

モーメント法による流出モデルのパラメータの同定 と Kinematic Wave 式に基づくパラメータの評価

藤田陸博¹・Surakha WANPHEN²・田中岳³・清水康行⁴

¹フェロー会員 工博 北海道大学教授 工学研究科環境資源工学専攻
(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²学生会員 北海道大学工学研究科環境資源工学専攻

³正会員 工博 北海道大学助手 工学研究科環境資源工学専攻

⁴正会員 工博 北海道大学助教授 工学研究科環境資源工学専攻

本論文は、実測資料を用いた遅れ系のパラメータ同定法であるモーメント法を提案し、北海道内の山地流域を対象として実測水文資料を用いた解析を行なった。実測雨量と流出量から計算される等価周波数伝達関数には、雨量、流量に含まれる全ての誤差成分が集約される。この性質を利用することによって雨量と流量の対応関係の適合性を判断できることを示し、採用するデータの取捨選択をした。一方、藤田らは、kinematic wave 式を基本モデルとして降雨量と流域からの流出量間の等価周波数伝達関数もまた 2~3 次の遅れ系で近似できることを明らかにしている。実測資料より得た遅れ系のパラメータを評価するために、斜面域、河道域における到達時間を求め、降雨量の影響を取り除いた2つの流域特性指標を示している。

Key Words : *moment method, data evaluation, kinematic wave model, equivalent frequency response method*

1. はじめに

Luai・藤田¹⁾は、非線形分布定数系流出モデル (St. Venant 式, diffusion wave 式, kinematic wave 式等) において降雨量と流出量間の等価周波数伝達関数を誘導し、得られた等価周波数伝達関数が周波数のみならず平均降雨量の関数になっていることを明らかにしている。さらに、藤田ら^{2),3)}は、これらの等価周波数伝達関数が 2~3 次の遅れ系の周波数伝達関数によって近似できることを示し、遅れ系のパラメータの同定法を示している。

本論文は、これらの理論を実流域における流出解析に適用したものである。まず、実測資料を用いた遅れ系のパラメータ同定法であるモーメント法を提

案している。この手法に基づいて北海道の留萌川、釧路川水系における実測資料を用いて遅れ系のパラメータを同定した。

さらに、実測値より求まる等価周波数伝達関数には降雨量、流出量に含まれる全ての誤差が集中していることに注目し、等価周波数伝達関数を介して降雨量と流出量間の対応関係の適合性を判断できることを示した。藤田ら²⁾は、斜面流出、河道流出ともに kinematic wave 式によって記述できるものとして、任意の河道網流域における遅れ系のパラメータを理論的に与えている。この理論に基づきモーメント法によって同定されたパラメータの評価を行ない、斜面域、河道域における到達時間を逆推定し、流域特性を規定するパラメータを提案している。

2. モーメント法によるパラメータの同定

有効雨量 $r(t)$ (mm/hr) とこれによる直接流出量 $q(t)$ (mm/hr) が既知であると考え、 $r(t) \sim q(t)$ 関係が非線形であるとしても、その等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ は、次式で定義できる。

$$Z(j\omega, \bar{r}) = \frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (1)$$

$$Q(j\omega) = \int_0^{\infty} q(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

$$R(j\omega) = \int_0^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

j : 虚数単位

式(1)は線形流出系の周波数伝達関数の概念を拡張した形式で記述されているが、非線形系の場合にはこれが入力である降雨量の平均値に依存しているのので式(1)に示すように $Z(j\omega, \bar{r})$ と記述している。

式(1)の等価周波数伝達関数 $Z(j\omega, \bar{r})$ が、次の4次の遅れ系(4階微分方程式)の周波数伝達関数によって近似できるものとして、係数 G_0, G_1, G_2, G_3 を同定してみよう。

$$G_0 \frac{d^4 q}{dt^4} + G_1 \frac{d^3 q}{dt^3} + G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (4)$$

$$\left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad (5)$$

次式は、式(4),(5)の周波数伝達関数 $Z_{q4}(j\omega)$ を示している。

$$Z_{q4}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 G_2 + \omega^4 G_0 - j\omega(\omega^2 G_1 - G_3)} \quad (6)$$

図-1の細実線は、式(7)の G_0, G_1, G_2, G_3 を式(6)に与え $Z_{q4}(j\omega)$ のベクトル軌跡を示したものである。

$$\begin{cases} G_0 = 150 & G_1 = 80 \\ G_2 = 60 & G_3 = 10 \end{cases} \quad (7)$$

これは、図-7の実測降雨量、流出量より求まる等価周波数伝達関数のベクトル軌跡に類似していることが分かる。 $Z_{q4}(j\omega)$ が、式(1)の等価周波数伝達関数係数 $Z(j\omega, \bar{r})$ を近似しているものと仮定する。式(4)の係数 $G_i, i=1 \sim 3$ を $Z(j\omega, \bar{r})$ より求めてみよう。式(6)より次式を誘導できる。

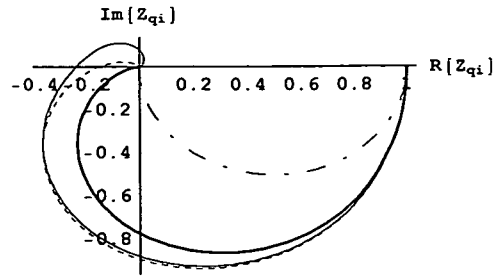


図-1 遅れ系のベクトル軌跡

細実線 : $i = 4$ 点線 : $i = 3$

太実線 : $i = 2$ 鎖線 : $i = 1$

$$G_0 = \frac{1}{\omega^4} \left\{ G_2 \omega^2 - 1 + \frac{R_e[Z]}{R_e^2[Z] + I_m^2[Z]} \right\} \quad (8)$$

$$G_1 = \frac{1}{\omega^3} \left\{ G_3 \omega + \frac{I_m[Z]}{R_e^2[Z] + I_m^2[Z]} \right\} \quad (9)$$

$R_e[Z], I_m[Z]$ は、 $Z(j\omega, \bar{r})$ の実部と虚部を表している。 $\omega = 0$ で G_0, G_1, G_2, G_3 の極限值が存在する条件下で極限計算を行い式(10)~(13)を得る。

$$G_0 = \frac{1}{24} \left[24 \left(\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right)^4 + 36 \left(\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right)^2 \frac{d^2 R_e[Z]}{d\omega^2} + 6 \left(\frac{d^2 R_e[Z]}{d\omega^2} \right)^2 - 8 \frac{dI_m[Z]}{d\omega} \frac{d^3 I_m[Z]}{d\omega^3} - \frac{d^4 R_e[Z]}{d\omega^4} \right]_{\omega=0} \quad (10)$$

$$G_1 = \frac{1}{6} \left[\frac{d^3 I_m[Z]}{d\omega^3} - 6 \left(\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right)^3 - 6 \frac{dI_m[Z]}{d\omega} \frac{d^2 R_e[Z]}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} \quad (11)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 R_e[Z]}{d\omega^2} + 2 \left(\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right)^2 \right]_{\omega=0} \quad (12)$$

$$G_3 = \left[- \frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right]_{\omega=0} \quad (13)$$

次に、式(4),(5)の代わりに、式(14),(15)を考えてみよう。

$$G_1 \frac{d^3 q}{dt^3} + G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (14)$$

$$\left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1, 2 \quad (15)$$

式(14),(15)の周波数伝達関数 $Z_{q3}(j\omega)$ は、次式で与え

られる。

$$Z_{q_3}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 G_2 - j\omega(\omega^2 G_1 - G_3)} \quad (16)$$

図-1 の点線は式(7)の $G_i, i=1,2,3$ を与えて求めた $Z_{q_3}(j\omega)$ のベクトル軌跡を示している。これもまた、実測資料より得られるベクトル軌跡を近似できそうである。 $Z_{q_3}(j\omega)$ が、 $Z(j\omega, \bar{r})$ を近似していると仮定する。式(16)より式(9),(17)を誘導できる。

$$G_2 = \frac{1}{\omega^2} \left\{ 1 - \frac{R_e[Z]}{R_e^2[Z] + I_m^2[Z]} \right\} \quad (17)$$

式(17)は、式(8)右辺の $\{ \}$ 内を 0 にする条件となっている。したがって、 $\omega = 0$ で G_1, G_2, G_3 の極限值が存在する条件下で極限計算を行うと、式(11)~(13)に一致する結果を得る。

次に、式(18),(19)を考える。

$$G_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (18)$$

$$\left[\frac{d^n q}{dt^n} \right]_{t=0} = 0 \quad n = 0, 1 \quad (19)$$

式(18),(19)の周波数伝達関数 $Z_{q_2}(j\omega)$ は、次式で与えられる。

$$Z_{q_2}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 G_2 + j\omega G_3} \quad (20)$$

図-1 の太実線は、式(7)の G_2, G_3 と式(20)より計算したベクトル軌跡を示している。このベクトル軌跡も実測資料より求まるベクトル軌跡を近似できそうである。 $Z(j\omega, \bar{r}), Z_{q_2}(j\omega)$ より式(17),(21)を誘導できる。

$$G_3 = -\frac{I_m[Z]}{\omega(R_e^2[Z] + I_m^2[Z])} \quad (21)$$

式(21)は、式(9)右辺の $\{ \}$ 内を 0 にする条件式になっている。 $\omega = 0$ で G_2, G_3 の極限值が存在する条件下で極限計算を行うと、式(12)~(13)に一致する結果を得る。さらに、遅れ系の次数を下げて式(22)を考える。

$$G_3 \frac{dq}{dt} + q = r \quad (22)$$

$$q(0) = 0 \quad (23)$$

式(22),(23)の周波数伝達関数は、式(24)となる。

$$Z_{q_1}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega G_3} \quad (24)$$

式(7),(24)より計算されるベクトル軌跡を、図-1 の鎖

線で示している。このベクトル軌跡は、実測資料より求まる図-7 のベクトル軌跡を近似できそうもないので、ここでは除いて考える。

遅れ系のベクトル軌跡の特長は $\omega \rightarrow 0$ で図-1 の複素平面上で原点に近づくが、1,2,3,4 次遅れ系では図-1 のそれぞれ第 4,3,2,1 象限から原点に接近している。したがって、図-7 に示すようなベクトル軌跡が得られると、遅れ系の次数を推定できる。

式(10)~(13)では、周波数領域で $G_i, i=0,1,2,3$ を定義しているが、時間領域で考えると $Z(j\omega, \bar{r}), Z_{q_i}(j\omega)$ のインパルス応答関数 $z(t), z_{q_i}(t)$ を等値していることになる。詳しい内容に関しては、文献 2) を参照されたい。

式(1)の $Z(j\omega, \bar{r})$ を式(10)~(13)の各項に代入し、式(25)~(28)を誘導できる。

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^4 R_e[Z]}{d\omega^4} \right]_{\omega=0} &= I_{q,4} - 4I_{q,3}I_{r,1} + 12I_{q,2}(I_{r,1})^2 - 24I_{q,1}(I_{r,1})^3 \\ &\quad + 24(I_{r,1})^4 - 6I_{q,2}I_{r,2} + 24I_{q,1}I_{r,1}I_{r,2} - 36(I_{r,1})^2 I_{r,2} \\ &\quad + 6(I_{r,2})^2 - 4I_{q,1}I_{r,3} + 8I_{r,1}I_{r,3} - I_{r,4} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^3 I_m[Z]}{d\omega^3} \right]_{\omega=0} &= I_{q,3} - 3I_{q,2}I_{r,1} + 6I_{q,1}I_{r,1}^2 - 6I_{r,1}^3 \\ &\quad - 3I_{q,1}I_{r,2} + 6I_{r,1}I_{r,2} - I_{r,3} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\left[\frac{d^2 R_e[z]}{d\omega^2} \right]_{\omega=0} = I_{r,2} - 2I_{r,1}^2 + 2I_{r,1}I_{q,1} - I_{q,2} \quad (27)$$

$$\left[\frac{dI_m[Z]}{d\omega} \right]_{\omega=0} = I_{r,1} - I_{q,1} \quad (28)$$

$$I_{r,i} = \int_0^\infty \frac{t^i r(t)}{S_{r,q}} dt \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (29)$$

$$I_{q,i} = \int_0^\infty \frac{t^i q(t)}{S_{r,q}} dt \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (30)$$

$$\int_0^\infty r(t) dt = \int_0^\infty q(t) dt = S_{r,q} \quad (31)$$

式(29),(30)において $r(t)/S_{r,q}, q(t)/S_{r,q}$ は正値で区間 $[0, \infty]$ の積分値は 1 になっているので、 $I_{r,i}, I_{q,i}$ は確率密度関数における原点の回りの i 次モーメントに

