

# 動的荷重を受ける多層弾性構造の 効率的有限要素解析と感度解析

董 勤喜<sup>1</sup>・松井邦人<sup>2</sup>・八谷好高<sup>3</sup>・坪川将丈<sup>4</sup>

<sup>1</sup>正会員 Ph.D 国土交通省 国土技術政策総合研究所 空港研究部空港施設研究室 (運輸技術研究員)  
(〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

<sup>2</sup>フェロー会員 Ph.D 東京電機大学教授 理工学部建設環境工学科  
(〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

<sup>3</sup>正会員 工博 国土交通省 国土技術政策総合研究所 空港研究部空港施設研究室室長  
(〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

<sup>4</sup>正会員 工修 国土交通省 国土技術政策総合研究所 空港研究部空港施設研究室研究官  
(〒239-0826 神奈川県横須賀市長瀬3-1-1)

本論文は、非比例型の減衰マトリックスを有する多層弾性構造の3次元動的解析を効率的に行う方法を提案している。このような問題は、自由度も非常に高くなり、直接数値解法を適用すると計算時間が膨大になる。計算効率を飛躍的に向上させるため、Ritzベクトルを用いて運動方程式を縮小化している。さらに、縮小運動方程式を一階連立微分方程式に書き換え、解析的に解を誘導している。元の式が25000以上の連立方程式を、10程度の連立方程式に縮小しても精度に影響しないことが確認できた。感度解析に対しても、運動方程式で作成したRitzベクトルの数を若干増やすことで精度良く計算できることが明らかになった。

**Key Words :** *multilayered elastic systems, Ritz vectors, non-proportional damping, dynamic analysis, sensitivity analysis, FEM*

## 1. はじめに

舗装の非破壊試験として、現在 FWD(Falling Weight Deflectometer)試験が最も注目され、FWD は標準機として評価されつつある<sup>1)</sup>。この試験機は、大部分が直径 30cm の載荷板に載荷時間が 30ms から 60ms でピーク値がほぼ 49kN となるような等分布荷重が舗装表面に作用すると見なしている。この荷重による表面たわみを数点で測定し、荷重と表面たわみから舗装構造を診断することが行なわれている。本来動的問題であるにもかかわらず、荷重とたわみのピーク値を用いて、準静的問題として逆解析を行ない、舗装を構成する各層の弾性係数を推定している。しかし、過去 10 年以上にわたりこのような方法が用いられてきたものの、このような準静的逆解析結果は、しばしば舗装技術者が到底受け入れ難い結果となり、解析法の問題点が顕在化してきた。

本来 FWD 試験は動的問題であり、動的解析を組み込むことが重要である。しかし、舗装を FEM で

モデル化とすると、自由度が非常に高くなり順解析に膨大な計算時間がかかるため、逆解析を行う上で障害となっている。現在用いられている主なアルゴリズムとして、直接法と漸化法の 2 種類ある。最も広く用いられている直接法は Newmark  $\beta$  法<sup>2)</sup>である。Poole 等<sup>3)</sup>はスペースマトリックスからなる運動方程式を色々な方法を用いて解いた結果と Newmark  $\beta$  法の結果を比較している。Fung<sup>4)</sup>は最近、時間刻み幅を最も高次の周波数と無関係に選択できる精度の良い時間域積分法を提案している。

最も効率的な反復法は、サブスペース法と Lanczos 法である。サブスペース法<sup>5)</sup>は、最も低次の固有ベクトルを決定するのに便利である。Bulgakov 等<sup>6)</sup>は、サブスペース法を拡張し低次から数個の固有ベクトルと固有モードを計算する方法を示している。Gmür, Schorderet<sup>7)</sup>は、粘性減衰問題を解くため、最近同時逆反復法と一般化 Rayleigh-Ritz 法を組合せたサブスペース反復法を提示している。そして、Lanczos 法を用いて対称マトリックス

と非対称マトリックスの固有値・固有ベクトルを複数個求めている。Bostic, Fulton<sup>9)</sup>は並列コンピュータに Lanczos 法を導入し振動問題を解いたことを報告している。Nour-Omid 等<sup>9), 10)</sup>は Lanczos ベクトルを求めるアルゴリズムを誘導し、このベクトルを用いて構造物の動的解析を行っている。Kim, Lee<sup>11)</sup>は、対称マトリックスとなる非比例減衰システムに関して繰り返し Lanczos 法を適用して次元を圧縮し、計算時間の効率化を図っている。最近では、大型有限要素問題に関する基本的な固有値解析法として Lanczos 法が色々な研究分野で広く利用されるようになってきた。Im, Chang<sup>12)</sup>は Lanczos アルゴリズムを弱非線型の過渡熱伝導問題に適用している。Li 等<sup>13)</sup>は、非対称 Lanczos 法を用いてポーラスな媒体における放射性核種の崩壊鎖の輸送問題を解き、配列の大きさの限界を克服している。Rao, Rao<sup>14)</sup>は、Lanczos ベクトルと適応時間積分法を組み合わせることにより、地盤と構造の相互作用を求める解析的方法を示している。反復法はしばしば市販されている汎用有限要素法パッケージにも導入されている。近年 Lanczos ベクトルは動的構造解析において大いに注目されているが、これらの方法は、特に非比例減衰を有する 3 次元解析の場合、バンド幅が非常に大きなマトリックスとなり、計算時間がかかるだけでなく、配列の大きさも圧縮できない。

