

BF/MCFによる対数正規確率場の補間

丸山收¹・星谷勝²

¹正会員 工博 武蔵工業大学助教授 工学部都市基盤工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

²正会員 Ph.D. 武蔵工業大学教授 工学部都市基盤工学科 (〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1)

本研究は、Bootstrap Filter/Monte Carlo Filter が対数正規確率場の補間手法として有効であることを示している。BF/MCF は、一部の観測サンプル実現値を条件として更新後の確率場のサンプル値を抽出し、これらを用いて場の条件付確率密度関数を推定する手法である。ここでは、数値解析例により既知の厳密解と比較することにより補間が効率的に実行出来ることを示している。なお、対数正規確率場は、解の妥当性を検証するために用いており、本補間手法は、任意非ガウス性確率場に対しても適用可能である。

Key Words: conditional random field, Kalman filter, Bootstrap filter, Monte Carlo filter
stochastic interpolation, system identification

1. はじめに

不確定性を有する現象または構造系に対して、有限個の観測情報が得られる場合に事前確率場の更新を行い、事後または条件付確率場を推定することは、確率場の更新理論に集約され多くの研究が行われてきた。

地震動特性を把握するために、波動伝播現象を時空間ガウス性確率場として、任意点での時系列波形が観測された条件のもとで、非観測点における波動現象を補間する試みがなされている。Vanmarcke and Fenton¹⁾、Kameda and Morikawa²⁾は非観測点の確率場の特性を満足するように周波数領域で定式化する手法を示し、丸山・星谷・山口³⁾、川上・小野⁴⁾、および清野・鈴木⁵⁾は時間領域での定式化を行っている。

静的確率場を対象とした研究では、鈴木・石井⁶⁾はKriging法を用い、非観測点における地盤物性値の補間理論を示した。Hoshiya⁷⁾は、ガウス性確率場に対する補間理論および条件付シミュレーション理論を提案している。非ガウス性確率場を対象として、Noda and Hoshiya⁸⁾は対数正規確率場の補間理論を定式化し、さらにHoshiya, Noda and Inada⁹⁾は等価ガウス変換による任意非ガウス性確率場に適用可能な理論を示している。

以上、確率論をもとにした情報更新に関する研究について概観したが、非ガウス性を対象とする場合にはガウス性確率場の更新理論を基本として、近似理論解を求

めることが一般的である。その際、対象とする問題ごとに解析的な近似理論解を誘導する必要があり、特に物理現象の支配方程式を考慮する場合には、非線形関係式で与えられる出力または応答の確率密度関数をモデル化することが困難である場合が多い。

これらの背景から、任意の非線形性および非ガウス性に対して適応可能な Bootstrap filter¹⁰⁾/Monte Carlo filter^{11),12)}が提案されている。なお BF は Smith and Gelfand¹³⁾の研究をもとに Gordon らにより提案されており、MCF は北川が提案している手法であるが、計算機による数値実験から得られるサンプル実現値をもとに確率密度関数を表現し、これをもとに予測およびフィルタリング時における確率密度関数自体を求めるといった共通の考え方に基づいたアルゴリズムである。動的現象を対象として佐藤・梶は線形構造系のパラメータ同定問題に適用している¹⁴⁾。

本研究は、BF/MCF を静的対数正規確率場の補間問題に適用し、数値解析例に基づいて手法の有効性について検討した。

2. Bootstrap Filter¹¹⁾/Monte Carlo Filter^{10),11),12)}

ここでは確率場が時間変動を伴わない静的確率場の補間問題を対象としている。空間座標を \mathbf{z} として事前確率場 $\mathbf{x}^T = [x(z_1), x(z_2), \dots, x(z_n)]$ が任意多次元確率密度関数 $p(\mathbf{x})$ により規定されるものとし、 \mathbf{x} の一部が測

定されて1組の観測データセット y が与えられるものとする。この条件のもとで、非観測点を含む確率場の情報更新を行うこととする。具体的には、観測点においては観測ノイズの除去、非観測点においては補間を行うことになる。

状態ベクトル x と観測量との関係を記述する観測方程式を次式で与える。

$$y = Hx + w \quad (1)$$

ここで、 y は $(s \times 1)$ の観測ベクトル、 w は確率密度関数が $r(w)$ として与えられる $(s \times 1)$ の観測ノイズベクトルである。 H は $(s \times n)$ の観測点を規定する行列であり、観測点の座標に対応する成分が1となる。また、観測ノイズ w は観測ベクトル y と独立であり、 x および w はガウス性である必要はない。