相当している。式(25)～(28)を式(10)～(13)に代入して、次式を得る。

$$G_0 = \frac{1}{24}(I_{q,1} - I_{r,1})^4 \left\{ 1 - \frac{J_{q,4} - J_{r,4} - 6J_{q,2}(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^4} + \frac{4(J_{q,3} - J_{r,3})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^3} - \frac{6(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (32)$$

$$G_1 = \frac{1}{6}(I_{q,1} - I_{r,1})^3 \left\{ 1 + \frac{J_{q,3} - J_{r,3}}{(I_{q,1} - I_{r,1})^3} - \frac{3(J_{q,2} - J_{r,2})}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (33)$$

$$G_2 = \frac{1}{2}(I_{q,1} - I_{r,1})^2 \left\{ 1 - \frac{J_{q,2} - J_{r,2}}{(I_{q,1} - I_{r,1})^2} \right\} \quad (34)$$

$$G_3 = I_{q,1} - I_{r,1} \quad (35)$$

$$J_{q,i} = \int_0^{\infty} (t - I_{q,1})^i \frac{q(t)}{S_{rq}} dt \quad (36)$$

$$J_{r,i} = \int_0^{\infty} (t - I_{r,1})^i \frac{r(t)}{S_{rq}} dt \quad (37)$$

$i = 1, 2, 3, 4$

$J_{q,i}, J_{r,i}$ は、規格化されたハイドログラフ、ハイトグラフ $q(t)/S_{rq}, r(t)/S_{rq}$ の重心時間回りの i 次モーメントを示している。 G_3 は時間の次元を有する係数で、降雨量と流出量の重心時間差になっている。 G_2 は時間の 2 乗の次元を持つ係数で、降雨量と流出量の重心時間差以外に 2 次モーメントが関与し、 G_1, G_0 は更に降雨量と流出量の 3, 4 次モーメントが関与していることがわかる。すなわち、 G_3 は降雨量や流出量の重心時間を表わすパラメータで、 G_2 は降雨量や流出量の広がりや扁平度を表わすパラメータになっている。また、 G_1 は降雨量や流出量の非対称性や歪を表わすパラメータになっている。 G_0 にはハイドログラフ、ハイトグラフのピーク時刻における尖り度が関与している。係数 G_0, G_1, G_2, G_3 が、降雨波形や流量波形のモーメント特性に関与している興味ある結果が得られた。

次に、式(35)を用いて式(34)を変形する。

$$\frac{G_2}{G_3^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{J_{q,2} - J_{r,2}}{G_3^2} \right) \quad (38)$$

G_3 は降雨量と流出量の重心時間差なので $G_3 > 0$ と考えることができ、また、流出量は降雨量よりも扁平化していると考えてもよいので、 $J_{q,2} > J_{r,2}$ となる。したがって、次式を得る。

$$\frac{G_2}{G_3^2} < 0.5 \quad (39)$$

式(33)についても、次のように変形できる。

$$\frac{G_1}{G_3^3} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{J_{q,3} - J_{r,3}}{G_3^3} - \frac{3(J_{q,2} - J_{r,2})}{G_3^2} \right) \quad (40)$$

この値が正になるためには、次の条件が必要である。

$$\frac{J_{q,3} - J_{r,3}}{G_3^3} - \frac{3(J_{q,2} - J_{r,2})}{G_3^2} > -1 \quad (41)$$

実測雨量、流量が、常に式(41)を満たしているとは言えず、 G_1 の値が負になる可能性を示している。

式(32)～(35)で与えられる G_0, G_1, G_2, G_3 の同定法を、ここではモーメント法と呼ぶことにする。この手法の特長は、同定された係数 G_0, G_1, G_2, G_3 が 2～4 階微分方程式の共通の係数になっていることである。

3. 等価周波数伝達関数に基づく降雨量と流出量の対応関係の評価

同一地点で複数個の出水資料を用いて流出モデルのパラメータを同定したとき、同定したパラメータを用いた個々の流出量の再現計算は良好な結果を示していても、出水資料ごとにパラメータ値が大きく変動したり、かけ離れた値のパラメータを得る場合がある。ハイドログラフの立ち上がり時刻以前の流域の湿潤度は降雨ごとに異なっていると考えられる。したがって、出水資料ごとに初期条件が異なるので同定したパラメータが変動することは当然なこととも解釈できる。

パラメータが変動するもう一つの理由は、降雨量と流出量間の対応関係の良否を挙げることができる。例えば、無降雨状態が継続しているのに流量が増加するような資料がある場合、解析者は「おかしい」と判断して解析から除外するであろう。このような極端な例を除くと、一般には降雨波形やハイドログ

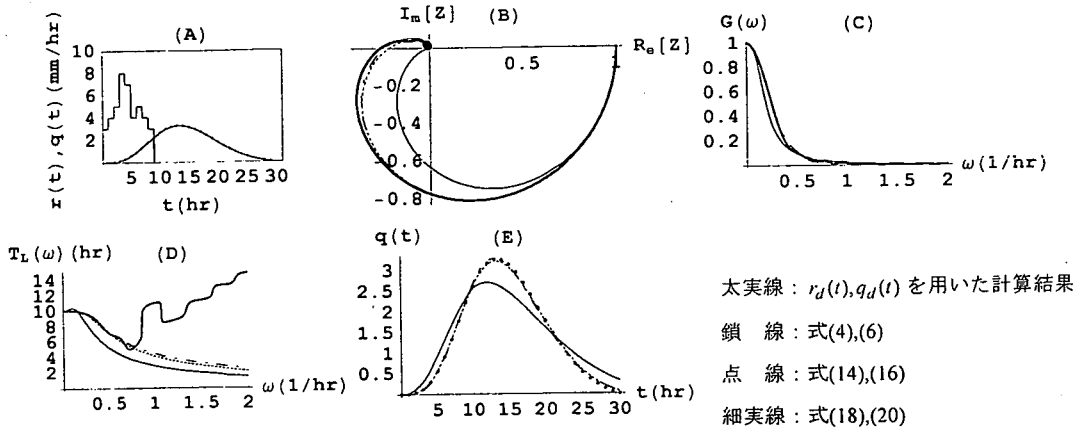


図-2 モーメント法による係数の同定と周波数特性(1)

ラフの比較だけから、降雨量とその流出量の対応関係の良否を論じることは難しい。しかし、等価周波数伝達関数を用いると、 $r(t) \sim q(t)$ の対応関係の良否を確認することが可能である。

式(1)の等価周波数伝達関数には、 $r(t), q(t)$ に含まれる全ての誤差が集約されている。これらの誤差は観測誤差のみならず、直接流出量の分離に伴う誤差、流域平均雨量の推定誤差、有効雨量算定時の誤差などを含んでいる。さらに厄介なことには、これらの誤差レベルが出水ごとに異なると考えられる。例えば、テーゼン法によって流域平均雨量を算定する場合を考えてみよう。流域平均雨量に含まれる誤差は、降雨量の空間分布に依存しているはずである。出水ごとに降雨の空間分布は異なるので、一般に誤差レベルは出水ごとに変化していると考えられる。定量的にこれらの誤差を明らかにすることは難しいが、これらの誤差の影響は等価周波数伝達関数の高周波数領域に集中することが予想される。したがって、等価周波数伝達関数の高周波数領域の挙動を解析することによって $r(t) \sim q(t)$ の対応関係に含まれる誤差の程度を検知できる可能性がある。このことを簡単な流出モデルを用いて説明すると共にここで提案しているモーメント法の精度を吟味する。

今、流出系が式(14)によって記述されているものとする。次に、 G_1, G_2, G_3 の値として、次式を設定する。

$$G_1 = 80(\text{hr}^2) \quad G_2 = 40(\text{hr}^2) \quad G_3 = 10(\text{hr}) \quad (42)$$

図-2(A)に示すように $r(t)$ を定め、式(14),(42)を用いて $q(t)$ を求め、これを(A)の実線で示している。実測資料を用いる場合を想定して $q(t)$ を1時間毎にサンプリングしてこれを $q_d(t)$ とし、図-2(A)の●印で示している。 $q_d(t) = 0 \quad t > 30(\text{hr})$ とする。この $q_d(t)$ が直接流出量に相当すると考える。 $r(t)$ を実測雨量と考え、流出率(総流出量/総降雨量)を乗じて有効降雨量 $r_e(t)$ を求めた。 $r_e(t), q_d(t)$ を式(32)~(35)に代入し G_0, G_1, G_2, G_3 を求め、その結果を式(43)に示す。式(42)と区別するために「 $'$ 」を付している。

$$\begin{cases} G'_0 = 24.5(\text{hr}^4) & G'_1 = 73.6(\text{hr}^3) \\ G'_2 = 40.7(\text{hr}^2) & G'_3 = 10.1(\text{hr}) \end{cases} \quad (43)$$

モーメント法は、ほぼ、式(42)の値を同定しているが、本来、式(14)に含まれていない4次の微分項の係数 G_0 までも得られた。 $r_e(t), q_d(t)$ の高次モーメントを必要とする係数ほど設定値との差が大きくなっている。 $q_d(t)$ を用いた式(36)の計算をするために、 $q_d(t)$ を次式に示すように折線で表している。

$$q_d(t) = \sum_{i=1}^{30} (a_i t + b_i) \{U(t-i+1) - U(t-i)\} \quad (44)$$

$$a_i = q_d(i) - q_d(i-1), \quad b_i = q_d(i) - i a_i \quad (45)$$

$U(t)$ は単位ステップ関数である。また、 $r_e(t)$ も流出率を乗じたことによって $r(t)$ とは異なっている。したがって、 $r_e(t) \sim q_d(t)$ の対応関係が、厳密には式(14)の $r(t) \sim q(t)$ の対応関係を満足していない。 $r(t), q(t)$ と $r_e(t), q_d(t)$ の差は、高次モーメントの計算値ほど拡大されるので、結果として $G'_i, i=0,1,2,3$ の順に設定値と

