

任意の曲げ・捩り剛性を有する 直交異方性平板の曲げ応力解析

相原 猛¹・内山武司²・上田正生³・大家 史⁴

¹非会員 北海道大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

²正会員 工博 京都大学美術学部建築学科教授 (〒061-1196 北広島市中の沢149番地)

³正会員 工博 北海道大学大学院教授 工学研究科社会基盤工学専攻

⁴非会員 修士 北海道大学大学院工学研究科社会基盤工学専攻

直交異方性平板を対象とした既往の研究では, Huber の仮定に代表されるような, 捩り剛性に関する何らかの仮定を導入しているものが殆どである。しかし, Huber の仮定に拘束されない任意の曲げ・捩り剛性を有する一般的なスラブについての解析的な研究は殆どなされていないのが現状のようである。このような研究の現況に鑑み, 本研究は任意の曲げ・捩り剛性を有する周辺固定平板, 三辺固定一辺自由平板, 二隣辺固定二辺自由平板の3種の直交異方性平板に対する解析について論じ, Huber の仮定の妥当性と適用範囲についての考察を行ったものである。

Key Words: orthotropic plate, torsional stiffness, series solution, voided slab

1. はじめに

スラブは橋梁や建築物において体積, 重量ともに大きな割合を占める部材であるため, それらの力学特性が構造系に与える影響は無視できない。一般にスラブの合理化は大スパン化や軽量化によって行われるが, これは同時に, 長大橋梁や超高層建築, バリアフリーへの対応といった社会のニーズに応えるものでもある。このような背景のもとポイドスラブやリブ付スラブ, プレストレスト合成床板といった種々のスラブシステムが現在までに研究, 開発されている。そして, これらの平板システムの多くが, 直交方向に異なる剛性を持つ平板, いわゆる直交異方性平板である。

M.T.Huber(1923)¹⁾ は一般の異方性平板に対しその代表的な微分方程式を導き出すとともに, 鉄筋コンクリートスラブをその直交配筋量の相違から直交異方性平板とみなし, 一連の計算方法を確立した。しかしながら, Huber は捩り剛性に対する仮定として捩り剛性係数 $\kappa (= (D_1 + 2D_{xy}) / \sqrt{D_x D_y})$ を1に限定している。以後, 直交異方性平板に関する多くの研究においては, この仮定が用いられている。

Y.Guyon, C.Massonnet(1950)³⁾ は格子構造物を直交異方性平板とみなし, 分配係数法を用いて解を示している。また, 内山(1982)^{5)~8)} は, 一連の研究で Levy の単三角級数を用いた級数解法によって, 等分布荷重を受ける種々の境界条件を持つ直交異方性平板の解を求め

ており, その後(1997)⁹⁾, 同方法を Reissner 理論に適用することで, 剪断変形の影響を考慮した周辺固定平板の解を導き出している。Galerkin 法を用いた解としては, F.C.Mbakogu, M.N.Pavlovic(2000)¹²⁾ が Huber の支配微分方程式から, 等分布荷重を受ける周辺固定直交異方性平板の解を求めたものがある。しかし, これらの研究の多く^{10), 11)} は Huber の仮定をはじめとした捩り剛性に対する特別な仮定が加えられたものであり, 任意の捩り剛性を有する一般的なスラブについての解析的な研究は殆どなされていないのが現状のようである。

以上のような研究の現況に鑑み, 本研究は任意の曲げ・捩り剛性を有する直交異方性平板の解析について論じたものである。本論文では, まず, 有限要素法を用いて中空スラブの一部を対象に三次元解析を行い, 捩り剛性係数 κ を決定するために必要となる曲げ・捩り剛性の評価を試みた。その結果, 捩り剛性係数 κ は必ずしも Huber の仮定に従わないことを確認した。この結果に基づき, 本研究では Huber の仮定に拘束されない任意の曲げ・捩り剛性を有する直交異方性平板の一般化された解を級数解として求めた。解析の対象とした平板は, 等分布荷重を受ける周辺固定平板, 三辺固定一辺自由平板, 二隣辺固定二辺自由平板の三種の直交異方性平板であり, 捩り剛性係数 κ や辺長比 (b/a) の変化に伴う, これらの平板の応力・変形性状の推移について論じるとともに, Huber の仮定の妥当性と適用範囲についての検討・考察を行った。

2. 基礎微分方程式

等分布荷重 q を受ける直交異方性平板の基礎微分方程式は Poisson-Kirchhoff の理論から撓み w を用いて以下のように表される。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (1)$$

但し w : 直交異方性平板の撓み
 D_x, D_y : x 方向, y 方向の曲げ剛性
 D_{xy} : 捩り剛性
 ν_x, ν_y : x 方向, y 方向のポアソン比
 $H = D_1 + 2D_{xy}$
 $D_1 = \nu_x D_y = \nu_y D_x$
 $D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, D_{xy} = \frac{G h^3}{12}$

直交異方性平板内部に生じる曲げ・捩りモーメント M_x, M_y, M_{xy} , せん断力 Q_x, Q_y , 反力 V_x, V_y は以下の通りである。

$$M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2a)$$

$$M_y = -D_y \left(\nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2b)$$

$$M_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2c)$$

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2d)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2e)$$

$$V_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (H + 2D_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (2f)$$

$$V_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (H + 2D_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \quad (2g)$$

3. 周辺固定直交異方性平板の解

基礎微分方程式 (1) の非斉次解を ${}_n w$, 斉次解を ${}_h w_x, {}_h w_y$ とすると一般解 w は以下のように表すことができる。

$$w = {}_n w + {}_h w_y + {}_h w_x \quad (3)$$

(1) 座標系と境界条件

解析対象となる平板は, $2a \times 2b$ の長方形平板を式 (4) を用いて無次元化したものであり, その対称性から平板中央に原点をとった平板の $1/4$ を採用する (図-1)。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b \quad (4)$$

満足すべき境界条件は, 撓みと回転角に関する条件であり以下のようになる。

$$\text{撓み} : w(\xi, 1) = 0, \quad w(1, \eta) = 0 \quad (a-1)$$

$$\text{回転角} : \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\eta=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (a-2)$$

(2) 非斉次解 (${}_n w$)

平板上に作用する等分布荷重 q を次のような二重フーリエ級数で表す。

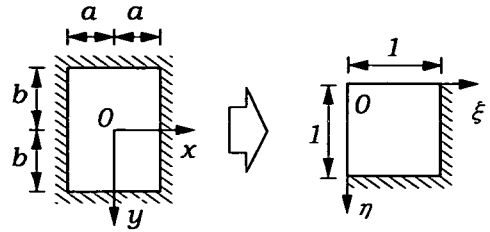


図-1 周辺固定板の座標と無次元化座標

$$q(\xi, \eta) = 4q \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{m-1} (-1)^{n-1}}{\mu_m \mu_n} \cos \mu_m \xi \cos \mu_n \eta \quad (5)$$

但し $\mu_m = (2m-1)\pi/2, \mu_n = (2n-1)\pi/2$
 $m, n = 1, 2, 3, \dots$

また, 非斉次解 ${}_n w$ を次のようにおくと

$${}_n w = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos \mu_m \xi \cos \mu_n \eta \quad (6)$$

式 (5), (6) を式 (1) に代入し, 係数比較を行うことで以下のような非斉次解 ${}_n w$ を得る。

$${}_n w = \sum_m \sum_n \frac{4q d^4 (-1)^{m+n-2} \phi^4 \cos \mu_m \xi \cos \mu_n \eta}{\mu_m \mu_n (D_x \mu_m^4 \phi^4 + 2H \mu_m^2 \mu_n^2 \phi^2 + D_y \mu_n^4)} \quad (7)$$

但し $\phi = b/a$

(3) 斉次解 (${}_h w_y, {}_h w_x$)

斉次解 ${}_h w_y, {}_h w_x$ は x, y に対して変数分離が可能な級数の形で表すことができ, 平板の変形性状より次のように置くことができる。

$${}_h w_y = \sum_m Y_m(\eta) \cos \mu_m \xi \quad (8a)$$

$${}_h w_x = \sum_n X_n(\xi) \cos \mu_n \eta \quad (8b)$$

ここで $Y_m(\eta)$ は η のみの関数, $X_n(\xi)$ は ξ のみの関数であり, 微分方程式の解法に従い関数 $Y_m(\eta), X_n(\xi)$ を以下のようにおき,

$$Y_m(\eta) = e^{\gamma_{mi} \eta}, \quad X_n(\xi) = e^{\gamma_{ni} \xi}$$

但し, γ_{mi}, γ_{ni} は未定係数 ($i = 1, 2, 3, 4$)。

曲げ剛性係数 λ , 捩り剛性係数 κ を下記のように表すと,

$$\lambda = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \quad (9)$$

$$\kappa = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} \quad (10)$$

$\gamma_{mi, ni}$ は次の値をとる。

$$\gamma_{m1, m2, m3, m4} = \pm \frac{\mu_m \phi}{\lambda} \sqrt{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}} \quad (11a)$$

$$\gamma_{n1, n2, n3, n4} = \pm \frac{\mu_n \lambda}{\phi} \sqrt{\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - 1}} \quad (11b)$$