Lanczos ベクトルの特別な場合として、Wilson 等<sup>15)</sup>はモード合成法に代わる Ritz 形式の直交ベクトルを開発した。Bayo, Wilson<sup>16)</sup>は Ritz ベクトルを波動伝播と基礎の動的応答に適用している。Ibrahimbegovic 等<sup>17), 18)</sup>は非比例減衰マトリックスのある構造システムに適用している。

本研究では、この Ritz ベクトルを用いて非比例減衰マトリックスを有する高自由度の動的システムの効率的解析法を提示している。そして、この理論を多層弾性構造の表面に動的荷重が作用する問題に適用し、自由度が 25000 以上でも 10 個の Ritz ベクトルで精度良く解析できることを示している。また、本手法による計算精度を確認するため、Newmark  $\beta$  法<sup>2)</sup>でも同様の計算を行なって比較している。

感度解析も、運動方程式と同様に Ritz ベクトルを用いて行っている。右辺が異なるため、厳密に述べると感度方程式の Ritz ベクトルは、運動方程式の Ritz ベクトルと異なる。それぞれの変数に対して感度方程式が得られるので、それぞれの式に関して Ritz ベクトルを求めることは計算時間も膨大になる。ここでは、運動方程式から得られる Ritz ベクトルの数を少し多く用いて感度方程式を解くことで計算精度が確保できることを確認した。

## 2. 動的解析

動的荷重が作用する構造物の運動方程式は、一般に次式のように書くことができる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(s, t) \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$$

ここに、 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  はそれぞれ  $N \times N$  の質量、減衰、剛性マトリックス、そして  $\ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t)$  は  $N \times 1$  の加速度、速度、変位ベクトルである。また、右辺の  $\mathbf{F}(s, t)$  は動的荷重ベクトルである。ここでは、この  $\mathbf{F}(s, t)$  について、静的荷重ベクトル  $\mathbf{F}(s)$  と時間のスカラー関数  $g(t)$  の積とした、すなわち  $\mathbf{F}(s, t) = \mathbf{f}(s)g(t)$  の場合について考える。多点入力でも  $g(t)$  が 1 つの関数で表すことができる場合を包含している。 $g(t)$  が異なるような多点入力の場合、 $\mathbf{F}(s, t) = \sum_i \mathbf{f}_i(s)g_i(t)$  として個々の  $\mathbf{f}_i(s)$  に対して Ritz ベクトルを求め、個々の荷重ベクトルによる応答解析を行い、その結果を足し合わせることになる。

一般に数値解析法を用いて式(1)を解くことが行なわれるが、マトリックスが大きいき計算時間は膨大なものとなる。そこで Wilson 等<sup>15)</sup>は Rayleigh 型減衰マトリックスを有する運動方程式に対して Ritz ベクトルを誘導している。Ibrahimbegovic 等<sup>17), 18)</sup>は式(1)を 1 階の微分方程式に書き換え、その Ritz ベクトルを求めている。この方法は、マトリックスが大きくなり計算効率が悪くなるだけでなく、理論的にも複雑である。

そこで、本研究では、Wilson 等<sup>15)</sup>の方法を非比例減衰システムに適用して縮小した運動方程式を 1 階微分方程式に変換し、固有値解析を行なって解析的に解を誘導している。以下にその方法について述べる。

### (1) 運動方程式の縮小化

Ritz ベクトルを用いて座標変換を行ない、式(1)の解  $\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \ddot{\mathbf{u}}(t)$  の近似値をそれぞれ  $\tilde{\mathbf{u}}(t), \tilde{\dot{\mathbf{u}}}(t), \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}(t)$  とすると、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{r=1}^l \mathbf{r}_r z_r(t) = \mathbf{R}\mathbf{z}(t) \\ \tilde{\dot{\mathbf{u}}}(t) &= \sum_{r=1}^l \mathbf{r}_r \dot{z}_r(t) = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}}(t) \\ \tilde{\ddot{\mathbf{u}}}(t) &= \sum_{r=1}^l \mathbf{r}_r \ddot{z}_r(t) = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_L]$  は Ritz ベクトルからなる  $N \times L$  のマトリックス、 $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_L(t)]^T$  は縮小したシステムの一般座標系ベクトルである。式(2)を式(1)に代入し、前から  $\mathbf{R}^T$  を掛けると、式(1)は Ritz 変位座標系  $\mathbf{z}(t)$  を用いて次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}'\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}'\mathbf{z}(t) &= \mathbf{f}'g(t) \\ \mathbf{z}(0) &= \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{R}^T \mathbf{C} \mathbf{R}, \quad \mathbf{K}' = \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R}, \quad \mathbf{f}' = \mathbf{R}^T \mathbf{f} \quad (4)$$

式(3)の  $\dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t)$  はそれぞれ縮小したシステムの速度および加速度ベクトルである。また、 $\mathbf{M}', \mathbf{C}', \mathbf{K}'$  はそれぞれ縮小したシステムの質量、減衰、剛性マトリックスであり、その大きさはいずれも  $L \times L$  のマトリックスであり、 $\mathbf{f}'$  は縮小したシステムの荷重ベクトルである。一般に、Ritz ベクトルを用いて変換した縮小マトリックス  $\mathbf{M}'$  は単位マトリックスとなるが、 $\mathbf{C}'$  と  $\mathbf{K}'$  は対称マトリックスとなるものの対角マトリックスではない。

