

画像解析を応用したゴム材料の 破断特性の把握とモデル化

吉田純司¹・阿部雅人²・LEWANGAMAGE Chamindaral Sujeeva³・藤野陽三⁴

¹正会員 博士(工) 山梨大学講師 工学部土木環境工学科 (〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11)

²正会員 Ph.D. 東京大学助教授 工学系研究科 社会基盤工学専攻
(〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1)

³学生員 修士(工) 東京大学 工学系研究科 社会基盤工学専攻 (同上)

⁴フェロー会員 Ph.D. 東京大学教授 工学系研究科 社会基盤工学専攻 (同上)

ゴム材料は、積層ゴム支承などの免震デバイスの主材料として広く応用されている。そのため、材料の破断特性を把握することは構造物全体の限界を知る上で重要な要素となる。本研究ではゴム材料の破断特性を把握し、破断を予測するためのモデルを構築することを目的とする。まずゴム材料の破断試験を行い、画像計測手法を利用して破断時の変形を詳細に把握する。次いで材料試験結果を基に、ゴム材料の破断を予測するためのモデルを提案する。さらに、本破壊基準を積層ゴム支承に適用した場合の妥当性を、画像計測結果ならびに有限要素モデルによるシミュレーション結果により検証する。最後に提案した破壊基準を応用し、積層ゴム支承の破断を評価するための解析解を提案する。

Key Words: *rubber material, failure criterion, image processing, strain invariant, design equation, laminated rubber bearing, finite element analysis*

1. はじめに

1995年兵庫県南部地震以降、構造物の耐震性能を向上させるために積層ゴム支承に代表される免震・制振デバイスを採用している建築構造物や橋梁が増加してきている^{1),2)}。積層ゴム支承は、微圧縮性を有するゴム材料と、鋼を交互に積層状に接着した構造部材である。この構造形式によりゴムの体積変形を拘束することで構造部を鉛直方向に剛に支持している。一方で、水平方向に対しては柔軟性を有し地震時における構造全体の損傷を支承部に局在化することを企図している。そのため、支承部に極度な大変位が生じ破断に至る場合には、他の意図しない箇所に損傷が生じる、あるいは構造物全体が倒壊する、等の可能性を有している。このことから、支承の破断特性を把握することは、免震構造物の限界を予測し信頼性・安全性の高い設計を行う上で重要な要素の一つとなる。実際の支承の使用を考えると、大地震時に単調な大変位が作用する、あるいは繰り返し载荷による低サイクル疲労が原因で破断に至ることが考えられる。既往の研究では、主に支承レベルにおいて地震時挙動を反映した载荷条件により破断実験を行い破断特性を検討^{3),4),5)}している。しかし、支承レベルでの実験であることから、

支承の形状や使用されているゴム材料が異なると破断特性も変化し、これらの実験結果を設計に応用することは困難となる。

現在の設計では、疲労の影響は考慮せず、経験的に支承レベルでの破断変位を定め、支承の限界性能を規定している⁶⁾。しかしこの限界値は、理論的な根拠がなく、信頼性が高いとはいえない。また、ゴム材料の耐力を検査することを目的として、個別に引張り破断試験を義務づけているものの、材料レベルでの破壊を予測するモデルがないことから、支承レベルでの設計と定量的に結びついていない。従ってこれらの影響を反映し合理的な設計を行うためには、材料レベルから支承の破断を予測可能なモデルが必要となる。

一方、高分子材料では、ガラスなど脆性的な材料について破壊に関する研究が行われているものの⁷⁾、延性に富むゴム、プラスチックなどに関してはほとんど検討されていない^{8),9)}。この主たる理由として、延性に富む材料は、大変形し数百%の大ひずみを生じるため、それを計測する手段が存在しなかったことが挙げられる。そのため、ゴム材料の破断限界をモデル化するためのデータが全く得られていないのが現状である。

そこで本研究では、画像解析を応用してゴムの破

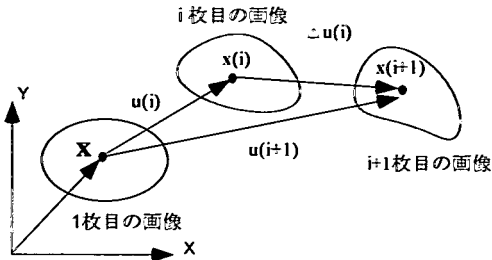


図-1 画像計測による物質点の追跡

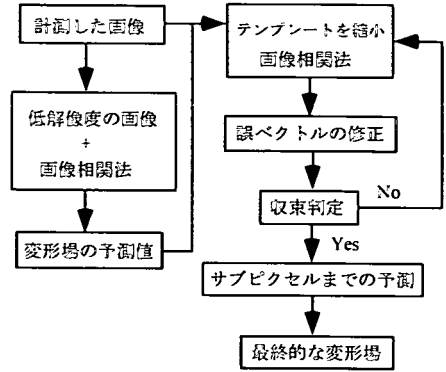


図-2 画像計測アルゴリズム

断特性を把握し、その結果を基に材料および積層ゴム支承の破壊を予測するためのモデルを構築することを目的とする。

まず、材料の変形を把握するために用いた画像解析手法¹⁰⁾の概要を説明する。特にここでは Lagrange 座標系での変形を対象として、連続の式に基づく計測結果の新たな補正手法を提案する。

次にゴムの破断特性を把握するために、引張り試験およびせん断試験を対象に単調載荷による破断試験を行う。ただし、本実験では、変位-荷重関係を得るのみならず、試験片の変形場を画像により詳細に把握している。

次いで、材料試験結果を基に、ゴム材料の破壊を予測するためのモデルを提案する。本モデルはひずみの不変量を用いたモデルであり、従来の引張り試験結果から同定可能である。

さらに積層ゴム支承の有限要素モデル¹¹⁾に提案した破壊基準を取り入れ、シミュレーションを行った結果と、支承の破断実験結果との比較を行い、本モデルの妥当性を検討する。

最後に著者らがこれまでに構築した積層ゴム支承の回転変形、鉛直変形に関する解析解¹¹⁾と、破壊基準を組み合わせて、積層ゴム支承の圧縮せん断変形におけるひずみ場を解析的に得、それを用いて支承の破断を簡易的に判定する式を提案する。