BF/MCF は、事前分布を満足するサンプル実現値 $p^{(i)}$ 、 $i = 1, 2, \dots, m$ により確率密度関数を把握し、観測情報を取り込んだ事後確率密度関数をフィルタリングサンプル実現値 $f^{(i)}$ により把握するアルゴリズムである。すなわちサンプル実現値から得られるヒストグラムが、近似的に確率密度関数を表現しているという考え方に基づいている。

はじめに事前の確率密度関数は通常のモンテカルロ法と同様に確率密度関数 $p(x)$ から十分な数のサンプル実現値 $p^{(i)}$ のヒストグラムにより近似的に得られる。

一方、フィルタリングに関して次式が成り立つ。

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(x)p(y|x)dx} \quad (2)$$

対象とする確率場がガウス性の場合には、式(2)に示す事後確率密度関数の理論解を得ることが出来るが、一般的に非ガウス性を扱うことは困難である。式(2)より近似的に次式の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{Prob}(x = p^{(i)} | y) \\ = \frac{\text{Prob}(x = p^{(i)})p(y|x = p^{(i)})}{\sum_{i=1}^m \text{Prob}(x = p^{(i)})p(y|x = p^{(i)})} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 m セットのサンプル実現値 $p^{(i)}$ は事前確率密度関数から、 $1/m$ の等確率でサンプリングされたものと考えることが出来る。

$$\text{Prob}(x = p^{(i)}) = \frac{1}{m} \quad (4)$$

また条件付確率密度関数 $p(y|x = p^{(i)})$ は x をサンプル実現値 $p^{(i)}$ で置き換えた場合の y が発生する尤度 $a^{(i)}$ と解釈することができる。

$$a^{(i)} = p(y|x = p^{(i)}) \quad (5)$$

式(4)および式(5)を、式(3)に用いると次式となる。

$$\text{Prob}(x = p^{(i)} | y) = \frac{a^{(i)}}{\sum_{i=1}^m a^{(i)}} \quad (6)$$

さらに $a^{(i)}$ は、観測方程式の関数関係から算出することが出来る。式(1)より次式が得られる。

$$w = y - Hx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p(y|x) &= r[y - Hx] \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \\ &= r[y - Hx] \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)において x をサンプル実現値 $p^{(i)}$ で置き換えて、尤度 $a^{(i)}$ を求めることが出来る。

$$\begin{aligned} a^{(i)} &= p(y|x = p^{(i)}) \\ &= r[y - Hp^{(i)}] \end{aligned} \quad (9)$$

式(6)から y が与えられたという条件のもとで $x = p^{(i)}$ の発生確率は尤度 $a^{(i)}$ により重み付けされたものとなっているので、フィルタリングを行うために等確率 $1/m$ でリサンプリングすることで $f^{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, m$ を得ることが出来る^{11),12)}。さらにフィルタリングサンプル実現値 $f^{(i)}$ から条件付確率密度関数を把握することが可能となる。

3. 対数正規空間確率場の補間

Hoshiya, Noda and Inada⁹⁾は等価ガウス変換による任意非ガウス性確率場に適用可能な理論を示しており、特に確率場が対数正規確率場の場合は、理論解⁸⁾を得ることが出来るが、任意非ガウス性確率場の補間を解析的に行うためには問題ごとに近似解を定式化する必要がある。文献15)で Hoshiya は BF/MCF によると、同一の解析手順で確率場の補間が可能であることを示唆している。ここでは精度の検証のために理論解が得られる対数正規確率場の補間問題に BF/MCF を適用する。

1次元空間座標上に設定した無次元距離 1 間隔の 51 地点を対象として、事前確率場を $x^T = [x(z_1), x(z_2), \dots, x(z_{51})]$ とした。また事前確率場の平均値を 2.5、分散を 1.56(変動係数 $\delta = 0.5$)、さらに