Ritz ベクトルを作成するアルゴリズムは Rayleigh-Ritz 法と静的修正法を組み合わせている。Table 1 は Ritz ベクトルを作成するアルゴリズムを示している。

## (2) 縮小運動方程式の解法

縮小運動方程式(3)は Newmark  $\beta$  法あるいはモード合成法を用いて解くことができる。Rayleigh 減衰のような比例減衰を仮定すると、 $\mathbf{K}'$  と  $\mathbf{M}'$  の固有値と固有ベクトルを用いることにより式(3)を分離できる。しかし、式(1)の減衰マトリックス  $\mathbf{C}$  が Rayleigh 型でないとき、 $\mathbf{C}'$  は  $\mathbf{M}'$  と  $\mathbf{K}'$  の線形結合で表すことはできない。この場合、式(3)の 2 階微分方程式を 1 階微分方程式に書き換える。

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{f}_0(t) \quad (5)$$

ここに、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}' \\ \mathbf{M}' & \mathbf{C}' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}' \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_0(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}'g(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Table 1 Algorithm for generation of Ritz vectors<sup>19)</sup>

1. Calculate global mass, stiffness matrices,  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}$ , and static load vector,  $\mathbf{f}$
2. Triangularize stiffness matrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}' \mathbf{D} \mathbf{L}$$

3. Solve for first Ritz vector

$$\mathbf{K} \mathbf{r}_1' = \mathbf{f}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\mathbf{r}_1'^T \mathbf{M} \mathbf{r}_1'}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1' / \alpha_1$$

4. Solve for additional Ritz vectors ( $i = 2, \dots, L$ )

$$\mathbf{K} \mathbf{r}_i' = \mathbf{M} \mathbf{r}_{i-1}$$

$$c_j = \mathbf{r}_j'^T \mathbf{M} \mathbf{r}_i' \quad j = 1, \dots, i-1$$

$$\mathbf{r}_i'' = \mathbf{r}_i' - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \mathbf{r}_j$$

$$\alpha_i = \sqrt{\mathbf{r}_i''^T \mathbf{M} \mathbf{r}_i''}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i'' / \alpha_i$$

$\mathbf{M}', \mathbf{C}', \mathbf{K}'$  は対称であるので、式(6)の  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  は  $2L \times 2L$  の対称マトリックスである。また、 $\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \mathbf{f}_0$  はそれぞれ  $2L \times 1$  のベクトルである。式(5)は複素モード合成法を用いて解くことができる。

- a) 縮小システムの固有値と固有ベクトル<sup>19)</sup>

式(5)の同次方程式の基本解を求める。右辺をゼロベクトルとして、 $s$  次のモードに対する解  $\mathbf{y}_s = \mathbf{v}_s e^{\lambda_s t}$  を代入すると、

$$(\lambda_s \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \quad (8)$$

を得る。この式は固有値問題を表しており、 $\lambda_s$ ,  $\mathbf{v}_s$  ( $s = 1, 2, \dots, 2L$ ) はそれぞれ固有値と固有ベクトルである。これらの固有値、固有ベクトルはいずれも一般に複素数となる。 $\mathbf{v}_s$  は変位モードと速度モードからなる  $s$  次のベクトルであるので、固有値と変位モードを用いて、

$$\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \lambda_s \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_s \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに、 $\mathbf{u}_s$  は  $s$  次の変位モードである。 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は実マトリックスであるので、固有値、固有ベクトルは共役になっており、 $\lambda_s$  の共役を  $\bar{\lambda}_s$ ,  $\mathbf{u}_s$  の共役を  $\bar{\mathbf{u}}_s$  で表すことにする。固有値  $\lambda_s$  の実部と虚部をそれぞれ  $\lambda_s^r$  と  $\lambda_s^i$  で表すと、 $s$  次の円振動数  $\omega_s$  とモード減衰  $\xi_s$  は次次の関係を満足する。

$$\lambda_r = -\omega_r \left( \xi_r + i\sqrt{1 - \xi_r^2} \right) \quad (10)$$

$$\omega_r = \sqrt{(\lambda_r^R)^2 + (\lambda_r^I)^2} = |\lambda_r| \quad (11)$$

$$\xi_r = -\frac{\lambda_r^R}{|\lambda_r|} \quad (12)$$

固有ベクトル  $\mathbf{v}_r$  の  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に関する直交性より,  $s$  次のモードと  $r$  次のモードの間には次のような関係が存在する.

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{A} \mathbf{v}_s = \begin{cases} A_r & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_s = \begin{cases} B_r & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \quad (14)$$

$r \neq s$  の場合について, 式(13),(14)を  $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*, \mathbf{u}_r$  を用いて書き換える,

$$(\lambda_r + \lambda_s) \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_r^T \mathbf{C}^* \mathbf{u}_s = 0 \quad (15)$$

$$\lambda_r \lambda_s \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_r^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_s = 0 \quad (16)$$

$\lambda_r, \mathbf{u}_r$  をそれぞれ  $\lambda_r$  と  $\mathbf{u}_r$  の共役とすると,  $\lambda_r = \bar{\lambda}_s, \mathbf{u}_r = \bar{\mathbf{u}}_s$  である. この関係を式(15), (16)に代入して, 整理すると,

$$\omega_r^2 = \frac{\bar{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_r}{\bar{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_r} \quad (17)$$

$$\xi_r = \frac{1}{2\omega_r} \frac{\bar{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{C}^* \mathbf{u}_r}{\bar{\mathbf{u}}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_r} \quad (18)$$

上式から計算した  $\omega_r$  と  $\xi_r$  は実数となる.