2. 画像解析を応用した計測手法

(1) マッチング法¹⁰⁾

本計測システムでは、計測する物質点を初期の画像において定義し、それを順次追跡することで、変位場を計測する。

具体的には、計測対象の変形過程を一連の画像に記録し、連続する2つの画像を比較することで画像

間における変形の増分 Δu を逐次計算していく。この物質点を追跡するプロセスの概念図を図-1 に示す。画像同士を比較する手法としては、相関係数を評価指標とする画像相関法を用いている。また、誤差の蓄積および誤ベクトルの出現を極力抑えるために、テンプレートのサイズを更新して繰り返し計算する手法、およびサブピクセルまで追跡する画像相関法を用いている。実際の解析において用いたアルゴリズムのチャートを図-2 に示す。本手法の妥当性および精度については、文献 10) を参照されたい。

(2) 連続の式を用いた計測誤差の補正

画像計測では、画素のサイズが有限であることから量子誤差の影響を受ける。そのため、計測対象が連続体であっても計測結果は、連続の式を満足しない。そこで以下では、計測結果を連続の式を満足するよう補正する手法を提案する。

質量保存則に従うと連続の式は、以下のようになる。

$$\phi(\rho, \dot{\mathbf{u}}) = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div}(\rho \dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (1)$$

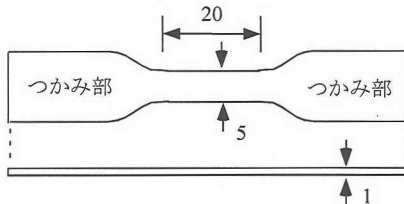
ここに ρ 、 \mathbf{x} 、 $\dot{\mathbf{u}}$ および t は、それぞれ質量密度、現時刻における物質点の位置ベクトル、速度ベクトルおよび現時刻である。ここで、ゴム材料はほぼ非圧縮とみなすことができるため、それを式(1)に導入すると連続の式は次式と等価になる。

$$J = 1 \quad (2)$$

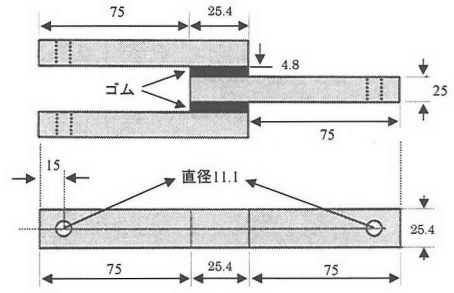
ここに J は変形勾配テンソル \mathbf{F} の determinant である。本研究では、式(2)の拘束条件式として、以下の関数 Φ を最小にする変位場を算出する。

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k)})^2 \quad (3)$$

ただし $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ 、 $\mathbf{u}^{(k)}$ は、それぞれ凸領域を形成する m 個の物質点における補正後および補正前の変位ベクトルである。これら m 個の物質点において式(3)を拘



(a) 引張り試験片



(b) せん断試験片

図-3 引張り試験片およびせん断試験片の概略図

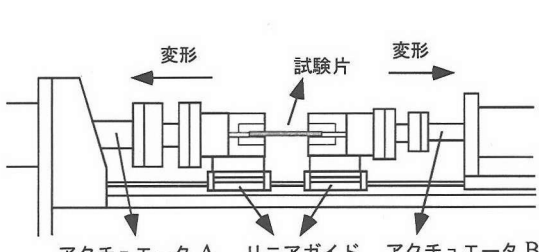


図-4 引張り試験で用いた载荷装置 (側面図)

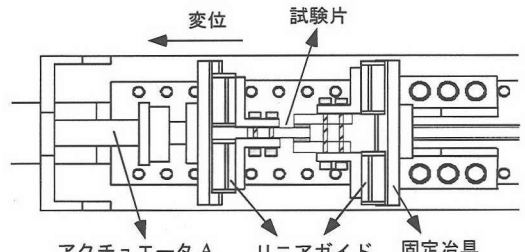


図-5 せん断試験で用いた载荷装置 (平面図)

束条件式として Lagrange の未定乗数法に導入し、新たな関数 Π を定義する。

$$\Pi = \Phi + \sum_{k=1}^m \mu_k (J^{(k)} - 1) \quad (4)$$

ただし μ_k は、Lagrange の未定乗数であり、 $J^{(k)}$ は各物質点における J の値である。変位場の補正においては、式(4)を停留する $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ を求めた。具体的な計算手法としては、変位 $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ について関数 Π の第一変分 $\delta\Pi$ を得、

$$\delta\Pi = 0 \quad (5)$$

を離散化する。離散化においては、 m 個の物質点に囲まれた領域における変位場を適当な関数により内挿する¹²⁾。ただし、式(5)をそのまま離散化すると非線形方程式となる。そこで式(5)の時間導関数 $\delta\dot{\Pi} = 0$ から領域ごとの増分方程式を導出する。次いで全領域について各要素レベルでの増分方程式を解き増分 $\Delta\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ を求める操作を、変位増分が十分小さくなるまで繰り返し計算し、変位 $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ を求める¹³⁾。

本手法は、主に流体の可視化に応用されている従来の手法¹⁴⁾と異なり、Lagrange 座標系において定義される物質点の変形を対象としている。また、各領域における補正式を各々解き、それを全体について収束計算を行っている。そのため、大規模な問題においても、数値的に安定して解を得ることが可能である。また、 m 個の物質点に囲まれた領域の個数を N とすると、文献 10) の手法では、計算時間が N^2 に

比例するのに対し、本手法では N に比例する。そのため、本手法の方が相対的に計算時間が短い。

3. ゴム材料の破断実験

ゴム材料の破断特性を把握し、モデル化するために、材料の破断試験を行う。本試験では従来のダンベル片による引張り試験に加え、積層ゴム支承の変形に似通ったせん断試験を行い、2つの異なる変形から材料の破断特性を検討する。