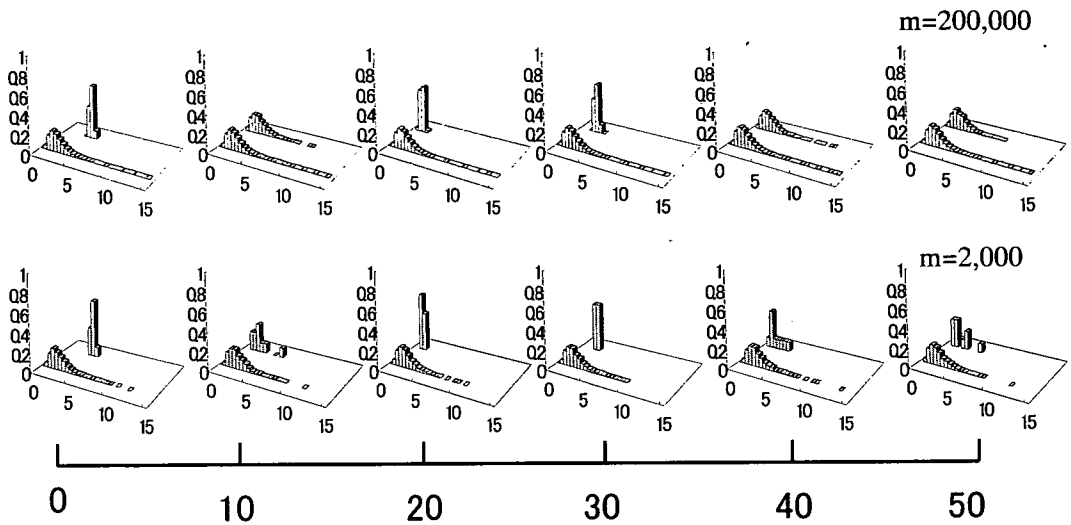


Fig. 1 Sample Distribution

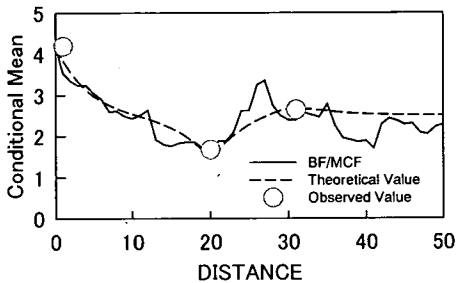


Fig. 2 Conditional Mean (m=2,000)

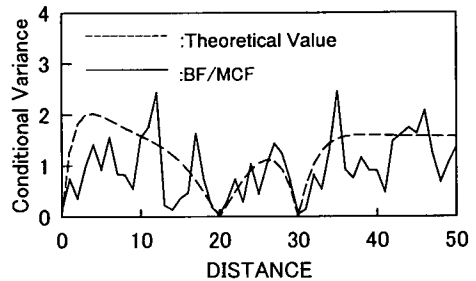


Fig. 4 Conditional Variance (m=2,000)

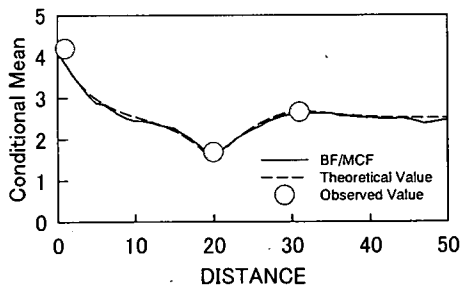


Fig. 3 Conditional Mean (m=200,000)

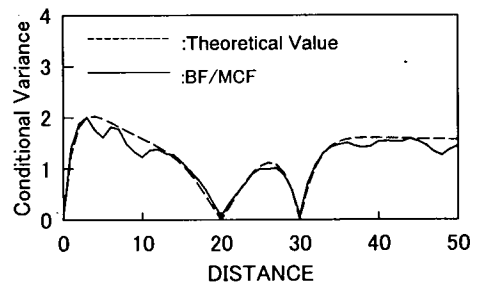


Fig. 5 Conditional Variance (m=200,000)

異なる2地点間の相関係数 ρ_{ij} を次式で与えた.

$$\rho_{ij} = \exp\left[-\frac{|\Delta_{ij}|}{4.0}\right] \quad (10)$$

ここで Δ_{ij} は異なる2地点間の距離である.

解析に際して、観測ノイズを含まない観測データが 0, 20 および 30 の3地点において1組得られるものとし、事前確率場に対して1回の更新を行うこととした。すなわち

相関を有する対数正規確率場の無条件サンプル場 $[p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(m)}]$ を作成した。次に観測条件を観測方程式として表現し、BF/MCF により確率場の更新を行った。ここでは、観測データ自体にはノイズを付加していないが、BF/MCF のアルゴリズムに対して観測ノイズの確率密度関数 $r(w)$ を $N(0, 10^{-3})$ として解析した。近似的ではあるが、観測ノイズを考慮していない場合に対応する。