### b) 外力の作用による応答計算

縮小した式(5)を解いて動的応答を計算するためモード合成法を用いると,  $\mathbf{y}(t)$  は固有ベクトルを用いて次のように書くことができる.

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{r=1}^N \mathbf{v}_r r_r(t) \quad (19)$$

式(19)を式(5)に代入し, 前から  $\mathbf{v}_r^T$  を掛け, 固有ベクトル  $\mathbf{v}_r$  の  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  に関する直交性を用いると,

$$\mathbf{A}_r \dot{r}_r(t) + \mathbf{B}_r r_r(t) = g_r(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{v}_r^T \mathbf{A} \mathbf{v}_r = 2\lambda_r \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r^T \mathbf{C}^* \mathbf{u}_r \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r = -\lambda_r^2 \mathbf{u}_r^T \mathbf{M}^* \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_r \quad (22)$$

$$g_r(t) = \mathbf{v}_r^T \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{u}_r^T \mathbf{f}^*(t) g(t) \quad (23)$$

同様に, 式(8)に前から  $\mathbf{v}_r^T$  を掛けて固有ベクトルの直交性を考慮すると,

$$\lambda_r \mathbf{A}_r + \mathbf{B}_r = 0 \quad (24)$$

式(20)と式(24)より, 次のような 1 階微分方程式が得られる.

$$\dot{r}_r(t) - \lambda_{r,r}(t) r_r(t) = \frac{g_r(t)}{A_r} \quad (25)$$

式(25)の解を時間域  $t_0$  と  $t$  の間で書くと次のようになる.

$$r_r(t) = \frac{e^{\lambda_r t}}{A_r} \int_{t_0}^t e^{-\lambda_r \tau} g_r(\tau) d\tau + c_r e^{\lambda_r t} \quad (26)$$

積分定数  $c_r$  は時間  $t_0$  における  $r_r(t)$  の初期条件から決定する. 今この初期条件を  $r_r(t_0)$  とすると,

$$c_r = r_r(t_0) e^{-\lambda_r t_0} \quad (27)$$

初期条件を式(26)に代入すると,

$$r_r(t) = \frac{1}{A_r} \int_{t_0}^t e^{\lambda_r(t-\tau)} g_r(\tau) d\tau + r_r(t_0) e^{\lambda_r(t-t_0)} \quad (28)$$

時間  $t_n$  と  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  の間で  $g_r(\tau)$  を線形で表すことができる」とすると,

$$g_r(\tau) = \frac{g_r(t_{n+1}) - g_r(t_n)}{\Delta t} (\tau - t_n) + g_r(t_n) \quad (29)$$

$\tau' = \tau - t_n$  とおくと, 式(29)は,

$$g_r(\tau' + t_n) = \frac{g_r(t_{n+1}) - g_r(t_n)}{\Delta t} \tau' + g_r(t_n) \quad (30)$$

となり, この関係を用いると,

$$r_s(t_{n+1}) = \frac{1}{A_s} \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_s(\Delta t - \tau')} g_s(t_n + \tau') d\tau' + r_s(t_n) e^{\lambda_s \Delta t} \quad (31)$$

式(30), (31)を式(28)に代入して積分し, 整理すると,

$$r_s(t_{n+1}) = r_s(t_n) e^{\lambda_s \Delta t} + \frac{1}{A_s \lambda_s} \left( e^{\lambda_s \Delta t} + \frac{1}{\lambda_s \Delta t} - \frac{e^{\lambda_s \Delta t}}{\lambda_s \Delta t} \right) g_s(t_n) - \frac{1}{A_s \lambda_s} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_s \Delta t} - \frac{e^{\lambda_s \Delta t}}{\lambda_s \Delta t} \right) g_s(t_{n+1}) \quad (32)$$

式(5)の解は,  $t = t_{n+1}$ において次のように書くことができる.

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \sum_{r=1}^{2L} \mathbf{v}_r r_s(t_{n+1}) \quad (33)$$

式(26)の  $r_s(t)$  は一般に複素数であるが, 固有値, 固有ベクトルが共役となるので,  $\mathbf{y}(t)$  は実数ベクトルとなる.  $\mathbf{y}(t)$  を変位成分と速度成分に分解して記すと,

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{s=1}^{2L} \mathbf{u}_s r_s(t) = 2 \sum_{s=1}^L \text{Re}[\mathbf{u}_s r_s(t)] \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \sum_{s=1}^{2L} \lambda_s \mathbf{u}_s r_s(t) = 2 \sum_{s=1}^L \text{Re}[\lambda_s \mathbf{u}_s r_s(t)] \quad (35)$$

加速度応答は,  $\mathbf{M}^*$  が単位マトリックスであることを考慮すると, 式(3)から

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{f}^* g(t) - \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{K}^* \mathbf{z}(t) \quad (36)$$

$\mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t)$  を計算できると, 式(2)の関係を用いることにより式(1)の応答  $\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), \ddot{\mathbf{u}}(t)$  の近似解を算出できる.