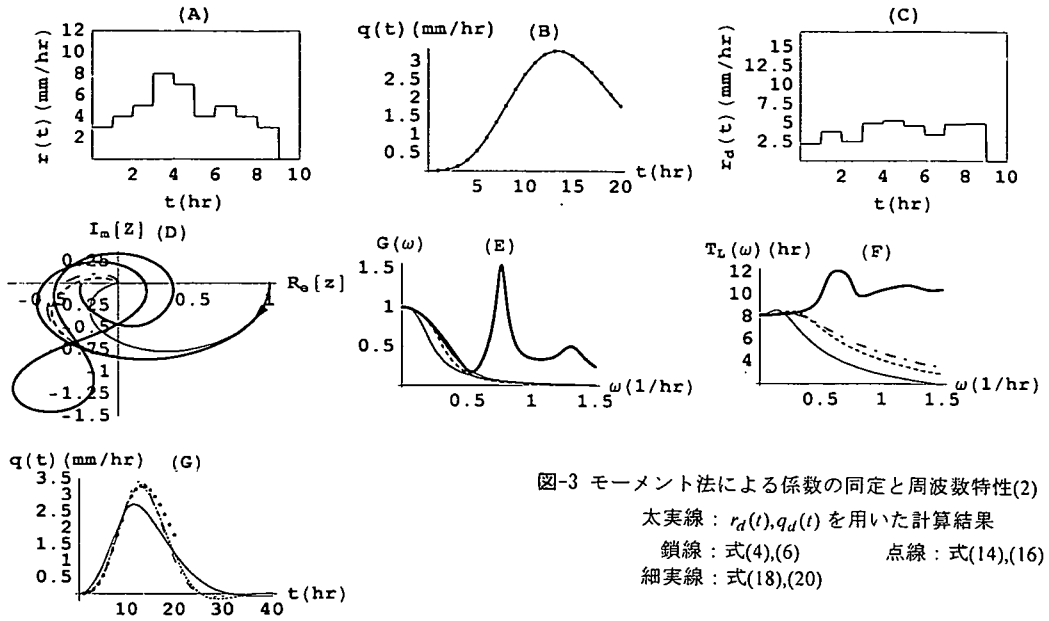


図-3 モーメント法による係数の同定と周波数特性(2)
 太実線: $r_d(t), q_d(t)$ を用いた計算結果
 鎖線: 式(4),(6) 点線: 式(14),(16)
 細実線: 式(18),(20)

の差が大きくなったと解釈される。一方、図-2(B),(C),(D)の太実線は、 $r_e(t), q_e(t)$ を式(1)に用いた $Z(j\omega, \bar{r})$ の周波数特性(ベクトル軌跡, ゲイン, 時間遅れ)を示している。細実線は、式(20)の G_2, G_3 に式(43)の G'_2, G'_3 を代入して得られた $Z_{q2}(j\omega)$ の周波数特性を示している。鎖線および点線は、それぞれ式(6)の G_0, G_1, G_2, G_3 の代わりに G'_0, G'_1, G'_2, G'_3 を、式(16)の G_1, G_2, G_3 に G'_1, G'_2, G'_3 を代入して計算した $Z_{q4}(j\omega), Z_{q3}(j\omega)$ の周波数特性を表している。(B),(C)において太線, 点線と鎖線は、ほぼ一致している。

また、図-2(E)は、 G'_0, G'_1, G'_2, G'_3 を用いた流出量の再現計算結果を示している。細実線, 点線, 鎖線は、式(18),(14),(4)による計算結果である。式(4)(鎖線),(14)(点線)を用いた再現計算結果は、 $q_d(t)$ (黒丸印)に一致している。(D)の時間遅れにおいて $\omega > 0.7(1/hr)$ の周波数帯で設定した G_0, G_1, G_2, G_3 より求まる時間遅れとモーメント法によって同定された G'_0, G'_1, G'_2, G'_3 より求まる時間遅れの差が大きい。これは、(B)の $r_e(t), q_e(t)$ より計算されたベクトル軌跡(太実線)が、原点の周辺で渦状になっていることより生じている。しかし、(C)に示すようにこの周波数帯でのゲインが非常に小さい値をとっており、時間遅れにおける両者の差を無視でき、(E)の式(4),(14)の流出量の再現計算結果が $q_d(t)$ と一致していることに符

合している。3階微分方程式を用いて流出量を作成したので2階微分方程式による周波数特性解析および流出量の再現計算結果が、他に比較して劣っている。3,4階微分方程式では、その優劣を決定できない結果を得た。次に、 $r(t) \sim q(t)$ の対応関係にさらに誤差の加わった場合を検討する。 $q_d(t) = 0, t > (20hr)$ として、これを図-3(B)の●印で示している。 $r(t)$ にも誤差成分があるものとして、次式を用いた。

$$r_d(t) = r(t) + N(t) \quad (46)$$

$N(t)$: 誤差成分

$N(t)$ として平均値 0, 標準偏差 2 の正規乱数を与え、この1例を図-3(C)に示す。(C)の $r_d(t)$ は、流出率を考慮して有効雨量の条件を満足している。図-3(A)は、図-2(A)と同じであるが、図-3(A),(C)を比較すると両者の違いがよくわかる。 $r_d(t), q_d(t)$ を式(32)~(35)に代入し $G_i, i=0 \sim 3$ を求め、これを式(47)に示す。

$$\begin{cases} G'_0 = 30.4(hr^4) & G'_1 = 50.7(hr^3) \\ G'_2 = 28.5(hr^2) & G'_3 = 8.1(hr) \end{cases} \quad (47)$$

$r_d(t) \sim q_d(t)$ の対応関係が大きく異なっているため、設定した式(42)とはかけ離れた値が同定されている。 G'_0, G'_1, G'_2, G'_3 を式(4),(14),(18)に代入し、式(46)の $r_d(t)$ を用いた流出量の再現計算結果を図-3(G)に示している。鎖線, 点線および細実線が式(4),(14),(18)による計算結果である。●印は $q_d(t)$ を表している。想定

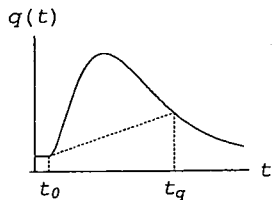


図-4 直接流出量の分離

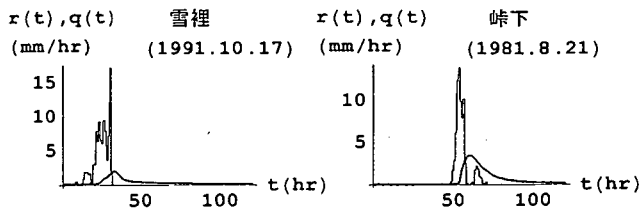


図-5 釧路川, 留萌川水系における実測資料の一例

している流出量の継続時間 ($0 < t < 20\text{hr}$) 内では, 式(18)による結果を除いて流出量を再現している. 一方, 図-3(D),(E),(F)の太実線は, $r_d(t), q_d(t)$ を式(1)に用いた $Z(j\omega, \bar{r})$ の周波数特性を示している. 鎖線, 点線および細実線は, G'_0, G'_1, G'_2, G'_3 を式(6),(16),(20)に代入して求めた $Z_{q4}(j\omega), Z_{q3}(j\omega), Z_{q2}(j\omega)$ の周波数特性を表している. (D)で $r_d(t), q_d(t)$ より求まる $Z(j\omega)$ ベクトル軌跡が大きく乱れ, (E)では $\omega = 0.8(1/\text{hr})$ 近傍でゲインが1を超え, 共振現象を示している.

著者らは, これまでに St. Venant 式とこれから派生する Diffusion wave 式, Gravity wave 式, Kinematic wave 式を用いて降雨量~流出量間の等価周波数伝達関数を誘導してきた^{1),2)}. いずれの等価周波数伝達関数も低域フィルターの性質を示している. したがって, 実測資料を用いた計算で図-3(E)のような共振現象が得られた場合, 降雨~流出系に存在している性質ではなく, 降雨量~流出量間の対応関係に含まれる誤差に起因すると考えるのが妥当であると思われる. 流出量の再現計算が良好という理由だけで, 得られたモデル定数をそのまま採用すると出水ごとにモデル定数がばらつく原因の一つになることを示している. 図-3は, 式(1)の $Z(j\omega, \bar{r})$ の周波数特性の解析を介して $r(t) \sim q(t)$ の対応関係の良否を判断できることを示している.

4. 実流域における解析

北海道の留萌川, 釧路川水系の実測資料を用いて解析した. 両水系の観測所は, いずれも山地流域に位置している. 本研究は, 有効雨量と直接流出量を対象とする解析になっている. したがって, 解析の対象とする流域面積の規模も数 100 km^2 以下の流域に限定し, 同一の地点で数多くの出水資料を入手き

表-1 留萌川水系

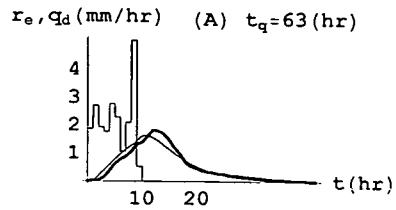
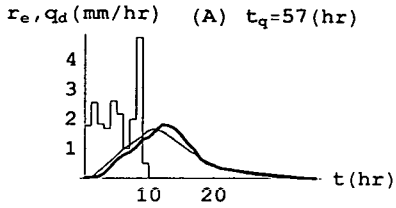
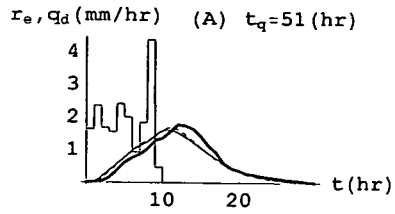
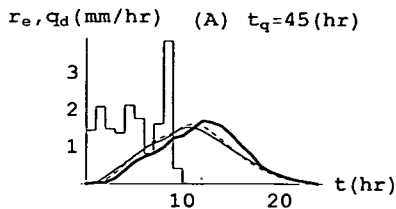
観測所名	流域面積 (km ²)	マグニチュード
峠下	51.0	5
幌糠	165.9	32
大和田	234.1	46

表-2 釧路川水系

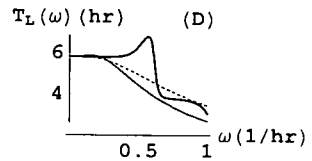
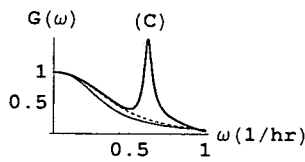
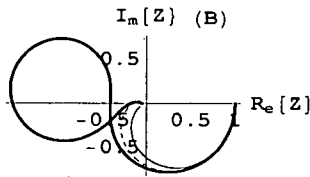
観測所名	流域面積 (km ²)	マグニチュード
弟子屈	127.8	31
下オソベツ	137.6	16
雪裡	169.5	12
幌呂	127.0	17
下久著呂	96.6	27

る河川流域として両水系を選択した. 表-1, 2は留萌川, 釧路川水系の解析地点と流域面積および5万分の1地形図より求めた河道網のマグニチュードを示している. マグニチュードの利用については, 後述する. 実測ハイドログラフより直接流出量の推定は, 図-4に示すように流出の立ち上がり時刻 t_0 と減水部の第2折曲点 t_q を直線で結んで分離した. t_q の決定にあたっては恣意的なファクターが入らざるを得ない. 図-5は, 釧路川水系雪裡地点および留萌川水系峠下地点における実測雨量と流量の例である. 図-5のデータに関して, 図-4に示すように出水の終了時刻 t_q を変化させて求めた周波数特性の計算例を図-6, 7に示す. t_q を1時間ごとに変化させたが, 紙面の関係で抜粋した結果のみを示している.

