$

実現しない場合の確定利得は上述のように 0, ミーティングが実現せずかつ双方が移動してしまう, すなわちすれ違う場合の利得を $-R$ と表す. ただし, R は禁止的に大きい, すなわちあらゆる利得の確定項, 誤差項よりも大きな値をとるものとする.

以上より, 利得行列を示すと表-10 のようになる. ただし, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_8)$ は誤差項であり, 個々のプレイヤーの居住地の局地的な差異に起因する交通費の違いや, ゲームの分析者がミーティング施設の満足度を仮定するに当たって捨象した影響要因から構成されており, ゲームの分析者が特定できない (プレイヤーは特定できる) 利得の要素である.

(2) 利得と均衡解の関係

均衡解となる結果は, 以下に示す利得の大小関係に応じて決定される. なお, 以後では結果 $A_i \times A_j$ を o_{ij} と記す.

- 1) $u_b - c_{ab} + \varepsilon_3 > \varepsilon_1, u_a - c_{ba} + \varepsilon_6 > \varepsilon_5$ のとき, 結果 o_{aa}, o_{bb} (複数均衡)
- 2) $u_b - c_{ab} + \varepsilon_3 > \varepsilon_1, u_a - c_{ba} + \varepsilon_6 < \varepsilon_5$ のとき, 結果 o_{bb}
- 3) $u_b - c_{ab} + \varepsilon_3 < \varepsilon_1, u_a - c_{ba} + \varepsilon_6 > \varepsilon_5$ のとき, 結果 o_{aa}
- 4) $u_b - c_{ab} + \varepsilon_3 < \varepsilon_1, u_a - c_{ba} + \varepsilon_6 < \varepsilon_5$ のとき, 結果 o_{ab}

このうち 1) では, 都市 a でミーティングをするという結果 (o_{aa}) と都市 b でミーティングをするという結果 (o_{bb}) の二つによる複数均衡となっている. ここでは, 二人の利得の和が大きい方の都市でのミーティングが実現するとする. すなわち, 1) については次式を仮定する.

- 1) $2u_a + \varepsilon_2 - c_{ba} + \varepsilon_6 < 2u_b + \varepsilon_3 - c_{ab} + \varepsilon_7$ のとき, 結果 o_{aa}
- 2) それ以外のとき, 結果 o_{bb}

(3) 均衡解の生起確率

利得関数を構成する誤差項が相互に独立で同一なガンベル分布に従うと仮定すると, 各均衡解が生起する確率 $P(o_{i\tau})$, ($\tau, i \in \{a, b\}$) は以下に示すように求められる.

$$P(o_{aa}) = \frac{\exp(u_b - c_{ab})}{1 + \exp(u_b - c_{ab})} \cdot \frac{1}{1 + \exp(u_a - c_{ba})}$$

$$+ Pr(2u_a + \varepsilon_2 - c_{ba} + \varepsilon_6 < 2u_b + \varepsilon_3 - c_{ab} + \varepsilon_7) \times P(D) \quad (30)$$

$$P(o_{bb}) = \frac{1}{1 + \exp(u_b - c_{ab})} \cdot \frac{\exp(u_a - c_{ba})}{1 + \exp(u_a - c_{ba})} + Pr(2u_a + \varepsilon_2 - c_{ba} + \varepsilon_6 > 2u_b + \varepsilon_3 - c_{ab} + \varepsilon_7) \times P(D) \quad (31)$$

$$P(o_{ab}) = \frac{\exp(u_a - c_{ab})}{1 + \exp(u_b - c_{ab})} \cdot \frac{\exp(u_a - c_{ba})}{1 + \exp(u_a - c_{ba})} \quad (32)$$

ここに, D は領域 $u_b - c_{ab} + \varepsilon_3 \geq \varepsilon_1, u_a - c_{ba} + \varepsilon_6 \geq \varepsilon_5$ を満たす ε の領域である. 式(30), (31)の第二項における $Pr(\cdot|D)$ は数値的に求めることができる. また, $P(D)$ は D が成立する確率であり, 以下のように示される.

$$P(D) = \frac{1}{1 + \exp(u_b - c_{ab})} \cdot \frac{1}{1 + \exp(u_a - c_{ba})} \quad (33)$$

(4) 利得関数の推定

尤度関数を以下のように定式化することができる. ただし, $n(o_{i\tau})$ は結果 $o_{i\tau}$ の観測数である.

$$L = P(o_{aa})^{n(o_{aa})} P(o_{bb})^{n(o_{bb})} P(o_{ab})^{n(o_{ab})} \quad (34)$$

ここで推定すべきパラメータは θ であり, 以下に示す尤度の最大化条件を解くことにより得られる.

$$\partial L / \partial \theta = 0 \quad (35)$$

(5) 推定結果

以上のモデルの推定能力を確認するために, 仮想データを作成して数値実験を 4 ケース行った. ケース 1, 2, 3, 4 において設定した θ は 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 である. 仮想のデータとして, $(x_a, x_b, c_{ab}, c_{ba}, \varepsilon)$ を 1 セットとする 100 個のサンプルデータを作成した. ミーティングの整備水準 x_a, x_b は $[0, 10]$ の, 交通費 c_{ab}, c_{ba} は $[-20, 0]$ の一様乱数を, 誤差項 ε は平均 0, 分散 $\pi^2/6$ のガンベル分布に従う乱数を与えた.