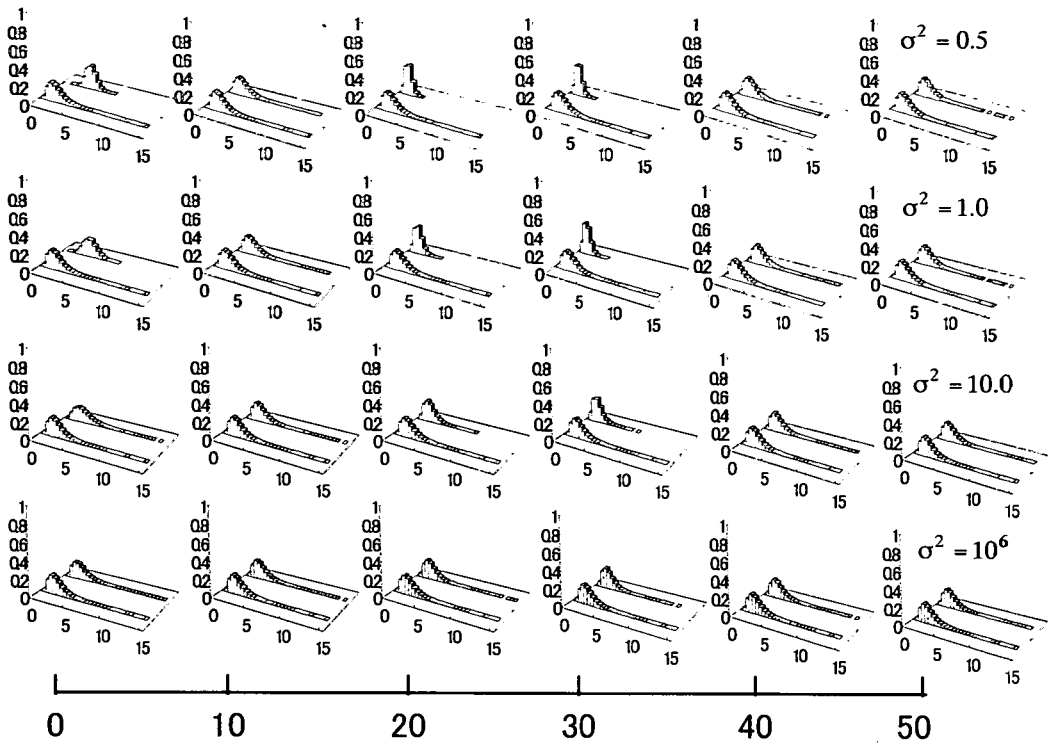


Fig. 6 Sample Distributions
($m=200,000$ and Contaminated by Observation Noise $N(0, \sigma)$)

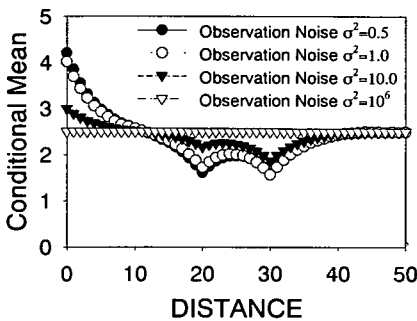


Fig. 7 Conditional Mean ($m=200,000$)

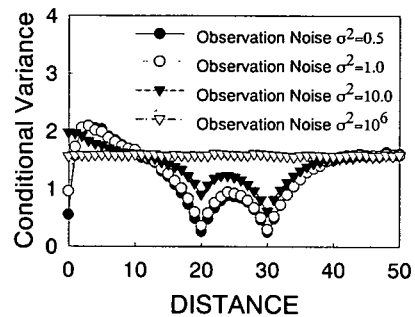


Fig. 8 Conditional Variance ($m=200,000$)

Fig. 1はサンプル数が $m=2000$, $m=200,000$ の場合に前列に事前確率密度関数, 後列に事後確率密度関数を無次元距離 10 ごとに示している。観測点に対応する点では, 条件付密度関数のばらつきが小さくなり, 決定論的になっていることが分かる。非観測点においては条件付確率密度関数を示していることになる。Fig. 2からFig. 3に, BF/MCFによる条件付平均値を示し, Fig. 4からFig. 5に条件付分散値を示している。これらは,

51 地点のサンプル実現値のヒストグラム, すなわち条件付確率密度関数から直接求められたものであり, 平滑化等の処理を行っていない。また理論解⁸⁾と比較しているが, 対象とする地点が 51 地点という多次元の問題設定となっているのにも関わらず, 十分なサンプル数 m により精度の良い推定が行われていることがわかる。

次に観測データに対して, 観測ノイズ $N(0, \sigma)$ を付加した場合について検討を行った。Fig. 6に, Fig. 1に対応する事前と事後の確率密度関数を示し, Fig. 7, Fig.