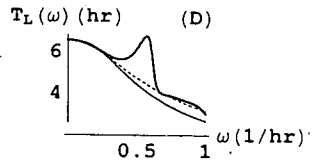
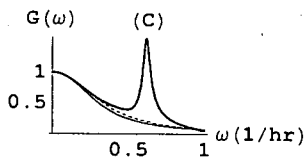
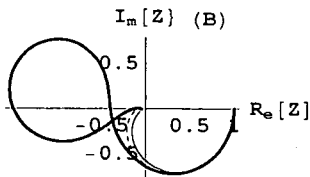
図-6, 7の(A)の太実線は, t_q 時刻毎に得られた直接流出量 $q_d(t)$ を示している. また, 降雨量は, 実測雨量に流出率(総流出量/総降雨量)を乗じた有効雨量である. 直接流出量の開始時刻を時間の原点にしている. 図-5の時刻の定義とは異なっている. (B),(C),(D)の太実線は, t_q 時刻毎に得られる直接流出量と有効雨量を式(1)に代入して計算した周波数特性(ベクトル軌跡, ゲイン, 時間遅れ)を示している. 図-6は, 出水の終了時刻 t_q を変化させても常に



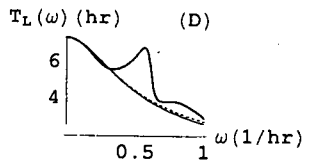
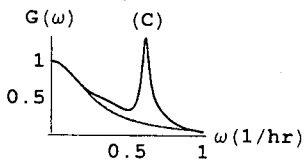
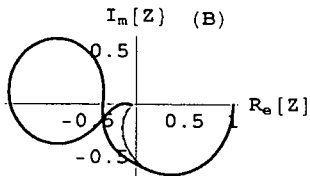
(1) $t_q=45$ (hr) $G_0=-9.3$ (hr⁴) $G_1=9.5$ (hr³) $G_2=12.8$ (hr²) $G_3=5.8$ (hr)



(2) $t_q=51$ (hr) $G_0=-6.2$ (hr⁴) $G_1=6.9$ (hr³) $G_2=14.$ (hr²) $G_3=6.6$ (hr)



(3) $t_q=57$ (hr) $G_0=15.9$ (hr⁴) $G_1=2.1$ (hr³) $G_2=14.7$ (hr²) $G_3=7.3$ (hr)



(4) $t_q=63$ (hr) $G_0=74.6$ (hr⁴) $G_1=-3.6$ (hr³) $G_2=14.4$ (hr²) $G_3=8.1$ (hr)

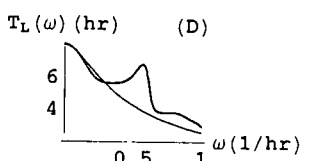
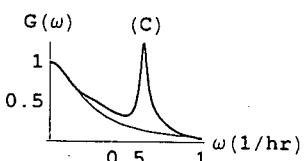
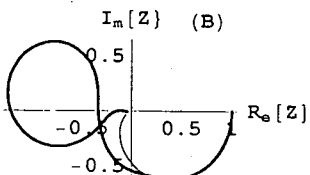
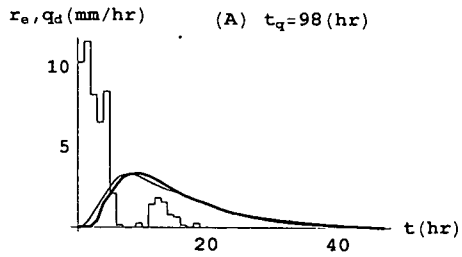
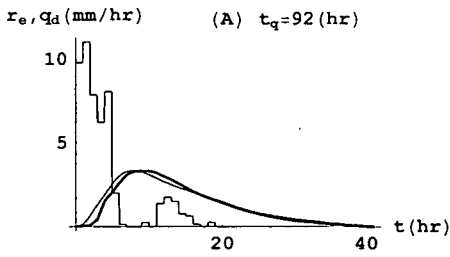
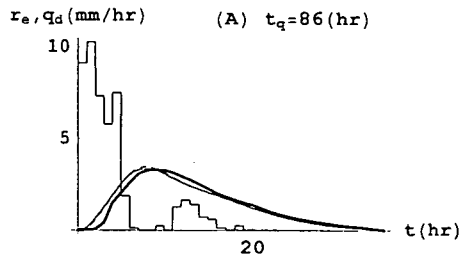
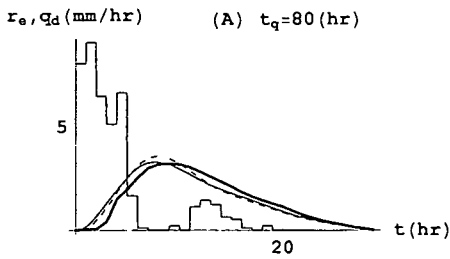
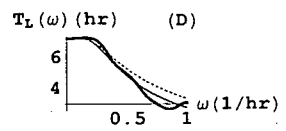
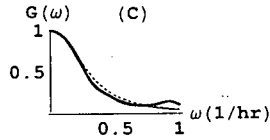
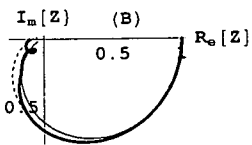


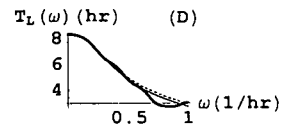
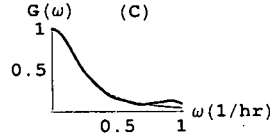
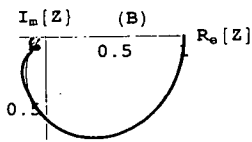
図-6 鉋路川水系雪裡地点における周波数特性(1991.10.7)



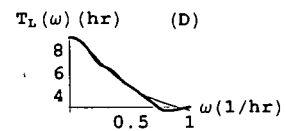
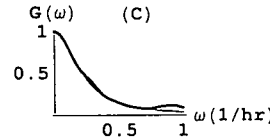
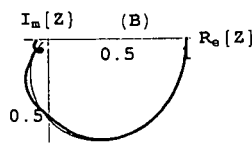
(1) $t_q=80$ (hr) $G_0=-30. (\text{hr}^4)$ $G_1=11.4 (\text{hr}^3)$ $G_2=19.6 (\text{hr}^2)$ $G_3=7.2 (\text{hr})$



(2) $t_q=86$ (hr) $G_0=-18.5 (\text{hr}^4)$ $G_1=5. (\text{hr}^3)$ $G_2=22. (\text{hr}^2)$ $G_3=8.3 (\text{hr})$



(3) $t_q=92$ (hr) $G_0=26.7 (\text{hr}^4)$ $G_1=-4.7 (\text{hr}^3)$ $G_2=23.3 (\text{hr}^2)$ $G_3=9.2 (\text{hr})$



(4) $t_q=98$ (hr) $G_0=119.2 (\text{hr}^4)$ $G_1=-15.9 (\text{hr}^3)$ $G_2=23.8 (\text{hr}^2)$ $G_3=10. (\text{hr})$

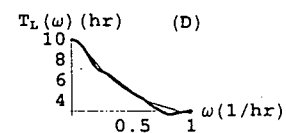
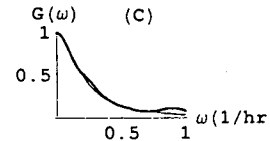
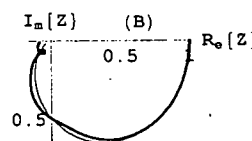


図-7 留萌川水系峠下地点における周波数特性(1981.8.21)

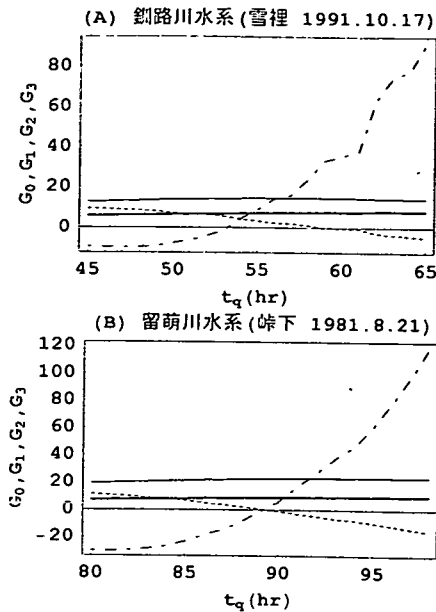


図-8 G_0, G_1, G_2, G_3 と t_q の関係

鎖線： G_0 点線： G_1
 細実線： G_2 太実線： G_3

(B)のベクトル軌跡の高周波数領域で大きなループを描き、(C)のゲインでは $\omega = 0.6(1/hr)$ 近傍でゲインが1以上になり共振現象を示している例である。図-6は、図-3と同様な周波数特性を示している。図-7の留萌川峠下地点の解析結果は、 t_q を変化させても常に安定した周波数特性が得られている例である。この他に数は少ないが、図-6,7の中間の性質を持つ例が得られた。紙面の関係で表示を省略するが、 t_q の増加に伴い共振現象が収まり、さらに t_q が増大すると共振現象が復活する例である。留萌川、釧路川水系で合計60出水の周波数特性を計算したが、図-6,7とその中間の3パターンに分類できた。ここでは、図-6のような周波数特性を示す資料を棄却し、中間のパターンでは t_q の値によってこのデータを採るか否かを決定した。図-5に示す時間領域で記述される降雨波形とハイドログラフからは判断できない降雨量と流出量間の対応関係の適合度が、周波数特性によって容易に判断できることが分かった。

図-6,7には t_q 毎に得られる直接流出量、有効雨量用いて同定した係数 G_0, G_1, G_2, G_3 の値も示しているが、さらに詳しい $G_0, G_1, G_2, G_3 \sim t_q$ 関係を図-8に示している。 G_2, G_3 は、常に正の値であるが、 G_0, G_1 は

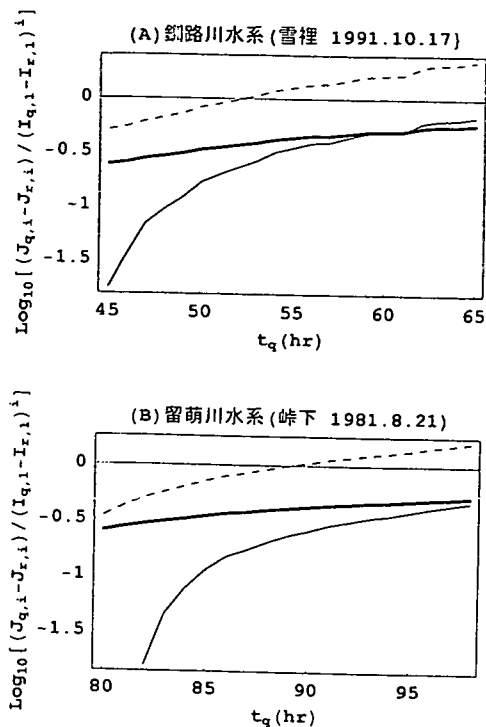


図-9 $t_q \sim M_i$ 関係

点線： $i=4$ 細実線： $i=3$ 太実線： $i=2$

の増加ともない、それぞれ負から正、正から負へと変化している。図-16(B)でも $G_0, G_1, G_2, G_3 \sim t_q$ 関係は、同様な傾向を示している。図-9は、式(32)~(34)に表われる $M_i = (J_{q,i} - J_{r,i}) / (I_{q,i} - I_{r,i})^i, i=2,3,4$ と t_q の関係をプロットしている。 t_q が増加するにもない、いずれの M_i も増加しているが、増加のパターンが類似している。すなわち、 $M_4 > M_2, M_3$ で、 t_q の増大とともに $M_2 > M_3$ から $M_2 \approx M_3$ へと変化している。解析した他の出水資料でも同様な $t_q \sim M_i$ 関係の類似性が認められている。したがって、図-8の $G_0, G_1, G_2, G_3 \sim t_q$ 関係と同様な関係が、他の出水資料でも得られている。

図-6,7(A)の細実線と点線は、 t_q 毎に求まる G_1, G_2, G_3 と降雨量 $r_e(i)$ を式(18),(14)に代入した流出量の再現計算の結果を示している。ただし、 $G_1 < 0$ の場合には式(18)を用いた結果のみを示している。また、図-6,7(B),(C),(D)の細実線、点線は、 G_1, G_2, G_3 を式(20),(16)に代入した $Z_{q2}(j\omega), Z_{q3}(j\omega)$ の周波数特性を示している。 $G_1 < 0$ の場合には、 $Z_{q2}(j\omega)$ の周波数特性のみを示している。 $G_1 > 0$ の場合には、図-6(A)