### 3. 動的感度解析

最適設計や逆解析ではしばしば感度解析が必要となる. 感度方程式は式(1)をパラメータ  $X_j$  で偏微分すると得られる.

$$\mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \mathbf{h}_j \quad (37)$$

ここに,

$$\mathbf{h}_j = -\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial X_j} \dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j} \mathbf{u} \quad j = 1, \dots, m \quad (38)$$

初期条件は  $t = 0$  において

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} = \mathbf{0} \quad (39)$$

パラメータ  $X_j$  に関する応答の感度は式(39)を初期条件として式(37)を解くことで得られる. しかし, 式(1)を解くのと同様に計算時間が膨大になるので, Ritz ベクトルを用いて感度方程式を縮小して解くのが便利である. 式(37)の演算子は式(1)と同じであるが, **Table 1** から明らかのように Ritz ベクトルは右辺の項に依存しているので, 右辺の異なる運動方程式と感度方程式では, Ritz ベクトルが異なると考えられる. 感度方程式の右辺は,  $\mathbf{f}(s)g(t)$  の形に書き換えることが出来ないため, 簡単に Ritz ベクトルを求めることは出来ない. 部分空間を張るベクトルの数が増えると計算精度は一般に向上するので, 本研究では運動方程式から得られた Ritz ベクトルを感度方程式にも用いることにする.

式(1)の Ritz ベクトルを用いて式(37)を変換すると, 縮小した感度方程式は次式のようになる.

$$\mathbf{M}^* \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} + \mathbf{C}^* \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} + \mathbf{K}^* \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} = \mathbf{h}_j^* \quad (40)$$

$$\mathbf{h}_j^* = \mathbf{R}^T \mathbf{h}_j$$

初期条件 ( $t = 0$ ) は式(39)より,

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j} = \mathbf{0} \quad (41)$$

式(40)の  $\mathbf{M}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{K}^*$  は式(4)で表すことができる. 式(40)の解を用いて, 式(37)の近似解は

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} = \mathbf{R} \frac{\partial \ddot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial X_j} = \mathbf{R} \frac{\partial \dot{\mathbf{z}}}{\partial X_j}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_j} = \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} \quad (42)$$

と書くことができる.

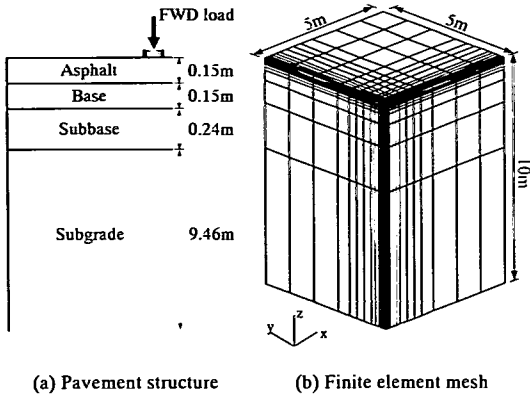


Fig.1 Pavement structure used in verification study

Pavement Layer	Modulus (MPa)	Damping (MN/m)	Poisson's Ratio	Density (kg/m <sup>3</sup> )
Asphalt (E <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> )	5880	29.4	0.35	2300
Base (E <sub>2</sub> , C <sub>2</sub> )	588	2.94	0.35	1900
Subbase (E <sub>3</sub> , C <sub>3</sub> )	196	0.98	0.35	1800
Subgrade (E <sub>4</sub> , C <sub>4</sub> )	98	0.49	0.35	1800

#### 4. 計算精度の検証

##### (1) 検証に用いる例題

例題として Fig.1 のような多層線形構造を用いる。このモデルの断面および各層の弾性係数は、「アスファルト舗装要綱」<sup>20)</sup>を参考として決定した D 交通相当断面である。物性値は Table 2 に記した。解析で用いた減衰は、著者等のこれまでの経験から要素剛性マトリックスに 0.005 を掛けて要素減衰マトリックスとしている。外力は、舗装の標準的な非破壊試験機である FWD で計測される荷重を模して、 $g(t)=49\sin^2(25\pi t)$ kN とした。この場合、載荷時間は  $t=0.0-0.04$  秒とする<sup>21)</sup>。動的解析の時間ステップ幅は 0.002 秒、解析時間は 0.06 秒としている。舗装表面センサーのところにおけるたわみを算出し、その結果を Fig.2 に記した。

解析に使用した領域は、解析時間内で動的荷重の波が境界に到達しないような大きさを選択しており、FEM モデルには反射波を消去するようなダンパーを挿入していない。FEM モデルには 20 節点アイソパラメトリック要素を用い、その総数は 1859、総節点数は 8876 である。

##### (2) 運動方程式の解の精度

使用する Ritz ベクトルの個数が多いほど計算精度は良くなる。しかし、個数を多く使用することは計算時間がかかることになり、計算効率は悪くなる。そこで使用する Ritz ベクトルの数と式(1)の精度の関係について検討する。ここでは、式(1)の精度を次式で評価する。