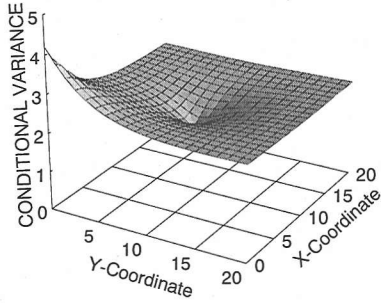


Fig. 9 Conditional Mean (Theoretical)

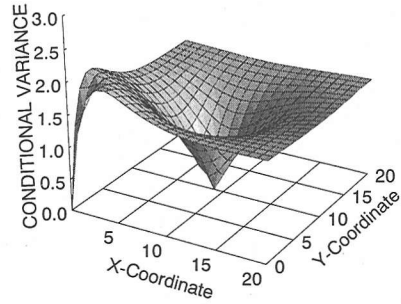


Fig. 12 Conditional Variance (Theoretical)

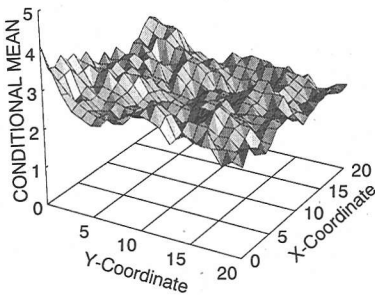


Fig. 10 Conditional Mean (m=2,000)

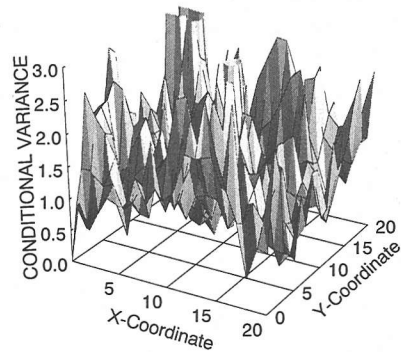


Fig. 13 Conditional Variance (m=2,000)

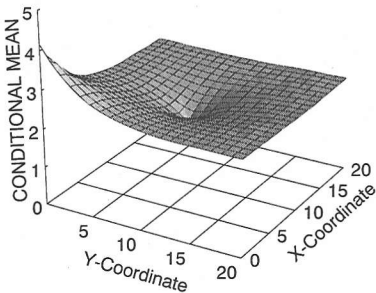


Fig. 11 Conditional Mean (m=2,000,000)

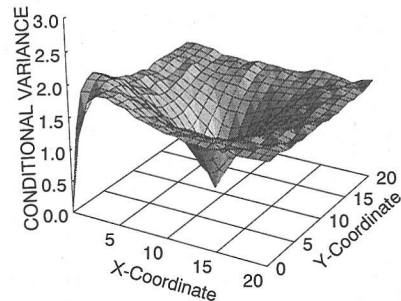


Fig. 14 Conditional Variance (m=2,000,000)

8にそれぞれ、条件付平均値、条件付分散値を示した。Fig. 6において、観測ノイズの分散が大きくなるにしたがって事前と事後の確率密度関数は、ほぼ同一のものとなっていることが分かる。一方確率密度関数から求められた条件付平均値および条件付分散値は観測ノイズの分散が大きくなるにつれて、無条件確率場の平均値および分散値に近づいており、当然のことながら情報の更新が行われていないことが分かる。

解析的手法では、観測ノイズを考慮するとその分布

形に基づいて解析解を誘導することが必要となるが、BF/MCFは与えられたノイズの尤度を式(9)をもとに算出することで、任意の確率場の更新を行うことが出来る。

次に2次元空間場の解析例を示す。ここでは、無次元距離 20×20 の2次元空間を考え、 x 座標および y 座標方向に無次元距離1間隔で格子状の441地点を設定した。2次元空間場において(0,0)および(10,10)において観測がなされるものとした。

また事前確率場の平均値を2.5、分散を1.56(変動係

数 $\delta = 0.5$), さらに異なる2地点間の相関係数 ρ_{ij} を次式で与えた.

$$\rho_{ij} = \exp \left[-\frac{\sqrt{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2)}}{4.0} \right] \quad (11)$$

ここで, Δ_x, Δ_y は, それぞれ x および y 方向の2地点間の相対距離である.