したがって斉次解 ${}_h w_y, {}_h w_x$ は捩り剛性係数 κ の値によって以下の

$$\text{-Case1- } \kappa = 1: H = \sqrt{D_x D_y}$$

$$\text{-Case2- } \kappa > 1: H > \sqrt{D_x D_y}$$

$$\text{-Case3- } \kappa < 1: H < \sqrt{D_x D_y}$$

3種の場合が考えられる。ここで、微分方程式が扱いやすいよう等号が成立すると想定した場合、すなわち Case1 が Huber の仮定¹⁾である。次に各場合における斉次解を掲げる。

a) Case 1 $\kappa = 1$: $H = \sqrt{D_x D_y}$ (Huber の仮定)
 特性方程式は2つの重解を持ち、斉次解 ${}_h w_y, {}_h w_x$ は撓みの対称性と満たすべき境界条件を考慮することで、以下のように表せる。

$${}_h w_y = a^4 \sum_m R_m \left[\alpha_{1m} \eta \frac{\sinh \alpha_{1m} \eta}{\cosh \alpha_{1m}} - \alpha_{1m} \tanh \alpha_{1m} \frac{\cosh \alpha_{1m} \eta}{\cosh \alpha_{1m}} \right] \cos \mu_m \xi \quad (12)$$

$${}_h w_x = a^4 \sum_n R_n \left[\alpha_{1n} \xi \frac{\sinh \alpha_{1n} \xi}{\cosh \alpha_{1n}} - \alpha_{1n} \tanh \alpha_{1n} \frac{\cosh \alpha_{1n} \xi}{\cosh \alpha_{1n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (13)$$

$$\text{但し } \alpha_{1m} = \frac{\mu_m \phi}{\lambda}, \quad \alpha_{1n} = \frac{\mu_n \lambda}{\phi}$$

b) Case 2 $\kappa > 1$: $H > \sqrt{D_x D_y}$
 特性方程式は4つの実解を持ち、斉次解 ${}_h w_y, {}_h w_x$ は以下のように表せる。

$${}_h w_y = a^4 \sum_m R_m \left[\frac{\cosh \alpha_{2m} \eta}{\cosh \alpha_{2m}} - \frac{\cosh \beta_{2m} \eta}{\cosh \beta_{2m}} \right] \cos \mu_m \xi \quad (14)$$

$${}_h w_x = a^4 \sum_n R_n \left[\frac{\cosh \alpha_{2n} \xi}{\cosh \alpha_{2n}} - \frac{\cosh \beta_{2n} \xi}{\cosh \beta_{2n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (15)$$

$$\alpha_{2m} = \frac{\mu_m \phi}{\lambda} \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}}, \quad \beta_{2m} = \frac{\mu_m \phi}{\lambda} \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

$$\alpha_{2n} = \frac{\mu_n \lambda}{\phi} \sqrt{\kappa - \sqrt{\kappa^2 - 1}}, \quad \beta_{2n} = \frac{\mu_n \lambda}{\phi} \sqrt{\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 1}}$$

c) Case 3 $\kappa < 1$: $H < \sqrt{D_x D_y}$
 特性方程式は4つの虚数解を持ち、斉次解 ${}_h w_y, {}_h w_x$ は以下のように表せる。

$${}_h w_y = a^4 \sum_m R_m \left[\frac{\sin \alpha_{3m} \eta}{\sin \alpha_{3m}} \frac{\sinh \beta_{3m} \eta}{\sinh \beta_{3m}} - \frac{\cos \alpha_{3m} \eta}{\cos \alpha_{3m}} \frac{\cosh \beta_{3m} \eta}{\cosh \beta_{3m}} \right] \cos \mu_m \xi \quad (16)$$

$${}_h w_x = a^4 \sum_n R_n \left[\frac{\sin \alpha_{3n} \xi}{\sin \alpha_{3n}} \frac{\sinh \beta_{3n} \xi}{\sinh \beta_{3n}} - \frac{\cos \alpha_{3n} \xi}{\cos \alpha_{3n}} \frac{\cosh \beta_{3n} \xi}{\cosh \beta_{3n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (17)$$

$$\alpha_{3m} = \frac{\mu_m \phi}{\lambda} \sqrt{\frac{1 - \kappa}{2}}, \quad \beta_{3m} = \frac{\mu_m \phi}{\lambda} \sqrt{\frac{1 + \kappa}{2}}$$

$$\alpha_{3n} = \frac{\mu_n \lambda}{\phi} \sqrt{\frac{1 - \kappa}{2}}, \quad \beta_{3n} = \frac{\mu_n \lambda}{\phi} \sqrt{\frac{1 + \kappa}{2}}$$

(4) 未定係数 R_m, R_n の決定

ここでは Case1 の未定係数 R_m, R_n を求める。得られた非斉次解式(7), 斉次解式(12),(13)はともに撓みに関する境界条件(a-1)を明らかに満足しており、残された回転角に関する境界条件(a-2)から以下のような連立方程式を得る。

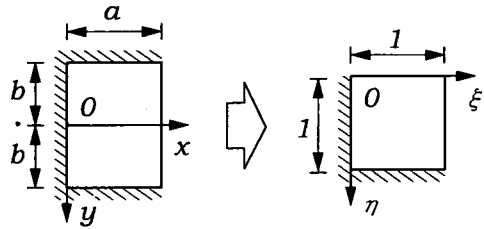


図-2 三辺固定一辺自由平板の座標と無次元化座標

$$R_m \alpha_{1m} [\tanh \alpha_{1m} + \alpha_{1m} \operatorname{sech}^2 \alpha_{1m}] + 4\mu_m (-1)^{m-1} \sum_n R_n \frac{(-1)^{n-1} \mu_n \alpha_{1n}^2}{(\mu_m^2 + \alpha_{1n}^2)^2} \quad (18a)$$

$$= \frac{4(-1)^{m-1}}{\mu_m} \sum_n \frac{D_x \mu_m^4 \phi^4 + 2H \mu_m^2 \mu_n^2 \phi^2 + D_y \mu_n^4}{\phi^4} + 4\mu_n (-1)^{n-1} \sum_m R_m \frac{(-1)^{m-1} \mu_m \alpha_{1m}^2}{(\mu_n^2 + \alpha_{1m}^2)^2} + R_n \alpha_{1n} [\tanh \alpha_{1n} + \alpha_{1n} \operatorname{sech}^2 \alpha_{1n}] \quad (18b)$$

$$= \frac{4(-1)^{n-1}}{\mu_n} \sum_m \frac{D_x \mu_m^4 \phi^4 + 2H \mu_m^2 \mu_n^2 \phi^2 + D_y \mu_n^4}{\phi^4}$$

これを解くことにより未定係数を決定する。Case2, Case3 に対しても同様に未定係数 R_n, R_m を求める。

4. 三辺固定一辺自由直交異方性平板の解

三辺固定一辺自由直交異方性平板の一般解 w を一つの非斉次解 ${}_n w$ と、三つの斉次解 ${}_h w_y, {}_h w_x, {}_2 h w_x$ とで表すと次のようになる。

$$w = {}_n w + {}_h w_y + {}_h w_x + {}_2 h w_x \quad (19)$$

(1) 座標系と境界条件

解析対象となる平板は、 $a \times 2b$ の長方形平板を周辺固定の場合と同様に式(4)を用いて無次元化したものであり、その対称性から固定辺中央に原点をとった平板の1/2を採用する(図-2)。

満たすべき境界条件は、固定辺に対して撓みと回転角に関する条件が、自由辺に対しては反力と曲げモーメントに関する条件が以下のように与えられる。

$$\text{撓み} : w(\xi, 1) = 0, \quad w(0, \eta) = 0 \quad (b-1)$$

$$\text{回転角} : \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\eta=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (b-2)$$

$$\text{曲げモーメント} : M_x(1, \eta) = 0 \quad (b-3)$$

$$\text{反力} : V_x(1, \eta) = 0 \quad (b-4)$$

(2) 非斉次解 (${}_n w$)

作用する等分布荷重を以下のような二重フーリエ級数で表す。

$$q(\xi, \eta) = 4q \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{\mu_m \mu_n} \sin \mu_m \xi \cos \mu_n \eta \quad (20)$$

周辺固定の場合と同様に考え、非斉次解として次式を得る。

$${}_n w = \sum_m \sum_n \frac{4qa^4 (-1)^{n-1} \phi^4 \sin \mu_m \xi \cos \mu_n \eta}{\mu_m \mu_n (D_x \mu_m^4 \phi^4 + 2H \mu_m^2 \mu_n^2 \phi^2 + D_y \mu_n^4)} \quad (21)$$

(3) 齊次解 (${}_{1h}w_y, {}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$)

齊次解は周辺固定の場合と同様に単級数の変数分離形で表し、未知関数 $Y_m(\eta)$ が η のみの関数で表されるものを ${}_{1h}w_y$ 、未知関数 $X_m(\xi)$ 、 ${}_2X_m(\xi)$ が ξ のみの関数で表されるものをそれぞれ ${}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$ とする。更に、前節と同様に微分方程式の解法に従い展開を行うと、三辺固定一辺自由平板の解も κ の値によって以下に掲げる3種の場合が考えられる。

a) Case 1 $\kappa = 1: H = \sqrt{D_x D_y}$ (Huber の仮定)