表-3 留萌川、釧路川水系における係数 G_0, G_1, G_2, G_3 の同定結果

	観測所名	資料数	棄却した資料数	G_0, G_1 が負の資料数	G_0 のみ負の資料数	$\bar{\eta}_s$ ($m^{0.4} hr^{0.6}$)	$\bar{\eta}_c$ ($m^{0.4} hr^{0.6}$)
留萌川	峠下	6	2	2	1	1.57	0.05
	幌糠	8	4	1	3	1.12	0.04
	大和田	7	3	4	0	1.45	0.07
	小計	21	9	7	4		
釧路川	弟子屈	9	0	0	9	1.07	0.05
	下オソベツ	7	2	0	2	0.64	0.06
	雪裡	8	3	0	1	0.69	0.03
	幌呂	8	3	1	1	0.86	0.02
	下久著呂	7	3	0	1	1.35	0.04
	小計	39	11	1	14		
	計	60	20	8	18		

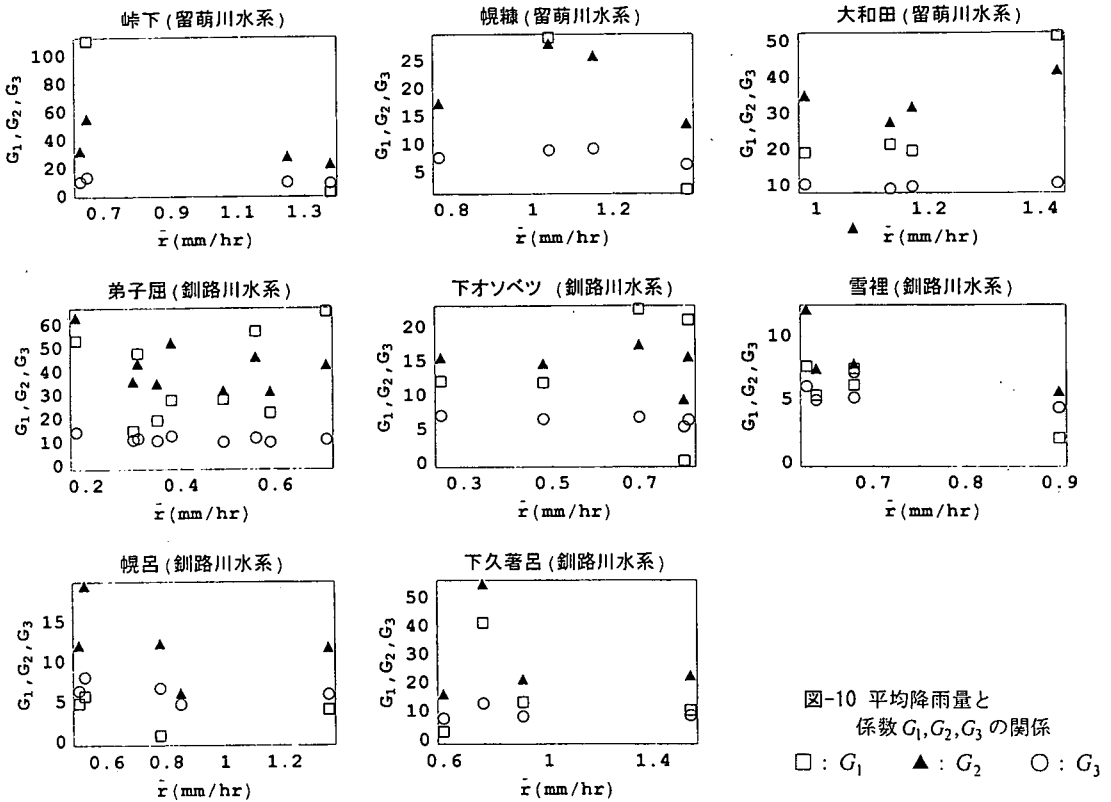


図-10 平均降雨量と係数 G_1, G_2, G_3 の関係
□ : G_1 ▲ : G_2 ○ : G_3

(B),(C),(D)ともに細実線、点線の表示があるが両者はほぼ一致している。

解析の対象とした60出水のうち、係数 G_2, G_3 は常に正の値であったが、 G_0, G_1 に関しては負の値となる場合が多数あった。表-3は、これらの結果をまと

めたものである。60出水資料の周波数特性を解析し、このうち20個が図-6のような周波数特性を示し、これらの資料を棄却した。ハイドログラフ減水部の第2折曲点と思われる時刻を直接流出量の終了時刻としたとき、採用した40個の資料のうち G_0 のみが

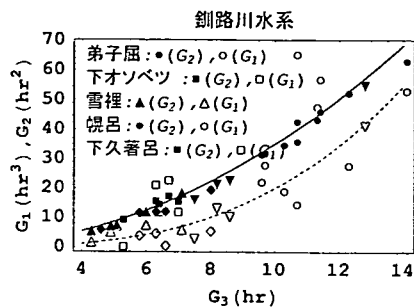
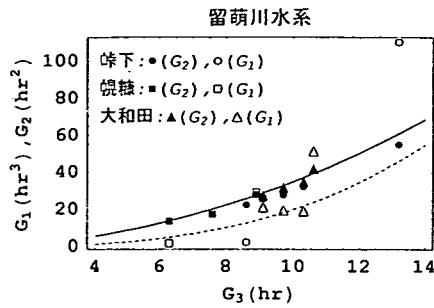


図-11 G_1, G_2 と G_3 の関係

負になったケースは 18 例, G_0, G_1 が負になったケースは 8 例であった. G_0 の同定値が負になる場合が多く, G_0 を除いて G_1, G_2, G_3 について解析した.

図-10 は, 採用した全ての資料について平均降雨量と G_1, G_2, G_3 の関係をプロットしたものである. 式(1)に示すように等価周波数伝達関数は \bar{r} の関数になっており, 等価周波数伝達関数より計算される係数 G_1, G_2, G_3 も \bar{r} の関数になっていると考えられる. 等価周波数伝達関数は, システムへの入力関数を周期関数に限定している. 任意の降雨波形はフーリエ級数展開することによって周期関数に置換できるが, このとき基本周期としてヒドログラフの継続時間を採用することが必要になる. したがって, 平均降雨量 \bar{r} は, (総降雨量)/(出水の継続時間)として定義している. 図-10 の $\bar{r} \sim G_1, G_2, G_3$ 関係は若干バラついているが, \bar{r} の増加にともない G_1, G_2, G_3 ともに減少する傾向が認められる.

5. Kinematic wave 式によるパラメータの評価

実測資料を入手できるならば, モーメント法によって遅れ系のパラメータを同定できることを示した. 次の課題は, これらのパラメータと流域特性(斜面長, 河道長, 粗度など)との関連を明らかにすることである. 山地流域を対象に流出解析を行っているので, kinematic wave 式を適用する. 藤田ら²⁾は, 斜面流出, 河道流出ともに kinematic wave 式を採用して降雨量と流域末端からの流出量間の等価周波数伝達関数を誘導し, これが低次の遅れ系の周波数伝達関数によって近似できることを明らかにしている. さらに,

遅れ系の係数を理論的に求めている. kinematic wave 式の等価周波数伝達関数の主パラメータは, 斜面や河道における平均降雨量に関する到達時間になっている. したがって, kinematic wave 式の等価周波数伝達関数より誘導できる遅れ系の係数もまた斜面や河道における平均降雨量に関する到達時間になっている. ここでは, 藤田らの理論に基づいて前章で得た実測資料より同定された遅れ系の係数から斜面や河道における到達時間を逆推定する手法を述べる.

図-11 は, 留萌川, 釧路川水系における解析結果をまとめたものである. 横軸に G_3 , 縦軸に G_1, G_2 をプロットしている. $G_1 < 0$ の場合は除いている. 図中の破線と実線は式(48),(49)を表している.

$$G_1 = 0.02G_3^3 \quad (48)$$

$$G_2 = 0.35G_3^2 \quad (49)$$

ここでは, 先ず, 式(48),(49)の関係式の微分方程式における意味合いをインパルス応答関数とゲイン特性を介して検討する. 式(18)のインパルス応答関数 $z_{q2}(t)$ は, 周知のように, 式(50)で定義される D の符号によって, 式(51),(53),(54)の 3 種類の式形がある.

$$D = G_3^2 - 4G_2 \quad (50)$$

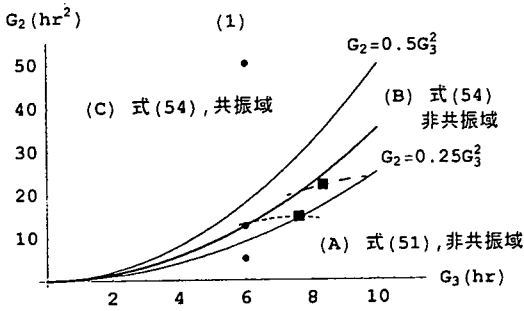
$$D > 0 \quad z_{q2}(t) = \frac{1}{G_2(a-b)} \{ e^{-at} - e^{-bt} \} \quad (51)$$

$$a, b = \frac{1}{2G_2} \{ -G_3 \pm \sqrt{D} \} \quad (52)$$

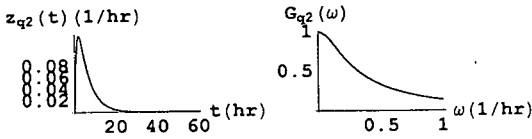
$$D = 0 \quad z_{q2}(t) = \frac{4}{G_3^2} t e^{-2t/G_3} \quad (53)$$

$$D < 0 \quad z_{q2}(t) = \frac{2}{\sqrt{-D}} e^{-G_3 t / (2G_2)} \sin \left(\frac{\sqrt{-D}}{2G_2} t \right) \quad (54)$$

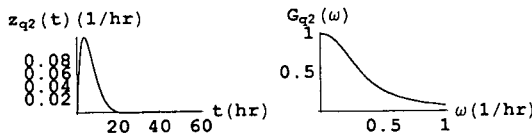
一方, 式(20)の $Z_{q2}(j\omega)$ のゲイン $G_{q2}(\omega)$ は, 係数



(2) A領域 $G_2=5(\text{hr}^2)$ $G_3=6(\text{hr})$



(3) B領域 $G_2=12.6(\text{hr}^2)$ $G_3=6(\text{hr})$



(4) C領域 $G_2=50(\text{hr}^2)$ $G_3=6(\text{hr})$

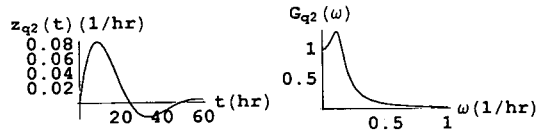
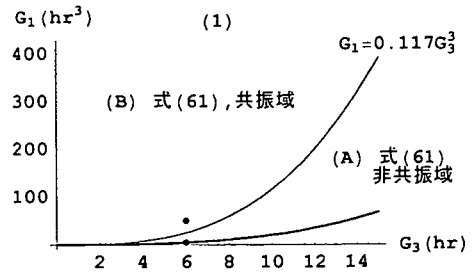
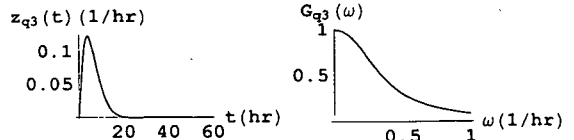


図-12 2次遅れのインパルス応答関数とゲイン特性

G_2, G_3 が $G_2 > 0.5G_3^2$ を満たすか否かによって、共振域と非共振域に分類できる。図-12(1)は、 $G_2 \sim G_3$ 平面上にインパルス応答関数とゲインの特長をプロットしたものである。(A)は、 $z_{q2}(t)$ が式(51)で与えられゲインの非共振域を表している。(B)は、 $z_{q2}(t)$ が式(54)で与えられ同じくゲインの非共振域を示している。式(39)は、 G_2, G_3 が非共振域に位置するための条件になっている。(B)領域の太実線は、式(49)を表している。実測資料より求まる G_2, G_3 は、この(B)領域に存在している。図-12(2)~(4)は、図-12(1)に示す●の (G_3, G_2) の値を用いて計算したインパルス応答関数とゲインを示している。(B),(C)領域ともにインパルス応答関数は式(54)で与えられ、式形は正負に振動する関数である。しかし、図-12(3)に示すように、(B)領域では振動が無視できて、ゲイン $G_{q2}(\omega)$ も