Fig. 9に条件付平均値の理論解を示し, Fig. 10からFig. 11にサンプル数 m ごとのBF/MCFによる条件付平均値を示した. 同様にFig. 12に条件付分散値の理論解, Fig. 13からFig. 14にBF/MCFによる条件付分散値を示した. これらはBF/MCFにより得られた441地点の条件確率密度関数から得られたものである. 精度を確保するために必要なサンプル数については検討を必要とするが, 2次元確率場の場合においても理論解と比較して精度良い結果が得られていることが分かる.

4. まとめ

本研究は, BF/MCFを静的非ガウス性確率場の補間問題に適用し, 解析例により手法の検討を行った.

静的空間確率場補間の例題として, 厳密に理論解が得られる対数正規確率場を対象としてBF/MCFにより精度の良い結果を得た.

今後の課題として効率的なサンプリング手法の開発などが考えられる. またBF/MCFは条件付密度関数自体の更新を行うことが出来るので, 最尤推定法の導入が可能となる. 加えて密度関数の情報が必要とされる信頼性解析などへの応用が可能である.

参考文献

- 1) Vanmarcke, E.H. and Fenton, G.A.: Conditioned Simulation of Local Fields of Earthquake Ground Motion, *Structural Safety*, No.10, pp.247-264, 1991.

(2002.2.21 受付)

STOCHASTIC INTERPOLATION OF LOGNORMAL FIELDS BY BF/MCF

Osamu MARUYAMA and Masaru HOSHIYA

As a versatile tool to update random fields, Bootstrap filter/Monte Carlo filter is focused that is a sequential algorithm of generating a set of sample realizations of a predicted state vector and a filtered state vector respectively.

In order to clarify the potential of this method, stochastic interpolation of a lognormal spatial random field is demonstrated by using numerically simulated data.

- 2) Kameda, H. and Morikawa, H.: Conditioned Stochastic Processes for Conditional Random Fields, *Jour. of EM Div.*, Vol.120, pp.855-875, 1994.
- 3) 丸山 収, 星谷 勝, 山口 和英: 定常・均一・ガウス確率場の条件付地震波動シミュレーション, 土木学会論文集, No.489, pp.177-185, 1994年.
- 4) 川上 英二, 小野 牧夫: 多変数ARモデルを用いた観測記録を含む時空間地震波形, 土木学会論文集, No.489, pp.217-226, 1994年.
- 5) 清野 純史, 鈴木 誠: カルマンフィルタとクリッキングのハイブリッド法による条件付確率波のシミュレーション, 土木学会論文集, No.525/I-33, pp.153-161, 1995年.
- 6) 鈴木 誠, 石井 清: 土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法, 土木学会論文集, No.394, pp.97-104, 1988年.
- 7) Hoshiya, M.: Kriging and Conditional Simulation of Gaussian Field, *Jour. of EM Div.*, Vol.121, No.2, ASCE, pp.181-186, 1995.
- 8) Noda, S. and Hoshiya, M.: Kriging of Lognormal Stochastic Field, *Jour. of EM Div.*, Vol.124, No.11, ASCE, pp.1175-1184, 1998.
- 9) Hoshiya, M., Noda, S. and Inada, H.: Estimation of Conditional Non-Gaussian Translation Stochastic Fields, *Jour. of EM Div.*, Vol.124, No.4, ASCE, pp.435-445, 1998.
- 10) Gordon, N.J., Salmond, D.J. and Smith, A.F.M.: Novel Approach to Nonlinear /Non-Gaussian Bayesian State Estimation, *IEE Proc. F.*, Vol.140, pp.107-113, 1993.
- 11) 北川源四郎: モンテカルロ・フィルタおよび平滑化について, 統計数理, 第44巻第1号, pp.31-48, 1996年.
- 12) Kitagawa, G.: Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Non-linear State Space Models, *Jour. of Computational and Graphical Statistics*, Vol.5, No.1, pp.1-25, 1996.
- 13) Smith, A. F. M. and Gelfand, A. E.: Bayesian Statistics without Tears: A Sampling-Resampling Perspective, *Jour. of American Statistical Association*, Vol.46, pp.84-88, 1992.
- 14) 佐藤 忠信, 梶 啓介: モンテカルロフィルタを用いた構造同定, 土木学会論文集, No.675/I-55, pp.161-170, 2001年.
- 15) Hoshiya, M.: Updating/Filtering Procedures of Stochastic Fields, *3rd US-Japan Workshop on Nonlinear System Identification and Health Monitoring*, Univ. of Southern California, October, 2000.