特性方程式は2つの重解を持ち、齊次解 ${}_{1h}w_y, {}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$ は次のようになる。

$${}_{1h}w_y = a^4 \sum_m {}_1R_m \alpha_{1m} \left[\eta \frac{\sinh \alpha_{1m} \eta}{\cosh \alpha_{1m}} - \tanh \alpha_{1m} \frac{\cosh \alpha_{1m} \eta}{\cosh \alpha_{1m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (22a)$$

$${}_{1h}w_x = a^4 \sum_n {}_1R_n \alpha_{1n} \left[(1-\xi) \frac{\sinh \alpha_{1n} (1-\xi)}{\cosh \alpha_{1n}} - \tanh \alpha_{1n} \frac{\cosh \alpha_{1n} (1-\xi)}{\cosh \alpha_{1n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (22b)$$

$${}_{2h}w_x = a^4 \sum_n {}_2R_n \left[\alpha_{1n} \xi \frac{\cosh \alpha_{1n} \xi}{\cosh \alpha_{1n}} - \left(1 + \alpha_{1n} \tanh \alpha_{1n} - \frac{H}{D_{xy}} \right) \frac{\sinh \alpha_{1n} \xi}{\cosh \alpha_{1n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (22c)$$

b) Case 2 $\kappa > 1: H > \sqrt{D_x D_y}$

特性方程式は4つ実数解を持ち、齊次解 ${}_{1h}w_y, {}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$ は次のようになる。

$${}_{1h}w_y = a^4 \sum_m {}_1R_m \left[\frac{\cosh \alpha_{2m} \eta}{\cosh \alpha_{2m}} - \frac{\cosh \beta_{2m} \eta}{\cosh \beta_{2m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (23a)$$

$${}_{1h}w_x = a^4 \sum_n {}_1R_n \left[\frac{\cosh \alpha_{2n} (1-\xi)}{\cosh \alpha_{2n}} - \frac{\cosh \beta_{2n} (1-\xi)}{\cosh \beta_{2n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (23b)$$

$${}_{2h}w_x = a^4 \sum_n {}_2R_n \left[\frac{\sinh \alpha_{2n} \xi}{\cosh \alpha_{2n}} - e_{2n} \frac{\sinh \beta_{2n} \xi}{\cosh \beta_{2n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (23c)$$

$$\text{但し, } e_{2n} = \frac{\alpha_{2n} (\alpha_{2n}^2 D_x \phi^2 - \mu_n^2 (H + 2D_{xy}))}{\beta_{2n} (\beta_{2n}^2 D_x \phi^2 - \mu_n^2 (H + 2D_{xy}))}$$

c) Case 3 $\kappa < 1: H < \sqrt{D_x D_y}$

特性方程式は4つ複素数解を持ち、齊次解 ${}_{1h}w_y, {}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$ は次のようになる。

$${}_{1h}w_y = a^4 \sum_m {}_1R_m \left[\frac{\sin \alpha_{3m} \eta \sinh \beta_{3m} \eta}{\sin \alpha_{3m} \sinh \beta_{3m}} - \frac{\cos \alpha_{3m} \eta \cosh \beta_{3m} \eta}{\cos \alpha_{3m} \cosh \beta_{3m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (24a)$$

$${}_{1h}w_x = a^4 \sum_n {}_1R_n \left[\frac{\sin \alpha_{3n} (1-\xi) \sinh \beta_{3n} (1-\xi)}{\sin \alpha_{3n} \sinh \beta_{3n}} - \frac{\cos \alpha_{3n} (1-\xi) \cosh \beta_{3n} (1-\xi)}{\cos \alpha_{3n} \cosh \beta_{3n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (24b)$$

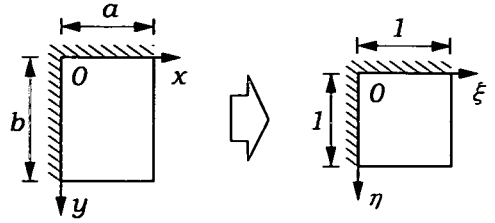


図-3 二隣辺固定二辺自由平板の座標と無次元化座標

$${}_{2h}w_x = a^4 \sum_n {}_2R_n \left[\frac{\sin \alpha_{3n} \xi \cosh \beta_{3n} \xi}{\cos \alpha_{3n} \cosh \beta_{3n}} - e_{3n} \frac{\cos \alpha_{3n} \xi \sinh \beta_{3n} \xi}{\cos \alpha_{3n} \cosh \beta_{3n}} \right] \cos \mu_n \eta \quad (24c)$$

$$\text{但し, } A_n = \beta_{3n}^2 - 3\alpha_{3n}^2 - \frac{H + 2D_{xy}}{D_x} \frac{\mu_n^2}{\phi^2}$$

$$B_n = \alpha_{3n}^2 - 3\beta_{3n}^2 + \frac{H + 2D_{xy}}{D_x} \frac{\mu_n^2}{\phi^2}$$

$$e_{3n} = \frac{\beta_{3n} \{A_n\} \tan \alpha_{3n} \tan \beta_{3n} - \alpha_{3n} \{B_n\}}{\beta_{3n} \{A_n\} + \alpha_{3n} \{B_n\} \tan \alpha_{3n} \tan \beta_{3n}}$$

(4) 未定係数 ${}_1R_m, {}_1R_n, {}_2R_n$ の決定

得られた非齊次解 ${}_n w$ 、齊次解 ${}_{1h}w_y, {}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$ はともに撓みと反力に関する境界条件 (b-1), (b-4) を満たしている。そこで、前節と同様に残された回転角と曲げモーメントに関する境界条件 (b-2), (b-3) から連立方程式を導き、これらの境界条件を満たすように未定係数 ${}_1R_m, {}_1R_n, {}_2R_n$ を決定する。

5. 二隣辺固定二辺自由直交異方性板の解

二隣辺固定二辺自由直交異方性板の一般解 w を一つの非齊次解 ${}_n w$ と、四つの齊次解 ${}_{1h}w_y, {}_{2h}w_y, {}_{1h}w_x, {}_{2h}w_x$ とで表すと次のようになる。

$$w = {}_n w + {}_{1h}w_y + {}_{1h}w_x + {}_{2h}w_y + {}_{2h}w_x \quad (25)$$

(1) 座標系と境界条件

解析対象となる平板は、 $a \times b$ の長方形平板を前節と同様に式 (4) を用いて無次元化したものである (図-3)。

満足すべき境界条件は、撓み、回転角、曲げモーメントと反力とに関して以下のように与えられる。

$$\text{撓み} \quad : w(\xi, 0) = 0, \quad w(0, \eta) = 0 \quad (c-1)$$

$$\text{回転角} \quad : \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{\eta=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (c-2)$$

$$\text{曲げモーメント} \quad : M_x(1, \eta) = 0, \quad M_y(\xi, 1) = 0 \quad (c-3)$$

$$\text{反力} \quad : V_x(1, \eta) = 0, \quad V_x(\xi, 1) = 0 \quad (c-4)$$

(2) 非齊次解 (${}_n w$)

平板に作用する等分布荷重を以下のような二重フーリエ級数で表す。

$$q = 4q \sum_m \sum_n \frac{1}{\mu_m \mu_n} \sin \mu_m \xi \sin \mu_n \eta \quad (26)$$

前節の場合と同様にして次式を得る。

$${}_n w = \sum_m \sum_n \frac{4qa^4 \phi^4 \sin \mu_m \xi \sin \mu_n \eta}{\mu_m \mu_n (D_x \mu_m^4 \phi^4 + 2H \mu_m^2 \mu_n^2 \phi^2 + D_y \mu_n^4)} \quad (27)$$

(3) 齊次解 ($1hw_y, 2hw_x, 1hw_x, 2hw_x$)

齊次解は前節と同様に単級数の変数分離形で表し、微分方程式の解法に従い展開を行うと、二隣辺固定二辺自由平板の解も κ の値によって以下に掲げる 3 種の場合が考えられる。

a) Case 1 $\kappa = 1: H = \sqrt{D_x D_y}$ (Huber の仮定)

特性方程式は 2 つの重解を持ち、齊次解 $1hw_y, 2hw_y, 1hw_x, 2hw_x$ は次のようになる。

$$1hw_y = a^4 \sum_m 1R_m \alpha_{1m} \left[(1-\eta) \frac{\sinh \alpha_{1m}(1-\eta)}{\cosh \alpha_{1m}} - \tanh \alpha_m \frac{\cosh \alpha_{1m}(1-\eta)}{\cosh \alpha_{1m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (28a)$$

$$2hw_y = a^4 \sum_m 2R_m \left[\alpha_{1m} \eta \frac{\cosh \alpha_{1m} \eta}{\cosh \alpha_{1m}} - \left(1 + \alpha_{1m} \tanh \alpha_{1m} - \frac{H}{D_{xy}} \right) \frac{\sinh \alpha_{1m} \eta}{\cosh \alpha_{1m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (28b)$$

$$1hw_x = a^4 \sum_n 1R_n \alpha_{1n} \left[(1-\xi) \frac{\sinh \alpha_{1n}(1-\xi)}{\cosh \alpha_{1n}} - \tanh \alpha_{1n} \frac{\cosh \alpha_{1n}(1-\xi)}{\cosh \alpha_{1n}} \right] \sin \mu_n \eta \quad (28c)$$

$$2hw_x = a^4 \sum_n 2R_n \left[\alpha_{1n} \xi \frac{\cosh \alpha_{1n} \xi}{\cosh \alpha_{1n}} - \left(1 + \alpha_{1n} \tanh \alpha_{1n} - \frac{H}{D_{xy}} \right) \frac{\sinh \alpha_{1n} \xi}{\cosh \alpha_{1n}} \right] \sin \mu_n \eta \quad (28d)$$

b) Case 2 $\kappa > 1: H > \sqrt{D_x D_y}$

特性方程式は 4 つ実数解を持ち、齊次解 $1hw_y, 2hw_y, 1hw_x, 2hw_x$ は次のようになる。

$$1hw_y = a^4 \sum_m 1R_m \left[\frac{\cosh \alpha_{2m}(1-\eta)}{\cosh \alpha_{2m}} - \frac{\cosh \beta_{2m}(1-\eta)}{\cosh \beta_{2m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (29a)$$