(2) A領域 $G_1=4.3(\text{hr}^3)$ $G_2=12.6(\text{hr}^2)$ $G_3=6(\text{hr})$



(3) B領域 $G_1=50(\text{hr}^3)$ $G_2=12.6(\text{hr}^2)$ $G_3=6(\text{hr})$

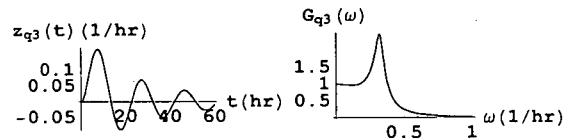


図-13 3次遅れのインパルス応答関数とゲインの特性

低域フィルターの性質を有している。また、図-12(1)の点線と鎖線は図-8の t_q 時刻毎の (G_2, G_3) をプロットしている(点線：釧路川水系雪裡、鎖線：留萌川水系峠下)。 t_q の増大にとともに (G_2, G_3) の軌跡は点線、鎖線上を左から右へと移動している。図中の■印は、それぞれの出水資料で減水部の第2折曲点と思われる t_q 時刻の (G_2, G_3) を示している。

次に、式(14)について考えてみよう。式(14)のインパルス応答関数 $z_{q3}(t)$ は、式(55)の実根の数によって決定される。

$$y = G_1 \left(S^3 + \frac{G_2}{G_1} S^2 + \frac{G_3}{G_1} S + \frac{1}{G_1} \right) \quad (55)$$

式(55)の根は、次のように分類できる。

$$y = G_1(S+a)(S+b)(S+c) \quad (56)$$

$$y = G_1(S+a)(S+b)^2 \quad (57)$$

$$y = G_1(S+b) \{ (S+a)^2 + c^2 \} \quad (58)$$

式(56),(57),(58)は、式(55)が 3,2,1 個の実根を持つ場合である。式(56),(57),(58)に対応して(59),(60),(61)のインパルス応答関数を誘導できる。

$$z_{q3}(t) = \frac{1}{G_1} \left\{ \frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)} \right\} \quad (59)$$

$$z_{q3}(t) = \frac{1}{G_1(a-b)^2} \left[e^{-at} + \{(a-b)t-1\} e^{-bt} \right] \quad (60)$$

$$z_{q3}(t) = \frac{1}{G_1 \{(b-a)^2 + c^2\}} \left\{ e^{-bt} + \frac{\sqrt{(b-a)^2 + c^2}}{c} e^{-at} \sin(ct - \varphi) \right\} \quad (61)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{c}{b-a} \right) \quad (62)$$

式(49)の関係式を用いると、 $G_3 > 0, G_1 > 0$ の全領域で $z_{q3}(t)$ を式(61)で記述できることがわかった。また、式(16)の $Z_{q3}(j\omega)$ のゲインは、図-13(1)に示すように分類できる。図中の太実線は式(48)を表している。実測資料より求まる $G_1 \sim G_3$ 関係は、図-13(1)の(A)の非共振域に位置しているが、 $z_{q3}(t)$ のインパルス応答関数は、式(61)に示すように正負に振動する関数形になっている。図-13(1)の(A),(B)領域の●で示す (G_1, G_2, G_3) の値を用いたインパルス応答関数、ゲインの計算結果を図-13(2),(3)に示す。(A)領域のインパルス応答関数は、式形として式(61)の正負に振動する関数になっているが、その振動の程度が極めて小さく振動を無視できる。図-12, 13の(1)の共振域に入る係数 G_1, G_2, G_3 が同定されたならば、これらの係数を用いた流出量の再現計算結果は、周知のようにハイドログラフの減水部が正負に振動し、非現実的な流量を得ることになる。

次に、式(48),(49)の関係式が成立している理由について考えてみよう。図-11の $G_3 \sim G_1, G_2$ 関係は、流域面積、河道網のマグニチュード、河道網パターンの異なる流域から得られたものである。それにもかかわらず、釧路川、留萌川両水系ともに $G_3 \sim G_1, G_2$ 関係が式(48),(49)で表されるには、必然的な理由があると考えたからである。

藤田ら²⁾は、斜面流出、河道流出ともに kinematic wave 式で説明できるものとして、河道網パターンが生起確率を考慮したマグニチュード m の河道網における遅れ系の係数 G_1, G_2, G_3 の期待値 $\bar{G}_i, i=1,2,3$ を求めている。 $\bar{G}_{3,m}$ および $\bar{G}_{2,m}$ を計算するに必要な $\bar{G}_{3,m}^2, \bar{V}_m$ を次のように表すこともできる。

$$\bar{G}_{3,m} = \frac{t_s}{1+p_s} + \frac{t_c}{1+p_c} K_1(m) \quad (63)$$

$$\bar{G}_{3,m}^2 = \left(\frac{t_s}{1+p_s} \right)^2 + \left(\frac{t_s}{1+p_s} \right) \left(\frac{t_c}{1+p_c} \right) K_2(m) + \left(\frac{t_c}{1+p_c} \right)^2 K_3(m) \quad (64)$$

$$\bar{V}_m = -\frac{2(1+p_s)}{2+p_s} \left(\frac{t_s}{1+p_s} \right)^2 + \left(\frac{t_s}{1+p_s} \right) \left(\frac{t_c}{1+p_c} \right) K_4(m) + \left(\frac{t_c}{1+p_c} \right)^2 K_5(m) \quad (65)$$

$$K_1(m) = \frac{1}{2m-1} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1) K_1(m-i) + (2i-1) K_1(i) \} + \mu_2 \right] \quad (66)$$

$$K_2(m) = \frac{1}{(2m-1)^2} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1)^2 K_2(m-i) + (2i-1)^2 K_2(i) + 2(2m-2i-1)(2i-1) \{ K_1(m-i) + K_1(i) \} + 2(2m-2i-1) \{ K_1(m-i) + \mu_2 \} + 2(2i-1) \{ K_1(i) + \mu_2 \} \} + 2\mu_2 \right] \quad (67)$$

$$K_3(m) = \frac{1}{(2m-1)^2} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1)^2 K_3(m-i) + (2i-1)^2 K_3(i) + 2(2m-2i-1)(2i-1) K_1(m-i) K_1(i) + 2\mu_2 \times \{ (2m-2i-1) K_1(m-i) + (2i-1) K_1(i) \} + \mu_2^2 \} \right] \quad (68)$$

$$K_4(m) = \frac{1}{2m-1} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1) K_4(m-i) + (2i-1) K_4(i) - 2(1+p_c) \mu_1 (2m-2) \} - 2(1+p_c) (2m-1)^{1/p_c} + 2p_c \mu_2 \right] \quad (69)$$

$$K_5(m) = \frac{1}{2m-1} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1) K_5(m-i) + (2i-1) K_5(i) - 2(1+p_c) \mu_1 \{ (2m-2i-1) K_1(m-i) + (2i-1) K_1(i) \} \} + 2p_c (1+p_c) (2m-1)^{1/p_c} \mu_2 - \frac{p_c (1+p_c)^2 \mu_3}{2+p_c} + (1+p_c)^2 \left\{ (2m-2)^{(1+p_c)/p_c} \mu_1 - (2m-1)^{1/p_c} \mu_2 \right\} \right] \quad (70)$$

$$\mu_1 = (2m-1)^{1/p_c} - (2m-2)^{1/p_c} \quad (71)$$

$$\mu_2 = (2m-1)^{(1+p_c)/p_c} - (2m-2)^{(1+p_c)/p_c} \quad (72)$$

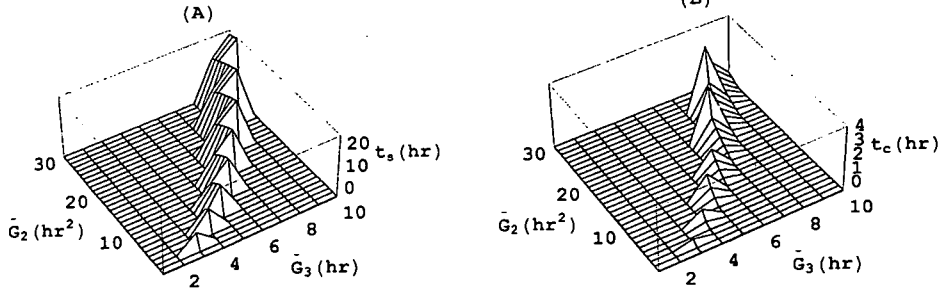


図-14 $t_s, t_c \sim \bar{G}_{2,m}, \bar{G}_{3,m}$ の関係 ($m=20, p_s = p_c = 5/3$)

$$\mu_3 = (2m-1)^{(2+p_c)/p_c} - (2m-2)^{(2+p_c)/p_c} \quad (73)$$

$$K_1(l) = 1 \quad K_2(l) = 2 \quad K_3(l) = 1 \quad (74)$$

$$K_4(l) = -2 \quad K_5(l) = \frac{-2(1+p_c)}{(2+p_c)} \quad (75)$$

$\bar{G}_{2,m}$ は、次式によって与えられる。

$$\bar{G}_{2,m} = \frac{1}{2} (\bar{V}_m + 2\bar{G}_{3,m}^2) \quad (76)$$

式(63)~(70)を式(76)に代入して整理することによって次式を得る。

$$\bar{G}_{2,m} = \frac{1}{2+p_s} \left(\frac{t_s}{1+p_s} \right)^2 + \left(\frac{t_s}{1+p_s} \right) \left(\frac{t_c}{1+p_c} \right) M_1(m) + \left(\frac{t_c}{1+p_c} \right)^2 M_2(m) \quad (77)$$

$$M_1(m) = \frac{1}{2} \{ 2K_2(m) + K_4(m) \} \quad (78)$$

$$M_2(m) = \frac{1}{2} \{ 2K_3(m) + K_5(m) \} \quad (79)$$

$p(m, i)$ は、マグニチュード m の河道網において最下流の合流点で河道網を 2 分したとき、2 個の河道網のマグニチュードがそれぞれ $i, m-i$ となる河道網パターン群の生起確率である²⁾。 $K_i, i=1\sim 5$ は、河道網のマグニチュード m および p_c の関数になっている。マグニチュード m の河道網流域は、 $(2m-1)$ 個の部分流域より構成されている。式(63)~(77)は、これらの部分流域の斜面長および河道長が全て等しいと仮定して誘導されたものである。したがって、式(63),(77)の到達時間 t_c, t_s は、次式によって与えられる。

$$t_c = \left\{ \frac{(2\bar{r}l_s)^{1-p_c} l_c}{\beta} \right\}^{1/p_c} \quad (80)$$

$$t_s = \left\{ \frac{(\bar{r})^{1-p_s} l_s}{\alpha} \right\}^{1/p_s} \quad (81)$$

ここに、 \bar{r} は平均降雨量である。 l_s, l_c は代表斜面長、河道長を表している。また、 α, p_s および β, p_c は、斜面域、河道域の kinematic wave 定数を示している。