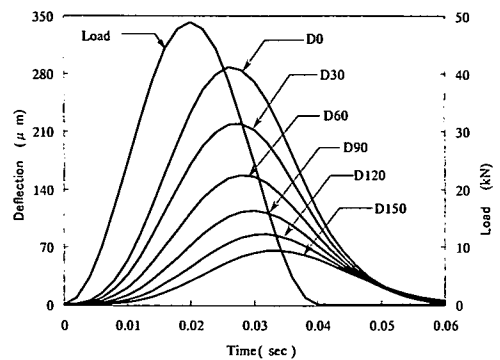


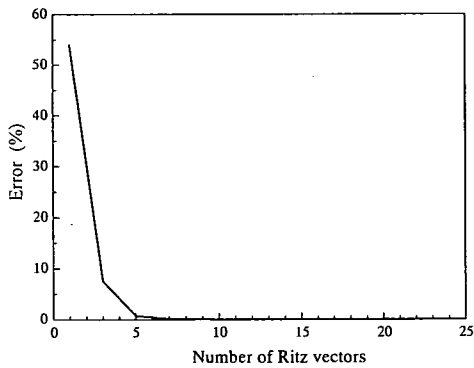
Fig.2 Impulsive load and surface deflection

$$e = \frac{\|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|}{\|\mathbf{u}(t)\|} \quad (43)$$

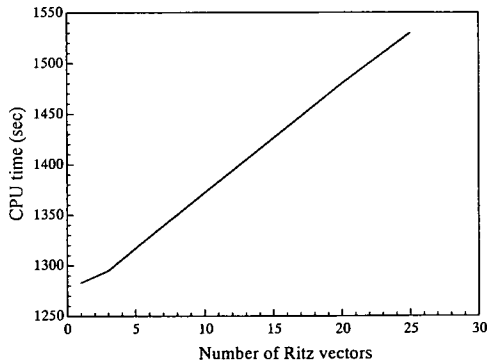
上式の  $\mathbf{u}(t)$  は Newmark  $\beta$  法の変位解析解； $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  は Ritz 法の変位近似解。そこで誤差関数  $\|\cdot\|$  は次式で定義される。

$$\|\cdot\| = \left( \int_0^T (\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t))^T (\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)) dt \right)^{1/2} \quad (44)$$

例題を用いて計算した結果を Fig.3 に示す。この FEM モデルの自由度は 25000 を越えるが、Fig.3(a) は 10 個の Ritz ベクトルを用いると誤差がほぼ 0.015%以下であり、精度良く解析できることが明らかである。また、Fig.3(b)より、計算時間は Ritz ベクトルの数に比例して増加していることが確認できた。なお、10 個の Ritz ベクトルを用いたときの計算時間は式(1)に Newmark  $\beta$  法を適用した場合と比較してほぼ半分以下である。



(a) Error



(b) CPU time

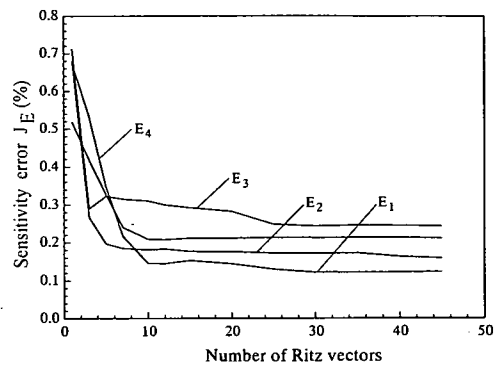
Fig.3 Relationship of error and CPU time versus number of Ritz vectors

### (3) 感度方程式の解の精度

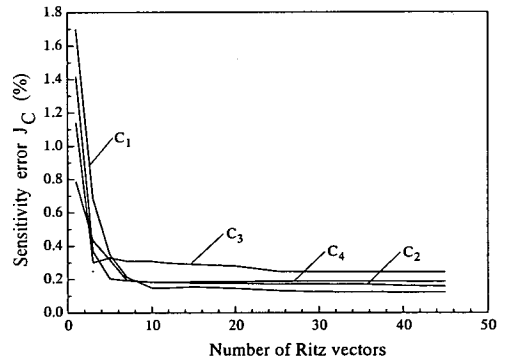
式(37)を Ritz ベクトルで縮小化して解く時、使用する Ritz ベクトルは本来右辺  $\mathbf{h}_j$  を用いて作成する。この場合、 $\mathbf{h}_j$  は  $\mathbf{f}(s)\mathbf{g}(t)$  の形で表現できないため Ritz ベクトルを求めることは出来ない。しかし、式(1)の Ritz ベクトルの数を増やすと、部分空間を張るベクトルも増えるため、感度方程式の解の精度も向上するとどの程度 Ritz ベクトルの数と感度解析の精度を確保できるか検討する。感度解析の精度は式(37)を参考として次式で評価する。

$$J_{X_j} = \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial X_j} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}(t)}{\partial X_j} \right\| / \left\| \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial X_j} \right\| \quad (45)$$

ここに、 $\mathbf{X} = \{X_j\} = (E_1, E_2, E_3, E_4, C_1, C_2, C_3, C_4)^T$ 。上式の  $\partial \mathbf{u}(t)/\partial X_j$  は式(37)を Newmark  $\beta$  法で解いた変位感度方程式の解であり、 $\partial \tilde{\mathbf{u}}(t)/\partial X_j$  は Ritz ベクトルを用いて縮小した感度方程式を解析的に解いて求めた近似解である。ここで誤差関数  $\|\cdot\|$  の定義は式(44)と同様である。