$$2hw_y = a^4 \sum_m 2R_m \left[\frac{\sinh \alpha_{2m} \eta}{\cosh \alpha_{2m}} - e_{2m} \frac{\sinh \beta_{2m} \eta}{\cosh \beta_{2m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (29b)$$

$$1hw_x = a^4 \sum_n 1R_n \left[\frac{\cosh \alpha_{2n}(1-\xi)}{\cosh \alpha_{2n}} - \frac{\cosh \beta_{2n}(1-\xi)}{\cosh \beta_{2n}} \right] \sin \mu_n \eta \quad (29c)$$

$$2hw_x = a^4 \sum_n 2R_n \left[\frac{\sinh \alpha_{2n} \xi}{\cosh \alpha_{2n}} - e_{2n} \frac{\sinh \beta_{2n} \xi}{\cosh \beta_{2n}} \right] \sin \mu_n \eta \quad (29d)$$

$$\text{但し, } e_{2m} = \frac{\alpha_{2m}(\alpha_{2m}^2 D_x - \mu_m^2 \phi^2 (H + 2D_{xy}))}{\beta_{2m}(\beta_{2m}^2 D_x - \mu_m^2 \phi^2 (H + 2D_{xy}))}$$

$$e_{2n} = \frac{\alpha_{2n}(\alpha_{2n}^2 D_x \phi^2 - \mu_n^2 (H + 2D_{xy}))}{\beta_{2n}(\beta_{2n}^2 D_x \phi^2 - \mu_n^2 (H + 2D_{xy}))}$$

c) Case 3 $\kappa < 1: H < \sqrt{D_x D_y}$

特性方程式は 4 つ複素数解を持ち、齊次解 $1hw_y, 2hw_y, 1hw_x, 2hw_x$ は次のようになる。

$$1hw_y = a^4 \sum_m 1R_m \left[\frac{\sin \alpha_{3m}(1-\eta) \sinh \beta_{3m}(1-\eta)}{\sin \alpha_{2m} \sinh \beta_{3m}} - \frac{\cos \alpha_{3m}(1-\eta) \cosh \beta_{3m}(1-\eta)}{\cos \alpha_{3m} \cosh \beta_{3m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (30a)$$

$$2hw_y = a^4 \sum_m 2R_m \left[\frac{\sin \alpha_{3m} \eta \cosh \beta_{3m} \eta}{\cos \alpha_{3m} \cosh \beta_{3m}} - e_{3m} \frac{\cos \alpha_{3m} \eta \sinh \beta_{3m} \eta}{\cos \alpha_{3m} \cosh \beta_{3m}} \right] \sin \mu_m \xi \quad (30b)$$

$$1hw_x = a^4 \sum_n 1R_n \left[\frac{\sin \alpha_{3n}(1-\xi) \sinh \beta_{3n}(1-\xi)}{\sin \alpha_{3n} \sinh \beta_{3n}} - \frac{\cos \alpha_{3n}(1-\xi) \cosh \beta_{3n}(1-\xi)}{\cos \alpha_{3n} \cosh \beta_{3n}} \right] \sin \mu_n \eta \quad (30c)$$

$$2hw_x = a^4 \sum_n 2R_n \left[\frac{\sin \alpha_{3n} \xi \cosh \beta_{3n} \xi}{\cos \alpha_{3n} \cosh \beta_{3n}} - e_{3n} \frac{\cos \alpha_{3n} \xi \sinh \beta_{3n} \xi}{\cos \alpha_{3n} \cosh \beta_{3n}} \right] \sin \mu_n \eta \quad (30d)$$

$$\text{但し, } A_m = \beta_{3m}^2 - 3\alpha_{3m}^2 - \frac{H + 2D_{xy}}{D_x} \mu_m^2 \phi^2$$

$$B_m = \alpha_{3m}^2 - 3\beta_{3m}^2 + \frac{H + 2D_{xy}}{D_x} \mu_m^2 \phi^2$$

$$e_{3m} = \frac{\beta_{3m} \{A_m\} \tan \alpha_{3m} \tan \beta_{3m} - \alpha_{3m} \{B_m\}}{\beta_{3m} \{A_m\} + \alpha_{3m} \{B_m\} \tan \alpha_{3m} \tan \beta_{3m}}$$

$$A_n = \beta_{3n}^2 - 3\alpha_{3n}^2 - \frac{H + 2D_{xy}}{D_x} \mu_n^2 \phi^2$$

$$B_n = \alpha_{3n}^2 - 3\beta_{3n}^2 + \frac{H + 2D_{xy}}{D_x} \mu_n^2 \phi^2$$

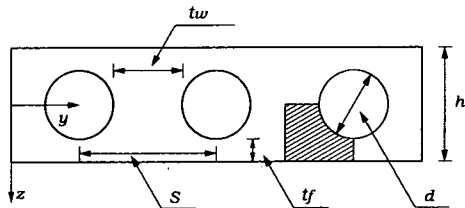
$$e_{3n} = \frac{\beta_{3n} \{A_n\} \tan \alpha_{3n} \tan \beta_{3n} - \alpha_{3n} \{B_n\}}{\beta_{3n} \{A_n\} + \alpha_{3n} \{B_n\} \tan \alpha_{3n} \tan \beta_{3n}}$$

(4) 未定係数 $1R_m, 2R_m, 1R_n, 2R_n$ の決定

得られた非齊次解 nw , 齊次解 $1hw_y, 2hw_y, 1hw_x, 2hw_x$ はともに撓みと反力に関する境界条件 (c-1), (c-4) を満たしており、前節と同様に回転角と曲げモーメントに関する境界条件 (c-2), (c-3) から連立方程式を導き、未定係数 $1R_m, 2R_m, 1R_n, 2R_n$ を決定する。

6. 一方向ボイドスラブの剛性評価

直交異方性板の曲げ解析では、曲げ剛性係数 λ と捩り剛性係数 κ の値²⁾を決める必要がある。これらの係数は模型実験で得ることも可能であるが、本論文ではボイドスラブを対象として、有限要素法による数値実験から必要な係数を求めることにする。



h : スラブ厚 tw : ウェブ厚
 d : ボイド口径 tf : フランジ厚
 s : ボイド間隔

図4 ボイドスラブの断面形状と記号

表-1 曲げ・捩り剛性と λ, κ

t_w/t_f	D_x/D			D_y/D			D_{xy}/D			D_{xy}/D_{xys}			λ			κ		
	1.00	2.00	3.00	1.00	2.00	3.00	1.00	2.00	3.00	1.00	2.00	3.00	1.00	2.00	3.00	1.00	2.00	3.00
0.30	0.993	0.995	0.997	0.986	0.991	0.993	0.397	0.392	0.391	0.994	0.980	0.977	0.998	0.999	0.999	1.003	0.989	0.966
0.35	0.987	0.991	0.993	0.976	0.983	0.987	0.396	0.390	0.389	0.991	0.975	0.971	0.997	0.998	0.998	1.006	0.989	0.984
0.40	0.979	0.985	0.988	0.961	0.970	0.977	0.394	0.387	0.386	0.985	0.968	0.964	0.995	0.996	0.997	1.011	0.991	0.984
0.45	0.967	0.976	0.981	0.940	0.953	0.962	0.390	0.384	0.382	0.975	0.959	0.955	0.993	0.994	0.995	1.015	0.993	0.985
0.50	0.951	0.963	0.971	0.914	0.928	0.941	0.384	0.378	0.377	0.959	0.946	0.943	0.990	0.991	0.992	1.019	0.996	0.987
0.55	0.930	0.946	0.956	0.881	0.896	0.911	0.374	0.371	0.371	0.936	0.927	0.927	0.986	0.986	0.988	1.022	1.000	0.990
0.60	0.905	0.924	0.936	0.839	0.855	0.872	0.361	0.360	0.362	0.903	0.901	0.906	0.981	0.981	0.982	1.022	1.003	0.995
0.65	0.873	0.895	0.911	0.789	0.804	0.822	0.343	0.346	0.350	0.858	0.865	0.875	0.975	0.974	0.975	1.017	1.005	0.999
0.70	0.834	0.859	0.877	0.728	0.742	0.759	0.319	0.326	0.333	0.798	0.816	0.833	0.967	0.964	0.965	1.007	1.004	1.003
0.75	0.787	0.814	0.834	0.655	0.668	0.684	0.289	0.301	0.310	0.723	0.752	0.775	0.955	0.952	0.951	0.988	0.997	1.002
0.80	0.732	0.759	0.781	0.570	0.582	0.594	0.252	0.268	0.279	0.631	0.669	0.698	0.940	0.936	0.934	0.958	0.980	0.994
0.85	0.668	0.693	0.714	0.472	0.481	0.491	0.210	0.226	0.238	0.524	0.565	0.596	0.917	0.913	0.911	0.915	0.950	0.971
0.90	0.593	0.614	0.632	0.357	0.363	0.370	0.162	0.176	0.187	0.406	0.440	0.466	0.881	0.877	0.875	0.861	0.899	0.924