一方、藤田は、式(82),(83)の無次元数 D_1, D_2 は、到達時間 t_s, t_c 、河道網のマグニチュードに依存することなく、 $0 < D_1 < 0.09, 0.35 < D_2 < 0.42$ の範囲をとっていること指摘している。

$$D_1 = \frac{\bar{G}_{1,m}}{(\bar{G}_{3,m})^3} \quad (82)$$

$$D_2 = \frac{\bar{G}_{2,m}}{(\bar{G}_{3,m})^2} \quad (83)$$

$\bar{G}_{i,m}, i=1,2,3$ は、マグニチュード m の河道網流域における $G_i, i=1,2,3$ の期待値である。しかし、付録に示すように $G_i, i=1,2,3$ の分散が極めて小さい。したがって、 $\bar{G}_{i,m}, i=1,2,3$ は期待値、式(48),(49)の $G_i, i=1,2,3$ は実現値の相違があるが、実質的には次式を仮定できる。

$$\bar{G}_{i,m} = G_i \quad i=1,2,3 \quad (84)$$

したがって、 D_1, D_2 は式(48),(49)の係数 0.02, 0.35 に対応していると考えることができる。これらの係数は理論的に導出した D_1, D_2 の値の範囲に入っている。

式(77),(63)の係数 $\bar{G}_{2,m}, \bar{G}_{3,m}$ を規定しているパラメータは、 t_s, p_s, t_c, p_c の 4 個になっている。 p_c, p_s 、河道網のマグニチュード m および $\bar{G}_{2,m}, \bar{G}_{3,m}$ が既知ならば、 t_s, t_c は式(63),(77)の 2 次方程式の解として与えられる。図-14 は、 $t_s, t_c \sim \bar{G}_{2,m}, \bar{G}_{3,m}$ 関係を示している。図では、式(85)を満たす t_s, t_c だけを示しており、式(85)を満足しない t_s, t_c を 0 と表示している。

$$t_s > t_c > 0 \quad (85)$$

式(85)を満たす t_s, t_c は、 $(\bar{G}_{2,m}, \bar{G}_{3,m})$ 平面上の極めて狭い範囲に限定されていることがわかる。 t_s, t_c の減

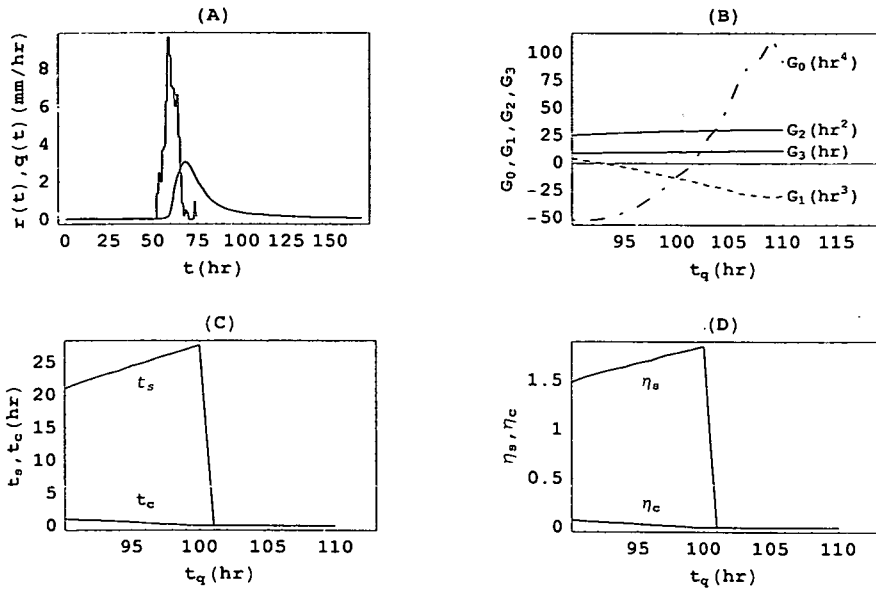


図-15 計算結果の一例(留萌川水系峠下地点, 1981/9/2)

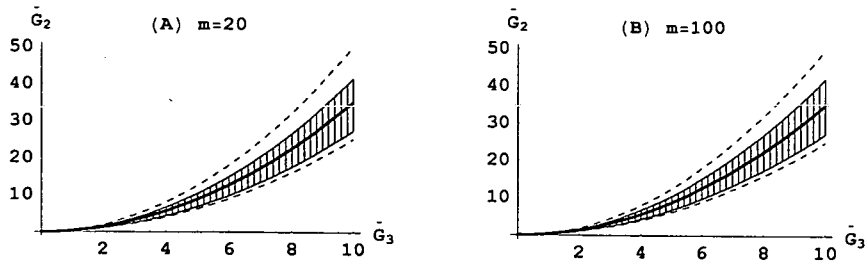


図-16 t_s, t_c の存在域

少にともない G_2, G_3 もまた減少すると言える。式(80),(81)において $p_s, p_c > 1$ とするならば、 \bar{r} が増加すると t_s, t_c は減少することになる。したがって、図-10で \bar{r} の増加にともない G_2, G_3 が減少する傾向を説明できる。

図-15 は、留萌川水系峠下地点における解析結果の一例を示している。(A)は、実測雨量と流出量を表している。(B)は、直接流出量の開始時刻を 56(hr)とし、終了時刻 t_q を変化させたときの係数 G_0, G_1, G_2, G_3 の時間変化を示している。 G_2, G_3 の時間変化量は少ないが、 G_0, G_1 の時間変化量は大きく、この傾向は他の出水資料でも同様であった。図-15(C)は、 t_s, t_c を逆算した結果を示している。なお、計算にあたって $p_c = p_s = 5/3$ としている。 $t_q > 100(\text{hr})$ になると $t_s = t_c = 0$ になっているが、これは

式(85)を満足する t_s, t_c が得られなかったことを示している。このように、直接流出量の終了時刻 t_q の値によって t_s, t_c を計算できない場合がある。

図-16 は、式(63),(77)の解 $t_s, t_c (p_s = p_c = 5/3)$ が式(85)を満たす存在域(縦縞の領域)を (\bar{G}_2, \bar{G}_3) 平面上に示している。図では、マグニチュード $m = 20, 100$ の場合を示している。河道網のマグニチュードによる上記領域の変化は微小で、極めて狭い領域になっている。図中の太実線は式(49)を表わしている。また、図中の点線は、図-12(1)の(B)領域の境界を表している。したがって、図-1(1)の(B)領域に入る G_2, G_3 が同定されたとしても、式(85)を満たす t_s, t_c を得ることのできない場合がある。解析した留萌川、釧路川水系の資料(40 資料)ではハイドログラフの減水部第 2 折曲点と思われる t_q 時刻で式(85)を満足する

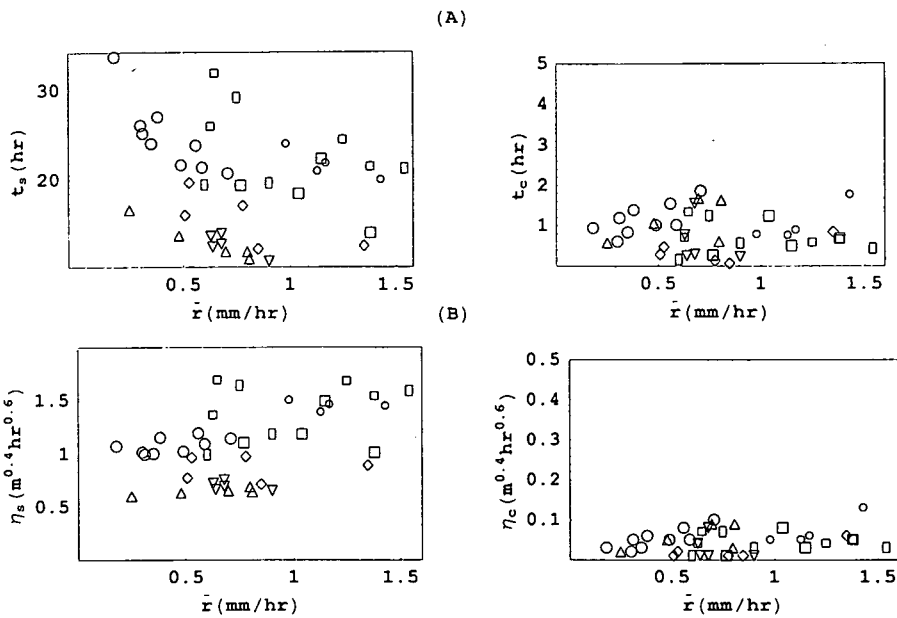


図-17 \bar{r} と η_s, η_c の関係

t_s, t_c が得られている。図-6 のような周波数特性を示す資料では、式(85)を満たす解の無い場合が多かったことを付記しておく。例えば、図-12(1)の点線(雪裡地点)上の■印は、先に述べたようにハイドログラフ減水部の第2折曲点と思われる時刻の(G_2, G_3)の位置を表している。(B)の領域内にあるが、境界近傍に位置し式(85)を満足する t_s, t_c を得ることのできない場合である。

図-15(D)は、式(86),(87)で定義される η_s, η_c を示している。

$$\eta_s = \left(\frac{I_s}{\alpha} \right)^{1/p_s} \quad (86)$$

$$\eta_c = \left(\frac{(2I_s)^{1-p_c} I_c}{\beta} \right)^{1/p_c} \quad (87)$$

η_s, η_c は、式(80),(81)の到達時間 t_s, t_c から \bar{r} の項を取り除いたものである。これらは、降雨条件に依存することなく、地形や表層地質、河床材料、河道断面形状によって規定されるパラメータになっている。このことを確認するために、採用した全ての資料に関して、 \bar{r} と t_s, t_c および η_s, η_c の関係をプロットした結果を図-17 に示している。(A)は、 \bar{r} と t_s, t_c の関係を示しているが、 \bar{r} の増加にともない t_s, t_c とともに減

少する傾向が認められる。一方、(B)は \bar{r} と η_s, η_c の関係を表している。 \bar{r} の影響がほぼ除かれ、流域によってほぼ一定の η_s, η_c が得られた。表-3 の $\bar{\eta}_s, \bar{\eta}_c$ は、各流域の η_s, η_c の平均値を表している。ここでは $\bar{\eta}_s, \bar{\eta}_c$ を流域指標と呼ぶ。

次に、流域指標の代表性を検定するために流出量の再現計算を行った。図-18 は留萌川水系峠下地点における再現計算例である。太実線は、実流量を示している。細実線は、実測資料より得られる係数 G_1, G_2, G_3 (図-18 では添字 OB が付いている) と式(14),(18)を用いた流出量を表している。 $G_1 > 0$ ならば式(14)、 $G_1 < 0$ ならば式(18)を使用している。したがって、図-18(1),(4)は式(14)による計算結果、(2),(3)は式(18)による計算結果になっている。また、 $\bar{\eta}_s, \bar{\eta}_c$ と \bar{r} が既知ならば各出水ごとに到達時間 t_s, t_c を計算できる ($p_s = p_c = 5/3$)。したがって、各流域のマグニチュード m が与えられると $\bar{G}_{i,m}$ $i=1,2,3$ を理論的に計算できる(図-18 では添字 CAL が付いている)。図-18 の峠下地点では $G_{1,CAL}$ が全て負の値になっている。点線は、 $\bar{G}_{2,CAL}, \bar{G}_{3,CAL}$ を式(18)の G_2, G_3 に代入して求めた流出量を示している。流域指標 $\bar{\eta}_s, \bar{\eta}_c$ を用いた再現計算は良好な結果を与えている。紙面の関係で他の流域の再現計算結果を省略したが、図-18 と同様