以上のように作成した $(x_a, x_b, c_{ab}, c_{ba}, \varepsilon)$ を 5. (2) に示した利得と均衡解の条件に照らし合わせて, 均衡解となる $o_{i\tau}$ を特定し, サンプルデータとした. これらデータを用いて, 尤度関数を最大とするパラメータ θ^* を求めた. 各ケースにおける推定値および各種統計量を表-11 に示す. ただし, 「誤差」は $1 - \theta^*/\theta$ (%), 「観測結果」に示される数値はサンプルデータにおいて得られた結果の個数, 「予測結果」は θ^* のもとでの利得の確定項によって予測されるそれぞれの結果の個数, $\ln L_0$ は初期の対数尤度, $\ln L^*$ は最大化された対数尤度, ρ^2 は尤度比を表している. いずれのケースにおいても概ね良好な推計の結果を得

表-11 推定の結果

Case	1	2	3	4	
θ	0.5	1.0	2.0	4.0	
θ^*	0.397	0.923	1.696	2.337	
誤差(%)	20.6	7.2	15.2	41.6	
観測結果	O_{ab}	81	52	27	6
	O_{aa}	8	22	35	40
	O_{bb}	11	26	38	54
予測結果	O_{ab}	86	57	32	19
	O_{aa}	6	15	32	38
	O_{bb}	8	28	36	43
$\ln L_0$	-41	-175	-478	-813	
$\ln L^*$	-17	-28	-82	-201	
ρ^2	0.578	0.840	0.828	0.753	
t 値	7.87	15.89	25.45	28.20	

ており、求められた t 値より、どのケースも係数 θ は 1% の危険率で有意である。Case 1, 4 においては他のケースに比べて誤差が高く、尤度比が低いという結果であるが、これはサンプルが特定の結果に偏っているためであると考えられる。

このように、均衡解選択基準が外生的に与えられており、分析者はそれを知っているとの前提条件の下ではあるが、本研究におけるモデルを用いることにより、ゲームの結果という客観的なデータが偏りなく得られている場合には、それらを用いて利得を推定しうることが明らかになった。ここでの数値実験は限定的な状況下での検討となっていることから、今後様々な条件のもとで実証を重ねる必要がある。

6. おわりに

本研究では、完備情報下の 2x2 の二人非協力ゲームを対象とし、同一の利得関数を有するプレイヤーが複数存在し、それらの間で行われるゲームを複数回観測した結果を用いてプレイヤーの利得関数を推定する方法を提案した。その際、利得をゲームの分析者が特定できる確定項と特定できない誤差項の和で構成されるとし、確定項を結果に影響を及ぼす要素の関数で与えた。この下で、誤差項がガンベル分布に従うと仮定し各均衡解の生起確率を示すとともに、観測された結果を用いて最尤推定法により利得関数のパラメーターを推定しうることが明らかになった。つまり、観測された結果をもとに利得を客観的に与えることが可能となった。なお、誤差項をガンベル分布として議論したが、正規分布などのその他

の分布としても同様の議論により、利得を推定することが可能である。

本研究では 2x2 のゲームのみを対象として検討を行ったが、原理的には標準型ゲームで記述される全てのゲーム ($m_1 \times m_2$ の n 人ゲーム) においても拡張することが可能である。本モデルにより、これまで主として規範的分析にのみ用いられてきたゲーム理論を離散選択モデルのように行動結果の観測データから現象を再現する分析道具として用いることが始めて可能となった。

しかし、ここで提案した方法は複数均衡が発生する場合については何らかの外生的に決定された基準によって一つの均衡解が選択されるとの前提をおいている。複数均衡の場合にどの均衡解が選択されるかについては現在多くの研究者により理論構築がなされている途上であり、それらの研究成果を本研究に反映することによってより正確に利得への影響の構造を推定することが可能となろう。逆に、本研究で提案したモデルにいくつかの均衡解選択基準を代替的に組み込んで現象再現性の高さを比較すれば、どのような場合にいかなる均衡解選択基準がとられているのかを知ることができるため、ゲーム的状况にある様々な行動データを多数分析することにより、実証的側面から均衡解選択理論の構築に寄与するのではないかと考えている。

また、「誤差項が互いに独立である」との仮定は、現実の現象においては幾分強い仮定であり、誤差項の間には系列的な相関があると考えの方が自然である。筆者らは、この相関を扱おうよう本モデルの改良を既に着手しており、その成果の一部を報告している¹⁵⁾。数値分析においては単純な例を対象として実証したにとどまっている。これらの点については、今後の課題としたい。