以下では、まず本研究におけるゴム材料の破断の定義を述べ、次いで破断試験の内容、結果および考察について記述する。

(1) 破断の定義

本研究において、ゴム材料の破断とは、変形あるいは荷重を与えた場合に最初にクラックが入る状態を示すこととする。

(2) 試験片

引張り試験およびせん断試験に用いた試験片の概略図をそれぞれ図-3に示す。

図-3(a)の引張り試験片は、JIS で規格されているダンベル状 3 号形試験片である¹⁵⁾。

一方、せん断試験は、現在の日本では行われていないものの AASHTO におけるゴムの検査試験とし

表-1 画像計測デバイスの性能

区分	アナログカメラ	CCD カメラ
空間解像度	フィルムサイズ：6×4.5[cm]	画素数：1300×1000 [pixel]
時間解像度 [frame/sec]	1	30
記録方法	フィルム	ハードディスク
デジタル化	フィルムスキャナー 解像度：4000[dpi]	----
画像ファイル形式	8bit グレースケール bitmap	8bit グレースケール bitmap

表-2 引張りおよびせん断における破断実験の条件

	引張り試験	せん断試験
载荷速度 [mm/sec]	1.33, 2.67, 5.33	0.024, 0.048, 0.24, 0.48
ひずみ速度 [%/sec]	6.65, 13.4, 28.4	0.50, 1.0, 5.0, 10
試験片个数	各载荷速度で2個以上	各载荷速度で2個以上
試験温度 [°C]	20~25	12~14

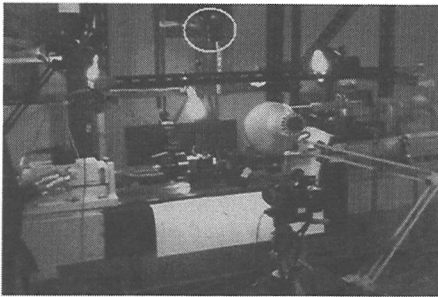


図-6 破断試験時の実験状況（図中白丸はカメラ）

て規格されているものであり¹⁶⁾、本研究においても同様の試験片を用いている。

(2) 実験装置

a) 载荷装置

引張り試験においては、破断に至る試験片の伸びが非常に大きく、1台のアクチュエータを利用しただけでは、ストロークが十分ではなかった。そこで、図-4のように2つのアクチュエータにより同一速度で両側から引張り変形を与える形式で試験を実施した。载荷装置では、アクチュエータの中心軸と平行にリニアガイドを設置し、それに試験片を固定する治具を取り付けている。そのため、材料試験において試験片に回転やねじれを与えることなく、試験片の中心軸に沿って荷重を载荷することが可能である。

一方、せん断試験では、図-5に示すような装置を用いて载荷を行った。本装置では、試験片にねじれ変形が生じないようにリニアガイドによりアクチュエータの中心軸の回転を拘束している。

図-5における2つのアクチュエータは、アクチュ

エータ A が荷重容量±20 [kN]、最大ストローク±100 [mm]のものであり、アクチュエータ B が荷重容量±10[kN]、最大ストローク±100[mm]である。

b) 計測デバイス

ゴム材料の破断に至る変形を精緻に把握するため、画像による計測を行う。後述するが比較的低速度での载荷においては、空間的な解像度が高いアナログカメラを用いる。また、高速度で载荷を行う場合には、時間分解能の高い CCD カメラを用いている。両デバイスの性能を表-1に示す。

(4) 実験方法

引張りおよびせん断試験においては、異なる载荷速度による変形を一定速度で与え、ゴムの破断特性を把握した。各試験における载荷速度、試験片の個数、ならびに試験時の温度を表-2に示す。

なお、実験においては、カメラを試験片の鉛直上方に設置し計測を行っている。試験時の様子を図-6に示す。

(5) 実験結果と考察

a) 引張り試験

引張り試験では、中心部分が主として変形し、ある限界まで変形すると亀裂が一瞬で進展し、破断に至る。そのため、亀裂の進展を計測することができず、破断時の変形は直前に得られた画像計測結果から判定した。

図-7に引張り試験において破断時に画像計測された引張りひずみ場を示す。また、図-8に破壊直前における破断位置での伸び比とひずみ速度の関係を示す。ただし図-8においてひずみ速度とは、伸び

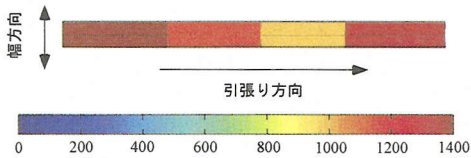


図-7 引張り試験において破断時に試験片中心部に生じた引張り方向の Green-Lagrange ひずみ[%]

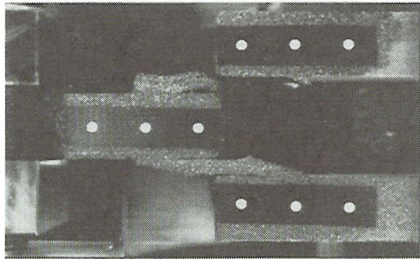


図-9 セン断試験片の破断

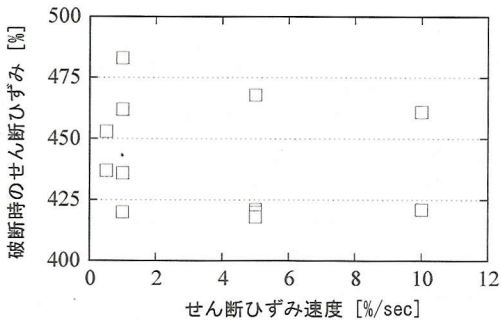


図-11 セン断試験における破断ひずみ

比の時間導関数を示す。図-7を見ると試験片中心部は、引張り方向においてひずみの分布にばらつきがあるものの、幅方向には概ね一様に変形している。なお、図-7において計測点の数が少ないのは、大変形下では試験片の幅が極端に小さくなり幅方向に含まれる画素数が少なくなることから、測定点を多く設置できないためである。

図-8をみると破断時の伸び比は、ひずみ速度の増加に対し破断時の伸び比が減少していることがわかる。しかし、その差は試験結果全体の平均値 4.95 前後に最大 5%程度と非常に小さい。また破断は、ダンベル試験片の幅が小さい中心部で発生したもの、必ずしも試験片の完全な中心で起こるとは限らず、試験片によりその場所は異なる結果となった。このことは、試験体の形状あるいは材料自身が実際