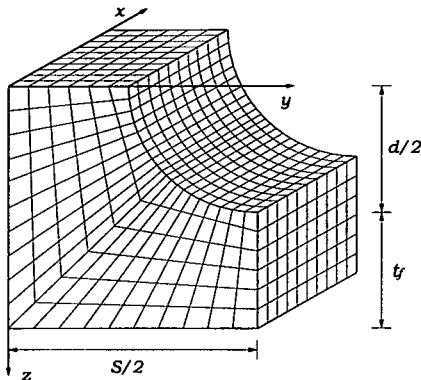


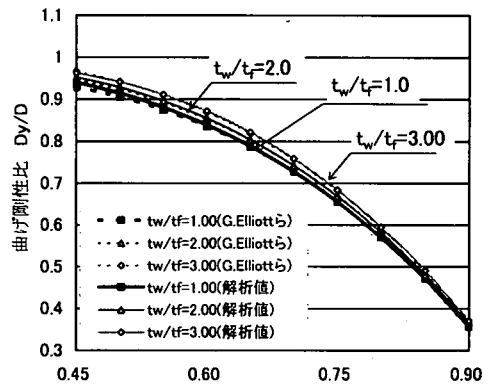
図-5 有限要素分割

ここでは剛性係数 κ を得るため、二隣辺単純支持他辺自由板を用いて、二自由辺の交点に集中荷重を作用させた時、作用点に生じる鉛直変位から捩り剛性を求める坪井の方法⁴⁾に準拠し、3次元有限要素解析を行い、必要となる剛性値を求める。

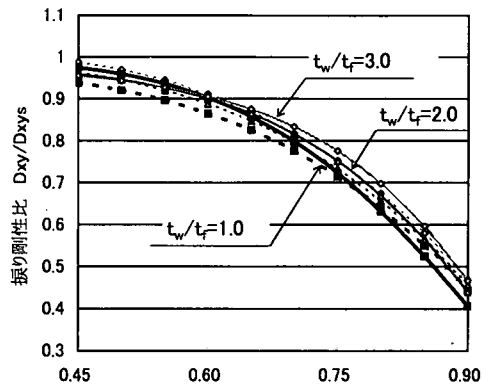
解析対象の一例として、図-4 に示すポイドスラブを考えてみる。解析では、ポイドスラブの連続性と対称性から図-4 の斜線部に対して六面体アイソパラメトリック要素を用いた有限要素分割を行っている(図-5)。また、剪断変形の影響を排除するために、この解析モデルに対して、平面保持の仮定に基づく強制変位与え、薄板理論に適合させた解を求めている。

剛性はポイドスラブとソリッドスラブの比の形 $(D_x/D), (D_y/D), (D_{xy}/D_{xys})$ で求め、それらから $\lambda (= \sqrt{D_y/D_x}), \kappa (= H/\sqrt{D_x D_y})$ を算出する。ここで D, D_{xys} はそれぞれソリッドスラブの曲げ・捩り剛性である。計算は $t_w/t_f = 1.00, 2.00, 3.00, d/h = 0.30 \sim 0.90$ の範囲で行い、ポアソン比は $\nu = 0.2$ とする。

得られた結果を表-1 と図-6 に掲げる。また図-6 には G.Elliott と L.A.Clark¹³⁾ によって与えられた結果も比較、対照のために併記する。これより Elliott らの解との



(a)



(b)

実線 ————— : 解析値
 点線 : G.Elliott, L.A.Clark による解

図-6 剛性比 (a) D_y/D (b) D_{xy}/D_{xys}

表-2 最大撓み及び最大正, 最大負曲げモーメント【周辺固定】

	λ	b/a=1.00					b/a=2.00					b/a=3.00					
		κ					κ					κ					
		0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	
W (0,0)	1/1.2	0.00087	0.00085	0.00083	0.00081	0.00080	0.00127	0.00126	0.00126	0.00125	0.00124	0.00126	0.00126	0.00126	0.00126	0.00126	0.00126
	1/1.1	0.00108	0.00105	0.00103	0.00101	0.00098	0.00179	0.00178	0.00176	0.00175	0.00174	0.00179	0.00179	0.00179	0.00178	0.00178	0.00178
	1.0	0.00133	0.00130	0.00127	0.00124	0.00121	0.00259	0.00256	0.00253	0.00251	0.00248	0.00263	0.00262	0.00262	0.00261	0.00261	0.00261
	1.1	0.00108	0.00105	0.00103	0.00101	0.00098	0.00252	0.00249	0.00246	0.00242	0.00239	0.00263	0.00263	0.00262	0.00261	0.00261	0.00260
	1.2	0.00087	0.00085	0.00083	0.00081	0.00080	0.00243	0.00239	0.00236	0.00232	0.00229	0.00264	0.00262	0.00261	0.00261	0.00260	0.00259
cMx ($x_{max}, 0$)	1/1.2	0.0292	0.0283	0.0275	0.0268	0.0261	0.0422	0.0420	0.0417	0.0414	0.0411	0.0418	0.0418	0.0418	0.0417	0.0417	0.0417
	1/1.1	0.0260	0.0252	0.0244	0.0237	0.0231	0.0421	0.0417	0.0414	0.0410	0.0406	0.0419	0.0419	0.0418	0.0418	0.0418	0.0417
	1.0	0.0225	0.0218	0.0211	0.0205	0.0199	0.0418	0.0413	0.0408	0.0403	0.0398	0.0420	0.0420	0.0419	0.0418	0.0418	0.0417
	1.1	0.0178	0.0172	0.0167	0.0162	0.0157	0.0407	0.0401	0.0395	0.0389	0.0383	0.0422	0.0420	0.0419	0.0418	0.0418	0.0416
	1.2	0.0139	0.0134	0.0130	0.0126	0.0123	0.0392	0.0384	0.0377	0.0370	0.0364	0.0422	0.0420	0.0418	0.0418	0.0416	0.0413
eMx (a, y_{min})	1/1.2	-0.0655	-0.0647	-0.0639	-0.0632	-0.0624	-0.0846	-0.0843	-0.0839	-0.0836	-0.0833	-0.0839	-0.0838	-0.0837	-0.0835	-0.0835	-0.0835
	1/1.1	-0.0595	-0.0588	-0.0581	-0.0575	-0.0568	-0.0846	-0.0841	-0.0837	-0.0832	-0.0828	-0.0840	-0.0838	-0.0837	-0.0836	-0.0836	-0.0835
	1.0	-0.0524	-0.0519	-0.0513	-0.0508	-0.0503	-0.0841	-0.0835	-0.0829	-0.0823	-0.0817	-0.0840	-0.0839	-0.0838	-0.0837	-0.0837	-0.0836
	1.1	-0.0453	-0.0449	-0.0445	-0.0441	-0.0438	-0.0828	-0.0821	-0.0814	-0.0807	-0.0800	-0.0843	-0.0841	-0.0839	-0.0837	-0.0837	-0.0836
	1.2	-0.0390	-0.0387	-0.0385	-0.0382	-0.0380	-0.0809	-0.0801	-0.0793	-0.0785	-0.0778	-0.0845	-0.0843	-0.0840	-0.0837	-0.0837	-0.0834
cMy (0, y_{max})	1/1.2	0.0139	0.0134	0.0130	0.0126	0.0123	0.0094	0.0092	0.0090	0.0089	0.0087	0.0093	0.0091	0.0089	0.0087	0.0086	0.0086
	1/1.1	0.0178	0.0172	0.0167	0.0162	0.0157	0.0117	0.0115	0.0112	0.0110	0.0108	0.0119	0.0116	0.0114	0.0112	0.0110	
	1.0	0.0225	0.0218	0.0211	0.0205	0.0199	0.0155	0.0152	0.0149	0.0146	0.0144	0.0151	0.0148	0.0145	0.0143	0.0140	
	1.1	0.0260	0.0252	0.0244	0.0237	0.0231	0.0177	0.0174	0.0170	0.0167	0.0164	0.0172	0.0168	0.0165	0.0161	0.0158	
	1.2	0.0292	0.0283	0.0275	0.0268	0.0261	0.0207	0.0203	0.0199	0.0196	0.0192	0.0196	0.0191	0.0187	0.0184	0.0180	
eMy (x_{min}, b)	1/1.2	-0.0390	-0.0387	-0.0385	-0.0382	-0.0380	-0.0394	-0.0395	-0.0395	-0.0396	-0.0396	-0.0394	-0.0394	-0.0395	-0.0396	-0.0396	-0.0396
	1/1.1	-0.0453	-0.0449	-0.0445	-0.0441	-0.0438	-0.0469	-0.0470	-0.0470	-0.0471	-0.0472	-0.0469	-0.0469	-0.0470	-0.0471	-0.0471	-0.0471
	1.0	-0.0524	-0.0519	-0.0513	-0.0508	-0.0503	-0.0568	-0.0569	-0.0570	-0.0570	-0.0571	-0.0567	-0.0568	-0.0569	-0.0570	-0.0570	-0.0570
	1.1	-0.0595	-0.0588	-0.0581	-0.0575	-0.0568	-0.0689	-0.0690	-0.0690	-0.0691	-0.0691	-0.0686	-0.0687	-0.0688	-0.0689	-0.0689	-0.0690
	1.2	-0.0655	-0.0647	-0.0639	-0.0632	-0.0624	-0.0822	-0.0822	-0.0822	-0.0822	-0.0821	-0.0817	-0.0818	-0.0819	-0.0820	-0.0822	-0.0822