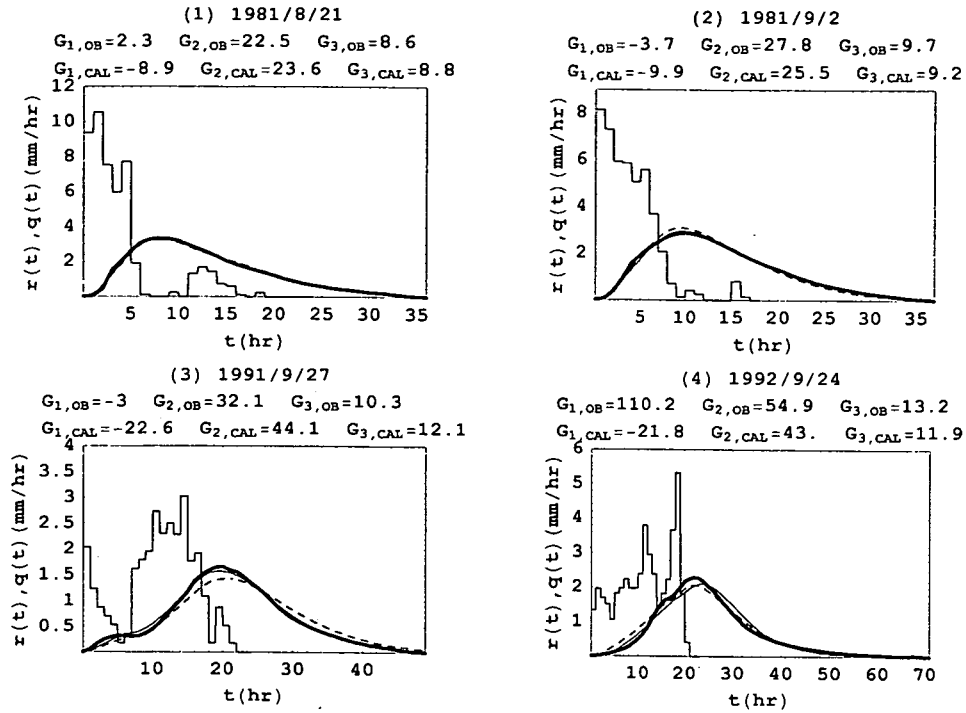


図-18 留萌川水系峠下地点における流出量の再現計算結果

な精度の再現計算結果であった。実用的には十分な精度の流出量の再現計算結果と言える。

実測降雨量、流量資料より得られた t_s, t_c を用いて、斜面と河道の粗度係数 n_s, n_c がどの程度のオーダーになっているかを確認しておこう。Kinematic wave式より、定数 α, β は、次式によって定義される。

$$\alpha = \frac{\sqrt{l_s}}{n_s} \quad (88)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{l_c} W^{-2/3}}{n_c} \quad (89)$$

l_s, l_c は、斜面および河道勾配である。式(89)は、矩形断面河道を想定して得られたもので、 W は河道幅を表している。マグニチュード m の河道網流域は、 $(2m-1)$ 個の部分流域より構成されている。したがって、部分流域の平均面積 \bar{A} (km^2)は次式で与えられる。

$$\bar{A} = \frac{A_r}{2m-1} \quad (90)$$

A_r は全流域面積である。部分流域を矩形とすると、代表斜面長、河道長 l_s, l_c は、次式を満足している。

表-4 定数 α, β と粗度係数

観測所	α $1/(\text{m}^{2/3}\text{hr})$	β $1/(\text{m}^{1/3}\text{hr})$	n_s $\text{secm}^{-1/3}$	n_c $\text{secm}^{-1/3}$	
留 峠下	371.6	3928.3	4.06	0.014	
萌 幌糠	429.9	3989.3	3.52	0.014	
川 大和田	308.6	1625.3	4.90	0.034	
鉏 弟子屈	469.2	2622.3	3.22	0.021	
	下オソ	1492.2	2997.9	1.03	0.018
路 べつ	雪裡	1605.2	10046.0	0.94	0.005
	幌呂	865.8	13565.6	1.75	0.004
川 下久著	302.8	4877.2	4.99	0.011	
	呂				

$$l_c = 1.273\bar{A}^{-0.6} \quad (91)$$

$$\bar{A} = 2l_s l_c \quad (92)$$

部分流域面積とその河道長 l_c (km)に関して、Hackの式を適用できるものとして次式を用いている⁴⁾。したがって、流域面積とマグニチュードが既知であれば

ば、代表斜面長、河道長 l_s, l_c を推定できる。表-1, 2に与えられている流域面積、マグニチュードを用いて、各地点の l_s, l_c を求め、 η_s, η_c として表-3の $\bar{\eta}_s, \bar{\eta}_c$ を用いて定数 α, β を逆算した結果を表-4に示している。 n_s, n_c のオーダーを確認するために、斜面、河道の傾斜角度を10, 0.5度、 $W=15(\text{m})$ として n_s, n_c を求めた結果を表-4に示している。 n_s は、角屋⁵⁾の与えている等価粗度係数の大きさにほぼ一致している。また、 n_c は、山地流路の粗度係数の範囲⁶⁾に入っている。式(88)では、等価粗度係数を用いて α を評価しているが、例えば、松林ら⁷⁾の不飽和浸透流式の集中化の結果得られるkinematic waveに類似した関係式を用いるならば、斜面土壌の特性を介して α を評価することもできる。

6. まとめ

本論文で得られた主たる結果をまとめると以下のようになる。

- (1) 実測資料を用いて、微分方程式の係数 G_0, G_1, G_2, G_3 をモーメント法で同定する手法を提案した。
- (2) 降雨量～流出量間の対応関係の良否を等価周波数伝達関数によって確認できること示した。
- (3) 北海道内の留萌川水系、釧路川水系の合計8地点で実測資料を用いて解析した。この結果、遅れ系のパラメータ G_0, G_1 は負になる場合が多く、実質上、降雨量～流出量関係を2階微分方程式で近似すると充分であることがわかった。
- (4) 実測資料より得られた定数 G_1, G_2, G_3 は平均降雨量が増加すると減少する関係にあることを明らかにし、kinematic wave式を用いた理論解析でもこの関係が成立していることを示した。
- (5) 斜面域、河道域における到達時間および流域指標 η_s, η_c を求めた。これらの計算は、斜面長、河道長の全て等しく、かつ、斜面域、河道域のkinematic wave定数も等しいとした簡便的な手法を採用しているので今後の検討が必要と思われる。
- (6) 厳密に考えるならば、次のような問題点がある。

すなわち、 η_s, η_c は、表-4, 5のマグニチュード m を用いて計算している。ここでは、マグニチュードを5万分の1地形図より求めたが、2.5万分の1地形図を用いると異なったマグニチュードが得られるはずである。これによって、流域指標 η_s, η_c も異なることになる。河道網のマグニチュードの定義について、今後検討する必要がある。

謝辞：本研究は(財)北海道河川防災研究センターの研究助成を受けたものである。関係各位に謝意を表します。

付録 G_3 の分散の計算

文献2)を参照して、次式を得る。

$$\bar{G}_{3,m} = \frac{1}{2m-1} \left[E_1 + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1) \bar{G}_{3,m-i} + (2i-1) \bar{G}_{3,i} \} \right] \quad m \geq 2. \quad (\text{A1})$$

$$E[G_3^2]_m = \frac{1}{(2m-1)^2} \left[E_1^2 + \sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} p(m,i) \{ (2m-2i-1)^2 E[G_3^2]_{m-i} + (2i-1)^2 E[G_3^2]_{m-i} + 2(2m-2i-1)(2i-1) \bar{G}_{3,m-i} \bar{G}_{3,i} + 2(2m-2i-1) E_1 \bar{G}_{3,m-i} + 2(2i-1) E_1 \bar{G}_{3,i} \} \right] \quad (\text{A2})$$

[] : ガウス記号

$\bar{G}_{3,m}, E[G_3^2]_m$ は、マグニチュード m の河道網における係数 G_3 の期待値と2乗平均値を示している。

$$\bar{G}_{3,1} = \frac{t_s}{1+p_s} + \frac{t_c}{1+p_c} \quad (\text{A3})$$

$$E[G_3^2]_1 = (\bar{G}_{3,1})^2 \quad (\text{A4})$$

$$E_1 = \frac{t_s}{1+p_s} + \frac{f_1}{1+p_c} \quad (\text{A5})$$

$$f_1 = (2m-1)t_{c31} - (2m-2)t_{c32} \quad (\text{A6})$$

$$t_{c31} = (2m-1)^{1/p_c} t_c, t_{c32} = (2m-2)^{1/p_c} t_c \quad (\text{A7})$$

式(A3),(A4)を初期値として、 $m \geq 2$ の範囲で $\bar{G}_{3,m}, E[G_3^2]_m$ を計算できる。

図-A1 は、 $t_s = 20(\text{hr}), t_c = 1(\text{hr}), p_s = p_c = 5/3$ として河道網のマグニチュードと $G_{3,m}$ の平均値とその変動係数の関係を示している。 $G_{3,m}$ の分散の小さいことが

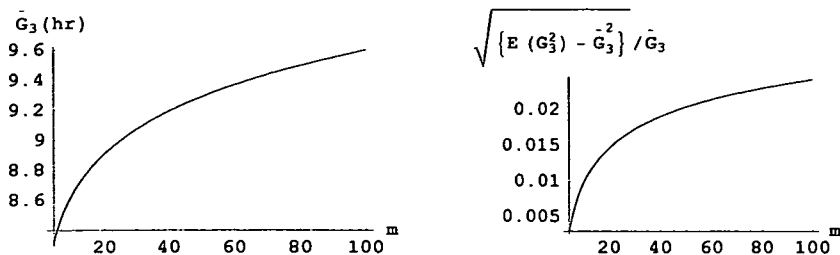


図-A1 河道網のマグニユードと G_3 の平均値と変動係数

わかる。 $G_{2,m}$ についても同様な計算をすることができ、図-A1 と同様に $G_{2,m}$ の分散が小さいが、紙面の関係で記述を省略する。

参考文献

- 1) Luai HAMOUDA and Mutsuhiro FUJITA : Application of the Equivalent Frequency Response Method to Nonlinear Runoff System-St. Venant Equation and Related Models-, 土木学会論文集, No.677/II-55, pp.189-203, 2001
- 2) 藤田睦博, Surakha WANPHEN, 田中岳, 清水康行 : 等価周波数伝達関数に基づく kinematic wave モデルの集中化に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No.726/II-62, pp. 11-30, 2003
- 3) 藤田睦博, 吉田謙太郎, Surakha WANPHEN : 等価周波数伝達関数と遅れ系に基づく流出モデルの選択, 水工学論文集, 第 47 巻, pp.235-240, 2003
- 4) 早川博(博士論文) : 流域地形構造を考慮した降雨流出系の確率応答と流域スケールに関する研究, pp.27-30, 1997
- 5) 角屋睦 : 流出解析の手法(その 6), 農業土木学会誌, 第 48 巻, 第 6 号, 1980
- 6) 土木学会編, 水理公式集, pp.89,1999
- 7) 松林宇一郎, 高木不折, 古田直 : 不飽和浸透流理論に基づく斜面流出モデルの集中化について, 土木学会論文集, No.497/II-28, pp.11-20, 1994

(2002. 1. 1 受付)

THE EQUIVALENT FREQUENCY RESPONSE METHOD OF THE KINEMATIC WAVE MODEL AND ITS APPLICATION TO RUNOFF ANALYSIS

Mutsuhiro FUJITA, Surakha WANPHEN, Gaku TANAKA and Yasuyuki SHIMIZU

In this paper, results obtained from our previous study (Study on the Lumping process of the kinematic wave model based on the equivalent frequency transfer function) were applied to a practical runoff analysis. Conclusions are summarized below.

(1) This paper showed the method to examine the compatibility between observed rainfall and discharge through characteristics of the equivalent frequency transfer function. Twenty flood of 60 flood events at the Rumoi River and Kusiro River basins show poor compatibility. (2) A new method (moment method) to identify parameters of delay systems is proposed. This paper points out these parameters are function of average rainfall. (3) The method to calculate the time of concentration for slopes and channels based on parameters of delay system is presented. (4) Two new indices which specify the characteristics for slopes and channels are presented.