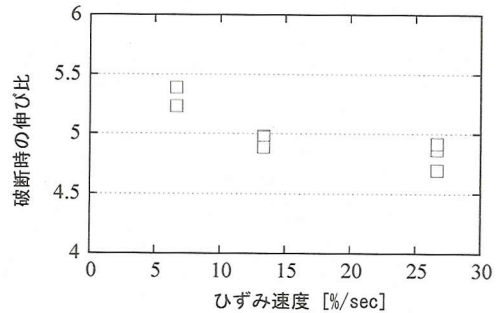


図-8 引張り試験における破断ひずみ

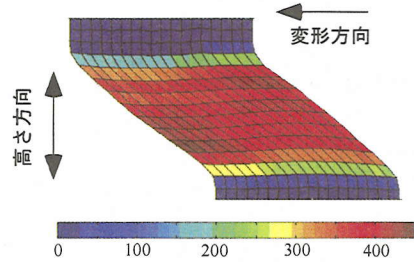


図-10 セン断試験において破断時に試験片に生じたせん断ひずみ場 (%)

の製作過程においてわずかな差を有しており、最も力学的に弱い部分から破断に至ったものと考えられる。

b) セン断試験

せん断試験においては、接着面付近に大きなひずみが生じその部分から亀裂が進展する。ただし、引張り試験と異なり、亀裂は少しずつ進展し最終的には、ゴム層内部に入り込んで完全な破壊に至る。図-9に試験片が完全に破壊に至った際の状態を示す。

また、図-10にせん断試験において破断時に画像計測されたひずみ場を、図-11に亀裂が入る直前における破断位置でのひずみを示す。

図-10を見ると上述したように上下端部に大きな変形があることがわかる。そのため、試験片に亀裂が最初に生じるのはこの部分となる。一方、図-11をみると破断位置でのひずみは、引張り試験の場合と同様に試験片により最大 10%程度のばらつきを有していることがわかる。また、破断ひずみは、粘塑性体や金属と異なり、必ずしも载荷速度の大きい場合に、小さいひずみで破断に至るとは限らないことがわかった。このことは、破断特性のひずみ速度への依存性がほとんどないことを示している。

以上の結果より、ゴム材料の破断は、速度に対する依存性が軽微であり、また試験片によりばらつきが存在することがわかった。以下に示す破壊基準の構築においては、この影響を考慮して行う。

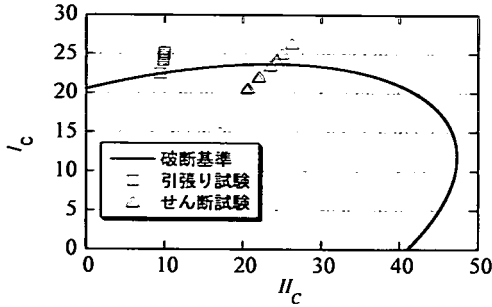


図-12 破壊基準曲線と試験結果の比較

4. ゴム材料の破断特性のモデル化

(1) ゴム材料の破壊基準

a) 破壊基準

ここでは本文3節で述べたゴム材料の破断試験結果を基にゴム材料の破壊基準を構築する。以下では、ゴムに現れる破断が等方性であることを仮定してモデル化を行う。

まず、実験結果より破断は、载荷ひずみ速度に対する依存性がない。また、破断を単調な変形により定義していることから、過去に経験した応力やひずみは破断に影響しないものとみなすことができる。このことから破断は破断時の変形量に依存するものであると仮定する。このとき破壊基準は以下のような右 Cauchy-Green テンソルの不変量の関数として表現することができる¹⁷⁾。

$$W_d(I_c, II_c, III_c) \leq A_f \quad (6)$$

ただし I_c , II_c および III_c は、それぞれ右 Cauchy-Green テンソルの第1, 第2および第3不変量である。また、式(6)右辺の A_f は、個々の材料試験から決定される材料定数である。さらに既往の载荷実験結果から、積層ゴム支承などが高圧縮荷重下においても、ゴム層内部で破断に至らないことを考慮して、ゴム材料の破断は、実用上圧力に依存しないものとする。このとき式(6)は圧力に関連する III_c と独立したものとなる。さらに式(6)の W_d をできる限り簡潔に表現するために、 I_c および II_c の多項式に限定し、次数の小さい項の組み合わせから実験結果と一致するように選択した。具体的な破壊基準は、以下に示すようなものである。

$$W_d = (I_c - 3)^2 + (II_c - 3)^2 - (I_c - 3)(II_c - 3) \leq A_f^2 \quad (7)$$

b) 材料試験における破断の判定

次いで式(7)を材料試験でのひずみ場に適用し、引張り状態および単純せん断状態での破断を判定する式を導出する。まず、引張り試験のひずみ場^{17),18)}

に式(9)を適用すると破壊基準は以下のように記述できる。

$$W_d = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 4 \leq A_f^2 \quad (8)$$

ただし λ は引張り方向の伸び比である。引張り変形から破断に至る基準を判定するための定数 A_f は、画像計測から得られた伸び比を式(8)に代入して求めた。

一方、単純せん断変形におけるひずみ場^{17),18)}を式(7)に代入すると、破壊基準は以下のような簡潔な式で記述できる。

$$W_d = \gamma^4 \leq A_f^2 \quad (9)$$

ただし γ は水平方向の変形量を試験片の高さで除した値であり、本研究ではこれをせん断ひずみと呼ぶことにする。なお、材料試験においては破断に至る水平方向の変位が非常に大きく、実際に破断が起こる端部において変形が単純せん断変形により精度よく近似できるとは言い難い。このことは図-10に示すせん断変形からもわかる。

本研究では、単純せん断試験におけるひずみ場を平面ひずみ場と考えた。平面ひずみ場において、右 Cauchy - Green テンソルは、以下のように記述できる。

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

せん断試験結果においては、上式における C_{ij} ($i, j=1, 2$) を画像計測した変位場から算式(7)より W_d を得、それを基に破断に至る最小の A_f の値を算出した。

c) 破壊基準の妥当性

図-12に提案した破壊基準において等号が成立する場合の曲線を、 I_c および II_c に対して図示したものの、ならびに各材料試験において式(8)および式(10)より得られた破断時の $\sqrt{W_d}$ の値を示す。ただし、材料が破断に至るひずみ量は、前述したようにばらつきがあり、試験結果から得られる A_f の値は $17.1 \leq A_f \leq 22.8$ のように一定の幅を有する。ここでは A_f の値として、平均値 20.5 を用いている。図-12をみると、破断曲面はせん断試験結果から得られたものであるが、引張り試験における破断時の $\sqrt{W_d}$ の値も曲面に近いところにあることがわかる。