$\kappa = 1.00$ における値との差が5%をこえるもの

unit - W : $qa^4/\min(D_x, D_y)$, M : qa^2

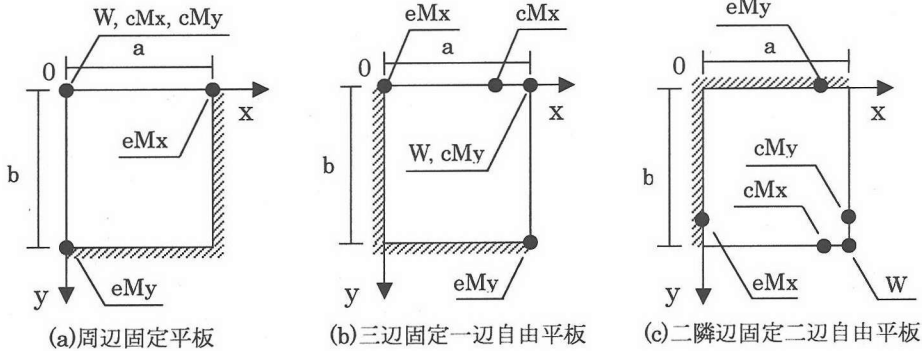


図-7 最大撓み及び最大正, 最大負曲げモーメント位置

良好な一致が認められる。表-1よりポイドスラブの κ は $t_w/t_f = 1.00$, $d/h = 0.60$ で最大値 $\kappa = 1.022$ をとり, $d/h = 0.90$ で最小値 $\kappa = 0.861$ をとることが確認できる。多くの値が Huber の仮定 ($\kappa = 1.00$) に近いものであるが, d/h が 0.85 以上の場合には $\kappa = 1.00$ との差異が 5% をこえるものも算出されている。このことから $\kappa = 1.00$ 以外の場合についても解の検討が必要になることは明らかであり, 次節において解析結果の考察を行うことにする。

7. 解析結果の考察

等分布荷重を受ける周辺固定平板, 三辺固定一辺自由

平板, 二隣辺固定二辺自由平板の 3 種の直交異方性平板の応力・変形状の推移状況を検討するため, 次に示す曲げ剛性係数 λ , 捩り剛性係数 κ , 辺長比 b/a の 3 種の係数をパラメータとして解析を行う。但し, ポアソン比は全て 0.2 とする。級数の項数は 31 項を採用した。

- i) 曲げ剛性係数 $\lambda (= \sqrt[4]{D_y/D_x})$: 1/1.2 ~ 1.2
- ii) 捩り剛性係数 $\kappa (= H/\sqrt{D_x D_y})$: 0.80 ~ 1.20
- iii) 辺長比 b/a : 1.00, 1.50, 2.00, 2.50, 3.00

尚, i), ii) は表-1より決定した値で, 曲げ剛性係数 λ は表-1において最大値 0.999, 最小値 0.875 をとることから $\lambda = 1/1.2 \sim 1.0$ とし, またその逆数 1.0 ~ 1.2 も採用した。捩り剛性係数 κ においても表-1の最大値

表-3 最大撓み及び最大正,最大負曲げモーメント【三辺固定一辺自由】

	λ	b/a=1.00					b/a=2.00					b/a=3.00				
		κ					κ					κ				
		0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20
W (a,0)	1/1.2	0.00277	0.00271	0.00265	0.00259	0.00254	0.02345	0.02235	0.02137	0.02048	0.01967	0.04426	0.04253	0.04094	0.03948	0.03814
	1/1.1	0.00284	0.00278	0.00273	0.00268	0.00263	0.02766	0.02636	0.02520	0.02415	0.02320	0.05768	0.05519	0.05294	0.05088	0.04900
	1.0	0.00290	0.00285	0.00281	0.00276	0.00272	0.03243	0.03093	0.02958	0.02837	0.02726	0.07581	0.07225	0.06904	0.06613	0.06349
	1.1	0.00194	0.00192	0.00190	0.00188	0.00186	0.02420	0.02318	0.02227	0.02144	0.02068	0.06356	0.06055	0.05784	0.05539	0.05316
	1.2	0.00135	0.00134	0.00133	0.00132	0.00131	0.01823	0.01755	0.01693	0.01636	0.01583	0.05297	0.05049	0.04827	0.04625	0.04441
cMx (x _{max} , 0)	1/1.2	0.0171	0.0170	0.0169	0.0168	0.0167	0.0210	0.0227	0.0242	0.0258	0.0272	0.0082	0.0094	0.0104	0.0123	0.0140
	1/1.1	0.0160	0.0158	0.0157	0.0155	0.0153	0.0227	0.0247	0.0264	0.0278	0.0289	0.0099	0.0122	0.0143	0.0161	0.0177
	1.0	0.0146	0.0144	0.0142	0.0140	0.0138	0.0247	0.0264	0.0278	0.0289	0.0298	0.0136	0.0160	0.0180	0.0198	0.0213
	1.1	0.0115	0.0113	0.0111	0.0109	0.0107	0.0245	0.0257	0.0267	0.0274	0.0280	0.0178	0.0198	0.0216	0.0231	0.0243
	1.2	0.0094	0.0092	0.0090	0.0088	0.0087	0.0231	0.0238	0.0245	0.0249	0.0253	0.0203	0.0220	0.0235	0.0247	0.0262
eMx (0, y _{max})	1/1.2	-0.0805	-0.0807	-0.0809	-0.0810	-0.0810	-0.2771	-0.2724	-0.2680	-0.2638	-0.2599	-0.4189	-0.4096	-0.4011	-0.3932	-0.3858
	1/1.1	-0.0678	-0.0680	-0.0682	-0.0683	-0.0684	-0.2447	-0.2412	-0.2379	-0.2348	-0.2318	-0.3963	-0.3872	-0.3788	-0.3710	-0.3638
	1.0	-0.0562	-0.0563	-0.0565	-0.0566	-0.0567	-0.2104	-0.2081	-0.2060	-0.2039	-0.2018	-0.3676	-0.3590	-0.3512	-0.3439	-0.3372
	1.1	-0.0466	-0.0467	-0.0468	-0.0469	-0.0470	-0.1773	-0.1762	-0.1751	-0.1739	-0.1727	-0.3286	-0.3217	-0.3153	-0.3094	-0.3039
	1.2	-0.0393	-0.0393	-0.0394	-0.0395	-0.0395	-0.1511	-0.1507	-0.1501	-0.1495	-0.1488	-0.2930	-0.2876	-0.2826	-0.2779	-0.2736
cMy (a, y _{max})	1/1.2	0.0429	0.0417	0.0406	0.0396	0.0386	0.0788	0.0742	0.0701	0.0664	0.0631	0.0532	0.0508	0.0485	0.0465	0.0446
	1/1.1	0.0441	0.0430	0.0420	0.0411	0.0402	0.0954	0.0898	0.0849	0.0805	0.0765	0.0722	0.0681	0.0645	0.0613	0.0583
	1.0	0.0449	0.0440	0.0431	0.0423	0.0415	0.1140	0.1074	0.1017	0.0965	0.0919	0.1005	0.0942	0.0887	0.0839	0.0795
	1.1	0.0447	0.0440	0.0433	0.0427	0.0422	0.1282	0.1217	0.1158	0.1106	0.1058	0.1311	0.1230	0.1159	0.1096	0.1040
	1.2	0.0443	0.0438	0.0433	0.0429	0.0425	0.1398	0.1335	0.1278	0.1226	0.1179	0.1615	0.1519	0.1434	0.1358	0.1290
eMy (x _{max} , b)	1/1.2	-0.0869	-0.0856	-0.0844	-0.0832	-0.0821	-0.2323	-0.2329	-0.2329	-0.2324	-0.2317	-0.2846	-0.2904	-0.2952	-0.2991	-0.3022
	1/1.1	-0.0884	-0.0873	-0.0862	-0.0851	-0.0841	-0.2515	-0.2454	-0.2439	-0.2436	-0.2429	-0.3143	-0.3210	-0.3264	-0.3307	-0.3341
	1.0	-0.0897	-0.0886	-0.0876	-0.0867	-0.0858	-0.2815	-0.2743	-0.2677	-0.2615	-0.2557	-0.3734	-0.3671	-0.3609	-0.3603	-0.3643
	1.1	-0.0883	-0.0876	-0.0869	-0.0862	-0.0855	-0.2986	-0.2914	-0.2847	-0.2785	-0.2770	-0.4279	-0.4284	-0.4320	-0.4343	-0.4357
	1.2	-0.0872	-0.0867	-0.0862	-0.0857	-0.0852	-0.3117	-0.3047	-0.3017	-0.2996	-0.2973	-0.4983	-0.5002	-0.5009	-0.5005	-0.4994