(a) Elastic modulus



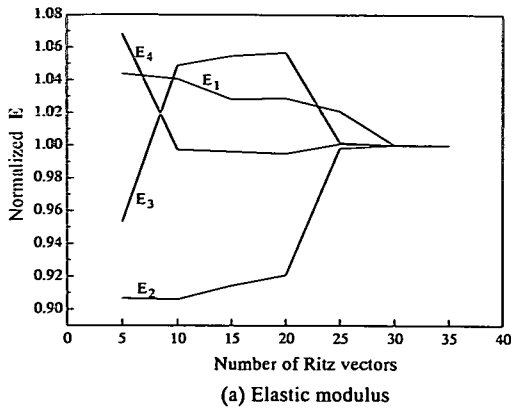
(b) Damping

Fig.4 Relationship of sensitivity solution precisions versus number of Ritz vectors

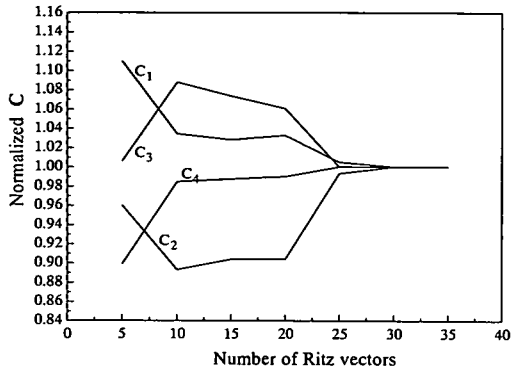
Fig.4 は、例題を用いて算出した式(45)と Ritz ベクトルの数の関係を示している。Ritz ベクトルの数が少ない範囲では、使用するベクトルの数が増加すると、誤差は急速に減少する。しかし、ベクトルの数が 20 を超えると誤差の指標値の減少率は非常に小さくなる。この理由は、使用している Ritz ベクトルは式(1)から求めたものであり、式(37)から求めたものでないことによると思われる。しかしながら、使用する Ritz ベクトルの個数が 25 を超えると感度解析の精度はほぼ 0.1%から 0.3%の範囲であり、逆解析のために感度解析を行うことを考えると十分良い精度が得られている。このことから、個々の変数の感度方程式に対して、それに対応する Ritz ベクトルを用いるのではなく、運動方程式の Ritz ベクトルを用いて感度解析を行っても工学的に十分精度良いことが明らかになった。

### (4) 逆解析結果と Ritz ベクトルの数

そこで Ritz ベクトルの数が逆解析結果に及ぼす



(a) Elastic modulus



(b) Damping

Fig.5 Relationship of identified results versus number of Ritz vectors

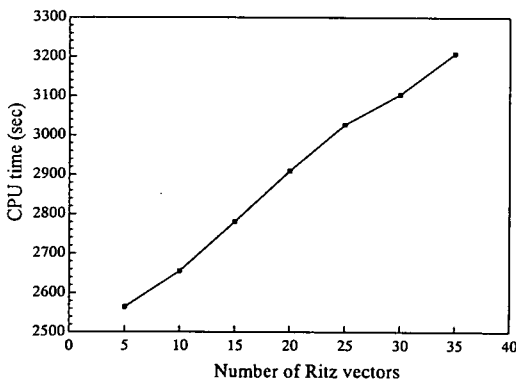


Fig.6 Relationship of CPU time versus number of Ritz vectors

影響を調べるため、数値シミュレーションを行う。

Fig.2 を FWD で測定した表面たわみとみなし、縮小した運動方程式と感度方程式を用いて逆解析を行った。計算に使用した時間間隔は  $\Delta t = 2\text{ms}$  である。逆解析では、減衰は各層で剛性に比例するが、

その比の値は各層で異なることを想定している。

Ritz ベクトルの数と逆解析の結果を Fig.5 に示す。Fig.5 の縦軸は逆解析結果/真値である。この逆解析結果から、初期値に関わらず、使用する Ritz ベクトルの数が 30 を超えると真値に収束していることが明らかである。

FEM の自由度が 25000 であるにもかかわらず、10 個のベクトルで精度良い応答結果が得られ、逆解析では 25 の Ritz ベクトルで精度良い結果が得られている。その理由は、本問題では静的変位のモードと動的変位のモードの差が比較的小さいためであることが考えられる。これは、1 次の Ritz ベクトルは  $f(s)$  に対する静的変位を意味し、2 次以降のベクトルは動的応答に対する静的応答の補正量に対応しているため、動的変位が静的変位に近ければ少ない数の Ritz ベクトルで精度よく近似できると考えられるからである。

なお、逆解析に使用した PC は、Gateway GP7、周波数 800MHz、768Mb メモリである。例題の自由度は 11160 であり、Ritz ベクトルの数と逆解析に要する時間を Fig.6 に示す。逆解析はいずれの場合も 10 回以内の繰り返し計算回数で収束しており、30 個の Ritz ベクトルを用いても、逆解析に要した時間は約 50 分である。

## 5. 結論

本研究の目的は、道路や滑走路のような舗装構造物の診断を精度良く、効率的に行うことができるアルゴリズムを開発することである。FWD 試験を想定して、舗装を多層弾性構造と考え FEM でモデル化している。その表面に FWD を模擬した動的荷重を作用させたときの応答解析、各層の弾性係数や減衰係数に対する応答の感度解析を提示している。使用した Ritz ベクトルの数が逆解析結果に及ぼす影響を検討している。以上の研究より以下のような知見が得られた。