ただし、現段階においては、引張り試験およびせん断試験の結果のみを対象としており、ここで提案したモデルを検証するための実験データが十分とはいえない。今後、一般2軸引張り試験等を実施し、多軸変形状態で破壊に至る場合について、本モデルの妥当性を検討していく予定である。

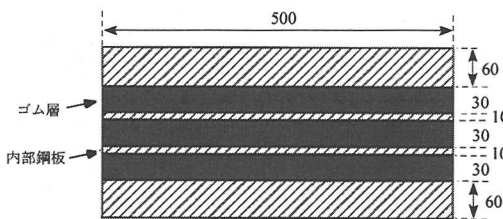


図-13 破壊実験の対象とした積層ゴム支承の断面図

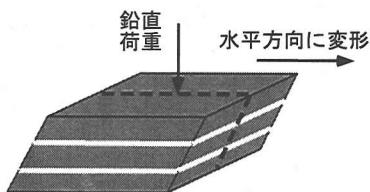


図-14 積層ゴム支承の変形

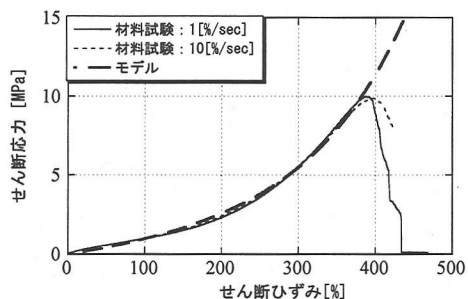


図-15 せん断試験結果と、構成則による解析結果の比較

(2) 積層ゴム支承の破断実験結果との比較

前述したようにゴム材料は、免震・制振デバイスとして積層ゴム支承に広く利用されている。ここでは、提案したモデルを積層ゴム支承に適用した場合の妥当性を検証する。具体的には積層ゴム支承の破断実験を行い、実験結果と有限要素モデルを用いた解析結果を比較して、提案した破壊基準の妥当性を検討した。

a) 積層ゴム支承の破断実験

本実験において対象とした支承は、図-13に示すように平面寸法 500×500 の矩形断面を有する積層ゴム支承である。支承の主な諸元を表-3に示す。この積層ゴム支承で用いている天然ゴム材料は、本文3節で述べた材料の破断実験で用いているものと同配合のものである。

载荷実験においては、まず、鉛直荷重を 1471.5 [kN] (面圧 5.88 [MPa])に相当を準静的に加え、その後、水平変形を 1 [mm/sec]の一定速度で支承が破断するまで単調荷重した。

表-3 破断実験に用いた積層ゴム支承の諸元

ゴム材料	天然ゴム
せん断弾性係数 [MPa]	0.98
平面寸法 [mm]	500×500
ゴム層厚 [mm]	30
ゴム層数	3
内部鋼板厚 [mm]	10
内部鋼板の材料種別	SS400
被覆ゴム	なし

表-4 有限要素解析での要素分割

平面方向の要素数	14×7
ゴム層の厚さ方向の要素数	7
鋼板の厚さ方向の要素数	1
総要素数	2254
総自由度	10698

表-5 ゴム材料の構成則に用いた材料定数

c_1 [N/mm ²]	2.90×10^{-1}
c_2 [N/mm ²]	6.00×10^{-4}
c_3 [N/mm ²]	1.75×10^{-1}
c_4 [N/mm ²]	1.00
c_5	8.00×10^{-2}
n	1.45
m	8.50×10^{-1}
K	3.03

計測は、変位計により支承の水平変位、鉛直変位を計測した。また、破断時の局所的な変形を把握するため、支承の側面から表-1に示したアナログカメラにより画像計測を行った。

b) 有限要素解析

ここでは、上述した支承レベルでの破断実験結果と、提案した破壊基準を用いた数値計算結果を比較することで、本破壊基準の妥当性を検証する。

具体的には、式(7)を著者らが構築した積層ゴム支承の有限要素モデル¹¹⁾に組み込み、実験と同一条件の解析を行って支承の破断を数値計算により予測した。ただし支承の変形は、図-14の点線に示すように、せん断変形と直角方向において対称になる。そこで本研究では、1/2部分のみモデル化し、表-4に示す要素分割で解析を行った。要素は、ゴム材料に変位節点8、圧力節点1の6面体混合型要素を、鋼に変位節点8の6面体要素を用いている。また、鋼は弾塑性体としてモデル化し、種別がSS400であることから文献11)に示した材料定数を用いている。