κ=1.00における値との差が5%をこえるもの

unit - W : qa⁴/min(Dx,Dy), M : qa²

表-4 最大撓み及び最大正,最大負曲げモーメント【二隣辺固定二辺自由】

	λ	b/a=1.00					b/a=2.00					b/a=3.00				
		κ					κ					κ				
		0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20
W (a,b)	1/1.2	0.02980	0.02793	0.02631	0.02489	0.02364	0.05553	0.05402	0.05259	0.05126	0.04999	0.05933	0.05889	0.05842	0.05793	0.05742
	1/1.1	0.03714	0.03469	0.03259	0.03076	0.02915	0.07678	0.07424	0.07190	0.06973	0.06771	0.08372	0.08286	0.08196	0.08104	0.08011
	1.0	0.04663	0.04342	0.04069	0.03832	0.03625	0.10897	0.10460	0.10064	0.09705	0.09375	0.12211	0.12033	0.11854	0.11677	0.11502
	1.1	0.03714	0.03469	0.03259	0.03076	0.02915	0.10094	0.09638	0.09230	0.08861	0.08526	0.11976	0.11738	0.11508	0.11286	0.11071
	1.2	0.02980	0.02793	0.02631	0.02489	0.02364	0.09277	0.08819	0.08412	0.08048	0.07719	0.11662	0.11372	0.11098	0.10838	0.10591
cMx (x _{max} , 0)	1/1.2	0.0352	0.0353	0.0353	0.0352	0.0351	0.0069	0.0074	0.0078	0.0082	0.0087	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013
	1/1.1	0.0359	0.0358	0.0356	0.0356	0.0359	0.0099	0.0102	0.0106	0.0109	0.0112	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
	1.0	0.0353	0.0353	0.0357	0.0358	0.0358	0.0133	0.0134	0.0136	0.0137	0.0138	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0019
	1.1	0.0350	0.0353	0.0353	0.0352	0.0349	0.0177	0.0177	0.0177	0.0178	0.0188	0.0027	0.0032	0.0037	0.0041	0.0045
	1.2	0.0337	0.0337	0.0335	0.0332	0.0328	0.0215	0.0218	0.0228	0.0236	0.0244	0.0055	0.0060	0.0065	0.0069	0.0074
eMx (0, y _{max})	1/1.2	-0.3384	-0.3279	-0.3235	-0.3191	-0.3147	-0.4855	-0.4768	-0.4686	-0.4609	-0.4537	-0.5053	-0.5022	-0.4990	-0.4958	-0.4926
	1/1.1	-0.3149	-0.3052	-0.2964	-0.2890	-0.2863	-0.4806	-0.4704	-0.4609	-0.4521	-0.4439	-0.5064	-0.5022	-0.4980	-0.4939	-0.4897
	1.0	-0.2886	-0.2800	-0.2722	-0.2652	-0.2587	-0.4742	-0.4623	-0.4513	-0.4413	-0.4321	-0.5080	-0.5024	-0.4968	-0.4914	-0.4862
	1.1	-0.2525	-0.2459	-0.2455	-0.2450	-0.2440	-0.4513	-0.4389	-0.4277	-0.4175	-0.4082	-0.4992	-0.4922	-0.4855	-0.4792	-0.4731
	1.2	-0.2319	-0.2325	-0.2326	-0.2322	-0.2315	-0.4281	-0.4158	-0.4047	-0.3946	-0.3853	-0.4892	-0.4811	-0.4734	-0.4662	-0.4593
cMy (a, y _{max})	1/1.2	0.0337	0.0337	0.0335	0.0332	0.0328	0.0425	0.0409	0.0394	0.0380	0.0367	0.0418	0.0399	0.0383	0.0368	0.0355
	1/1.1	0.0350	0.0353	0.0353	0.0352	0.0349	0.0521	0.0503	0.0487	0.0471	0.0457	0.0488	0.0469	0.0451	0.0435	0.0421
	1.0	0.0353	0.0353	0.0357	0.0358	0.0358	0.0631	0.0611	0.0594	0.0578	0.0562	0.0610	0.0581	0.0555	0.0531	0.0510
	1.1	0.0359	0.0358	0.0356	0.0356	0.0359	0.0766	0.0748	0.0730	0.0711	0.0692	0.0746	0.0715	0.0687	0.0662	0.0639
	1.2	0.0352	0.0353	0.0353	0.0352	0.0351	0.0887	0.0873	0.0857	0.0839	0.0821	0.0870	0.0840	0.0813	0.0787	0.0764
eMy (x _{max} , 0)	1/1.2	-0.2319	-0.2325	-0.2326	-0.2322	-0.2315	-0.2947	-0.3035	-0.3112	-0.3180	-0.3239	-0.3046	-0.3143	-0.3230	-0.3310	-0.3381
	1/1.1	-0.2525	-0.2459	-0.2455	-0.2450	-0.2440	-0.3291	-0.3401	-0.3496	-0.3579	-0.3650	-0.3422	-0.3547	-0.3660	-0.3762	-0.3854
	1.0	-0.2886	-0.2800	-0.2722	-0.2652	-0.2587	-0.3890	-0.3871	-0.3886	-0.3991	-0.4080	-0.3941	-0.3972	-0.4123	-0.4258	-0.4381
	1.1	-0.3149	-0.3052	-0.2964	-0.2890	-0.2863	-0.4653	-0.4782	-0.4890	-0.4980	-0.5053	-0.4928	-0.5106	-0.5265	-0.5407	-0.5533
	1.2	-0.3384	-0.3279	-0.3235	-0.3191	-0.3147	-0.5695	-0.5806	-0.5894	-0.5963	-0.6016	-0.6136	-0.6233	-0.6487	-0.6632	-0.6759

κ=1.00における値との差が5%をこえるもの

unit - W : qa⁴/min(Dx,Dy), M : qa²

と最小値を含む値として設定している。得られた結果のうち、最大撓み W と最大正曲げモーメント M、最大負曲げモーメント M の値を表-2 ~ 表-4 に掲げる。簡単のため、振り剛性係数、辺長比はそれぞれ κ = 0.80, 0.90, 1.00, 1.10, 1.20, b/a = 1.00, 2.00, 3.00 とする。また、表中の網掛けで表示された部分は、Huber

の仮定、即ち κ = 1.00 における値との差異が 5% を超える値を示したものである。図-7 は 3 種の平板における最大撓み W および最大正曲げ、最大負曲げモーメント M、eM の対象となる位置を示したものである。

表-2 ~ 表-4 において、最大負曲げモーメント eM の値に注目すると、辺長比 b/a や曲げ剛性係数 λ の値に

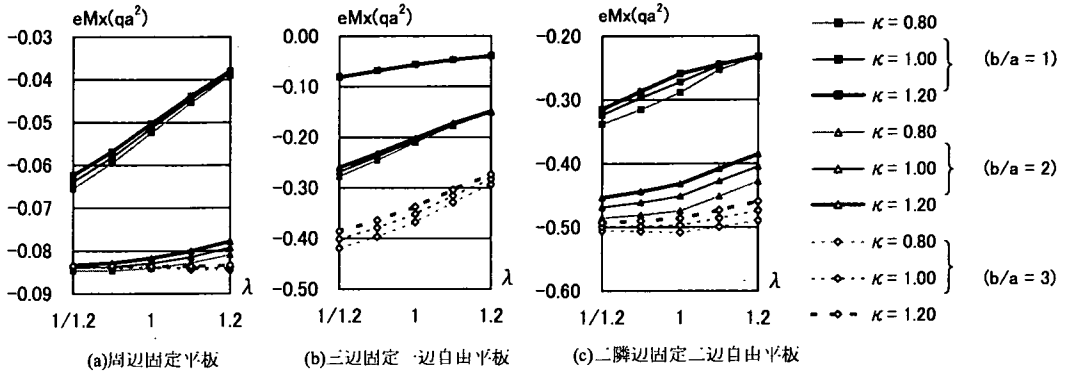


図-8 最大負曲げモーメント eM_x

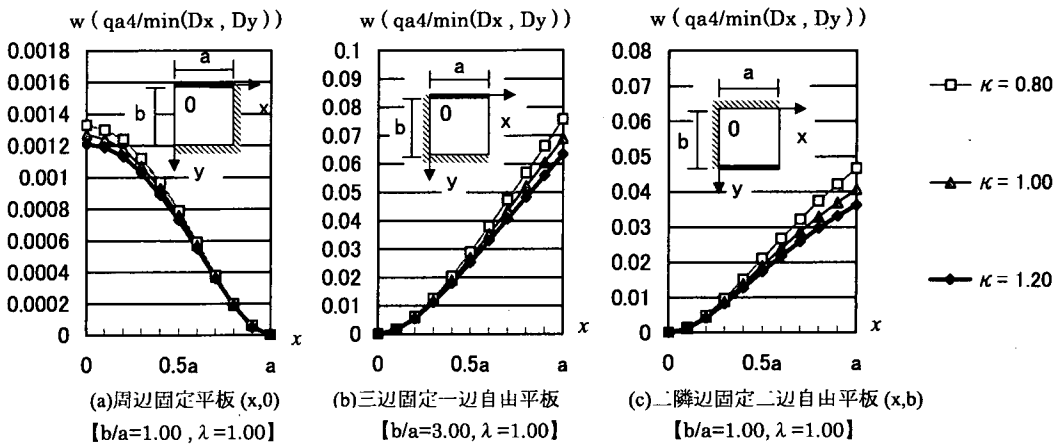


図-9 撓み w 分布

関わらず、周辺固定平板の場合、Huberの仮定 ($\kappa = 1.00$) との差異は最大で 2.5%、三辺固定一辺自由平板でもその差異は最大で 4.8%であり、両者とも 5%を超えるものは算出されていない。また、二隣辺固定二辺自由平板においても辺長比 $b/a = 3.00$ の場合に、その差異が最大で 5.5%と 5%を若干超えているにとどまっている。このことから、振り剛性係数 κ が最大負曲げモーメント eM_x に与える影響は小さなものであり、この場合においては、3種の平板のいずれに対しても Huberの仮定は十分な精度を有していることが分かる。

図-8は3種の平板における最大負曲げモーメント eM_x の曲げ剛性係数 λ による推移を辺長比 $b/a = 1.00, 2.00, 3.00$ 、振り剛性係数 $\kappa = 0.80, 1.00, 1.20$ について描いたものである。3種の平板とも辺長比 b/a が增大するにつれて、また振り剛性係数 λ が減少するにつれて、最大負曲げモーメント eM_x の絶対値が増加している。さらに辺長比 b/a の増大に伴い最大負曲げ

モーメント eM_x の値は、(a) 周辺固定平板において両端固定梁の曲げモーメント値 $-0.0833qa^2$ に、(c) 二隣辺固定二辺自由平板においては片持ち板の曲げモーメント値 $-0.5qa^2$ に、それぞれ収束する様相を示している。振り剛性係数 κ の影響としては、3種の平板とも振り剛性係数 κ の増大に伴い、最大負曲げモーメント eM_x の絶対値は減少しているが、表-2～表-4でも見ることができるよう、Huberの仮定 ($\kappa = 1.00$) との差異は小さなものとなっている。