- (1) Ritz ベクトルを用いて効率的に計算できることを示した。例題では、自由度 25000 以上の運動方程式を、マトリックスサイズ  $10 \times 10$  となる運動方程式に縮小しても精度が変わらないことが明らかになった。
- (2) 感度解析に関して、それぞれの感度方程式に対応する Ritz ベクトルを求めることはせず、運動方程式から求めた Ritz ベクトルの数を、25 個用いて感度解析を行うことにより、十分な計算精度が得られることが明らか



かになった。

- (3) 逆解析の観点から、Ritz ベクトルの数は 30 個程度用いると真値に収束すること明らかになった。

謝辞：本研究は運輸施設整備事業団「運輸分野における基礎的研究推進制度」の支援を受けて行った研究であることを記し、関係者に謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) Brown, A. F., Tam, W. S. and Brunton, J. M. : Structural evaluation and overlay design: analysis and implementation, *Structural design of asphalt pavements I*, Ann Arbor, Michigan, Cushing-Malloy, Inc., 1987.
- 2) Newmark, N. M. : A method of computation for structural dynamics, *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, Vol.85, pp.67-94, 1959.
- 3) Poole, E. L., Knight, N.F. and Davis, D. D. : High-performance equation solvers and their impact on finite element analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.33, pp.855-868, 1992.
- 4) Fung, T. C. : A precise time-step integration method by step-response and impulsive-response matrices for dynamic problems, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.40, pp.4501-4527, 1997.
- 5) Bathe, K. J. and Wilson, E. L. : *Numerical methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- 6) Bulgakov, V. E., Belyi, M. V. and Mathisen, K. M. : Multilevel aggregation method for solving large-scale generalized eigenvalue problems in structural dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.40, pp.453-471, 1997.
- 7) Gmür, T. and Schorderet, A. : A subspace iteration algorithm for the eigensolution of large structures subject to non-classical viscous damping, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.49, pp.1267-1280, 2000.
- 8) Bostic, S. W. and Fulton, R. E. : Implementation of the Lanczos method for structural vibration analysis on a parallel computer, *Comput. Struct.*, Vol.20, pp.385-403, 1987.
- 9) Nour-Omid, B. and Clough, R. W. : Dynamic analysis of structures using Lanczos coordinates, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.12, pp.565-577, 1984.
- 10) Nour-Omid, B. and Regelbrugge, M. E. : Lanczos method for dynamic analysis of damped structural systems, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.18, pp.1091-1104, 1989.
- 11) Kim, M. C. and Lee, I. W. : A computationally efficient algorithm for the solution of eigenproblems for large structures with non-proportional damping using Lanczos method, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.28, pp.157-172, 1999.
- 12) Im, C. K. and Chang, S. P. : Non-linear transient heat transfer analysis based on Lanczos coordinates using pseudo-force method, *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol.15, pp.629-639, 1999.
- 13) Li, H. N., Woodbury, A. and Aitchison, P. : Application of the unsymmetric Lanczos method to radionuclide decay-chain transport in porous media, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.44, pp.355-372, 1999.
- 14) Rao, R. V. and Rao, N. S. V. K. : Dynamic soil-structure interaction analysis using Lanczos vectors with adaptive time integration technique, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.23, pp.1141-1158, 1999.
- 15) Wilson, E. L., Yuan, M. W. and Dicken, J. M. : Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.10, pp.813-821, 1982.
- 16) Bayo, E. P. and Wilson, E. L. : Use of Ritz vectors in wave propagation and foundation response, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.12, pp.499-505, 1984.
- 17) Ibrahimbegovic, A. and Wilson, E. L. : Simple numerical algorithm for the mode superposition analysis of linear structural systems with non-proportional damping, *Comput. Struct.*, Vol.22, pp.523-531, 1989.
- 18) Ibrahimbegovic, A., Chen, H. C., Wilson, E. L. and Taylor, R. L. : Ritz method for dynamic analysis of large discrete linear systems with non-proportional damping, *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol.19, pp.877-889, 1990.
- 19) 柴田明徳：最新耐震構造解析，最新建築学シリーズ9，森北出版，1986。
- 20) アスファルト舗装要綱，日本道路協会，1986。
- 21) 土木学会：舗装工学，1995。

(2002. 6. 5 受付)

## EFFICIENT FINITE ELEMENT AND SENSITIVITY ANALYSES OF MULTI-LAYERED ELASTIC SYSTEMS SUBJECT TO DYNAMIC LOADS

Qinxin DONG, Kunihito MATSUI, Yoshitaka HACHIYA and Yukitomo TSUBOKAWA

This paper is to propose an efficient method of three-dimensional dynamic analysis for multi-layered elastic systems with non-proportional damping. Since such problems have high degrees of freedom, computational efforts become enormous when a direct integration method is utilized. Ritz vectors are introduced to reduce a system of equations of motion, which is solved analytically with the use of eigenvalue analysis. It is confirmed that the system of equations with over 25000 degrees of freedom can be reduced drastically to the system of 10 equations without a loss of the accuracy. It also becomes apparent that the accuracy of sensitivity analysis can be improved with the increase in number of Ritz vectors.