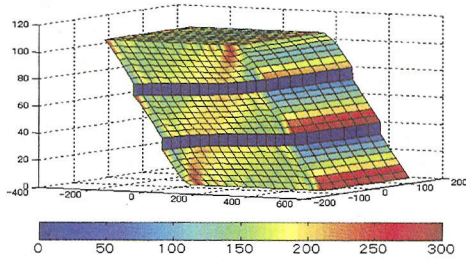


図-16 有限要素解析による積層ゴム支承の破断時における W_d の値

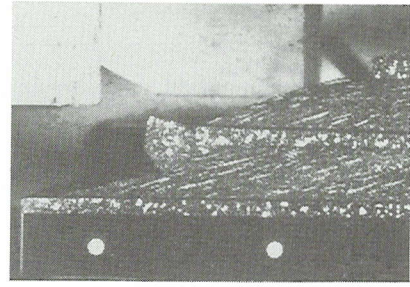


図-17 積層ゴム支承の載荷実験における破断時の状態

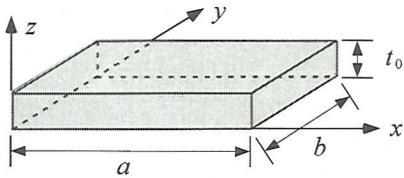


図-18 対象とするゴム層の初期形状

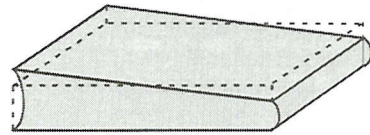


図-19 ゴム層に生じる回転変形

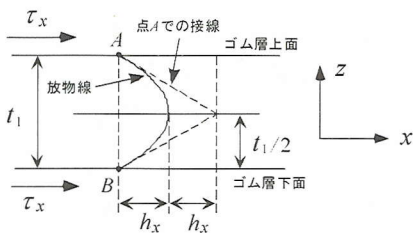


図-20 ゴム層の上下端面に生じるせん断変形

一方、ゴム材料は、以下のようなエネルギー密度関数 W を有する超弾性体としてモデル化した。

$$W = c_1 [1 - \exp\{-c_2(I_C - 3)\}] + c_1(I_C - 3) +$$

$$c_2(I_C - 3)^K + \frac{c_3}{n+1}(I_C - 3)^{n+1}(I_C - 3)^{-m} \quad (11)$$

ただし c_i ($i=1,2,3,4,5$), K , n および m は材料定数である。式(11)のひずみエネルギー密度関数は、微小ひずみ領域から破断に至る大ひずみ領域まで再現できるように、既往のモデル¹⁹⁾を拡張したものである。式(11)に含まれる材料定数は、破断実験で得られた応力-ひずみ関係と一致するように同定した。具体的な材料定数を表-5に示す。また、表-5の材料定数を用いた場合のモデルによる解析結果と、材料試験結果との比較を図-15に示す。

c) 実験結果との比較

図-16に破断時の水平変位 288 [mm] を積層ゴム支承に与えた場合のシミュレーション結果を示す。ただし、図中の色は、式(7)の W_d の値を示している。また、図-17に支承の破断時の様子を示す。図-16、

図-17をみると、実際に実験で破断している箇所において W_d が最大となっていることがわかる。その場所においては、 $\sqrt{W_d} = 17.3$ であり、この値は材料試験結果でのばらつき、 $17.1 \leq A_r \leq 22.4$ を考慮すると、下限値に近い値ではあるものの範囲内に入っている。

5. 積層ゴム支承の破断に関する解析解

(1) 複合変形のひずみ場

a) 鉛直および回転変形におけるひずみ

図-18のような高さ t_0 、平面寸法 $a \times b$ のゴム層を考える。著者らは、このゴム層に一定の鉛直変形 Δz が生じる場合の圧力場が以下のような解析解で表現できることを示した¹¹⁾。

$$p_C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\gamma_n^2} \left\{ \frac{\sinh \gamma_n y + \sinh \gamma_n (b-y)}{\sinh \gamma_n b} - 1 \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (12)$$

ここに

$$q_n = -\frac{24G}{n\pi t_0^3} (1 - \cos n\pi) \Delta z \quad (13a)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{3G}{\chi t_0^2}} \quad (13b)$$

である。上式において G はゴムのせん断弾性係数、 χ は圧力と体積変化率 J を以下のように関連付ける定数である。

$$-\frac{p_C}{2} = 2\chi(J-1) \quad (14)$$

一方、支承に図-19のような回転変形 θ_R が生じる

場合には、ゴム層内の圧力場 p_R は、次のように近似できる。

$$p_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\gamma_n^2} \left\{ \frac{\sinh \gamma_n y + \sinh \gamma_n (b-y)}{\sinh \gamma_n b} - 1 \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (15)$$

ここに

$$q_n = -\frac{a\beta}{n\pi} (1 + \cos n\pi) \quad (16a)$$

$$\beta = -\frac{12G}{t_0^3} \tan \theta_R \cong -\frac{12G}{t_0^3} \theta_R \quad (16b)$$

以上のような圧力場が生じる場合において、ゴム層は鉛直方向に放物線形状に変形し、ゴム層の上下端面に図-20のようなせん断変形が生じる。このとき、力の釣り合いから変形と圧力場には以下のような関係が成立する。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -8h_x \frac{G}{t_1^2} \quad (17a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -8h_y \frac{G}{t_1^2} \quad (17b)$$

上式に式(12)あるいは式(15)の圧力場を用いると、鉛直変形ならびに回転変形において、端面に生じるせん断変形場を求めることができる。

b) 圧縮変形とせん断変形によるひずみ

ゴム層が、鉛直方向に変形を受けると、せん断ひずみを生じる。式(17)および図-20より、ゴム層が鉛直に変形することにより生じる x 方向のせん断ひずみ γ_{α} は、上下の端面において最大となり

$$\gamma_{\alpha} = \frac{4h_x}{t_1} \cong -\frac{t_0}{2G} \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (18)$$

となる。

一方、 x 方向にせん断変位 u を受けると支承に生じるせん断ひずみ γ_s は、ゴム層の変形を単純せん断変形して近似すると

$$\gamma_s = \frac{u}{Nt_0} \quad (19)$$

を得る。ただし N はゴム層数、 t_0 はゴム層1層あたりの厚さである。ここに式(19)の γ_s は、材料中において一定となるが、式(18)の γ_{α} は水平座標 (x, y) の関数であり、その絶対値は $(0, b/2)$ および $(a, b/2)$ で最大となる。

c) 回転変形とせん断変形によるひずみ

次いで回転変形とせん断変形が同時に起こる場合を考える。ただし回転変形は、 y 軸と平行な軸回りに生じ、せん断変形は x 方向に変位 u だけせん断変形している場合を考える。

回転変形に生じる x 方向のせん断ひずみ γ_{α} は、式(20)と同様に

$$\gamma_{\alpha} = \frac{4h_x}{t_1} \cong -\frac{t_0}{2G} \frac{\partial p_R}{\partial x} \quad (20)$$