図-9は3種の平板における撓み w の分布を示したものである。それぞれの平板に対して、 $\lambda = 1.00$ における Huberの仮定 ($\kappa = 1.00$) との差異が最大のものを考慮するため、(a) 周辺固定平板、(c) 二隣辺固定二辺自由平板では辺長比 $b/a = 1.00$ を、(b) 三辺固定一辺自由平板では辺長比 $b/a = 3.00$ を採用した。各平板とも、振り剛性係数 κ の減少に伴い、撓み w は増加の様相を示し、Huberの仮定 ($\kappa = 1.00$) との差異は、

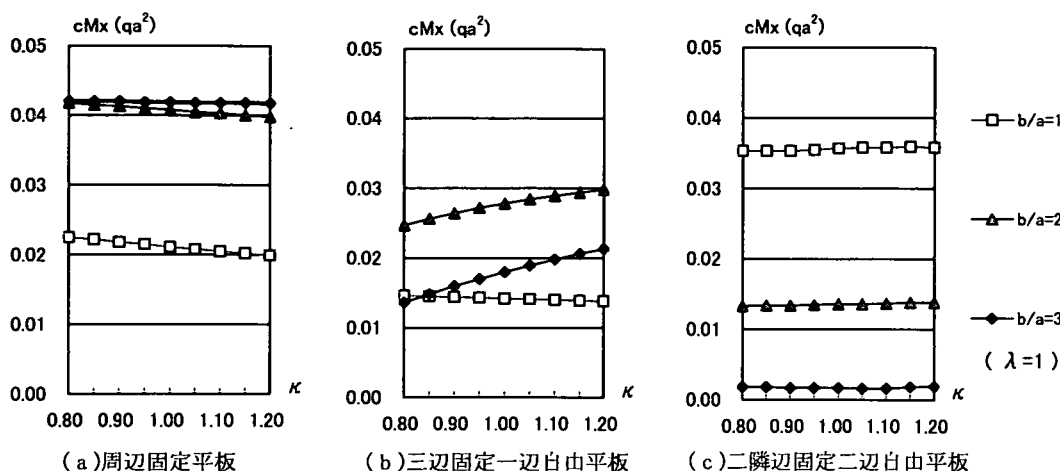


図-10 最大正曲げモーメント cM_x [$\lambda = 1.0$]

(a) 周辺固定平板では、最大で 4.7% とそれほど大きくなりえないものの、(b) 三辺固定一辺自由平板の場合には、隅角部 $(a, 0)$ で最大 9.8%、(c) 二隣辺固定二辺自由平板の場合には、隅角部 (a, b) で最大 14.6% と大きなものとなっている。そのため、これら 2 種の平板では、撓み w に対して Huber の仮定 ($\kappa = 1.00$) を適用する際には注意が必要となることが分かる。

図-10 は、3 種の平板における最大正曲げモーメント cM_x の捩り剛性係数 κ による推移を $\lambda = 1.0$ において描いたものである。(a) 周辺固定平板では、捩り剛性係数 κ が增大するに伴い、最大正曲げモーメント cM_x が減少する傾向にあるが、辺長比の増大と共にその傾向は弱まり、両端固定梁の最大正曲げモーメントの値 $0.0416qa^2$ に近づく様相を見せている。また、(c) 二隣辺固定二辺自由平板においても cM_x の変動はほとんどなく、いずれの辺長比 b/a に対してもその傾向は変わらない。(b) 三辺固定一辺自由平板では、辺長比 $b/a = 1.00$ で (a) 周辺固定平板の傾向と同じく、捩り剛性係数 κ の増大に伴い最大正曲げモーメント cM_x は減少しているが、辺長比 $b/a = 2.00, 3.00$ ではその傾向は逆転し、捩り剛性係数 κ の増大に伴い、最大正曲げモーメント cM_x は増大している。さらにこの時、捩り剛性係数 κ の変化による差異も大きくなっており、Huber の仮定 ($\kappa=1.00$) との差異は辺長比 $b/a = 2.00$ のとき最大で 7.2%、辺長比 $b/a = 3.00$ のとき最大で 18.3% と可成り大きな値を示している。

このように三辺固定一辺自由平板、二隣辺固定二辺自由平板では Huber の仮定によって与えられる解が十分な精度を持たない場合が存在していることが分かる。これは、これら 2 種の平板が境界に自由辺を持つため、

捩りの影響が大きくなり、撓み w や曲げモーメント M が捩り剛性係数 κ の影響を受けやすくなっているためである。一方、周辺固定平板では 4 辺に固定辺を持つため、捩りの影響が小さくなり、捩り剛性係数 κ が撓み w や曲げモーメント M に与える影響は小さなものとなっている。

8. まとめ

本研究から得られた知見を以下に列挙する。

1. 有限要素法を用いた三次元解析により 1 方向ポイドスラブの剛性評価を試み、得られた剛性から曲げ剛性係数 λ 、捩り剛性係数 κ を算定し、その結果が必ずしも Huber の仮定に従わないことを確認した。
2. 上記 1 の結果にもとづき、Huber の仮定に拘束されない任意の曲げ・捩り剛性を有する周辺固定、三辺固定一辺自由、二隣辺固定二辺自由の 3 種の直交異方性平板に対する一般化された級数解を求めた。
3. 周辺固定平板では、撓み w 及び曲げモーメント M の両者に対して、Huber の仮定 ($\kappa=1.00$) が十分な精度を持つことが認められた。一方、三辺固定一辺自由平板では辺長比 b/a の増大に伴い、撓み w 及び最大曲げモーメント cM において Huber の仮定 ($\kappa=1.00$) との差異が大きくなるものが見受けられ、二隣辺固定二辺自由平板では、撓み w において辺長比 b/a が 1 に近づくに従って、また、最大曲げモーメント cM においては、辺長比 b/a が増大するに従って Huber の仮定 ($\kappa=1.00$) との差異が大きくなり、これら 2 種の平板を扱うに際して、Huber の仮定 ($\kappa = 1.00$) を導入するには注意が必要となる。

本解析では直交異方性板の一例としてポイドスラブを取り上げたが、有限要素法もしくは模型実験で剛性係数を求めることにより、本解析手法は直交2方向に剛性が異なる一般的な床版にも適用可能である。尚、今回用いた直交異方性平板の基礎理論は、Poisson-Kirchhoffの仮定より導かれた古典理論であり、剪断変形の影響を考慮していない。今後、剪断変形の影響を加味したReissner理論を適用することによって、より一般的な直交異方性平板の研究に発展させたいと考えている。

参考文献

- 1) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.
- 2) Cope, R.J. and Clark, L.A. : Concrete Slabs -Analysis and Design, ELSEVIER, 1984.
- 3) R. バレシュ, C. マソネ著 成岡昌夫, 国広哲男 訳: 格子桁と直交異方性板の計算, 共立出版, 1969.
- 4) 坪井善勝: 平面構造論, 丸善, 1955.
- 5) 内山武司, 土橋由造: 等分布荷重を受ける周辺単純支持の直交異方性矩形床版の解, 日本建築学会北海道支部研究報告集 Vol33, No.55, 1982.
- 6) 内山武司, 土橋由造: 等分布荷重を受ける周辺固定の直交異方性矩形床版の解, 日本建築学会北海道支部研究報告集 Vol34, No.55, 1982.
- 7) 内山武司, 土橋由造: 等分布荷重を受ける二対辺支持, 一辺固定, 一辺自由の直交異方性矩形床版の解, 日本建築学会北海道支部研究報告集 Vol35, No.55, 1982.
- 8) 内山武司, 土橋由造: 等分布荷重を受ける三辺固定, 一辺自由の直交異方性矩形床版の解, 日本建築学会北海道支部研究報告集 Vol36, No.55, 1982.
- 9) 内山武司, 上田正生: 剪断変形を考慮した直交異方性板の解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.70, 1997.
- 10) Anido, R.N. and Gangarao, V.S. : Macroapproach Closed-Form Series Solution for Orthotropic Plates, *Journal of Structural Engineering*, Vol.121, pp.420-432, 1995.
- 11) Teo, T.M. and Liew, K.M. : Three-Dimensional Elasticity Solutions to Some Orthotropic Plate Problems, *International Journal of Solids Structures*, Vol.36, No.6, pp.5301-5326, 1999.
- 12) Mbakogu, F.C. and Pavlovic, M.N. : Bending of Clamped Orthotropic Rectangular Plate - A Variational Symbolic Solution -, *Compututers and Structures*, Vol.48, pp.1-50, 1997.
- 13) Elliott, G. and Clark, L.A. : Circular Voided Concrete Slab Stiffnesses, *Journal of the Structural Division*, Vol.108, No.ST11, pp.2379-2393, 1982.

(2002.4.1 受付)

BENDING ANALYSIS OF ORTHOTROPIC PLATES WITH ARBITRARY BENDING AND TORSIONAL STIFFNESS

Takeshi AIHARA, Takeshi UCHIYAMA, Masaiki UEDA and Fumito OHYA

There are a lot of previous studies which have introduced the Huber's hypothesis on the torsional stiffness for the orthotropic plate analysis. However, research of the general slab with arbitrary bending and torsional stiffness has seldom been reported. In this paper, authors carry out three-dimensional finite element analysis in order to obtain the bending and torsional stiffness of symmetrical circular voided slab as an example. The results prove that Huber's hypothesis is not always accurate. Then, we acquire the series solution of the orthotropic plates with arbitrary torsional stiffness under uniform load. The analysis is conducted under 3 cases boundary condition.