謝辞：本研究の遂行に当たって、ボストン大学の T.R. Lakshmanan 教授、京都大学の小林潔司教授より貴重なご示唆をいただいた。また、数値実験に関して井上慎也氏（鳥取大学大学院工学研究科社会開発システム工学専攻：当時）の協力を得た。付して、謝辞とします。

付録 I 最適反応グラフの導出方法

表-1 に示すゲームにおけるプレイヤー 1 の期待利得は(12)式で表される。相手の行動の選択確率に対して自らの期待利得が最大となるような行動の選択確率が最適反応であるから、

- 1) $\partial EU^1(p, q)/\partial p > 0$ ならば, $p=1$
- 2) $\partial EU^1(p, q)/\partial p < 0$ ならば, $p=0$
- 3) $\partial EU^1(p, q)/\partial p = 0$ ならば, $0 \leq p \leq 1$ の任意の p がプレイヤー1の最適反応である. ここで, $\partial EU^1(p, q)/\partial p = q(U_{11}^1 - U_{21}^1 - U_{12}^1 + U_{22}^1) + (U_{12}^1 - U_{22}^1)$ であることに留意すると, この式における q の係数が正である場合 $\partial EU^1(p, q)/\partial p > 0$ は $q > Q$ と同等であり, 負である場合は $q < Q$ と同等である. よって, q の係数が正 (負) である場合の最適反応グラフを図示すると図-2 の I(II)となる. プレイヤー2についても同様の検討により, 最適反応グラフを導出することができる.

参考文献

- 1) Ben-Akiva, M. and Lerman, S.: Discrete Choice Analysis, The MIT Press, Cambridge, 1985.
- 2) McFadden, D.: Disaggregate Behavioral Travel Demand's RUM side: A 30-Year Retrospective, paper presented at the 9th International Association for Travel Behavior Conference, Gold Coast, Australia, 2000.
- 3) 岡田憲夫, 谷本圭志: 多目的ダム事業における慣用的費用割振り法の改善のためのゲーム論的考察, 土木学会論文集, No.524/IV-29, pp.105-119, 1995.
- 4) 福山敬, 小林潔司: 複数の地方自治体による地方公共財の分担供給, 応用地域学研究, No.5, pp.53-64, 2000.
- 5) Kita, H.: A Merging-Giveway Interaction Model of Cars in a Merging Section: A Game Theoretic Analysis, Transportation Research, Vol.33A, pp.305-312, 1998.
- 6) Kita, H. and Fukuyama, K.: A Merging-Giveway Behavior Model Considering Interaction as Expressway On-Ramps, in

- Transportation and Traffic Theory (A. Ceder ed.), Pergamon, Amsterdam, 1999.
- 7) Camerer, C. F.: Progress in Behavioral Game Theory, Journal of Economic Perspective 11, pp.167-188, 1997.
 - 8) 森川高行, 田中小百合, 荻野成康: 社会的相互作用を取り入れた個人選択モデル-自動車利用自粛行動への適用-, 土木学会論文集, No.569/IV-36, pp.53-63, 1997.
 - 9) 小林潔司, 喜多秀行, 多々納裕一: 送迎・相乗り行動のためのランダムマッチングモデルに関する研究, 土木学会論文集, No.536/IV-31, pp.49-58, 1996.
 - 10) Mishal, S., Schmeidler, D. and Seneid, I.: Israel and the PLO: A Game with Differential Information, in Game Theory and Applications (T. Ichiishi, A. Neyman and Y. Tauman eds.), pp.336-357, 1990.
 - 11) 岡田憲夫, 谷本圭志, 荒添正棋: 都市開発・防災コンフリクトの調整問題に関するメタゲーム論的考察-Robustness 分析手法の提案-, 土木学会論文集, No.524/IV-29, pp.79-92, 1995.
 - 12) Fraser, N. W. and Hipel, K. W.: Conflict Analysis Model and Resolution, North-Holland, 1984.
 - 13) 岡田章: ゲーム理論, 有斐閣, 1996.
 - 14) Harsanyi, J. C. and Selten, R.: A General Theory of Equilibrium Selection in Games, The MIT Press, Cambridge, 1988.
 - 15) 藤原大, 喜多秀行, 谷本圭志: 非観測誤差の系列相関を考慮したゲームの利得推定法, 土木学会中国支部研究発表会発表概要集, pp.481-482, 2002.

(2002. 7. 12 受付)

PLAYERS' PAYOFF ESTIMATION MODEL IN GAME SITUATION

Hideyuki KITA, Keishi TANIMOTO and Kei FUKUYAMA

Game theory has been a useful tool to analyze the phenomena with interactive human behaviors. To use a game theory, we have to give the payoff for all players. It must be useful if we can estimate the player's payoff function from observed behavioral data, like as discrete choice model, which estimates the users' utility function from their observed behavior. This paper develops a model to identify the players' payoff function by using their observed behavioral data and the surrounding conditions which influence their choices.