となる。一方、せん断変形については、式(19)を用いる。

(2) 破断を予測するための解析解

上述した複合変形において求めたせん断ひずみを提案した破壊基準に適用し、破断を判定するための簡易式を構築する。ただし、ここでは各変形から得られるせん断ひずみは、連成せず重ね合わせることもできるものと仮定する。また、せん断変位 u は、正の値としても一般性を失わないため $u \geq 0$ とする。

a) 圧縮変形とせん断変形を受ける場合の解析解

圧縮変形とせん断変形を同時に受ける場合には、式(20)および式(19)を式(9)に代入し、破断が最も起こりやすい場合を考慮すると、

$$\max_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} \{\gamma_s + \gamma_c(x, y)\}^4 = \{\gamma_s + \gamma_c|_{x=0, y=b/2}\}^4 \leq A_F^2 \quad (21)$$

を得る。ここに

$$\gamma_c|_{x=0, y=b/2} = \frac{12F_z^{(B)}}{at_0^2} \left(\frac{C}{C_c} \right) \quad (22a)$$

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\zeta_n^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \zeta_n b/2} \right) \quad (22b)$$

$$C_c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{96Ga}{t_0^3 \{(2n-1)\zeta_n \pi\}^2} \left\{ b - \frac{2(1+e^{-2\zeta_n b}) - 4e^{-\zeta_n b}}{\zeta_n(1-e^{-2\zeta_n b})} \right\} \quad (22c)$$

$$\zeta_n = \sqrt{\left\{ \frac{(2n-1)\pi}{a} \right\}^2 + \frac{3G}{\chi t_0^2}} \quad (22d)$$

である。

b) 圧縮変形とせん断変形を受ける場合の解析解

回転変形と圧縮変形を同時にうける場合には、式(21)と同様の導出方法により、

$$\max_{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b} \{\gamma_s + \gamma_r(x, y)\}^4 = \{\gamma_s + |\gamma_r|_{x=0, y=b/2}\}^4 \leq A_F^2 \quad (23)$$

ただし、

$$|\gamma_r|_{x=0, y=b/2} = \frac{6M_R^{(B)}}{t_0^2} \left(\frac{C'}{C_R} \right) \quad (24a)$$

$$C' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\eta_n^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh \eta_n b/2} \right) \quad (24b)$$

$$C_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24Ga^3}{t_0^3 (2n\pi\eta_n)^2} \left\{ b - \frac{2(1+e^{-2\eta_n b}) - 4e^{-\eta_n b}}{\eta_n(1-e^{-2\eta_n b})} \right\} \quad (24c)$$

$$\eta_n = \sqrt{\left\{ \frac{2n\pi}{a} \right\}^2 + \frac{3G}{\chi t_0^2}} \quad (24d)$$

$$M_R^{(B)} = C_R \frac{\theta_R^{(B)}}{N} \quad (24e)$$

である。

(3) 実験結果および既往の設計式との比較

上述した破断に関する式(21)の妥当性を検討するために、前述した積層ゴム支承の破断実験結果、および既往の設計式との比較を行った。

a) 支承の破断に関する既往の設計式

既往の設計式としては、文献 20) における「局所せん断ひずみの照査」の式を用いる。具体的には、以下のようなものである。

$$\bar{\gamma}_S + \bar{\gamma}_C + \bar{\gamma}_R \leq \frac{\bar{\gamma}_U}{f_S} \quad (25)$$

ここに $\bar{\gamma}_U$ 、 f_S は、それぞれゴムの破断ひずみ、および安全率である。また、 $\bar{\gamma}_S$ 、 $\bar{\gamma}_C$ および $\bar{\gamma}_R$ は、それぞれ水平変形によるせん断ひずみ、鉛直変形によるせん断ひずみ、および回転変形によるせん断ひずみである。 $\bar{\gamma}_S$ 、 $\bar{\gamma}_C$ については次式で与えられる。

$$\bar{\gamma}_S = \frac{u}{Nl_0} \quad (26a)$$

$$\bar{\gamma}_C = K_C S \frac{\delta_V}{Nl_0} \quad (26b)$$

ただし u 、 δ_V はそれぞれ支承の水平変位および鉛直変位、 S は 1 次形状係数、また、 K_C は支承の平面形状に関する定数で矩形断面の場合には 8.5 である。

ここでは、実支承での破断を対象としていることから $f_S = 1.0$ とし、支承に生じる水平変位 u として載荷実験で与えた水平変位を用いた。また、鉛直変位 δ_V としては、載荷実験で与えた鉛直荷重 F_V を用いて次式²⁰⁾ から算出した。

$$\delta_V = \frac{F_V}{K_V} \quad (27)$$

ただし

$$K_V = \frac{A_R E_A}{Nl_0} \quad (28a)$$

$$E_A = (3 + 6.58S^2)G \quad (28b)$$

ここに A_R は水平変位 u での有効支圧面積である。

なお、支承の破断実験においては、ゴム層の曲げ変形の影響により、中間鋼板にわずかながら回転変形も併せて生じている。しかし、この回転変形は、実験において陽な形で与えたものではなく、各層においてその値も異なることから、式(25)を用いるにあたり、ゴム層の曲げによる回転変形の影響は考慮せず、 $\bar{\gamma}_R = 0$ とおく。同様に式(21)においても回転変形の影響は考慮していない。

b) 比較結果と考察

まず、式(26)、式(27)を用いて既往の設計式における $\bar{\gamma}_S$ 、 $\bar{\gamma}_C$ を計算するとそれぞれ 3.20、4.28 であり、その結果、式(25)の左辺は 7.48 となる。特に鉛直変形によるせん断ひずみの割合が大きいのは、対象と

した積層ゴム支承の 1 次形状係数が比較的大きいためと考えられる。一方、式(25)右辺は、文献 20) より $\bar{\gamma}_U = 5.00$ となっている。このことから、ここで対象とした支承については、既往の設計式が破壊ひずみを約 1.5 倍過大に評価していることになる。なお、実際の設計においては、地震時の照査において安全率を $f_S = 1.2$ とすることから、さらに過大評価していることになる。

次いで、破断時の変位を式(21)の左辺に代入すると、式(21)を満足する最小の A_F は 18.4 となる。一方、ゴム材料の破断実験での結果から求めた A_F の値は、 $17.1 \leq A_F \leq 22.8$ である。このことから A_F のばらつきの範囲を考慮すると、式(21)は材料試験結果の範囲内に入っており、支承の破断を説明できていることがわかる。

今後、異なる形状およびサイズを有する支承や、他のゴム材料を用いた支承にについても、本式の妥当性を異なる検討する予定である。

式(23)については、既往の実験結果がないため、現在のところその妥当性について検討していない。支承の回転変形に関する載荷実験は実施自体が非常に困難であることから有限要素モデルなどを用いて解析解と比較検討することを考えている。

6. まとめ

本研究では、画像解析を応用してゴム材料の破断特性を把握し、材料および積層ゴム支承の破断を予測するためのモデルを構築することを目的とした。得られた知見は、以下のとおりである。

- 1) 単軸引張り試験およびせん断試験を行い、ゴム材料の破断特性を把握した。その結果、ゴム材料の破断特性は速度依存性が非常に小さいこと、および試験片により最大 10[%]程度のばらつきを有することがわかった。
- 2) 材料試験結果を基に、ゴム材料の破断を予測するためのモデルを提案した。本モデルはひずみの不変量をベースとしたモデルであり、破断時のひずみ量のばらつきを考慮すると、ここで対象とした天然ゴム材料のせん断および引張り変形については、材料試験結果を説明できることがわかった。また、含まれる材料定数が 1 つであるため、引張り試験結果のみを用いることでモデルを利用することが可能である。
- 3) 積層ゴム支承の破断実験結果と、提案した破壊基準を用いた有限要素モデルに取り入れた解析

結果を比較した。その結果、提案した破壊基準により、対象とした支承については破断を予測できることがわかった。

- 4) 積層ゴム支承の変形に関する既往の解析解と、提案した破壊基準とを組み合わせ、支承の破断を評価するための式を構築した。本式と支承の破断実験結果とを比較したところ対象とした支承については破断を予測できることがわかった。

以上のように本研究では、天然ゴムを対象として材料の破断特性を把握し、それを予測するためのモデルを提案した。また、それを設計に応用するための解析解を提案した。これらの結果は、積層ゴム支承の限界性能を合理的に予測する上で有用なものである。今後、他のゴム材料についても同様の検討を行い、ここで提案したモデルの妥当性を検討していくつもりである。

謝辞：材料の破断試験に用いた試験体の設計・製作ならびに積層ゴム支承の破断実験では、日本鑄造（株）の森重行雄氏に協力して頂きました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三: 兵庫県南部地震における阪神高速松の浜免震橋の地震時挙動, 土木学会論文集, No.626/I-48, pp.37-50, 1999.7.
- 2) R.I.スキナー, W.H.ロビンソン, G.H.マックベリー著, 川島一彦, 北川良和監訳: 免震設計入門, 鹿島出版会, 1996.
- 3) 藤田隆史, 池永雅良, 下田郁夫: 鉛プラグ内蔵型積層ゴムの履歴復元力特性と破断限界に関する実験的研究, 日本機械学会論文集 (C編), 57巻 533号, pp.76-81, 1991.
- 4) 藤田隆史, 藤田聡, 鈴木重信, 芹沢利和: 建物免震用の積層ゴム支承に関する実験的研究 (第3報, 100トン用積層ゴムの破断実験, 日本機械学会論文集 (C編), 54巻 507号, 1988.
- 5) 多田英之, 多田羅史郎, 森田健二: 実大 Isolator に関する実験研究, 日本建築学会九州支部研究報告第26号, pp.137-140, 1982.
- 6) 社団法人 日本道路協会: 道路橋示方書 (V耐震設計編)・同解説, 丸善, 1996.
- 7) Kausch, H.H.: *Polymer fracture*; 2nd revised ed, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, Germany, 1987.
- 8) Treloar, L.R.G.: *The physics of rubber elasticity*; 3rd ed, Larendon press, Oxford, 1975.
- 9) Pidaparti, R.M.V., Yang, H.T.Y. and Soedel, W.: Modeling and Fracture Prediction of Single Ply Cord-Rubber Composites, *Journal of Composite Materials*, Vol.26, No.2, pp.152-170, 1992.
- 10) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三, Lewangamage, C.S.: 画像解析を利用した連続体の変形場の計測手法, 土木学会論文集, No.710/I-60, pp.165-179, 2002.
- 11) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三: 高減衰積層ゴム支承の3次元有限要素解析法, 土木学会論文集, No.717/I-61, pp.37-52, 2002.
- 12) Bathe, K.J.: *Finite element procedures*, Prentice-Hall, 1996.
- 13) Press, H.W., Teukolsky, A.S., Vetterling, T.W. and Flannery, P.B., 丹慶勝市, 奥村晴彦, 佐藤俊郎, 小林誠訳: *Numerical Recipes in C* [日本語版], 技術評論社, 1994.
- 14) Raffelt, M., Willert, C. and Kompenhans, J.: *Particle Image Velocimetry*, Springer-Verlag, 1998.
- 15) 日本工業標準調査会: 加硫ゴム物理試験方法, JIS -K-6301, 1983.
- 16) AASHTO: *Guide Specification for Seismic Isolation Design*, Washington DC, 1999.
- 17) 久田俊明: 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎, 丸善, 1992.
- 18) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三: 高減衰ゴム材料の構成則, 土木学会論文集, No.710/I-60, pp.209-224, 2002.
- 19) 山下義裕, 川端季雄: 補強ゴムのひずみエネルギー密度関数の近似式, 日本ゴム協会誌, 第65巻, 第9号, pp.517-528, 1992.
- 20) 建設省: 道路橋の免震設計法マニュアル (案), (財)土木研究センター, 1992.

(2002. 3. 22 受付)

FAILURE BEHAVIORS OF RUBBER MATERIAL AND THEIR MODELING

Junji YOSHIDA, Masato ABE, LEWANGAMAGE Chamindaral Sujeewa and Yozo FUJINO

Mathematical models of the failure behaviors of a rubber material and the laminated rubber bearing are studied. At first, the mechanical behaviors of rubber failure are investigated through shear and tension experiments of the material. In these experiments, an image processing is utilized to trace the deformation field of the specimens accurately. Then, based on the experimental results, a failure criterion is proposed and it is verified in comparison with the results of the failure experiment of a laminated rubber bearing. Finally, utilizing the proposed failure criterion, design equation for the failure of laminated rubber bearing is proposed. This equation also shows good agreement with the experimental result of a bearing.